



UNIVERSITAT DE VALÈNCIA

Facultat de Magisteri

Departamento de Didáctica de la Matemática

**Programa de Doctorado en Didácticas Específicas
(Especialidad de Didáctica de las Matemáticas)**

**Estudio longitudinal del aprendizaje del álgebra
temprana en Educación Primaria. Identificación de
perfiles en estudiantes ordinarios y con altas
capacidades matemáticas**

TESIS DOCTORAL

Presentada por:

Eva Arbona Picot

Dirigida por:

Dra. María José Beltrán Meneu

Dr. Ángel Gutiérrez Rodríguez

Valencia, enero de 2024



El Dr. D. Ángel Gutiérrez Rodríguez, profesor del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universitat de València, y la Dra. Dña. María José Beltrán Meneu, profesora del Departamento de Matemáticas de la Universitat Jaume I,

HACEMOS CONSTAR

- Que la presente memoria, titulada *Estudio longitudinal del aprendizaje del álgebra temprana en Educación Primaria. Identificación de perfiles en estudiantes ordinarios y con altas capacidades matemáticas*, ha sido realizada bajo nuestra dirección por Dña. EVA ARBONA PICOT en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universitat de València y constituye su tesis para optar al Grado de Doctora por la Universitat de València.

- Que esta memoria cumple los requisitos exigidos por la legislación vigente, por lo que autorizamos su presentación y defensa en la Universitat de València.

En Valencia, a 8 de enero de 2024.

Fdo.: Dr. Ángel Gutiérrez Rodríguez.

Fdo.: Dra. María José Beltrán Meneu

Agradecimientos

Quiero empezar esta memoria dando las gracias a todas aquellas personas que me han acompañado durante estos años: su apoyo, ayuda y aportaciones han sido esenciales para el desarrollo de este trabajo.

A mis directores, el Dr. Ángel Gutiérrez y la Dra. María José Beltrán-Meneu, por sus valiosos consejos, su plena disponibilidad, su ayuda incondicional, su comprensión y su cercanía. Gracias por la confianza que depositasteis en mí y vuestra guía en este aprendizaje.

A los docentes de Educación Primaria que han colaborado en esta investigación y a todos sus alumnos, que me abrieron las puertas de su clase y me permitieron desarrollar las secuencias de esta investigación y la recogida de datos.

A la asociación AVAST, por ofrecer un espacio de desarrollo a los estudiantes con altas capacidades y proporcionarme los medios para recoger los datos de esta investigación.

Al Dr. Ferdinand Rivera, por acogerme en la San Jose State University, compartir sus conocimientos y guiarme en el desarrollo de esta investigación.

A Daniel García-Costa, por aceptar el reto de diseñar y desarrollar la app GeoPattern para mejorar el desempeño de los estudiantes y facilitarme la recogida de datos en esta investigación.

Al departamento de Didáctica de la Matemática de la Universitat de València, por integrarme, guiarme e implicarme en todo tipo de proyectos durante esta etapa.

A Miriam, por ser mentora, amiga y confidente. Por acompañarme tanto en los momentos de agobio y negatividad como en los momentos de risa y alegría.

A Ale, por su paciencia y su apoyo incondicional. Gracias por ayudarme a desconectar y recuperar fuerzas en los momentos más duros.

Por último, quiero dedicar este trabajo a mi familia, en especial a mi padre, por haber estado siempre a mi lado, apoyando mis decisiones y dándome la fuerza que necesitaba en los momentos más duros y difíciles.

Esta tesis doctoral ha sido realizada en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universitat de València, como parte de las actividades del Grupo de Investigación de la UV *Grupo de investigación en didáctica de la geometría y en enseñanza a estudiantes de altas capacidades matemáticas* (GIUV2013-095).

Las investigaciones realizadas en las sucesivas etapas de desarrollo de esta Tesis Doctoral han sido financiadas a través de las ayudas para contratos predoctorales GVPROMETEO2016-143 (Conselleria d'Educació, Investigació, Cultura i Esport de la Generalitat Valenciana) y FPU16/04513 (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte) y de una *Ayuda a la movilidad para Estancias breves y Traslados temporales* (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte). Además, han formado parte de los proyectos de investigación *Modelos de enseñanza y procesos de aprendizaje de las matemáticas: análisis multidimensional* (EDU2015-69731-R, MINECO/FEDER), *Modelos de enseñanza y procesos de aprendizaje de las matemáticas escolares* (GVPROMETEO2016-143, Conselleria d'Educació, Investigació, Cultura i Esport de la Generalitat Valenciana), *Modelos de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas: análisis racional y empírico* (EDU2017-84377-R, MINECO/FEDER) y *Aproximación multidimensional a la atención a estudiantes con alta capacidad matemática* (PID2020-117395RB-I00).

Abstract

Algebraic thinking is a key knowledge of the mathematical education that can help students to represent unknown numbers, operate with alphanumeric expressions and solve equations. Geometric pattern problems (gpp) have proved to be an appropriate context to introduce algebraic thinking in primary school students (Cooper and Warren, 2011; Radford, 2012; Callejo, García-Reche and Fernández, 2016). Furthermore, gpp have been described as a useful context to work with mathematically gifted students (Amit and Neria, 2008; Fritzlar and Karpinski-Siebold, 2012; Yildiz and Durmaz, 2021; Assmus and Fritzlar, 2022; Eraky, Leikin and Hadad, 2022; Erdogan and Gul, 2022), since these students need challenging problems.

The general objective of this research is *to explore ways of introducing algebra to mathematically gifted students and ordinary classroom students in 4th, 5th, and 6th grades of primary school, so that they can learn to generalize and express their generalizations verbally and through algebraic expressions.*

To this end, we have designed and implemented a variety of teaching sequences with different specific learning goals, to provide students with a progressive introduction to algebraic thinking through gpp. In this memory we present two longitudinal studies of two (5th to 6th) and three (4th to 6th) academic years of duration, with three class sessions per year, implemented with ordinary classroom students, and three one-session studies, implemented in an out-of-school workshop, with mathematically gifted students. The students worked in two environments: paper and pen and the GeoPattern app, specially designed and created for this research.

All students solved several gpp supported by instruction and introduction of algebraic concepts. For this matter, we established five different specific learning goals: i) to identify functional relationships and verbalize their generalizations; ii) to express generalizations through algebraic expressions; iii) to simplify algebraic expressions; iv) to reverse calculations; and v) to solve equations. We also designed five different types of gpp with different levels of complexity, aimed at reaching the specific learning goals. Provided the number of gpp compiled, we

present several criteria of complexity that have helped as group gpp with similar traits and compare students' behavior.

We have analyzed the students' ways of reasoning, as shown in their solution strategies and types of generalization (Radford, 2010). However, while analyzing students' responses, we found several strategies that, to our knowledge, were not gathered in the previous literature. This fact led us to elaborate a new theoretical framework adding the emergent strategies that we had observed to those described in the literature.

Once the students' responses to the geometric pattern problems were analyzed, we found that most of them tended to change their strategy through the different questions of the problems, so we decided to create several profiles of answers to the questions of generalization, application, and inversion. These profiles, in conjunction with the type of generalization used, helped us to evaluate the ordinary and mathematically gifted students' performance along the teaching experiment. The results of this analysis are organized into three sections linked to the learning goals of the teaching sequence: i) to identify and generalize functional relationships in gpp; ii) to express generalizations; and iii) to inverse operations and solve equations. In addition, these results helped us to highlight differences between ordinary and mathematically gifted students, such as the higher abilities of mathematically gifted students to generalize, to develop efficient solution strategies, and to invert processes.

ÍNDICE

1. Introducción	1
1.1. Contextualización de la investigación	1
1.2. Objetivos de la investigación	4
1.3. Descripción de los capítulos.....	5
 2. Revisión bibliográfica	 7
2.1. Altas capacidades	7
2.1.1. Altas capacidades matemáticas	11
2.1.1.1. Características	12
2.1.1.2. Identificación	14
2.1.1.3. Intervención educativa	17
2.2. Álgebra	19
2.2.1. Álgebra temprana	22
2.2.2. Pensamiento algebraico	23
2.2.2.1. Pensamiento funcional.....	25
2.3. Problemas de patrones geométricos.....	27
2.3.1. Tipos de cuestiones.....	29
2.3.2. Estrategias de resolución	32
2.3.3. Generalización	33
 3. Marco teórico	 35
3.1. Problemas de patrones geométricos.....	35

3.2. Variables de complejidad en problemas de patrones geométricos	38
3.3. Estrategias de resolución	39
3.3.1. Estrategias en cuestiones de relación directa	40
3.3.1.1. Tipos de análisis del patrón	40
3.3.1.2. Procedimiento de cálculo del valor de un término	41
3.3.2. Estrategias en cuestiones de relación inversa	47
3.4. Tipos de generalización	50
3.5. Características de estudiantes con altas capacidades matemáticas	54
4. Metodología	55
4.1. Metodología de la investigación	55
4.2. Diseño y realización de los experimentos	56
4.2.1. Preparación del experimento	56
4.2.1.1. Experimentos realizados	58
4.2.1.2. Batería de problemas	60
4.2.1.3. GeoPattern	61
4.2.2. Realización del experimento	69
4.2.2.1. Duración y sesiones	70
4.2.2.2. Recogida de datos	76
4.2.3. Análisis del experimento	77
4.2.3.1. Criterios de identificación de patrones comparables	78
4.2.3.2. Procedimiento de análisis de las respuestas	82
5. Análisis y resultados	84
5.1. Perfiles de los estudiantes	84
5.1.1. Perfiles de generalización	86
5.1.1.1. Perfil G1	88
5.1.1.2. Perfil G2	90
5.1.1.3. Perfil G3	91
5.1.1.4. Perfil G4	91
5.1.1.5. Perfil G5	93
5.1.1.6. Perfil G6	94
5.1.1.7. Perfil G7	95
5.1.2. Perfiles de aplicación	96
5.1.2.1. Perfil A1	98
5.1.2.2. Perfil A2	99

5.1.2.3. Perfil A3	99
5.1.2.4. Perfil A4	100
5.1.2.5. Perfil A5	100
5.1.2.6. Perfil A6	101
5.1.3. Perfiles de inversión	101
5.1.3.1. Perfil I1.....	103
5.1.3.2. Perfil I2.....	104
5.1.3.3. Perfil I3.....	105
5.1.3.4. Perfil I4.....	107
5.1.3.5. Perfil I5.....	108
5.1.3.6. Perfil I6.....	108
5.2. Análisis de los perfiles de los estudiantes	109
5.2.1. Estudios longitudinales	109
5.2.1.1. Estudio longitudinal en 4.º, 5.º y 6.º (L456).....	110
5.2.1.2. Estudio longitudinal en 5.º y 6.º (L56).....	152
5.2.2. Estudios con altas capacidades matemáticas	181
5.2.3. Comparativa de los estudios	212
6. Conclusions	275
6.1. Design and implementation of a teaching-learning sequence of geometric pattern problems	275
6.2. Identification of strategies and description of students' profiles	276
6.3. Assessment of students' performance along the longitudinal studies..	278
6.4. Characteristics of mathematically gifted students	280
6.5. Contributions of the study.....	282
6.6. Limitations of the study and future lines of work	283
7. Referencias bibliográficas	285
Anexo 1	303
Bolos	304
Caramelos	305
Clase	306
Cumpleaños 1	307
Cumpleaños 2	308

Dibujo	309
Edificios	310
Enredadera	311
Escalera	312
Familia	313
Gusano	314
Jardín	315
Magdalenas	316
Olimpiada 1	317
Olimpiada 2	318
Pantalón	319
Pared	320
Puerta	322
Robots	323
Supermercado	324
Urbanización	325
Anexo 2.....	327

1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo, realizamos una presentación del trabajo desarrollado en esta memoria, dividiendo el capítulo en tres secciones dedicadas, respectivamente, a la contextualización de la investigación, los objetivos de la investigación y la descripción de los diferentes capítulos que conforman la memoria.

1.1. Contextualización de la investigación

Esta investigación tiene como punto de partida el Trabajo de Fin de Máster (TFM) de la doctoranda (Arbona, 2016). En él, analizamos los procesos de aprendizaje involucrados en la iniciación al álgebra mediante problemas de patrones geométricos y las características que presentaba un estudiante de 9 años identificado como superdotado y con altas capacidades matemáticas¹ (aaccmm).

Tras finalizar la investigación del TFM, nos planteamos el interés de continuarla ampliando los objetivos y la muestra objeto de estudio. Para ello, decidimos iniciar otra investigación basada en el diseño de una nueva secuencia de enseñanza-aprendizaje centrada en la iniciación al álgebra mediante problemas² de patrones geométricos (ppg) que fuese implementada tanto en estudiantes³

¹ Aunque la literatura establece distintas definiciones, en esta memoria consideraremos como equivalentes los términos estudiantes con altas capacidades matemáticas y estudiantes con talento matemático.

² A pesar de los distintos significados que se les puede asignar a los términos tareas, actividades y problemas en el contexto de la enseñanza, en esta memoria los consideraremos sinónimos.

³ En este texto haremos uso del masculino genérico para hacer referencia indistintamente a estudiantes de género masculino y femenino.

ordinarios como estudiantes con aaccmm de los últimos cursos de Educación Primaria.

La investigación que presentamos en este documento trata de ampliar y mejorar el trabajo presentado en Arbona (2016), pero también dar respuesta a dos inquietudes: mejorar el desempeño de los estudiantes en álgebra e identificar las características que presentan los estudiantes con altas capacidades matemáticas en este contexto.

Por una parte, el álgebra juega un papel fundamental en la introducción de las letras como símbolos que representan números indeterminados o pertenecientes a conjuntos que tienen una propiedad común, la realización de operaciones con expresiones algebraicas y la resolución de ecuaciones lineales. No obstante, como indican Fritzlar y Karpinski-Siebold (2012), aunque la competencia algebraica es necesaria para tener éxito en las matemáticas en general, muchos estudiantes presentan dificultades, incluso aquellos que obtienen buenas calificaciones en las matemáticas de Educación Primaria.

Entre las diversas dificultades que presentan los estudiantes al enfrentarse al aprendizaje del álgebra, Banerjee y Subramaniam (2012) incluyen la falta de comprensión del significado de las letras y la falta de destreza manipulativa en las expresiones simbólicas o ecuaciones. Por su parte, Jupri, Drijvers y Van den Heuvel-Panhuizen (2015) distinguen cinco categorías de dificultades en el álgebra inicial:

- en la aplicación de operaciones aritméticas en expresiones algebraicas y numéricas,
- en la comprensión de la noción de variable,
- en el entendimiento de las expresiones algebraicas,
- en la comprensión de los distintos significados del signo igual,
- en la transformación de la situación de un problema real al mundo de las matemáticas.

Diversos investigadores sospechan que estas dificultades podrían deberse a deficiencias en la formación matemática recibida durante la enseñanza elemental, causadas principalmente por el excesivo énfasis en la operatoria al enseñar aritmética (Carraher y Schliemann, 2018). Por ello, la investigación en educación matemática plantea que es necesario empezar a abordar el álgebra durante la Educación Primaria, proporcionando distintos modos de acceso que le otorguen relevancia y significado.

Diversas investigaciones didácticas han mostrado que estudiantes de Primaria, incluso de los primeros cursos, pueden desarrollar formas de pensamiento algebraico mediante la resolución de ppg (Cooper y Warren, 2011; Radford, 2012; Callejo et al., 2016). Este hecho puede deberse a que los ppg ofrecen un contexto idóneo para explorar relaciones entre cantidades, expresar generalizaciones y representar estas relaciones y generalizaciones de distintos modos (Chua, 2009).

En relación con lo anterior, recientemente se ha implementado en España un nuevo currículum para la Educación Primaria (Ministerio de Educación y Formación Profesional, 2022). Entre las múltiples modificaciones que se han realizado, está la inclusión del estudio del álgebra temprana en el currículum del área de matemáticas a partir del “reconocimiento de patrones y las relaciones entre variables, la expresión de regularidades o la modelización de situaciones con expresiones simbólicas” (Ministerio de Educación y Formación Profesional, 2022, p. 24486).

Por otra parte, los estudiantes con aaccmm, generalmente, requieren problemas desafiantes para mantener su interés en las clases de matemáticas (Kennard, 2001). Para ellos, resultan especialmente interesantes las actividades matemáticas ricas (Piggott, 2008), ya que emplean una metodología de resolución de problemas y tienen una estructura que permite graduar la dificultad, adaptándose a las necesidades, conocimientos, capacidades e intereses de los estudiantes que forman parte de los grupos ordinarios de Primaria (Jaime y Gutiérrez, 2014). Autores como Krutetskii (1976), Greenes (1981), Miller (1990), Tourón et al. (1998) y Freiman (2006) han identificado distintas características que presentan los estudiantes con aaccmm.

Diversas investigaciones han descrito el contexto de los ppg como útil y práctico para el inicio del aprendizaje de contenidos algebraicos por los estudiantes con aaccmm (Amit y Neria, 2008; Fritzlar y Karpinski-Siebold, 2012; Yildiz y Durmaz, 2021; Assmus y Fritzlar, 2022; Eraky et al., 2022; Erdogan y Gul, 2022). No obstante, no existen muchas investigaciones referidas al estudio del álgebra temprana por estudiantes de Primaria con aaccmm, pese a la demanda por parte del profesorado, de materiales de clase y propuestas didácticas.

Para dar respuesta a estas inquietudes, hemos llevado a cabo dos estudios longitudinales en los cursos 4.º a 6.º de Primaria con estudiantes ordinarios y tres estudios con estudiantes con aaccmm de los cursos 3.º a 6.º de Educación Primaria.

Además, durante el trascurso de esta investigación hemos desarrollado la app *GeoPattern* para tabletas Android. Esta app permite la presentación y resolución de ppg al mismo tiempo que recoge todas las acciones realizadas por el estudiante en un fichero CSV exportable a Excel. Esta app permite obtener el trazado digital del procesamiento matemático que ha seguido el estudiante al resolver un ppg. Por este motivo, hemos utilizado dos entornos de resolución de ppg en esta investigación, basados en el uso de papel y bolígrafo y de la app *GeoPattern*, respectivamente.

1.2. Objetivos de la investigación

El **objetivo general** de esta investigación consiste en *explorar formas de iniciación al álgebra de estudiantes de 4.º, 5.º y 6.º de Educación Primaria, tanto ordinarios del grupo-clase como con altas capacidades matemáticas, con el fin de que aprendan a generalizar y lleguen a ser capaces de expresar sus generalizaciones verbalmente y a través del lenguaje algebraico.*

Existen muchas formas de iniciación al álgebra, pero, en esta investigación, hemos decidido centrarnos en el uso de problemas de patrones geométricos como instrumento para alcanzar nuestro objetivo general. Este hecho nos ha llevado a concretar dicho objetivo en cuatro **objetivos específicos**:

1. Diseñar y experimentar una secuencia de enseñanza-aprendizaje, basada en la resolución de problemas de patrones geométricos, que permita la iniciación al álgebra de los estudiantes.
2. Identificar y analizar las estrategias de resolución empleadas por estudiantes ordinarios de grupo-clase y estudiantes con altas capacidades matemáticas durante la implementación de la secuencia de enseñanza-aprendizaje diseñada, con el fin de describir los diversos perfiles de razonamiento utilizados por los estudiantes.
3. Comparar los perfiles empleados por estudiantes ordinarios de grupo-clase a lo largo de dos o tres cursos académicos en el contexto de un estudio longitudinal.
4. Aportar información que permita identificar características diferenciadoras, respecto a estudiantes ordinarios de grupo-clase, que manifiestan los estudiantes con altas capacidades matemáticas en el contexto de nuestra investigación.

1.3. Descripción de los capítulos

A continuación, presentamos una sinopsis del contenido que se puede encontrar en cada uno de los siete capítulos que compone esta memoria⁴.

En el capítulo 1 introducimos el contexto que enmarca la investigación de esta memoria junto con los objetivos general y específicos que queremos abordar, así como la descripción de los diferentes capítulos que conforman la memoria.

En el capítulo 2 presentamos una revisión bibliográfica, donde describimos y analizamos investigaciones previas relacionadas con las altas capacidades matemáticas, el álgebra temprana y los problemas de patrones geométricos.

En el capítulo 3 describimos el marco teórico de la investigación. En él, determinamos y caracterizamos los elementos y variables de los ppg, así como

⁴ Algunas partes de esta memoria han sido presentadas en publicaciones previas con las siguientes referencias: Arbona (2016), Arbona, García-Costa, Beltrán-Meneu y Gutiérrez (2018) y Arbona, Beltrán-Meneu y Gutiérrez (2021).

las estrategias y generalizaciones que emplean los estudiantes al resolverlos. También identificamos algunas de las características propias de estudiantes con aaccmm que son pertinentes para nuestra investigación.

En el capítulo 4 presentamos la metodología empleada en esta investigación. Está dividido en dos secciones, destinadas a describir la metodología cualitativa de la investigación y a detallar la información relativa a los sujetos participantes, los objetivos de aprendizaje, las sesiones y los instrumentos de recogida de datos de los experimentos realizados, así como los criterios de análisis que hemos empleado.

En el capítulo 5 mostramos el análisis de las respuestas de los estudiantes y los resultados de las experimentaciones realizadas. Para ello, describimos distintos tipos de perfiles de estudiantes, identificados a partir de sus respuestas, y comparamos los resultados de determinados problemas en los experimentos realizados con estudiantes ordinarios de grupo-clase y estudiantes con aaccmm.

En el capítulo 6 presentamos las conclusiones obtenidas en esta investigación en referencia a los objetivos planteados. Además, mencionamos las aportaciones novedosas de nuestra investigación, sus limitaciones y posibles líneas de investigación futura derivadas de la investigación.

El capítulo 7 contiene las referencias bibliográficas citadas en esta memoria.

Por último, incluimos dos anexos, en los que presentamos los ppg utilizados en el desarrollo de esta investigación y las plantillas de análisis de las respuestas de los estudiantes a estos problemas.

2. REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA

En este capítulo, presentamos una descripción y análisis de las publicaciones que hemos consultado relacionadas con este trabajo, dividiendo el capítulo en tres secciones dedicadas, respectivamente, a las altas capacidades matemáticas, al álgebra temprana y a los problemas de patrones geométricos.

2.1. Altas capacidades

Existen diversos términos que son utilizados para designar a los estudiantes que, debido a sus habilidades y capacidades, destacan por encima de la media. Entre los términos más utilizados, podemos encontrar *talentoso*, *superdotado* y *de altas capacidades*.

Para Aretxaga (2013) y Jaime y Gutiérrez (2014), el término *talentoso* hace referencia a los estudiantes que presentan capacidades o habilidades específicas propias de un área, ámbito, aspecto cognitivo o tipo de procesamiento. Aretxaga (2013) distingue diversos tipos de talento: académico, deportivo, artístico-figurativo, social, lógico, creativo, matemático y verbal. En cambio, el término *superdotado* se refiere a aquellos estudiantes que presentan una capacidad superior generalizada y, por tanto, destacan en todas las áreas o ámbitos (Aretxaga, 2013; Jaime y Gutiérrez, 2014). Además, la combinación de una capacidad superior en distintas áreas permite obtener un resultado no solo destacado cuantitativamente sino cualitativamente por su calidad (Ramírez, 2012). Por último, el término *altas capacidades* hace referencia a los estudiantes que “presentan un nivel de rendimiento intelectual superior en una amplia gama

de capacidades y aprenden con facilidad cualquier área o materia” (Torrego, 2011, pp. 13-14).

A lo largo de los años han aparecido diversos modelos teóricos que describen y tratan de explicar el fenómeno de las altas capacidades y la superdotación. Desarrollados desde el ámbito de la psicología, los modelos propuestos se pueden organizar en diversos tipos que entienden la inteligencia y la naturaleza de las altas capacidades de un modo distinto, centrándose en aspectos concretos que difieren de unos a otros. Por este motivo, varios autores han clasificado estos modelos teóricos según los elementos valorados (Arocas, Martínez y Martínez, 2009; Torrego, 2011; Aretxaga, 2013; Jaime y Gutiérrez, 2014):

- *Modelos basados en capacidades:* Atribuyen gran importancia a la inteligencia y sus diversas concepciones. Entre ellos destacan el Coeficiente Intelectual de Terman (1925) y la Teoría de las Inteligencias Múltiples de Gardner (1995).
- *Modelos cognitivos:* Identifican los procesos y estructuras cognitivas que son utilizados al llevar a cabo tareas de orden superior. El principal representante de estos modelos es Sternberg, que desarrolló la Teoría Triárquica de la Inteligencia (Sternberg, 1997), la Teoría Pentagonal Implícita y el Modelo WISC (Sabiduría, en inglés *Wisdom*, Inteligencia, Síntesis y Creatividad) (Torrego, 2011).
- *Modelos basados en el rendimiento:* Consideran que, además de la inteligencia, influyen otros aspectos en la obtención de un alto rendimiento. Los modelos más destacados son el Modelo de los Tres Anillos de Renzulli (1998) y el Modelo Diferenciado de Superdotación y Talento de Gagné (2000).
- *Modelos socioculturales:* Conceden una gran importancia al contexto social y cultural en que el individuo se desarrolla. Algunos ejemplos de modelos socioculturales son el Modelo de la Interdependencia Trídica de Mönks o el Modelo Psicosocial de Tannenbaum (Aretxaga, 2013).

Los modelos teóricos han permitido llevar a cabo la identificación de este tipo de estudiantes gracias a la descripción de sus características y ámbitos de influencia. Así pues, el proceso de identificación deberá ser multidimensional, empleando técnicas tanto cualitativas como cuantitativas, contextualizado, haciendo partícipes a todos los miembros de la comunidad escolar y familiar, y un proceso normalizado (Aretxaga, 2013).

Por una parte, las técnicas cualitativas permiten recoger información relativa a su desarrollo, intereses, aficiones y resultados académicos, entre otros, a través de las observaciones y opiniones tanto del propio alumno como de las personas que forman parte de su día a día, ya sea en el ámbito escolar o familiar. Las técnicas cualitativas más destacadas son los informes del profesorado, los informes de los padres o tutores legales, las nominaciones de los compañeros y los autoinformes.

Por otra parte, las técnicas cuantitativas pretenden valorar de forma objetiva las capacidades del estudiante. Benavides (2008) recoge un listado de los principales instrumentos cuantitativos:

- *Test de inteligencia y aptitud general:* Son un instrumento clásico y de alta fiabilidad para detectar estudiantes con altas capacidades. Entre los más utilizados encontramos el Test de Inteligencia de Stanford-Binet, las Escalas de Inteligencia de Wechsler y el Test de Matrices Progresivas de Raven.
- *Test de aptitudes específicas:* Sirven para medir el talento en un área de conocimiento o aptitud específica. Un ejemplo es el test de Aptitudes Mentales Primarias (PMA) de Thurstone.
- *Pruebas de rendimiento o basadas en el currículum:* Valoran el nivel competencial o de desempeño del estudiante en distintas áreas curriculares. Un ejemplo de test de rendimiento es el Stanford Diagnostic Mathematics Test.
- *Test de creatividad:* La creatividad puede ser medida a través del pensamiento divergente, por ejemplo, con el Test de Pensamiento

Creativo de Torrence (TTCT, en inglés), y con inventarios conductuales y actitudinales, por ejemplo, con las Escalas de Renzulli.

Sin embargo, la identificación de estos individuos no debería ser un fin en sí misma, sino el paso previo a la planificación de una adecuada intervención educativa para atender las necesidades que estos estudiantes puedan presentar en el aula. En este sentido, Aretxaga (2013, p. 46) define la intervención educativa como “un conjunto de acciones relacionadas que se llevan a cabo, fundamentalmente, en el contexto escolar y junto a otros/as agentes educativos, con el objetivo de potenciar todas las capacidades del alumnado”.

Actualmente, para la etapa de Educación Primaria en España, la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación (Jefatura del Estado, 2006), que ha sido actualizada por la Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación (Jefatura del Estado, 2020), establece dos vías de intervención para los estudiantes con altas capacidades dentro del contexto escolar: el *enriquecimiento curricular* y la *flexibilización del periodo de escolarización*. En concreto, en la Comunidad Valenciana, la Orden 20/2019, de 30 de abril, de la Conselleria de Educación, Investigación, Cultura y Deporte, por la cual se regula la organización de la respuesta educativa para la inclusión del alumnado en los centros docentes sostenidos con fondos públicos del sistema educativo valenciano (Conselleria de Educación, Investigación, Cultura y Deporte, 2019), define y concreta la aplicación de estas medidas en el aula:

- *Enriquecimiento curricular*: Se trata de una medida curricular extraordinaria desarrollada dentro del aula ordinaria y que consiste en una ampliación de los objetivos y contenidos impartidos en las diferentes áreas de aprendizaje junto a una flexibilización de los criterios e instrumentos de evaluación, así como el uso de metodología específica que atienda las capacidades y necesidades del alumnado y su contexto sociofamiliar.
- *Flexibilización en la duración de la escolarización*: Se trata de una medida de carácter excepcional que consiste en la incorporación del individuo a un curso de nivel académico superior, si se considera que el estudiante

presenta un grado suficiente de madurez y adquisición de las competencias clave y que es la intervención más idónea para el desarrollo de su equilibrio personal y social.

2.1.1. Altas capacidades matemáticas

La Teoría de las Inteligencias Múltiples, elaborada por Howard Gardner, describe la competencia cognitiva de las personas como una serie de “inteligencias”, es decir, de habilidades, capacidades o talentos que todo individuo posee y que varían en su grado de destreza de un individuo a otro. De este modo, para Gardner (2006), todas las personas poseen 9 tipos de inteligencias: musical, corporal-kinestésica, lógico-matemática, lingüística, espacial, interpersonal, intrapersonal, naturalista y existencial. Teniendo en cuenta la teoría de las inteligencias múltiples, dentro del marco de las altas capacidades, podemos encontrar distintos tipos de talentos o capacidades, siendo uno de ellos el talento matemático.

Krutetskii (1976, p. 77) denomina *talento matemático* a “un conjunto único de habilidades matemáticas que ofrecen la posibilidad de un desempeño exitoso en la actividad matemática”. Del mismo modo, Torrego (2011) atribuye a los estudiantes con *altas capacidades matemáticas* aptitudes destacables en razonamiento lógico-analítico y en formas de pensamiento visual y espacial, así como una habilidad excepcional para aprender matemáticas. Este tipo de estudiantes suponen entre un 2% y un 3% de la población (Miller, 1990; Pasarín, Feijoo, Díaz y Rodríguez, 2004).

La investigación educativa en el ámbito de las altas capacidades matemáticas se inició hacia la mitad del siglo XX (Benavides, 2008) y sus “temas de estudio se agrupan en tres grandes focos: la caracterización del talento matemático, establecer mecanismos de identificación y ofrecer alternativas de intervención dentro de programas especiales dentro y fuera de la escuela” (Castro, 2008, pp. 21-22).

En este trabajo, con el fin de evitar la repetición continua de un mismo término, consideraremos como equivalentes los términos *altas capacidades matemáticas* y *talento matemático*.

2.1.1.1. Características

La caracterización del talento matemático es esencial para su posterior identificación y atención mediante la intervención educativa. Autores como Krutetskii (1976), Greenes (1981), Miller (1990), Tourón et al. (1998) y Freiman (2006) han elaborado distintas listas de características observadas en estudiantes con altas capacidades matemáticas. Gutiérrez y Jaime (2013) establecen tres tipos de habilidades que engloban las distintas características descritas por estos autores: *habilidades de tipo afectivo*, relacionadas con el gusto e interés por las matemáticas; *habilidades de aprendizaje*, relativas a sus formas de aprender diferentes contenidos matemáticos; y *habilidades de resolución de problemas*, sobre sus estrategias de resolución, procesos metacognitivos de control, uso de la imaginación e intuición, etc.

En la Tabla 2.1 presentamos una recopilación de las características, clasificadas en los tres tipos de habilidades descritos. Como se puede observar, algunas de estas características podemos considerarlas tanto habilidades de aprendizaje como de resolución de problemas.

Tabla 2.1. Clasificación de las características de los estudiantes con altas capacidades matemáticas

	Krutetskii (1976)	Greenes (1981)	Miller (1990)	Tourón et al. (1998)	Freiman (2006)
Afectivas		• Formulación espontánea de problemas	• Entusiasmo inusual y una gran curiosidad sobre la información numérica		• Pregunta espontáneamente cuestiones que van más allá de las tareas matemáticas que se le plantean
Aprendizaje	• Habilidad para formalizar material matemático • Memoria matemática • Habilidad para conceptos espaciales		• Rapidez inusual para aprender, comprender y aplicar ideas matemáticas	• Rapidez de aprendizaje • Capacidad de abstracción • Memoria matemática para las relaciones, las características, los métodos, los principios y los símbolos matemáticos • Estructura mental matemática	• Construye nexos y estructuras matemáticas
	• Habilidad para generalizar material matemático • Habilidad para operar con números y símbolos • Habilidad para el razonamiento lógico	• Habilidad para transferir ideas • Habilidad para generalizar	• Habilidad inusual para transferir aprendizaje a nuevas situaciones matemáticas • Gran habilidad para pensar y trabajar de un modo abstracto y habilidad para ver patrones y relaciones matemáticas	• Generalización y transferencia • Pensamiento lógico	• Presta atención a los detalles • Desarrolla estrategias eficientes • Piensa críticamente • Persiste en conseguir sus objetivos • Busca patrones y relaciones
Resolución de problemas	• Habilidad para acortar los procesos de razonamiento • Habilidad para invertir los procesos mentales • Flexibilidad de pensamiento	• Flexibilidad en el manejo de datos • Habilidad para organizar datos • Agilidad mental para el flujo de ideas • Originalidad de interpretación	• Habilidad inusual para pensar y trabajar con problemas matemáticos de un modo flexible y creativo	• Flexibilidad en los procesos mentales requeridos para la actividad matemática • Reducción del proceso de razonamiento matemático • Habilidad para la inversión de los procesos mentales en el razonamiento matemático	• Busca la clave (esencial) del problema • Produce ideas originales y valiosas • Mantiene la situación del problema bajo control • Cambia fácilmente de una estrategia a otra, de una estructura a otra

2.1.1.2. Identificación

Las investigaciones enfocadas hacia la caracterización de las altas capacidades matemáticas son un punto clave en el desarrollo de instrumentos adecuados para la identificación de este tipo de estudiantes.

Diversos autores consideran que la utilización de test de inteligencia y aptitud general, pese a proporcionar información valiosa, no son suficientes para identificar el talento matemático, pues suponen correr el riesgo de rechazar estudiantes que deberían haber sido identificados (Miller, 1990; Benavides, 2008; Castro, 2008). En concreto, Nolte (2011, 2013, citados en Assmus y Fritzlar, 2018) estudió la correlación existente entre un test de inteligencia y un test matemático con 1600 estudiantes de 3.º de Educación Primaria. Sus resultados muestran que, aunque existe correlación entre ambos test, esta disminuye especialmente para aquellos estudiantes que obtuvieron buenos resultados en el test matemático, concluyendo que el talento matemático no puede detectarse utilizando test de inteligencia general.

Pitta-Pantazi y Christou (2009) afirman que la identificación es un aspecto complejo, debido a tres causas: la ausencia de una clara definición de talento matemático, la carencia de instrumentos matemáticamente apropiados para la identificación y la naturaleza heterogénea de los estudiantes con altas capacidades matemáticas. Actualmente, esta problemática sigue sin resolverse.

Pitta-Pantazi (2017) señala que, para una correcta identificación del talento matemático, los instrumentos utilizados deberían resaltar las fortalezas y debilidades matemáticas, las habilidades cognitivas y los patrones de comportamiento de los estudiantes con altas capacidades matemáticas. Pitta-Pantazi y Christou (2009) han sugerido diversos aspectos que estos instrumentos deberían medir, como el pensamiento lógico, las relaciones cualitativas y espaciales, la flexibilidad y reversibilidad de los procesos mentales, las habilidades de percepción y generalización, el razonamiento analítico, deductivo e inductivo, la habilidad para encontrar soluciones racionales y económicas, la habilidad para recordar símbolos matemáticos, relaciones y

métodos de solución, la creatividad matemática y la percepción matemática del mundo.

Con el objetivo de dar solución a esta problemática, varios autores se han centrado en la relación existente entre el talento matemático y la resolución de problemas. Por una parte, hay autores que proponen combinar test psicológicos con baterías de preguntas propias de la resolución de problemas. Díaz, Sánchez, Pomar y Fernández (2008) aplican el test de Aptitudes Mentales Primarias (PMA) de Thurstone junto a una prueba compuesta por 6 problemas que requieren aptitudes matemáticas avanzadas, concluyendo que los problemas propuestos son un instrumento eficaz para su identificación. Asimismo, Castro, Benavides y Segovia (2006) y Benavides (2008) aplican y validan un cuestionario de problemas de estructura multiplicativa para la identificación de estudiantes con talento matemático. Tras comparar sus resultados con aquellos obtenidos por el test de Raven, concluyen que el cuestionario de problemas de estructura multiplicativa ofrece una mayor discriminación.

Por otra parte, hay autores que proponen la identificación del talento matemático a partir de las características mostradas durante la resolución de problemas. Reyes-Santander y Karg (2009) identifican a estos estudiantes mediante tareas enriquecedoras, a partir de la observación de las características propias de talento matemático en las actuaciones y respuestas de sus estudiantes. Rojas, Jiménez y Mora (2009) revisan los antecedentes de investigación sobre la resolución de problemas como forma de identificación y caracterización del talento en matemáticas, confirmando el potencial de esta herramienta.

Otro de los aspectos clave que ha sido investigado para avanzar en la identificación de estudiantes con altas capacidades matemáticas es la relación existente entre creatividad y talento, pues algunos autores, como Renzulli (1998), consideran la creatividad como un componente esencial del talento.

No existe una definición establecida para creatividad dada su complejidad (Leikin y Lev, 2013). Sin embargo, varios autores (Kattou, Kontoyianni, Pitta-Pantazi y Christou, 2013; Kattou, Christou y Pitta-Pantazi, 2015; Leikin y Lev, 2013; Pitta-Pantazi, 2017) se han basado la definición de creatividad de Torrance (1974, en Leikin y Lev, 2013), quien sugirió que está formada por cuatro componentes:

- *Fluidez*: referido al flujo de ideas y asociaciones.
- *Flexibilidad*: asociado al enfoque de problemas desde distintas perspectivas y la obtención de diversas soluciones.
- *Originalidad*: caracterizado por producciones y pensamientos únicos.
- *Elaboración*: relacionado con la habilidad de describir y generalizar ideas.

Kattou et al. (2015) investigan si la creatividad debe ser considerada como un campo general, entendida como una habilidad universal aplicable a cualquier área, o como un campo específico ligado a un área concreta. Tras analizar las elaboraciones de estudiantes de 4.º a 6.º de Educación Primaria en dos test de creatividad (uno matemático y otro general), concluyen que la creatividad es un campo específico y que el uso de instrumentos de creatividad general no es adecuado para la detección de creatividad en campos específicos.

Así pues, la definición elaborada por Torrance (1974) ha sido posteriormente adaptada a la creatividad específicamente matemática, que es descrita en términos de fluidez, flexibilidad y originalidad (Leikin y Lev, 2013). La elaboración no ha sido incluida debido a su dificultad de valoración (Kattou et al., 2013).

Según Pitta-Pantazi (2017), no es extraño relacionar la creatividad matemática con un profundo conocimiento matemático, pues algunos de los comportamientos que demuestran este profundo conocimiento son la aplicación creativa de procedimientos, la sugerencia de soluciones originales y la habilidad para encontrar diferentes soluciones en tareas matemáticas. De este modo, la creatividad matemática se manifiesta particularmente durante la resolución de problemas (Assmus y Fritzlar, 2018).

Teniendo esto en cuenta, Leikin (2009) introduce el concepto de *tareas de múltiples resoluciones* e investigadores como Leikin y Lev (2013) crean tests basados en tareas de múltiples resoluciones para evaluar la creatividad matemática en términos de fluidez (cantidad de respuestas proporcionadas), flexibilidad (diversidad en las respuestas) y originalidad (frecuencia de la respuesta entre los estudiantes).

Kattou, Kontoyianni y Pitta-Pantazi (2011) y Kattou et al. (2013) investigan la relación existente entre talento matemático y creatividad matemática, entendida

en los términos descritos por Leikin y Lev (2013). Sus resultados sugieren que la creatividad matemática es un subcomponente del talento matemático y no al revés, así como que el talento matemático podría ser detectado mediante la creatividad matemática.

2.1.1.3. Intervención educativa

Tras la identificación de los estudiantes con altas capacidades matemáticas, es importante realizar una buena intervención educativa, tanto dentro como fuera del aula, que les permita desarrollar todo su potencial. Singer, Sheffield, Freiman y Brandl (2016) describen diferentes programas de intervención educativa para estos estudiantes alrededor del mundo, diferenciando entre programas realizados dentro del aula (agrupamientos, clases independientes, escuelas especializadas y aceleración) y programas extracurriculares (matemáticas recreativas y competencias).

Lamentablemente, en muchas ocasiones las actuaciones llevadas a cabo en el aula no son suficientes para atender a este alumnado. Diversos autores (Johnson, 2000; Arocas, Martínez y Martínez, 2006; González, 2007) proponen una serie de ajustes metodológicos que pueden resultar beneficiosos para los estudiantes con talento matemático, entre los que podemos encontrar la implementación de aprendizaje cooperativo y el aprendizaje por descubrimiento, el uso de material manipulativo, tareas que constituyan un reto para los estudiantes, como juegos de lógica y estrategia, problemas de respuesta abierta o con múltiples soluciones, etc.

Considerando la importancia de proponer tareas y actividades matemáticas adecuadas para estos estudiantes, Burjan (1991, en Benedicto, 2018) recomienda algunas características que deben tener las actividades para favorecer el desarrollo de razonamientos complejos: problemas de respuesta abierta, problemas que permiten varios enfoques diferentes, tareas no estándar, tareas centradas en habilidades de alto nivel, tareas complejas que requieren el uso de varias áreas de conocimiento matemático y tareas no centradas en un único conocimiento.

No obstante, según Leikin (2010), no basta con proponer tareas no convencionales, sino que estas deben suponer un *desafío matemático*, entendido como una dificultad interesante y matemáticamente motivadora que requiere esfuerzo, pero que se puede superar. Del mismo modo, Freiman (2006) propone el uso de *situaciones desafiantes* a partir de la resolución de problemas matemáticos abiertos, ya que la resolución de tareas aritméticas rutinarias de aplicación de algoritmos no permite el desarrollo del pensamiento matemático. Solo cuando la situación es nueva para el estudiante, le supone un desafío y esto provoca la activación de su potencial intelectual para el desarrollo de nuevos mecanismos de resolución.

Otro enfoque similar es el uso de *actividades matemáticas ricas*. Según Piggott (2008) y Jaime y Gutiérrez (2014), este tipo de actividades están ligadas al contenido establecido por el currículum oficial, se basan en una metodología de resolución de problemas y permiten graduar su dificultad o complejidad, adaptándolas, así, a la diversidad de capacidades y conocimientos matemáticos de todos los estudiantes de un grupo ordinario. Estos autores, además, ofrecen algunas perspectivas de lo que consideran que debería ser una enseñanza de calidad que permita el máximo desarrollo del potencial de los estudiantes con altas capacidades matemáticas y señalan la necesidad de proporcionar materiales y recursos para que los docentes puedan utilizarlos en el aula.

En la literatura, podemos encontrar diferentes investigaciones enfocadas al diseño de materiales para atender las necesidades de los estudiantes con altas capacidades matemáticas. En particular, en España, Ramírez (2012) diseña buenas prácticas docentes para desarrollar la visualización en estos estudiantes. Escrivà (2016) diseña y experimenta una serie de actividades de geometría tridimensional que permiten desarrollar las habilidades de visualización a estudiantes con diferentes grados de talento. Benedicto (2018) proporciona una herramienta para el diseño de tareas matemáticas adecuadas para atender la diversidad de estudiantes talentosos. Esta herramienta, a partir de la particularización del modelo de los niveles de demanda cognitiva a tres contextos matemáticos concretos (pre-álgebra, geometría plana y visualización), permite, a nivel teórico, valorar el diseño de las tareas y comprobar su adecuación y, a

partir de las respuestas de los estudiantes, identificar el potencial de estos y diferenciar a los que tienen distintas capacidades.

También podemos encontrar distintas investigaciones realizadas con estudiantes de Educación Primaria con altas capacidades matemáticas en el área del álgebra temprana. Amit y Neria (2008) analizan las estrategias empleadas por estos estudiantes para resolver problemas de patrones geométricos y confirman que estos problemas son una vía adecuada para desarrollar sus habilidades algebraicas. Fritzlar y Karpinski-Siebold (2012) exploran, usando este tipo de problemas, las diferencias existentes en el pensamiento algebraico entre estudiantes de 4.º de Educación Primaria con distintas capacidades y tratan de descubrir posibles relaciones entre el pensamiento algebraico y el talento matemático. Arbona (2016) diseña y experimenta una secuencia de enseñanza-aprendizaje que permite la iniciación al álgebra mediante la resolución de problemas de patrones geométricos. Eraky et al. (2022) examinan la creatividad matemática usando problemas de patrones geométricos de múltiples respuestas con patrones presentados en forma numérica, de diagrama o de contexto. Por su parte, Assmus y Fritzlar (2022) investigan si existen diferencias en términos de creatividad entre estudiantes ordinarios y estudiantes con altas capacidades matemáticas al crear patrones geométricos.

2.2. Álgebra

La comprensión del álgebra es esencial para acceder y alcanzar el éxito en estudios avanzados de matemáticas. Sin embargo, para muchos estudiantes, el álgebra carece de relevancia y significado (Kaput, 1999). Es por ello necesario proporcionar a los estudiantes modos de acceso que permitan experimentar el álgebra como matemáticas significativas (Markworth, 2010). Para National Council of Teachers of Mathematics (2008), en el contexto escolar,

El álgebra es un modo de pensamiento y un conjunto de conceptos y habilidades que permite a los estudiantes generalizar, modelizar y analizar situaciones matemáticas. El

álgebra proporciona una forma sistemática para investigar relaciones, ayudando a describir, organizar y comprender el mundo (p. 2).

Un elemento a tener en cuenta en la enseñanza del álgebra es el enfoque didáctico elegido para introducirla e iniciar a los estudiantes. Autores como Filloy y Rojano (1989) y Kaput (2008) discriminan dos enfoques, que Kaput (2008) denomina *aspectos fundamentales del álgebra*. Por una parte, el aprendizaje del álgebra partiendo del nivel semántico, utilizando algún contexto concreto como modelo para dotar de significado y sentido a las operaciones y objetos algebraicos (*aspecto fundamental A*). Por otra parte, el aprendizaje del álgebra en el nivel sintáctico, enseñando y aplicando sus reglas sintácticas a la resolución de ecuaciones (*aspecto fundamental B*). Este segundo enfoque implicará procesos de abstracción y generalización de regularidades y restricciones del modelo para la construcción de la sintaxis algebraica. Es por esto que, generalmente, el aspecto fundamental A está pensado para desarrollarse antes que el aspecto fundamental B, ya que “las acciones basadas en reglas con símbolos dependen de saber qué combinaciones de símbolos son posibles y cómo estos se relacionan entre ellos, especialmente en términos de qué combinaciones son equivalentes entre sí” (Kaput, 2008, p. 11).

Qué pensamos que es álgebra tiene un gran impacto en cómo la abordamos – como profesores, administradores, investigadores, educadores, desarrolladores de currículum, “framework writers”, examinadores de material de enseñanza, evaluadores, legisladores y demás. [...] En efecto, el tipo de visión reducida del álgebra que ha dominado el álgebra escolar durante años en muchos países principalmente como manipulación simbólica guiada sintácticamente no solo resta gravemente importancia a las múltiples facetas históricas del álgebra como matemáticas, sino que también es un fundamento inadecuado para reconsiderar el lugar del álgebra en las matemáticas escolares (Kaput, 2008, p. 8).

Como consecuencia de esta visión reducida del álgebra, tradicionalmente, su aprendizaje ha sido pospuesto hasta la adquisición de una base aritmética sólida. Sin embargo, el aprendizaje de la aritmética no es necesariamente un requisito para el aprendizaje del álgebra (Carraher, Schliemann y Brizuela, 2001). Es más, diversas investigaciones apuntan a que varios de los problemas con el aprendizaje del álgebra de estudiantes de educación secundaria podrían deberse a sus experiencias previas con el aprendizaje de la aritmética (Kieran, 2004; Warren, Trigueros y Ursini, 2016; Arcavi, Drijvers y Stacey, 2017).

Normalmente, el estudio de la aritmética enfoca a los estudiantes en el cálculo de operaciones, entendiendo el signo igual ($=$) como una señal de operar y como un separador entre el problema y la solución (Knuth, Alibali, Hattikudur, McNeil y Stephens, 2008; Molina, Castro y Castro, 2009; Prediger, 2010; Byrd, McNeil, Chesney y Matthews, 2015). Como consecuencia, al aprender álgebra, los estudiantes deben redefinir diversas concepciones ya adquiridas.

Arcavi et al. (2017) describen las principales acciones involucradas al “hacer álgebra”:

- Observar, describir, denotar y representar regularidades y patrones.
- Manipular expresiones simbólicas siguiendo reglas algebraicas.
- Deshacer la simbolización y leer expresiones algebraicas con tal de extraer información.
- Conectar múltiples representaciones para observar ideas y conceptos.
- Crear expresiones algebraicas.

Por su parte, Kieran (2004, pp. 140-141) elabora una lista de ajustes que deben tener lugar para desarrollar una forma de pensamiento algebraica:

1. Un enfoque en las relaciones y no solamente en el cálculo de una respuesta numérica;
2. Un enfoque en las operaciones, así como sus inversas, y en la idea relacionada de hacer/deshacer;

3. Un enfoque tanto en representar como en resolver un problema en lugar de simplemente en resolverlo;
4. Un enfoque tanto en números como en letras, en lugar de solo en números. Esto incluye:
 - (i) trabajar con letras que a veces pueden ser incógnitas, variables o parámetros;
 - (ii) aceptar expresiones literales abiertas como respuestas;
 - (iii) comparar expresiones para ver su equivalencia basándose en propiedades en lugar de en evaluación numérica;
5. Un reenfoque del significado del signo igual.

Asimismo, el National Council of Teachers of Mathematics (2000) establece cuatro estándares que los estudiantes deben alcanzar a través del estudio del álgebra durante su escolaridad: los estudiantes deberán ser capaces de comprender patrones, relaciones y funciones; representar y analizar situaciones y estructuras matemáticas usando símbolos algebraicos; usar modelos matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas; y analizar el cambio en contextos variados.

2.2.1. Álgebra temprana

En los últimos años, se ha incrementado el número de investigaciones dirigidas a la enseñanza del álgebra en la Educación Primaria (Carragher y Schliemann, 2007; Cai y Knuth, 2011; Stephens, Ellis, Blanton y Brizuela, 2017; Kieran, 2018, 2022). Este contexto es conocido como *Álgebra temprana* (*Early algebra*, en inglés) y “propone organizar la enseñanza de la aritmética y del álgebra sin saltos ni rupturas tratando de que haya una continuidad entre ambas” (García-Reche, Callejo y Fernández, 2015, p. 279).

En concreto, el término *álgebra temprana* hace referencia al “conocimiento algebraico, el pensamiento algebraico y las (ocasionalmente inusuales) representaciones y técnicas de estudiantes jóvenes al resolver problemas que

uno generalmente esperaría que estudiantes más avanzados resolvieran usando notaciones algebraicas modernas” (Carraher y Schliemann, 2018, p. 108). De este modo, el álgebra temprana proporciona oportunidades para experimentar y desarrollar el razonamiento algebraico de forma adecuada a la edad de los estudiantes (Stephens et al., 2017).

Una propuesta para el aprendizaje del álgebra es que introducir el razonamiento algebraico durante la Educación Primaria podría mejorar el éxito de los estudiantes en secundaria (Blanton, Isler-Baykal, Stroud, Stephens, Knuth y Gardiner, 2019). Kaput (1998) señala que la presencia del álgebra en el currículum de infantil a bachillerato podría aportar coherencia, profundidad y poder a las matemáticas escolares, eliminando, así, el salto brusco y superficial al álgebra en secundaria. Asimismo, Carraher y Schliemann (2007) recogen una serie de investigaciones que señalan que las dificultades presentadas por estudiantes de secundaria podrían reducirse con el desarrollo del razonamiento algebraico durante Educación Primaria, en lugar de centrarse en construir una base aritmética más sólida.

También el National Council of Teachers of Mathematics (2000) recomienda la introducción del álgebra como un bloque más de las matemáticas escolares desde Educación Infantil hasta Bachillerato:

El álgebra abarca las relaciones entre cantidades, el uso de símbolos, el modelado de fenómenos, y el estudio matemático de cambio. La palabra álgebra no suele ser escuchada en clases de educación primaria, pero investigaciones y conversaciones matemáticas de estudiantes en estos cursos frecuentemente incluyen elementos de razonamiento algebraico. Estas experiencias presentan contextos ricos para fomentar comprensión matemática y son un importante precursor del estudio del álgebra más formal en secundaria (p. 37).

2.2.2. Pensamiento algebraico

En este sentido, el *álgebra temprana* propone la inclusión del pensamiento algebraico en el currículum de la Educación Primaria (García-Reche et al., 2015).

Blanton y Kaput (2005, p. 413) describen el *pensamiento algebraico* como el “proceso en el cual los estudiantes generalizan ideas matemáticas a partir de un conjunto de casos particulares, establecen esas generalizaciones a través del discurso de la argumentación, y las expresan en modos apropiados a la edad y cada vez más formales”.

Diversos autores han intentado caracterizar la naturaleza del pensamiento algebraico, pues, como indican Fritzlar y Karpinski-Siebold (2012), el álgebra no solo implica saber tratar con símbolos, términos, ecuaciones o funciones. Estos autores consideran que el pensamiento algebraico está formado por seis componentes: manejar operaciones como objetos y sus inversas; establecer relaciones entre números, conjuntos y relaciones (pensamiento relacional); generalizar; tratar con incógnitas; tratar con cambios; y usar representaciones (simbólicas). Del mismo modo, Radford (2010) crea una lista no exhaustiva de tres elementos interrelacionados característicos del pensamiento algebraico: el sentido de la indeterminación, propio de los objetos algebraicos básicos como incógnitas, variables y parámetros; el manejo analítico de objetos indeterminados; y la representación simbólica de objetos indeterminados, a través de signos, que pueden ser letras pero no necesariamente. Más recientemente, Radford (2018) perfecciona esta lista y sugiere que el pensamiento algebraico recurre a cantidades indeterminadas y a modos, idiosincrásicos o desarrollados cultural o históricamente, de representar o simbolizar estas cantidades indeterminadas y sus operaciones y, al mismo tiempo, lidia con cantidades indeterminadas de una forma analítica. Por su parte, Warren et al. (2016) señalan que dos aspectos fundamentales del pensamiento algebraico son las variables, como entidades generales abstractas que pueden ser representadas de distintos modos, y el ‘sentido de estructura’ del álgebra. Kieran (2022) hace una revisión más detallada de la literatura sobre pensamiento algebraico temprano y su evolución a través del tiempo.

Sin embargo, y pese a la gran cantidad de investigaciones enfocadas a este campo de la didáctica de las matemáticas, aún no existe una definición clara y concisa de pensamiento algebraico. Según Radford (2006, p. 3), este hecho puede deberse “a la amplia gama de objetos algebraicos (por ejemplo,

ecuaciones, funciones, patrones...) y procesos (invertir, simplificar...), así como a las diversas formas posibles de concebir el pensamiento en general".

No obstante, la mayoría de los investigadores parecen estar de acuerdo en algunos aspectos propios del pensamiento algebraico. Por una parte, el uso de símbolos no es una condición necesaria (Kieran, 2004) ni suficiente para definir el pensamiento algebraico (Radford, 2014). Por otra parte, el pensamiento algebraico no surge por un proceso natural de desarrollo, ni como resultado de la madurez cognitiva de los estudiantes (Radford, 2011b), sino que debe ser inducido a través de la enseñanza y esta adquisición plantea serias dificultades a algunos estudiantes.

Kieran (2004) ofrece una definición de pensamiento algebraico para el álgebra temprana teniendo en cuenta estos dos aspectos:

El pensamiento algebraico en edades tempranas implica el desarrollo de formas de pensamiento con actividades en las cuales puede ser usada el álgebra simbólica como una herramienta, pero que no son exclusivas del álgebra y pueden ser resueltas sin usar el álgebra simbólica, por ejemplo, analizando las relaciones entre cantidades, observando su estructura, estudiando los cambios, generalizando, resolviendo problemas, modelizando, justificando, probando y prediciendo (p. 149).

2.2.2.1. Pensamiento funcional

Kaput (2008) propone que el álgebra y el razonamiento algebraico están formados por tres tipos de contenidos: aritmética generalizada, pensamiento funcional y aplicación de lenguajes de modelización, que describe del siguiente modo:

1. Álgebra como el estudio de estructuras y sistemas abstractos de cálculo y relaciones, incluyendo aquellos surgidos en aritmética (álgebra como aritmética generalizada) y en razonamiento cuantitativo.

2. Álgebra como el estudio de funciones, relaciones y variación conjunta.
3. Álgebra como la aplicación de un grupo de lenguajes de modelización tanto dentro como fuera de las matemáticas (p. 11).

Stephens et al. (2017) utilizan la propuesta de Kaput (2008) como marco organizativo para realizar una revisión de la investigación reciente en álgebra desde infantil hasta el grado 8 (13-14 años). Chimoni, Pitta-Pantazi y Christou (2020) extraen los conceptos fundamentales asociados a cada tipo de contenido descrito por Kaput (2008), así como los procesos básicos algebraicos y las formas de razonamiento que deberían surgir de cada uno de ellos.

Así pues, uno de los componentes del pensamiento algebraico es el *pensamiento funcional*. Este se basa en “la construcción, descripción, representación y razonamiento con y sobre las funciones y los elementos que las constituyen” (Cañadas y Molina, 2016, p. 212). El desarrollo del pensamiento funcional puede ayudar a los estudiantes a comprender las relaciones entre variables y el uso de las letras para su representación (Wilkie, 2014), superando así algunas de las dificultades descritas.

En concreto, el pensamiento funcional “se centra en la relación entre dos (o más) cantidades variables, específicamente en aquellas formas de pensamiento que guían de relaciones específicas (casos particulares) a generalizaciones de esa relación entre casos” (Smith, 2008, p. 143). Esto implica, por una parte, expresar la generalización a través de los cambios que se producen entre los casos particulares y, por otra parte, utilizar el aspecto sintáctico del álgebra para transformar estas expresiones, compararlas con otras equivalentes o identificar cuando estas funciones toman unos valores concretos o cumplen determinadas restricciones (expresión y resolución de ecuaciones) (Kaput, 2008). Además de la representación sintáctica a través de notaciones simbólicas algebraicas, estas generalizaciones pueden ser expresadas en una diversidad de formas como diagramas, tablas, gráficos, lenguaje natural, etc. (Kaput, 2008; Stephens et al., 2017; Chimoni et al., 2020).

Diversas investigaciones se han centrado en el estudio del contexto de los patrones geométricos como precursor del pensamiento funcional, pues “ser capaz de encontrar una regla que muestre cómo cantidades variables se relacionan entre sí es una parte fundamental del pensamiento funcional” (Wilkie, 2014, p. 25).

English y Warren (1998) realizan un estudio con 430 alumnos de entre 12 y 15 años en el que revisan el enfoque de los patrones para la introducción del concepto de variable. También destacan ciertas dificultades que pueden presentar los alumnos cuando carecen de determinadas habilidades y realizan algunas recomendaciones para evitarlo. Warren y Cooper (2008) descubren que los estudiantes de 3.º de Educación Primaria, con ayuda de materiales concretos y colores para representar los patrones geométricos, son capaces de relacionar las dos variables del patrón y expresar su generalización mediante lenguaje.

Lannin (2005) asegura que los contextos funcionales con patrones geométricos permiten visualizar cambios y realizar generalizaciones más exitosas en estudiantes de 6.º de Educación Primaria. En esta misma línea, Rivera (2010a) concluye que los estudiantes de entre 7 y 8 años parecen tener más dificultades al resolver problemas de patrones numéricos que problemas de patrones geométricos.

Ureña, Ramírez-Uclés, Cañadas y Molina (2022) describen las estrategias y las formas de representación de la generalización utilizadas por estudiantes de 6º de Educación Primaria al resolver tareas que involucran relaciones funcionales y concluyen que estos estudiantes muestran una clara preferencia por el uso del enfoque funcional al resolver casos generales. Por su parte, Ureña, Ramírez-Uclés, Molina y Cañadas (2023) observan que la estrategia funcional es utilizada por casi todos los estudiantes que son capaces de generalizar al resolver un problema en un contexto funcional.

2.3. Problemas de patrones geométricos

La búsqueda de patrones es la búsqueda de regularidades y estructuras matemáticas. Identificar y aplicar patrones ayuda a

traer orden, cohesión y predictibilidad a situaciones aparentemente desorganizadas y permite realizar generalizaciones que van más allá de la información presentada (Clements y Sarama, 2009, p. 190).

Generalmente, el objetivo principal de las actividades de patrones es elaborar una regla que permita determinar otros casos particulares del patrón (Lannin, 2005). Podemos diferenciar dos tipos de patrones: patrones repetitivos y patrones crecientes. Los *patrones repetitivos* presentan diversas iteraciones de una unidad (Mulligan, Oslington y English, 2020), por ejemplo, 2, 3, 2, 3, 2, 3... En cambio, los *patrones crecientes* son patrones cuyos términos van cambiando de un modo predecible (Billings, Tiedt y Slater, 2008), por ejemplo, 2, 4, 6, 8...

Dentro de los patrones crecientes, dependiendo del modo en que se presenten los distintos términos del patrón, podemos diferenciar entre patrones numéricos y patrones geométricos:

- Un *patrón numérico* es una secuencia de números que pueden ser calculados mediante una regla definida desde el número anterior o desde su posición en la secuencia (Ndlovu, 2011).
- Un *patrón geométrico* es “una secuencia de figuras en las cuales los objetos de la figura cambian de un término a otro, normalmente de un modo predecible” (Huntzinger, 2008, p. 280).

Es importante no confundir patrón geométrico con secuencia geométrica, pues el patrón está formado por figuras cuyos elementos están configurados de un modo determinado (Rivera, 2010b). Así pues, el término geométrico en este caso “significa que las figuras mostradas son más que dibujos: poseen atributos o exponen relaciones entre ellas” (Rivera y Becker, 2005, p. 199).

Chua (2009) considera que los patrones geométricos son menos ambiguos que los numéricos, ya que proporcionan un contexto explicativo de cómo crece el patrón cuantitativamente. En esta misma línea, Wilkie (2014) señala que los patrones geométricos facilitan relacionar cantidades variables, pues no poseen una única dimensión como sí ocurre con los patrones numéricos. Por último, los patrones geométricos proporcionan un contexto donde los estudiantes pueden

hacer conjeturas y comprobar si proporcionan resultados válidos relacionando sus cálculos con el contexto (Lannin, Barker y Townsend, 2006).

Un patrón geométrico involucra dos variables (Huntzinger, 2008):

- La *variable dependiente*, que hace referencia al conjunto de elementos cuantificables que forman la figura del patrón (valor del término).
- La *variable independiente*, que hace referencia a la posición que ocupa la figura en el patrón (posición del término).

Además, entre los patrones geométricos podemos encontrar *patrones lineales* y *patrones no lineales*, dependiendo de si los cambios que se producen entre figuras consecutivas son constantes o varían (Jurdak y El Mouhayar, 2014). Zapatera y Callejo (2011) ofrecen la siguiente definición para los problemas de patrones geométricos lineales:

describen una situación que contiene en el enunciado un dibujo o figura que proporciona los primeros términos $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, ... de una progresión aritmética y se pide a los alumnos calcular $f(n)$ para n “pequeño” y para n “grande” y obtener la regla general. El término general viene dado por una función lineal o afín (p. 600).

De este modo, los problemas de patrones geométricos ayudan a desarrollar dos aspectos clave del pensamiento algebraico: las relaciones entre cantidades y la expresión de una regla general representando los valores numéricos mediante letras (Chua, 2009).

2.3.1. Tipos de cuestiones

Teniendo en cuenta que los problemas de patrones geométricos consisten en realizar generalizaciones a partir de términos conocidos de la secuencia para obtener nuevos términos o el término general (Merino, Cañadas y Molina, 2013), podemos diferenciar dos grandes tipos de cuestiones según la variable conocida (Merino et al., 2013; Rivera, 2013; Callejo et al., 2016). En las cuestiones de *relación directa* conocemos la posición de un término concreto (variable

independiente) pero no su valor, es decir, cuántos elementos lo forman (variable dependiente), mientras que en las cuestiones de *relación inversa* sabemos el valor de un término determinado (variable dependiente), pero no en qué posición está ese término (variable independiente).

Si nos centramos en las cuestiones de relación directa, Radford (2011a) pide a sus estudiantes que extiendan la secuencia de figuras que les presenta, pues, para ello, necesitan comprender una regularidad que organiza tanto la estructura espacial como la estructura numérica del patrón. Y, según especifica, la unión de ambas estructuras constituye un aspecto importante para el desarrollo del pensamiento algebraico. Jurdak y El Mouhayar (2014) indican que una cuestión de generalización inmediata pregunta por un término que sigue de manera inmediata a la secuencia mostrada. Por otra parte, Stacey (1989) distingue dos tipos de cuestiones: cuestiones de generalización cercana, que pueden ser resueltas dibujando o contando de término en término, y cuestiones de generalización lejana, en las cuales no resulta práctico usar estas estrategias para su resolución.

Zapatera y Callejo (2013) incluyen en sus problemas una cuestión en la que los estudiantes deben identificar la regla general del patrón. Haciendo referencia a este tipo de cuestión, diversos autores han indicado que los estudiantes de los últimos cursos de Educación Primaria encuentran más fácil verbalizar la generalización que proporcionar una respuesta escrita formal o simbólica (English y Warren, 1998; Warren, 2005; Amit y Neria, 2008).

Por lo que se refiere a las cuestiones de relación inversa, Warren (2005) presenta el número total de elementos de un término del patrón y pregunta por la posición del término. Entre sus resultados destaca que muchos estudiantes encuentran esta cuestión bastante difícil porque requiere de una buena comprensión de los patrones. Rivera (2010a) también incluye este tipo de cuestión en su estudio sobre competencia preinstruccional en tareas de generalización de patrones con estudiantes de 7 y 8 años.

Finalmente, Friel y Markworth (2009), a partir de las cuestiones recomendadas por Lee y Freiman (2006) para promover el pensamiento algebraico en problemas de patrones geométricos, han identificado tres fases del proceso de

resolución de problemas como soporte para analizar problemas de patrones geométricos. En estas tres fases, diferencian entre: i) cuestiones enfocadas a utilizar la información gráfica del patrón a través del dibujo o la evocación de este, ii) cuestiones dirigidas a la obtención de generalizaciones mediante el uso de relaciones numéricas y iii) cuestiones de extensión del análisis a través de cuestiones de inversión o de creación de patrones. En la tabla 2.2 presentamos la tabla elaborada por Friel y Markworth (2009), cuyas preguntas están formuladas a partir del patrón de la figura 2.1, que tiene como relación general $f(n) = 3n + 1$.



Figura 2.1. Patrón al que hace referencia la tabla 2.2 (Friel y Markworth, 2009).

Tabla 2.2. Las tres fases de resolución de problemas de Friel y Markworth (2009, p. 28).

Fase 1: <i>Razonando figurativamente</i> usando las características visuales de la tarea de patrón geométrico	1. ¿Cuántos patrones diferentes puedes ver en este dibujo? a. ¿Cómo dibujarías el término siguiente? b. ¿Cómo dibujarías el 10º término? c. ¿Cómo dibujarías el 58º término? d. ¿Cómo le dirías a alguien cómo dibujar cualquier término? 2. Tengo una caja con 25 caras sonrientes. ¿Cómo de grande es la figura que puedo hacer? ¿Me sobrará alguna cara sonriente?
Fase 2: <i>Desarrollando relaciones numéricas</i> para generalizar una función	3. ¿Cuántas caras sonrientes hacen falta para hacer el 10º término, el 58º término o el 100º término? 4. ¿Cuántas caras sonrientes hacen falta para hacer el n° término?

	5. ¿Cuál de estas expresiones para el n° término es la correcta?
Fase 3: <i>Extendiendo el análisis de patrones</i>	6. ¿Qué término tiene exactamente 100 caras sonrientes? ¿Y 50 caras sonrientes? 7. ¿Puedes crear un problema de patrones para la clase?

2.3.2. Estrategias de resolución

Existe una gran variedad de estrategias de resolución de problemas de patrones geométricos que han sido descritas en la literatura; pese a que sus nombres varían según el autor que las describa, sus definiciones suelen coincidir. La mayoría de las publicaciones las clasifican en estrategia de conteo o recuento, estrategia recursiva, estrategia funcional y estrategia proporcional (Stacey, 1989; Zapatera y Callejo, 2011; Fritzlar y Karpinski-Siebold, 2012; García-Reche et al., 2015). Otras estrategias que también pueden resultar interesantes son la estrategia de múltiplo de la diferencia (*chunking*, en inglés), también conocida como método de la diferencia o recursión extendida (Stacey, 1989; Sasman, Olivier y Linchevski, 1999; Lannin et al., 2006; Jurdak y El Mouhayar, 2014) y la estrategia de ensayo y error (Lannin, 2005; Rivera y Becker, 2005).

Algunos autores han tratado de clasificar las estrategias en distintos grupos según sus características. Lannin (2005) diferencia dos categorías principales: estrategias explícitas (proporcional, ensayo y error y contextual), que permiten calcular un valor concreto de forma directa, y estrategias no explícitas (conteo y recursiva). Zapatera y Callejo (2011) clasifican las estrategias en cuatro categorías: estrategias aditivas, como el recuento, el proceso iterativo y el proceso recursivo; estrategias funcionales, como la generalización local y la generalización global; razonamiento proporcional; y otros. Por último, García-Reche et al. (2015) también diferencian dos tipos de estrategia funcional, según que posibilite calcular un término específico (generalización local) o cualquier término (generalización global).

Además, diversas investigaciones analizan la naturaleza del razonamiento de los estudiantes en problemas de patrones geométricos y distinguen entre estrategia visual, en la cual el dibujo desarrolla un papel esencial en el proceso de abstracción, y estrategia numérica, en la cual juega este papel esencial la secuencia numérica (García-Cruz y Martínón, 1997; Krebs, 2003; Rivera y Becker, 2005; Rivera, 2007). Investigaciones como las de Rivera (2007, 2010b) y Rivera y Becker (2011) señalan que los estudiantes que hacen uso de estrategias visuales obtienen generalizaciones más exitosas, siendo, además, capaces de justificarlas.

Finalmente, Hidalgo-Moncada y Cañadas (2020) definen diversos errores para clasificar las respuestas inadecuadas de los estudiantes: error de conteo, de cálculo, de caso, numérico, de patrón y sin avance.

2.3.3. Generalización

La generalización involucra extender deliberadamente el alcance de razonamiento o comunicación más allá del caso o casos considerados, identificando y exponiendo explícitamente propiedades comunes entre los casos, o elevando el razonamiento o la comunicación a cierto nivel donde el foco ya no está en los casos o situaciones sino en los patrones, procedimientos, estructuras y relaciones entre ellos (Kaput, 1999, p. 136).

Mason (1996) señala la generalización como el corazón de las matemáticas, pues, tal y como indica Skemp (1986), se trata de un proceso complejo que implica una reflexión sobre el propio conocimiento y una reconstrucción de los esquemas existentes previos.

La generalización es uno de los elementos fundamentales del pensamiento algebraico. Polya (1966) indica la importancia del reconocimiento de patrones para desarrollar la habilidad de generalizar, pues, mediante la observación de una regularidad, se busca un patrón válido para una mayor amplitud de casos. Mason (1996, p. 65) lo expresa como la capacidad de “ver una generalidad a través de una particularidad y ver la particularidad en la generalidad”.

Radford (2010) sugiere que la generalización es un proceso formado por dos componentes interrelacionados. En primer lugar, observar una característica común en los términos conocidos. Cabe destacar que no se trata de una habilidad innata, sino de un proceso cognitivo-cultural complejo (Radford, 2006) que intenta identificar los elementos iguales y diferentes entre términos. Y, en segundo lugar, formar un concepto general que permita extrapolar la característica común observada a todos los términos de la secuencia. Además, para que esta generalización sea considerada algebraica sería necesaria la presencia de un tercer componente: formular una regla que permita expresar de forma directa cualquier término de la secuencia.

Diversos autores han definido distintos niveles de generalización. García-Cruz (1998) ha identificado tres niveles de generalización: actividad procedimental (cuando se hacen recuentos o se emplea la diferencia constante), generalización local (cuando se utiliza una regla para cálculos específicos) y generalización global (cuando la regla usada se aplica a otras situaciones). Ellis (2007) elabora una taxonomía de la generalización que divide en dos categorías principales: las acciones de generalización, que describen los procesos mentales, y las generalizaciones de reflexión, con las que se indica un patrón o relación de semejanza y se aplica a nuevos contextos. Radford (2006) distingue cinco niveles de generalización, en función de los recursos semióticos mostrados por los estudiantes: inducción ingenua, generalización aritmética, generalización algebraica factual, generalización algebraica contextual y generalización algebraica simbólica.

3. MARCO TEÓRICO

En este capítulo nos centramos en realizar una descripción detallada de los componentes teóricos básicos que forman parte de nuestra investigación. Estos componentes nos permitirán definir e identificar los elementos clave de los problemas de patrones geométricos, el tipo de cuestiones que incluyen, las estrategias de resolución empleadas y los tipos de generalizaciones obtenidas por los estudiantes al resolverlos, así como analizar el grado de complejidad de estos problemas en función de las variables que presentan e identificar algunas de las características propias de estudiantes con altas capacidades matemáticas.

3.1. Problemas de patrones geométricos

Los problemas de patrones geométricos muestran los primeros términos de una secuencia creciente de números naturales, representándolos de forma gráfica mediante figuras con cierta estructura visual formadas por piezas cuya cantidad corresponde al valor del término de la secuencia representado. A continuación, presentamos los términos que usaremos para referirnos a los objetos que forman la representación gráfica del enunciado de los problemas de patrones geométricos (Figura 3.1):

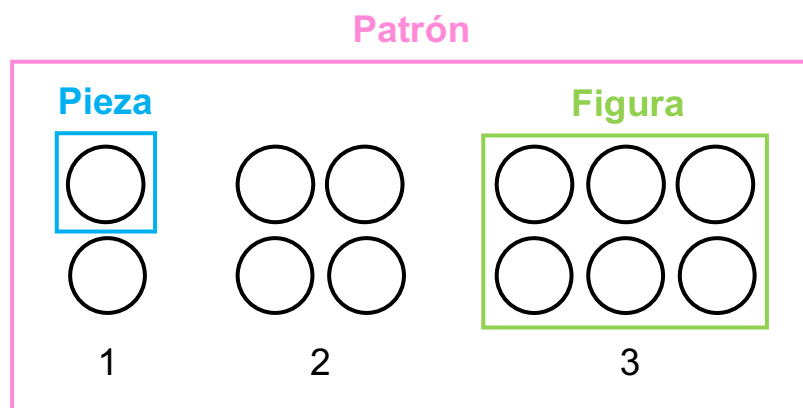


Figura 3.1. Esquema de patrón, figura y pieza de un ppg.

- *Patrón geométrico* (o, simplemente, *patrón*): conjunto ordenado de configuraciones gráficas diferenciadas, que representan los sucesivos términos de una secuencia y cuya estructura permite calcular el valor de cualquier término de la secuencia y la expresión de su término general.
- *Figura*: cada una de las configuraciones gráficas diferenciadas del patrón geométrico, que representa un término específico de la secuencia.
- *Pieza*: cada una de las unidades que forman las figuras de un patrón geométrico.

Los problemas de patrones geométricos pueden representar progresiones aritméticas, geométricas u otros tipos de secuencias. Los patrones utilizados en esta investigación representan progresiones aritméticas crecientes determinadas por relaciones funcionales del tipo $an \pm b$ para $a = 1$ y para $a \neq 0$, 1. Por otra parte, utilizamos problemas de patrones geométricos cuyos enunciados están contextualizados, para que las figuras resulten significativas para los estudiantes y les permitan identificar con mayor facilidad los cambios que se producen entre figuras al permitir unir las distintas piezas en partes con significados identificables (Billings et al., 2008). Por ejemplo, el problema de la Figura 3.2 representa la sucesión $f(n) = 2n + 1$, contextualizada en un jardín, con macetas de dos colores, en el que hay que calcular la cantidad de macetas que hay cada día.

Jardín A

En una clase quieren hacer un jardín juntando macetas de flores. Mira cómo crece el jardín cada día:



- ¿Cuántas macetas tendrá el jardín el día 5? ¿Cómo lo sabes?
- ¿Cuántas macetas tendrá el jardín el día 13? ¿Cómo lo sabes?
- ¿Cuántas macetas tendrá el jardín el día 28? ¿Cómo lo sabes?
- ¿Cómo le explicarías a un amigo cómo puede calcular el número de macetas que tendrá el jardín cada día?
- Luis ha contado 39 macetas, ¿sabrías decir que día es? ¿Cómo lo sabes?

Figura 3.2. Ejemplo de problema de patrón geométrico.

Generalmente, los problemas de patrones geométricos piden calcular los valores de algunos términos de la secuencia, es decir, la cantidad de piezas que constituyen la figura de esos términos, expresar una relación general que permita calcular el valor de cualquier término de la secuencia (cuestiones de *relación directa*) o calcular la posición en la secuencia del término representado por una cantidad dada de piezas (denominadas cuestiones de *relación inversa*).

Los problemas que hemos utilizado en esta investigación presentan siempre 5 cuestiones de estructura variable. En total, hemos utilizado 8 tipos de cuestiones:

- *Generalización inmediata*: pide obtener el valor de un término muy próximo a aquellos proporcionados en el patrón.
- *Generalización cercana*: pide obtener el valor de un término situado a una distancia intermedia que implica una mayor comprensión del patrón.

- *Generalización lejana*: pide obtener el valor de un término situado a una distancia lo suficientemente grande como para requerir una comprensión profunda del patrón.
- *Verbalización*: pide expresar verbalmente el valor del término general de la secuencia.
- *Fórmula*: pide expresar algebraicamente el valor del término general de la secuencia.
- *Simplificación*: implica simplificar o transformar una expresión algebraica previa en otra más simple.
- *Aplicación*: pide aplicar la fórmula, expresada anteriormente, al cálculo de una generalización cercana.
- *Inversión*: implica obtener la posición de un término cuyo valor se proporciona en el enunciado del problema.

3.2. Variables de complejidad en problemas de patrones geométricos

Los problemas de patrones geométricos son considerados *actividades matemáticas ricas*, pues se basan en una metodología de resolución de problemas y permiten graduar la dificultad o complejidad, adaptándose, así, a la diversidad de capacidades y conocimientos matemáticos de los estudiantes presentes en las aulas ordinarias (Jaime y Gutiérrez, 2014). El grado de complejidad de estos problemas depende de varios factores (Sasman et al., 1999; Lannin et al., 2006; Friel y Markworth, 2009; Jurdak y El Mouhayar, 2014):

- *Variables numéricas*: hacen referencia a los aspectos numéricos presentes en el problema, como el tipo de relación funcional representada en el patrón, que puede ser lineal ($f(n) = an$), afín ($f(n) = an + b$) o cuadrática (an^2) y el valor de los datos empleados: el tamaño de los números o si se trata de una función creciente o decreciente.

- *Variables visuales*: hacen referencia al aspecto visual del patrón. Por una parte, encontramos las variables que giran en torno a la estructura geométrica del patrón como el número de dimensiones involucradas (2D o 3D), la cantidad de partes cuyo tamaño varía y si existen objetos compartidos (ver Friel y Markworth, 2009). Por otra parte, la representación gráfica de la estructura geométrica, es decir, los colores y formas empleados para todos los elementos del patrón o solo algunas de sus partes, también puede influir en el grado de complejidad. Billings et al. (2008) señalan que analizar patrones que representan figuras reconocibles, como un helado o gente, facilita la identificación de los cambios entre figuras porque pueden ser divididas en partes reconocibles.
- *Variables verbales*: hacen referencia al tipo y al enfoque de las cuestiones planteadas en el problema. Las cuestiones pueden ser de varios tipos, según que se centren en el cálculo de valores de términos concretos, en la expresión de una relación general (verbal o algebraica) o en la inversión de procesos. En cuanto al enfoque, las cuestiones pueden preguntar por cosas como el número total de piezas de la figura o por el número de piezas con una característica concreta, por ejemplo, de cierto color o forma, o situadas en una posición específica (el interior de la figura, su perímetro, etc.).

3.3. Estrategias de resolución

Para resolver las cuestiones de un ppg los estudiantes pueden emplear diferentes tipos de estrategias. Tras revisar las respuestas de los estudiantes que participaron en este estudio, nos dimos cuenta de que las estrategias descritas en la literatura previa no diferenciaban determinados tipos de repuestas que, aunque se pueden englobar en una categoría común, muestran características específicas que consideramos que es conveniente conservar. En consecuencia, en esta investigación integramos el conjunto de estrategias descritas en la literatura en un nuevo marco teórico que contempla nuevas categorías y subcategorías emergidas del análisis de nuestros datos. Para ello, los codirectores y la autora de esta memoria realizamos un proceso cíclico en

el que analizamos, de forma independiente, las respuestas de algunos estudiantes y, después, hicimos puestas en común con el fin de discutir las diferencias y refinar las definiciones de las categorías problemáticas, volviendo a analizar independientemente respuestas de estudiantes hasta lograr unas definiciones satisfactorias.

A continuación, describimos los diferentes tipos de estrategias que consideramos que los estudiantes de Educación Primaria pueden emplear al resolver problemas de patrones geométricos basados en relaciones lineales y afines. Para su clasificación, diferenciamos entre las estrategias utilizadas al resolver cuestiones de relación directa e inversa. En las estrategias que han sido descritas en la literatura (Stacey, 1989; Rivera y Becker, 2005; Zapatera y Callejo, 2011; Fritzlar y Karpinski-Siebold, 2012; García-Reche et al., 2015), incluimos su denominación en inglés para facilitar la relación de este texto con dicha literatura. Las estrategias sin denominación en inglés son las que hemos añadido para completar los tipos existentes. Además, es necesario destacar que, aunque algunas estrategias presentan subtipos, estos no pretenden abarcar toda la diversidad de casos posibles.

3.3.1. Estrategias en cuestiones de relación directa

3.3.1.1. Tipos de análisis del patrón

Según el tipo de análisis del patrón geométrico que realizan los estudiantes para obtener el procedimiento de resolución, podemos clasificar las estrategias en:

- *Visual* (visual): se caracteriza por usar la representación gráfica de las figuras de los términos y, opcionalmente, su descomposición en partes y el análisis de las relaciones existentes entre ellas. En las Figuras 3.3, 3.5 y 3.6 podemos ver algunos ejemplos de estrategia visual aplicada en el problema Jardín A (Anexo 1).
- *Númerica* (numerical): se basa en usar los valores numéricos de las figuras sin prestar atención a la organización gráfica de estas. Los ejemplos de las Figuras 3.8 y 3.11 muestran una estrategia numérica.

- *No categorizada*: estrategias que no muestran la suficiente información para determinar si el análisis realizado es visual o numérico.

3.3.1.2. Procedimiento de cálculo del valor de un término

Según el procedimiento utilizado para calcular los valores de los términos, podemos clasificar las estrategias en:

- *Recuento* (counting): consiste en dibujar la representación gráfica del término requerido y contar sus piezas como unidades independientes.

En la Figura 3.3, el estudiante dibujó la figura correspondiente al término 5, siguiendo el patrón de los primeros términos, y contó la cantidad total de macetas.

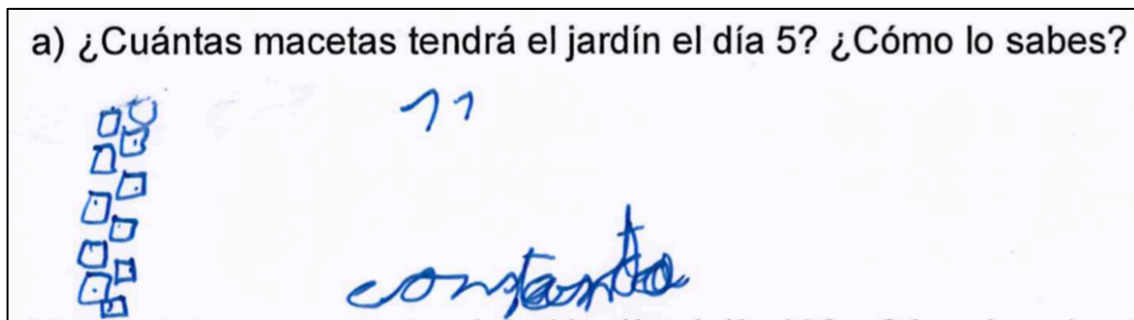


Figura 3.3. Ejemplo de estrategia de recuento de Jardín B (Anexo 1).

- *Recursiva* (recursive): se caracteriza por calcular el valor de un término sumando de forma reiterada a un término ya conocido la diferencia numérica constante entre los valores de dos términos consecutivos.

En la Figura 3.4, el estudiante contó la cantidad de macetas en el término 3 (7 macetas) y sumó 2 (diferencia entre los valores de dos términos consecutivos) las veces necesarias hasta llegar al término 5.

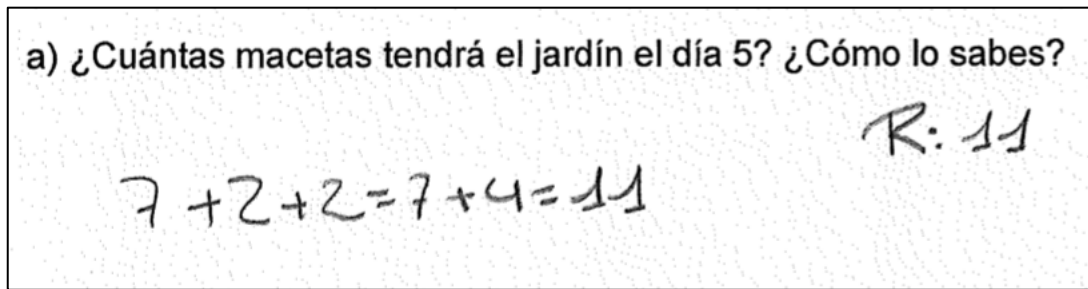


Figura 3.4. Ejemplo de estrategia recursiva de Jardín A (Anexo 1).

- *Funcional* (functional): los estudiantes calculan el valor de un término prestando atención a la correspondencia entre su posición y la cantidad de piezas que lo forman. Para esta estrategia distinguimos distintas subcategorías, sin embargo, utilizamos la categoría global en aquellas estrategias de tipo funcional no clasificables dentro de las otras subcategorías. Distinguimos los siguientes tipos de estrategias funcionales:

- *Descomposición*: se basa en dividir la representación gráfica de un término en partes, con el fin de encontrar una relación entre la posición del término y la cantidad de piezas que tiene cada parte.

En las Figuras 3.5 y 3.6, los estudiantes dividieron la representación gráfica de los términos en las dos columnas (en la Figura 3.6 las llama filas) y relacionaron cada columna con la posición del término. De este modo, la cantidad de macetas equivalía a la posición del término (28) en la columna de la izquierda y a la posición más uno (29) en la columna de la derecha.

a) ¿Cuántas macetas tendrá el jardín el día 5? ¿Cómo lo sabes?

11. Porque es una serie: $1 - 1+2$
 $2 - 2+3$
 $3 - 3+4$

b) ¿Cuántas macetas tendrá el jardín el día 13? ¿Cómo lo sabes?

27. Porque es una serie: $1 - 1+2$
 $2 - 2+3$
 $3 - 3+4$
 $13 - 13+14 = 27$

c) ¿Cuántas macetas tendrá el jardín el día 28? ¿Cómo lo sabes?

57. Porque $28+29 = 57$ $n + (n+1)$.

Figura 3.5. Ejemplo de estrategia de descomposición de Jardín A (Anexo 1).

b) ¿Cuántas macetas tendrá el jardín el día 13? ¿Cómo lo sabes?

27. Hay dos filas, una con el mismo número de macetas que el día 13 y otra con una maceta más. $13 + 14 = 27$

c) ¿Cuántas macetas tendrá el jardín el día 28? ¿Cómo lo sabes?

57. Si hay dos filas, una con el mismo número de macetas que el día (28) y otra con una más (29), da 57

Figura 3.6. Ejemplo de estrategia de descomposición de Jardín B (Anexo 1).

- *Múltiplo de la diferencia* (chunking): se caracteriza por sumar al valor de un término la diferencia constante entre los valores de dos términos consecutivos multiplicada por la distancia entre la posición del término requerido y la de ese término. Esta estrategia puede aplicarse de dos modos distintos:
 - *Auxiliar*: si el término utilizado es un término no proporcionado en el enunciado del problema ni calculado en cuestiones anteriores.

La Figura 3.7 muestra una respuesta al problema Gusano B (Anexo 1), en la que el estudiante utiliza el valor del término 0 (3) para calcular el valor de la posición demandada $((37-0) \times 1 + 3)$. En este caso, el estudiante no realiza la multiplicación porque la diferencia entre los términos consecutivos es 1.

Siguiente Apartado	Gusano	c				26/3/19 10:37
Explicacion	Gusano	c	He sumado los minutos mas 3			26/3/19 10:37
Comprobar	Gusano	c		40	Bien	26/3/19 10:37
Siguiente Apartado	Gusano	d				26/3/19 10:37
Explicacion	Gusano	d	Sumando los minutos mas 3 que son las bolitas que tendría en el minuto 0 Fórmula: minutos+3			26/3/19 10:39

Figura 3.7. Ejemplo de estrategia auxiliar de Gusano B (Anexo 1).

- *Anterior*: si el término utilizado es un término proporcionado en el enunciado del problema o calculado en cuestiones anteriores.

En el apartado b) de la Figura 3.8, el estudiante multiplicó la diferencia entre las posiciones de los apartados a) y b) ($13-5=8$) por la diferencia entre los valores de dos términos consecutivos (2) para, posteriormente, sumar el resultado de la multiplicación (16) al valor de la posición del apartado a) (11).

a) ¿Cuántas macetas tendrá el jardín el día 5? ¿Cómo lo sabes?
11 porque cada día hay 2 más.
b) ¿Cuántas macetas tendrá el jardín el día 13? ¿Cómo lo sabes?
$\begin{array}{r} 13 \\ - 5 \\ \hline 8 \end{array}$ $8 \times 2 = 16$ $16 + 11 = 27$ 27 macetas. Porque cada día tiene 2 más.

Figura 3.8. Ejemplo de estrategia anterior de Jardín B (Anexo 1).

- *Primero*: si el término utilizado es el primer término de la sucesión. Es un subtipo de *anterior*.

En la Figura 3.9, el estudiante multiplicó la diferencia entre las posiciones del término 1 y el apartado c) ($28-1=27$) por la diferencia entre los valores de dos términos consecutivos (2) para, posteriormente, sumar el resultado de la multiplicación (54) al valor del término 1 (3).

Calcular	Jardín	c				$27 \times 2 = 54$	5/3/18 9:24
Comprobar	Jardín	c		57	Bien		5/3/18 9:25
Explicación	Jardín	c	Si le resto				5/3/18 9:25
Explicación	Jardín	c	Si le resto 1 a 28 me da 27 que lo multiplico por dos y me da 54 que le sumo las 3 del primer día				5/3/18 9:27
Comprobar	Jardín	c		57	Bien		5/3/18 9:27

Figura 3.9. Ejemplo de estrategia primero de Jardín B (Anexo 1).

- *Construcción* (whole-object): los estudiantes utilizan los valores de uno o varios términos previos conocidos para obtener, mediante operaciones aritméticas, el valor del término requerido. Para esta estrategia distinguimos distintas subcategorías, sin embargo, utilizamos la categoría global en aquellas estrategias de tipo construcción no clasificables dentro de las otras subcategorías. Dentro de esta categoría podemos encontrar tres estrategias:
 - *Proporcional* (proportional): se caracteriza por usar una relación de proporcionalidad, que en los patrones basados en relaciones funcionales afines es errónea, entre las posiciones de dos términos y sus valores para calcular el valor de uno de los términos.

En la Figura 3.10, el estudiante usó el valor del término 1 (3) para obtener el valor demandado mediante una relación errónea de proporcionalidad.

b) ¿Cuántas macetas tendrá el jardín el día 13? ¿Cómo lo sabes?	
$\begin{array}{r} 13 \\ \times 3 \\ \hline 39 \end{array}$	<u>Por que he multiplicado 13 x 3 que es un día.</u>

Figura 3.10. Ejemplo de estrategia proporcional de Jardín B (Anexo 1).

- *Aditiva*: consiste en establecer una relación aditiva entre las posiciones de términos conocidos y del término requerido y obtener el valor de este aplicando la misma relación a los valores de los términos conocidos.

En la Figura 3.11, el estudiante obtuvo la posición del término requerido a partir de la suma de las posiciones de otros términos y utilizó los valores de estos términos para calcular el resultado.

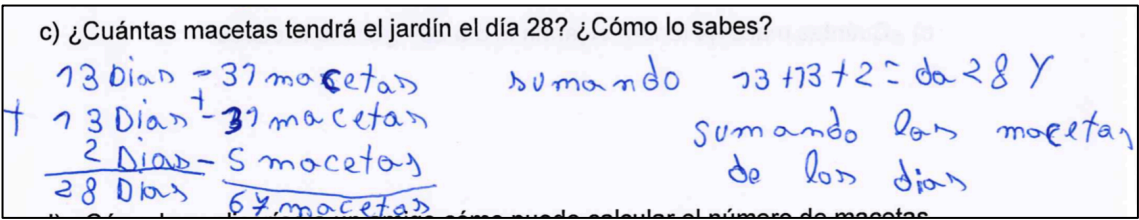


Figura 3.11. Ejemplo de estrategia aditiva de Jardín B (Anexo 1).

- *Combinada*: se basa en calcular el valor de un término a partir de una combinación de relaciones proporcionales y aditivas entre otros términos con valores conocidos.

En la Figura 3.12, para obtener el valor del término 15, el estudiante usó el valor del término 7 (14) para obtener el valor del término 14 utilizando una relación de proporcionalidad y, luego, sumó el valor del término 1 (2) al resultado.

Calcular	Cumpleaños_A	b	14*2+2 = 30	27/3/19 10:28
Comprobar	Cumpleaños_A	b	30 Bien	27/3/19 10:28
Explicacion	Cumpleaños_A	b	Como en 7 mesas caben 14 personas e multiplicado 14x2 y luego le e sumado 2 invitados más que será la mesa 15	27/3/19 10:30

Figura 3.12. Ejemplo de estrategia combinada de Cumpleaños 1A (Anexo 1).

- *Ensayo y error* (trial and error): los estudiantes obtienen la respuesta o una regla que funcione tras varias pruebas con diversas operaciones y los datos conocidos.

En la Figura 3.13, el estudiante fue probando distintos valores hasta encontrar el resultado correcto. Como se puede ver, en este caso los valores y los cálculos son aleatorios y no siguen un desarrollo lógico con respecto al problema planteado.

Siguiente Apartado	Cumpleaños_A	b				2/5/18 12:33
Comprobar	Cumpleaños_A	b		24 Mal		2/5/18 12:34
Comprobar	Cumpleaños_A	b		33 Mal		2/5/18 12:35
Calcular	Cumpleaños_A	b			15/12 = 1.25	2/5/18 12:37
Calcular	Cumpleaños_A	b			3/6 = 0.5	2/5/18 12:38
Comprobar	Cumpleaños_A	b		20 Mal		2/5/18 12:39
Comprobar	Cumpleaños_A	b		10 Mal		2/5/18 12:39
Calcular	Cumpleaños_A	b			15/6 = 2.5	2/5/18 12:40
Comprobar	Cumpleaños_A	b		30 Bien		2/5/18 12:41

Figura 3.13. Ejemplo de estrategia de ensayo y error de Cumpleaños 1A (Anexo 1).

- *Otras*: estrategias que no pueden incluirse en ninguna de las categorías anteriores o que son combinaciones de estas.

En la Figura 3.14, el estudiante empleó dos de las estrategias descritas previamente. Primero, utilizó la estrategia proporcional, al usar el valor del término 5 (11) para obtener el valor del término 10 ($f(10)=f(5)\times 2$) y, después, utilizó la estrategia múltiplo de la diferencia (auxiliar), al calcular la diferencia entre las posiciones del término 10, que no había sido proporcionado anteriormente, y del 13 y multiplicarla por la diferencia entre los valores de dos términos consecutivos (2).

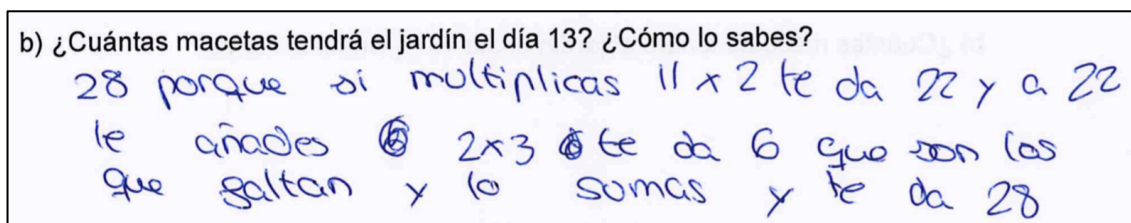


Figura 3.14. Ejemplo de estrategia otras de Jardín B (Anexo 1).

3.3.2. Estrategias en cuestiones de relación inversa

Las estrategias empleadas para el cálculo de posiciones de los términos, a partir de su valor, podemos clasificarlas en:

- *Inversión aritmética*: consiste en invertir los cálculos aritméticos hechos en las cuestiones de relación directa.

En la Figura 3.15, el estudiante realizó las operaciones inversas a las que había realizado en las cuestiones directas (multiplicar por 2 y sumar 1) y en el orden contrario al de las directas (restar 1 y dividir entre 2).

d) ¿Cómo le explicarías a un amigo cómo puede calcular el número de macetas que tendrá el jardín cada día?

A el día lo multiplicas por 2 y le sumas 1.

e) Luis ha contado 39 macetas, ¿sabrías decir qué día es? ¿Cómo lo sabes?

El día 19. $(39-1):2$

Figura 3.15. Ejemplo de estrategia de inversión aritmética de Jardín A (Anexo 1).

- *Inversión algebraica*: los estudiantes utilizan la expresión algebraica para invertir los cálculos realizados en las cuestiones de relación directa. Sin embargo, aún no están preparados para realizar una resolución usando ecuaciones y, como consecuencia, realizan una resolución aritmética.

En la Figura 3.16, el estudiante invirtió las operaciones y el orden que había utilizado en las cuestiones de relación directa y, posteriormente, fue capaz de transformar esas operaciones en una expresión algebraica simbólica.

Calcular	Jardin_2	d				$2 \cdot 13 + 1 = 27$	23/3/19 13:17
Explicacion	Jardin_2	d	$2x13+1$				23/3/19 13:17
Siguiente Apartado	Jardin_2	e					23/3/19 13:17
Calcular	Jardin_2	e				$85 - 1/2 = 84.5$	23/3/19 13:20
Calcular	Jardin_2	e				$85 - 1/2 = 84.5$	23/3/19 13:20
Calcular	Jardin_2	e				$(85 - 1)/2 = 42$	23/3/19 13:21
Comprobar	Jardin_2	e		42	Bien		23/3/19 13:21
Explicacion	Jardin_2	e	$(Macetas-1)/2$				23/3/19 13:22

Figura 3.16. Ejemplo de estrategia de inversión algebraica de Jardín D2 (Anexo 1).

- *Ecuación*: se caracteriza por formular una ecuación y resolverla.

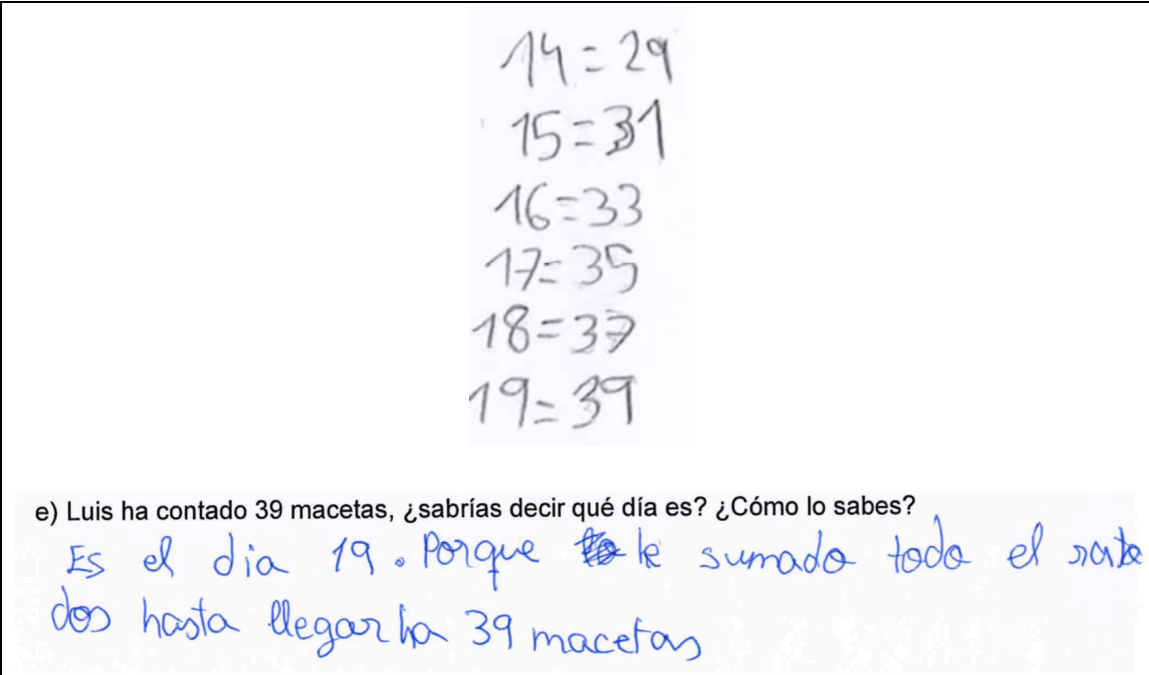
En la Figura 3.17, el estudiante fue capaz de plantear una ecuación a partir de la expresión algebraica que había utilizado en las cuestiones de relación directa y resolverla correctamente.

Explicacion	Jardin_2	c	$M = 2xD + 1$				23/3/19 12:14
Siguiente Apartado	Jardin_2	d					23/3/19 12:14
Comprobar	Jardin_2	d		27	Bien		23/3/19 12:14
Siguiente Apartado	Jardin_2	e					23/3/19 12:14
Explicacion	Jardin_2	e	$M = 2xD + 1$ $D = (M-1)/2$				23/3/19 12:15
Comprobar	Jardin_2	e		42	Bien		23/3/19 12:15

Figura 3.17. Ejemplo de estrategia de ecuación de Jardín D2 (Anexo 1).

- *Operaciones directas*: se basa en usar una estrategia que podría aplicarse para obtener la solución de las cuestiones de relación directa.

En la Figura 3.18, el estudiante utilizó la estrategia recursiva para calcular la posición a partir de un término previo conocido, sumando a ese término la diferencia entre los valores de dos términos consecutivos (2) las veces necesarias hasta obtener 39 macetas.



Handwritten calculations showing a sequence of numbers:

$$\begin{aligned} 14 &= 29 \\ 15 &= 31 \\ 16 &= 33 \\ 17 &= 35 \\ 18 &= 37 \\ 19 &= 39 \end{aligned}$$

e) Luis ha contado 39 macetas, ¿sabrías decir qué día es? ¿Cómo lo sabes?

Es el día 19. Porque se le sumado toda el resto dos hasta llegar a 39 macetas

Figura 3.18. Ejemplo de estrategia de operaciones directas de Jardín B (Anexo 1).

- *Ensayo y error* (trial and error): los estudiantes obtienen la respuesta o una regla que funcione tras varias pruebas con diversas operaciones y datos conocidos.

En la Figura 3.19, el estudiante fue probando distintos valores hasta encontrar el resultado correcto. Como se puede ver, los valores y los cálculos son aleatorios y no siguen un desarrollo lógico con respecto al problema planteado. Posteriormente, intentó proporcionar una explicación razonable a su respuesta.

Siguiente Apartado	Cumpleaños_A	e				2/5/18 10:35
Calcular	Cumpleaños_A	e			5*5 = 25	2/5/18 10:36
Calcular	Cumpleaños_A	e			25 = 25	2/5/18 10:36
Calcular	Cumpleaños_A	e			4*5 = 20	2/5/18 10:36
Comprobar	Cumpleaños_A	e		4	Mal	2/5/18 10:36
Calcular	Cumpleaños_A	e			4*4 = 16	2/5/18 10:37
Calcular	Cumpleaños_A	e			16 = 16	2/5/18 10:37
Comprobar	Cumpleaños_A	e		5	Mal	2/5/18 10:37
Comprobar	Cumpleaños_A	e		10	Mal	2/5/18 10:37
Comprobar	Cumpleaños_A	e		11	Bien	2/5/18 10:37
Explicacion	Cumpleaños_A	e	He dividido 22 por 11 y meda 22 entonces hay 22 mesas			2/5/18 10:39

Figura 3.19. Ejemplo de estrategia de ensayo y error de Cumpleaños 1A (Anexo 1).

- *Otras:* estrategias que no pueden incluirse en ninguna de las categorías anteriores.

3.4. Tipos de generalización

Las estrategias para contestar a las distintas cuestiones sobre los valores de términos concretos de la sucesión de los ppg conducen a la generalización de las relaciones numéricas del patrón. “Una generalización implica que algo nuevo se ha hecho evidente (por ejemplo, que una relación entre ciertos objetos concretos se aplica a otros objetos concretos o incluso a nuevos objetos)” (Radford, 2003, p. 65). El proceso de generalización incluye dos componentes interrelacionados: observar los aspectos comunes en términos particulares (distinguiendo entre elementos iguales y diferentes) y formar un concepto general mediante generalización de los aspectos comunes identificados a todos los términos de la secuencia (Radford, 2006).

A partir de estas ideas, Radford (2006) distingue, según el tipo de estrategia empleada, entre inducción ingenua (los estudiantes resuelven problemas de patrones mediante ensayo y error) y generalización (buscan similitudes entre las figuras). Además, distingue dos tipos de generalización, ya que no todas las

generalizaciones pueden ser consideradas algebraicas, pues, para ello, se necesita la aparición de un tercer componente. Radford (2010, p. 42) define la generalización algebraica de un patrón como “la capacidad para captar un aspecto común en algunos elementos de una secuencia S, siendo consciente de que ese aspecto común se aplica a todos los términos de S y siendo capaz de usarlo para proporcionar una expresión directa de cualquier término de S”. Siguiendo esta definición (Radford, 2010), podemos diferenciar dos tipos de generalización: la *generalización aritmética*, que implica observar una propiedad común de forma local, es decir, sin ser capaz de proporcionar una expresión que permita obtener cualquier término de la secuencia, y la *generalización algebraica*, que se produce cuando se observa una propiedad común global, permitiendo la expresión directa de cualquier término. Normalmente se asocia la generalización algebraica al uso de símbolos algebraicos alfanuméricos, pero, en realidad, este tipo de generalización se puede expresar a través de distintos sistemas semióticos (Radford, 2013).

Radford (2010) se refiere al proceso de objetivación como las acciones enfocadas a generalizar y materializar una característica común de los elementos del patrón mediante el uso de signos y artefactos de distinta índole (símbolos matemáticos, gráficos, palabras, gestos, cálculos...) que él nombra sistemas semióticos de objetivación (ver Radford, 2003). “Un sistema semiótico nos proporciona formas específicas de significar o decir ciertas cosas, mientras que otro sistema semiótico nos provee de otras formas de significación” (Radford, 2010, p. 44). Según el sistema semiótico de objetivación empleado, podemos diferenciar tres niveles de generalización algebraica.

La *generalización factual*, que se expresa mediante una regla o fórmula mostrada en acción, es decir, mediante la expresión en números concretos de cualquier figura particular (Radford, 2010). En este caso, la variable permanece implícita y no es nombrada, sino que es expresada en acciones concretas (Radford, 2006). Para ello se emplea la presencia de adverbios (por ejemplo, siempre), ritmo y movimiento (gestos) (Radford, 2003).

La *generalización contextual*, que se distingue de la anterior en que la variable es nombrada y se hace explícita lingüísticamente (Radford, 2010), “haciendo

referencia a las particularidades contextuales espaciales y temporales de los objetos abstractos” (Radford, 2001). En este caso, se generaliza no solo las acciones numéricas sino también los objetos de las acciones (Radford, 2003). Se observa la introducción de pronombres personales para hacer referencia al destinatario, que es quien realiza la acción requerida por la tarea, y los objetos abstractos son nombrados usando términos deícticos o demostrativos (espaciales y temporales) como “la figura” o “la figura siguiente” (Radford, 2001).

La *generalización simbólica*, donde la variable es nombrada y se hace explícita lingüísticamente, expresando los objetos abstractos y las operaciones en el sistema semiótico alfanumérico del álgebra (Radford, 2010). Para ello, los estudiantes deben realizar un proceso de desobjetivación que libere a los signos empleados de las características espaciotemporales y sustituya la acción del destinatario sobre los objetos abstractos por una voz impersonal (Radford, 2001). Generalmente, los estudiantes prealgebraicos suelen producir signos que, en realidad, son abreviaciones del discurso o de las acciones concretas (Radford, 2001), dando lugar a expresiones simbólicas que son aún contextuales en naturaleza (Radford, 2003). De hecho, el signo o la letra simbólica utilizada es producto de una “contracción semiótica” como consecuencia de una cristalización del proceso semiótico donde cada signo tiene su propio significado (Radford, 2006). Esto genera límites en la manipulación de las expresiones algebraicas, pues los signos no pueden ser separados de su expresión algebraica inicial (vista como un todo) y, posteriormente, reagrupados (Radford, 2003).

De manera resumida, los niveles de generalización que propone Radford (2006) (esquematizados en la Tabla 3.1) son:

- *Inducción ingenua* (naïve induction): los estudiantes resuelven los problemas mediante estrategias de ensayo y error o recuento sin llegar a realizar una generalización.

En las Figuras 3.3 y 3.13 podemos ver ejemplos de inducción ingenua.

- *Generalización*: se distinguen dos formas de generalización.

- *Generalización aritmética* (arithmetic generalization): la regla general se basa en una regularidad observada en términos concretos que, en la práctica, no permite calcular el valor de cualquier término de la sucesión.

La Figura 3.4 y el apartado a) de la Figura 3.8 son un ejemplo de generalización aritmética.

- *Generalización algebraica*: se distinguen tres tipos de generalización algebraica.

- *Factual* (factual algebraic generalization): expresar una regla general mediante operaciones con números concretos, que suelen referirse a un término específico, de forma que es posible calcular el valor de cualquier término.

En el apartado b) de la Figura 3.5 mostramos un ejemplo de generalización algebraica factual.

- *Contextual* (contextual algebraic generalization): expresar una regla general, válida para cualquier término, de forma verbal y contextualizada.

La Figura 3.6 es un ejemplo de generalización algebraica contextual.

- *Simbólica* (symbolic algebraic generalization): expresar una regla general, válida para cualquier término, utilizando expresiones algebraicas alfanuméricas.

En el apartado c) de la Figura 3.5 y el apartado d) de la Figura 3.7 podemos ver ejemplos de generalización algebraica simbólica.

Tabla 3.1. Niveles de generalización, extraída de Radford (2006).

Inducción ingenua	Generalización			
Adivinar (Ensayo y Error)	Aritmética	Algebraica		
		Factual	Contextual	Simbólica

3.5. Características de estudiantes con altas capacidades matemáticas

Los problemas de patrones geométricos, al ser considerados actividades matemáticas ricas, permiten a los estudiantes con altas capacidades matemáticas profundizar en la comprensión de las matemáticas a través de tareas interesantes y motivadoras, que les supongan un reto a superar (Singer et al., 2016). Un rasgo que caracteriza y diferencia a los estudiantes con altas capacidades matemáticas es la capacidad de generalizar (Krutetskii, 1976; Greenes, 1981; Tourón et al., 1998), debido a los aspectos matemáticos que involucra, como la abstracción, la visualización, el pensamiento holístico, el razonamiento y la flexibilidad (Amit y Neria, 2008).

En concreto, en esta investigación nos centramos en el desarrollo de las características de los estudiantes con altas capacidades matemáticas de entre las descritas en la Tabla 2.1 y que se ponen de manifiesto durante la resolución de ppg:

- Habilidad para identificar patrones y relaciones matemáticas (Miller, 1990; Freiman, 2006).
- Habilidad para generalizar (Krutetskii, 1976; Greenes, 1981; Tourón et al., 1998).
- Habilidad para desarrollar estrategias eficientes (Freiman, 2006).
- Flexibilidad de pensamiento (Krutetskii, 1976; Greenes, 1981; Miller, 1990; Tourón et al., 1998; Freiman, 2006).
- Habilidad para invertir procesos mentales (Krutetskii, 1976; Tourón et al., 1998).

4. METODOLOGÍA

En este capítulo describimos la metodología de investigación utilizada. En la sección 4.1 incluimos una descripción de los elementos clave de la metodología cualitativa de la investigación. En la sección 4.2, detallamos la información relativa a los distintos experimentos en cada una de las fases de la investigación: muestras de estudiantes, objetivos de aprendizaje, descripción de las secuencias de enseñanza, instrumentos de recogida de datos, así como los criterios de análisis de los datos.

4.1. Metodología de la investigación

Con el fin de dar respuesta a los objetivos de investigación planteados, surgió la necesidad de escoger una metodología que nos permitiese tanto diseñar secuencias de enseñanza-aprendizaje, sujetas a constantes revisiones y modificaciones, como analizar los procesos de aprendizaje desarrollados por los estudiantes durante la implementación de estas secuencias (Cobb, Confrey, DiSessa, Lehrer y Schauble, 2003). Por ello, elegimos una metodología cualitativa de investigación enfocada a una intervención educativa llevada a cabo en el aula para estudiantes de 4.º, 5.º y 6.º de Educación Primaria.

Existe una variada tipología de experimentos dentro de la investigación en educación matemática. Siguiendo la clasificación de Cobb et al. (2003), podemos distinguir cinco tipos de experimentos: uno a uno, de aula, para el desarrollo de maestros en formación, para el desarrollo de maestros en activo y de reestructuración escolar. Entre ellos destacamos el *experimento de aula*, en

el cual “un equipo de investigadores asume la responsabilidad del aprendizaje de un grupo de estudiantes” (Cobb y Gravemeijer, 2008, p. 68). Su objetivo es “elaborar un modelo del aprendizaje y/o desarrollo de los alumnos, en relación con un contenido específico, entendiendo este aprendizaje como resultado de operar y las situaciones puestas en juego por el investigador-docente” (Molina, Castro, Molina y Castro, 2011, p. 79).

Esta investigación también incluye una parte de estadística descriptiva elemental necesaria para sintetizar la información cuantitativa de las respuestas de los estudiantes de esta investigación y poder hacer comparaciones entre grupos de estudiantes.

4.2. Diseño y realización de los experimentos

En esta sección describimos las características de los experimentos llevados a cabo durante esta investigación: dos experimentos longitudinales y tres experimentos con estudiantes con altas capacidades matemáticas. En la descripción de las experimentaciones detallamos las muestras de estudiantes, las sesiones realizadas y su duración, así como los métodos de recogida de datos.

4.2.1. Preparación del experimento

Uno de los aspectos clave que debemos tener en cuenta para preparar un experimento es la intencionalidad del mismo, es decir, ser conscientes de cuál es el objetivo de nuestra investigación y a dónde queremos llegar con él. Según Cobb et al. (2003), la intención de la mayoría de los experimentos de aula es identificar patrones de pensamiento que conducen a los estudiantes a la adquisición de un contenido particular que tratan de aprender.

De acuerdo con los objetivos de nuestra investigación, descritos en el capítulo 1, los experimentos que hemos realizado pretendían poner de relieve las diversas estrategias y tipos de generalización empleados por estudiantes de 4.º a 6.º curso de Educación Primaria al resolver problemas de patrones geométricos como forma de iniciación al álgebra.

Pero no solo debemos tener clara la intencionalidad de la investigación, sino también los objetivos y resultados de aprendizaje que queremos que los estudiantes alcancen a través del experimento. Para ello, es importante conocer el punto de partida instruccional de nuestros estudiantes, es decir, los aspectos clave de su razonamiento inicial que servirán de base para el diseño del experimento (Cobb, Jackson y Dunlap, 2015). En este sentido, la literatura previa existente en nuestro campo de investigación puede servir para identificar los aspectos clave del punto de partida instruccional.

En edades tempranas, como la Educación Primaria, los problemas de patrones geométricos pueden ser una buena forma de introducir el álgebra (Amit y Neria, 2008; Cooper y Warren, 2011; Radford, 2011b; Fritzlar y Karpinski-Siebold, 2012). Diversos estudios han demostrado la eficacia de la resolución de problemas para el desarrollo de la creatividad y el talento matemático (Singer et al., 2016). En concreto, los problemas de patrones geométricos se enmarcan dentro del contexto de las actividades matemáticas ricas, destacando también por su carácter motivador y de profundización en estos estudiantes (Singer et al., 2016).

En la literatura de didáctica de las matemáticas sobre la generalización y el aprendizaje del álgebra, podemos identificar algunos cambios significativos que marcan la transición de pensamiento aritmético a algebraico. Tomando como referencia a Filloy, Puig, y Rojano (2008), encontramos tres conceptos clave en la adquisición del pensamiento algebraico:

- La interpretación de las letras.
- La noción de igualdad.
- Las convenciones simbólicas para codificar operaciones y transformaciones en la resolución de ecuaciones.

Estos cambios significativos, según apuntan Filloy et al. (2008), pueden ser entendidos como cortes didácticos entre el pensamiento aritmético y el pensamiento algebraico. Por este motivo, los tomamos como puntos de partida instruccionales para el diseño de las diferentes partes de la secuencia de enseñanza.

4.2.1.1. Experimentos realizados

En esta investigación hemos realizado diversos experimentos con el fin de poder analizar de forma cualitativa las soluciones aportadas por estudiantes de diferentes edades y grados de destreza matemática, así como valorar su aprendizaje a través de la secuencia didáctica. En concreto, planteamos los siguientes experimentos:

1. Experimentos con los mismos estudiantes de aulas ordinarias en diferentes cursos a lo largo de varios años (estudio longitudinal). En particular:
 - a. Un estudio longitudinal iniciado en 4.º y finalizado en 6.º de Educación Primaria que comprendió los cursos académicos 2016-2017 a 2018-2019 (L456: L417, L518 y L619).
 - b. Un estudio longitudinal iniciado en 5.º y finalizado en 6.º de Educación Primaria que comprendió los cursos académicos 2016-2017 a 2017-2018 (L56: L517 y L618).
2. Experimentos con distintos estudiantes con altas capacidades matemáticas en los mismos cursos en un momento concreto. En particular:
 - a. Dos experimentos en años diferentes (cursos académicos 2016-2017 y 2018-2019) con estudiantes de 5.º y 6.º de Educación Primaria que asistían de forma conjunta a un taller extraescolar de matemáticas (A5617 y A5619).
 - b. Un experimento con el grupo de estudiantes de 3.º y 4.º de Educación Primaria (A3419) que también asistían al taller extraescolar de matemáticas (curso académico 2018-2019).

Para los distintos experimentos realizados seleccionamos muestras de conveniencia con estudiantes que no tenían conocimientos previos sobre álgebra ni habían resuelto con anterioridad problemas de patrones geométricos. En la Tabla 4.1 mostramos la cantidad de estudiantes participantes por curso en cada experimento, así como el total de la muestra para cada estudio.

En los estudios longitudinales (L456 y L56), seleccionamos una muestra de conveniencia formada por dos grupos de estudiantes (A y B) de 4.º (L456) y 5.º (L56) de Educación Primaria de un centro público. Durante los cursos siguientes volvimos a seleccionar ambos grupos para la continuación del experimento. Como se puede observar en la tabla 4.3, el número total de estudiantes sufrió diversas variaciones a lo largo de los años debido a la salida y entrada de distintos estudiantes en el centro. Por este motivo, en la tabla 4.3 también se muestra el total de estudiantes que estuvieron presentes durante todo el experimento.

En el estudio con altas capacidades matemáticas, seleccionamos tres grupos de estudiantes, identificados como superdotados mediante pruebas estandarizadas ($\text{test CI} \geq 130$), que acudieron a talleres extraescolares de matemáticas para superdotados en distintos cursos escolares (2017 y 2019). Dos de estos grupos estaban formados por estudiantes de 5.º y 6.º de Educación Primaria que trabajaban de forma conjunta durante las clases. El tercer grupo estaba formado por estudiantes de 3.º y 4.º de Educación Primaria.

Tabla 4.1. Cantidad de participantes en los experimentos realizados.

Estudio	Curso	Número de estudiantes
L456	L417	43
	L518	44
	L619	44
	Participantes L456	39
L56	L517	34
	L618	34
	Participantes L56	30
AACCMM	A3419	11
	A5617	8
	A5619	10

En la Tabla 4.2 presentamos los objetivos de aprendizaje que se plantearon para las distintas experimentaciones:

Tabla 4.2. Objetivos de aprendizaje de cada experimento.

Objetivos de aprendizaje	L456	L56	A5617	A5619	A3419
Identificar y generalizar relaciones funcionales en ppg	X	X	X	X	X
Expresar generalizaciones mediante expresiones verbales	X	X	X	X	X
Expresar generalizaciones mediante expresiones algebraicas empleando palabras o letras para representar la incógnita	X	X	X	X	X
Simplificar expresiones algebraicas	X	X		X	
Invertir operaciones en expresiones algebraicas	X	X	X		X
Resolver ecuaciones	X	X		X	

4.2.1.2. Batería de problemas

Para alcanzar los objetivos de aprendizaje planteados, diseñamos una batería de problemas de patrones geométricos. Dada la gran variedad de problemas resultantes, hemos elaborado un sistema de denominación mediante el cual podemos identificar cada problema y determinadas características suyas. El nombre de los problemas estará formado por la siguiente secuencia: *Nombre Número-Letra-Número*.

- El *Nombre* hace referencia al patrón utilizado y el contexto dado a este problema.
- El primer *Número* indica la complejidad del patrón utilizado, cuando se ha usado más de una versión de ese patrón en las secuencias planteadas. En caso contrario, no aparece el número. Pueden aparecer dos números:
 1. Si se trata de la versión fácil.
 2. Si se trata de la versión difícil.
- La *Letra* nos indica qué cuestiones, denotadas mediante letras minúsculas (a – e), y en qué orden aparecen en el problema (Tabla 4.3).

- El último *Número* nos indica el nivel de dificultad de las cuestiones cuando en algún problema existen distintas opciones de datos numéricos para alguna de sus cuestiones. En caso contrario, no aparece el número. Sigue la misma clasificación que la numeración anteriormente descrita.

Tabla 4.3. Significado de las letras de la denominación de problemas.

	A	B	C	D	E
a)	Generalización inmediata	Generalización inmediata	Generalización inmediata	Generalización lejana	Fórmula
b)	Generalización cercana	Generalización cercana	Generalización lejana	Fórmula	Simplificación
c)	Generalización lejana	Generalización lejana	Verbalización / Fórmula	Simplificación	Generalización cercana
d)	Verbalización	Verbalización / Fórmula	Generalización cercana	Generalización cercana	Inversión
e)	Inversión	Inversión	Inversión	Inversión	Inversión

Además de los problemas de patrones geométricos descritos, también se planteó un problema basado en la traducción de expresiones verbales a expresiones algebraicas para fomentar este aprendizaje y valorar su grado de adquisición entre los estudiantes. En el Anexo I se recoge toda la batería de problemas empleada en las experimentaciones realizadas con sus distintas variantes, indicadas mediante el sistema de denominación descrito.

4.2.1.3. GeoPattern

La popularización del uso de herramientas informáticas en las aulas (ordenadores y, más frecuentemente, tabletas y teléfonos inteligentes) posibilita un nuevo estilo de trabajo para los estudiantes, en el que las aplicaciones informáticas crean entornos de interacción entre los estudiantes y la aplicación que nos permiten dar retroalimentación al estudiante y llevar un registro más exhaustivo de la actividad desarrollada por él.

Es más, la investigación didáctica actual muestra que el uso adecuado de entornos interactivos, en particular entornos inteligentes, puede incrementar la competencia de los estudiantes en la resolución de problemas (González-Calero, Arnau, Puig y Arevalillo-Herráez, 2015). Esto se debe a que una de las cuatro

componentes principales de la enseñanza de las matemáticas, según De Corte, Verschaffel y Op't Eynde (2000), es la evaluación como base para el control y la retroalimentación de los estudiantes. La resolución de problemas realizada en aplicaciones informáticas permite que, una vez introducida la respuesta, informe automáticamente al usuario sobre si esta es correcta o no, al contrario de lo que suele suceder con problemas planteados con lápiz y papel, donde no se suele proporcionar un procedimiento razonable que permita a los estudiantes examinar la corrección de su solución, más allá de repasar los pasos dados y los cálculos realizados.

Así pues, en el contexto particular de la resolución de problemas en entornos TICs, la evaluación formativa puede adoptar la forma de reacción de la aplicación a la respuesta proporcionada por el estudiante al problema que la aplicación le ha planteado. Dependiendo de lo sofisticada que sea la aplicación, la reacción puede consistir en proporcionar al estudiante la respuesta correcta cuando este se equivoca y plantearle otro problema, informarle de si su respuesta es correcta o no y darle la oportunidad de intentar resolver el problema de nuevo cuando es errónea, darle algunas pistas en caso de respuestas erróneas, decidir qué problema plantearle a continuación dependiendo de los resultados obtenidos en problemas previos, sugerirle estudiar determinados contenidos matemáticos, etc.

Existen diversas aplicaciones informáticas que pueden utilizarse como ayuda y motivación para que los estudiantes de Primaria avancen en el desarrollo de su pensamiento algebraico. La mayoría de ellas están centradas en la enseñanza de la resolución de ecuaciones lineales y las contextualizan en situaciones de equilibrio, como balanzas (National Library of Virtual Manipulatives (NLVM), 2023; PhET Interactive Simulations, 2023) o pares de regiones, como en el conocido *DragonBox* (WeWantToKnow AS, 2023). Sin embargo, hay un vacío entre el uso de contextos de álgebra temprana para introducir a los estudiantes en el uso de las letras y en el significado de las expresiones algebraicas como representación abstracta de operaciones generalizadas, y el software para la resolución de ecuaciones. Ese vacío se puede evitar en el contexto de los problemas de patrones geométricos, planteando cuestiones inversas. No hemos encontrado ninguna aplicación informática que permita manipular patrones

geométricos, por lo que nosotros hemos creado una, denominada *GeoPattern*, cuyo objetivo es proporcionar un entorno para la resolución de este tipo de problemas. Consideramos que *GeoPattern* es una aportación original al uso de las TICs como promotoras del desarrollo del pensamiento algebraico.

Así pues, *GeoPattern* es una aplicación educativa para dispositivos móviles que permite la presentación y resolución de problemas de patrones geométricos. Esta aplicación presenta una interfaz de usuario diseñada para mostrar, en una misma ventana, todos los elementos necesarios para la resolución de problemas de patrones geométricos. De este modo, encontramos los mismos elementos que la resolución en papel pone a nuestra disposición y algunos más que han sido añadidos con un propósito didáctico concreto.

Centrándonos en su funcionamiento, al abrir la app *GeoPattern* en un dispositivo móvil nos encontramos con diversas ventanas antes de empezar con la resolución de problemas. En primer lugar, se nos muestra la información relativa a la aplicación (Figura 4.1). A continuación, aparece una ventana donde el investigador o maestro debe seleccionar la secuencia de problemas que el estudiante debe resolver y una serie de información necesaria y relevante para la sesión que va a desarrollarse. En la Figura 4.2, podemos observar los campos:

- *Centro*, para poder identificar los datos fácilmente en caso de emplear la app en diversos centros escolares.
- *Sesión*, para poder diferenciar la información aportada por un mismo estudiante durante diversas sesiones.
- *Prefijo*, que será el nombre que recibirá la carpeta donde se guarde la información recabada en la memoria interna del dispositivo. Es importante emplear prefijos distintos cada vez que se configure la aplicación para su uso con el fin de no sobrescribir la información guardada con anterioridad.
- *Actividades*, donde se muestra el listado de todos los problemas disponibles en la app. Cada problema muestra un campo numérico con un 0 en él. Para seleccionar y ordenar los problemas que van a ser utilizados durante la sesión, simplemente deberemos sustituir el 0 por la posición que ocupará el problema en la secuencia de actividades. Los

problemas que al pulsar el botón *Aceptar* tengan un 0 en el campo numérico no aparecerán en la secuencia de actividades.

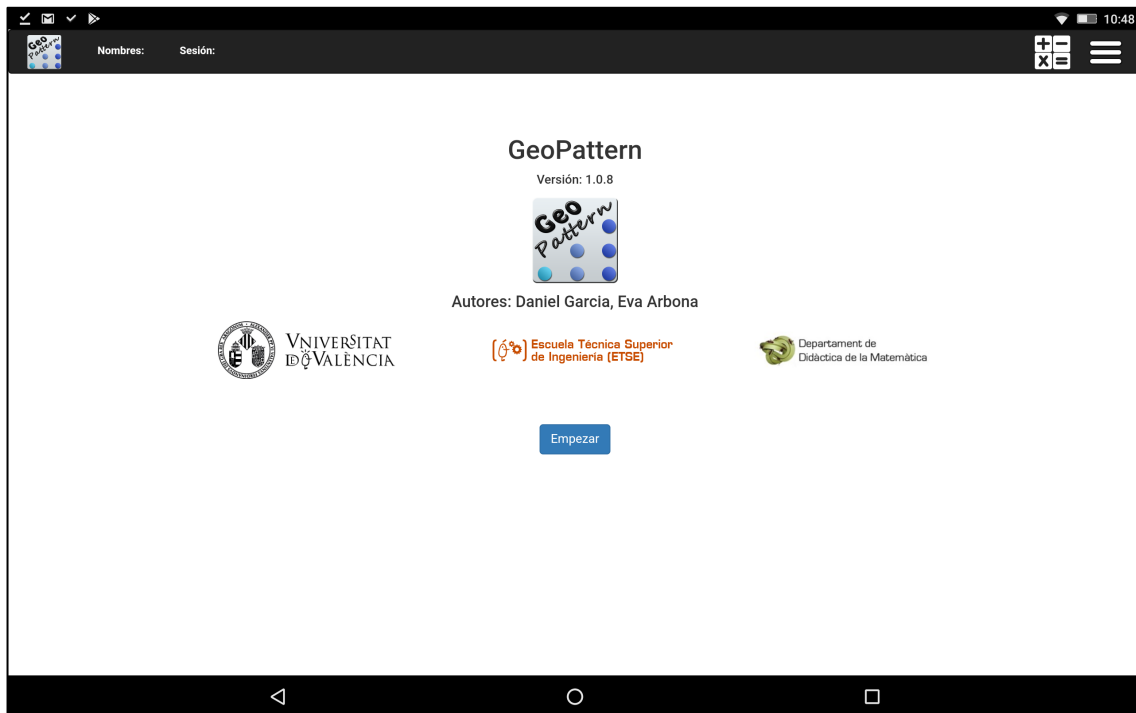


Figura 4.1. Pantalla de inicio de la app GeoPattern.

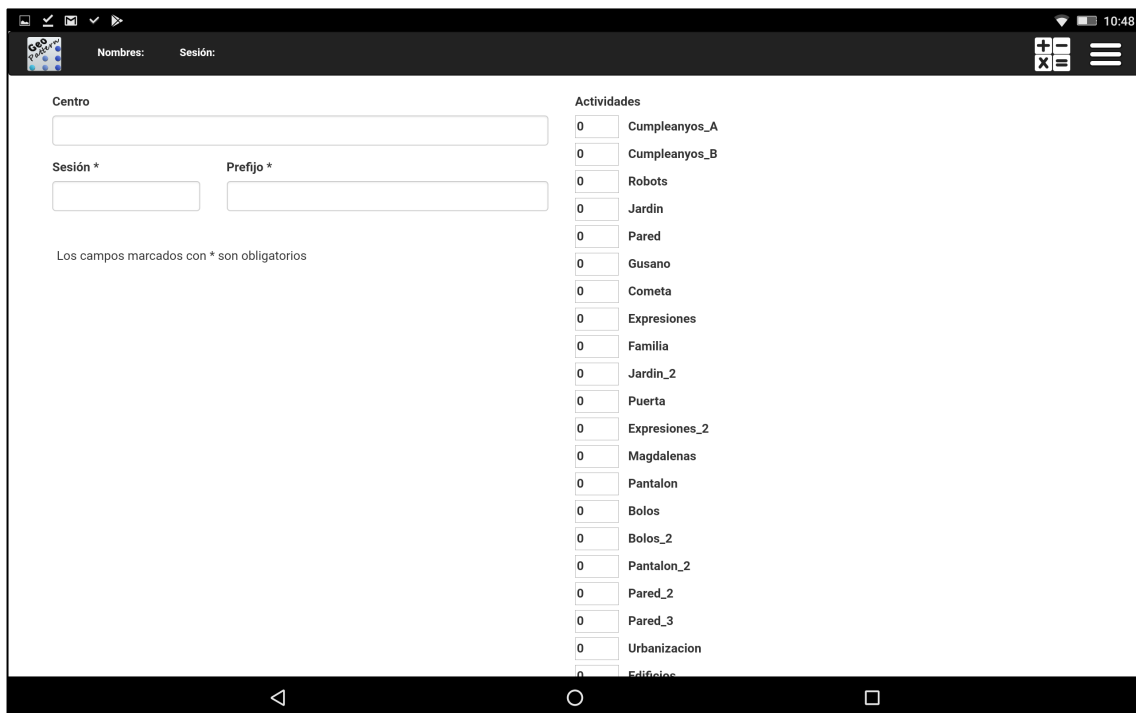


Figura 4.2. Pantalla de configuración de la sesión con GeoPattern.

Una vez el investigador o maestro ha preparado la sesión de enseñanza-aprendizaje, aparecerá la ventana mostrada en la Figura 4.3, donde el estudiante puede introducir su nombre e iniciar la resolución de problemas.

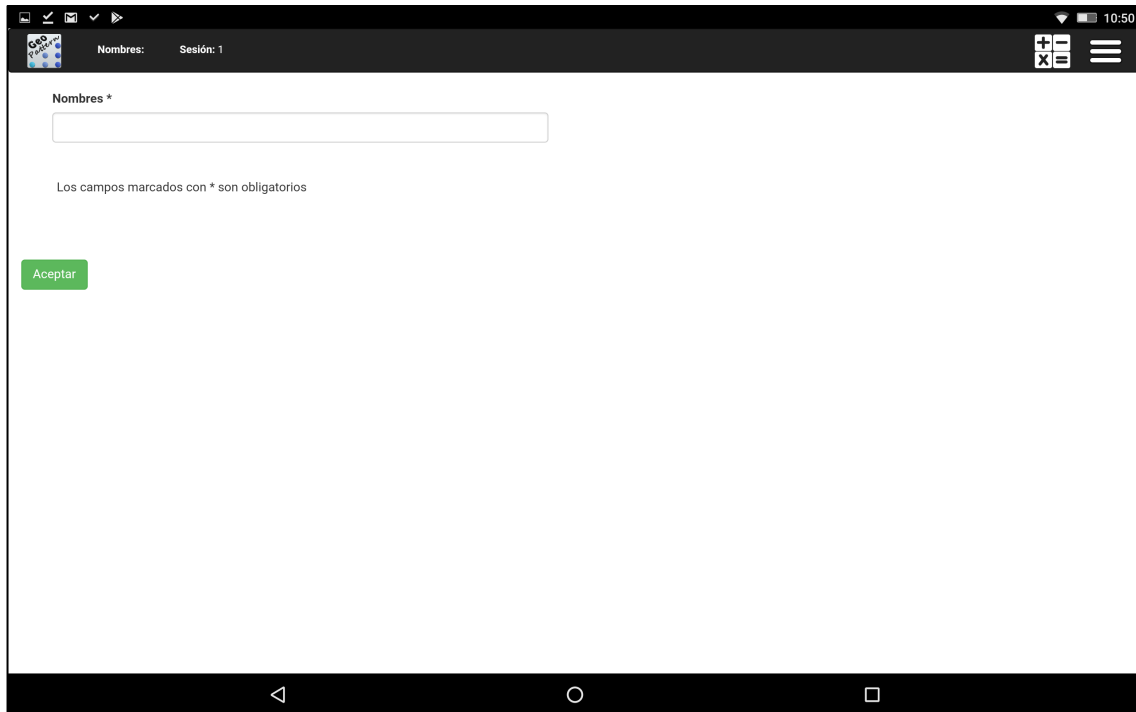
The image shows a mobile application interface for 'GeoPattern'. At the top, there is a dark header bar with the app's logo on the left and navigation icons on the right. Below the header, the text 'Nombres:' and 'Sesión: 1' is displayed. A text input field is labeled 'Nombres *'. Below the input field, a small note states 'Los campos marcados con * son obligatorios'. At the bottom left of the main content area, there is a green button labeled 'Aceptar'. The bottom of the screen features a standard Android navigation bar with back, home, and recent apps icons.

Figura 4.3. Pantalla de introducción de información del estudiante en *GeoPattern*.

En cuanto a la resolución de problemas, al estudiante se le mostrarán los problemas en el orden seleccionado previamente por el investigador o maestro. Cada problema estará formado por un total de 6 pantallas: una primera pantalla donde se muestra la explicación y contextualización del problema (Figura 4.4), seguida por 5 pantallas donde se mostrarán cada una de las cuestiones del problema de forma independiente (Figura 4.5). Durante la resolución del problema, el estudiante podrá desplazarse libremente por las 6 pantallas gracias a los botones “Anterior” y “Siguiente”. No obstante, una vez finalizado el problema e iniciado el siguiente, no será posible volver ni modificar el problema anterior, es decir, la aplicación solo permite avanzar hacia nuevos problemas sin posibilidad de volver sobre aquellos que ya han sido resueltos.

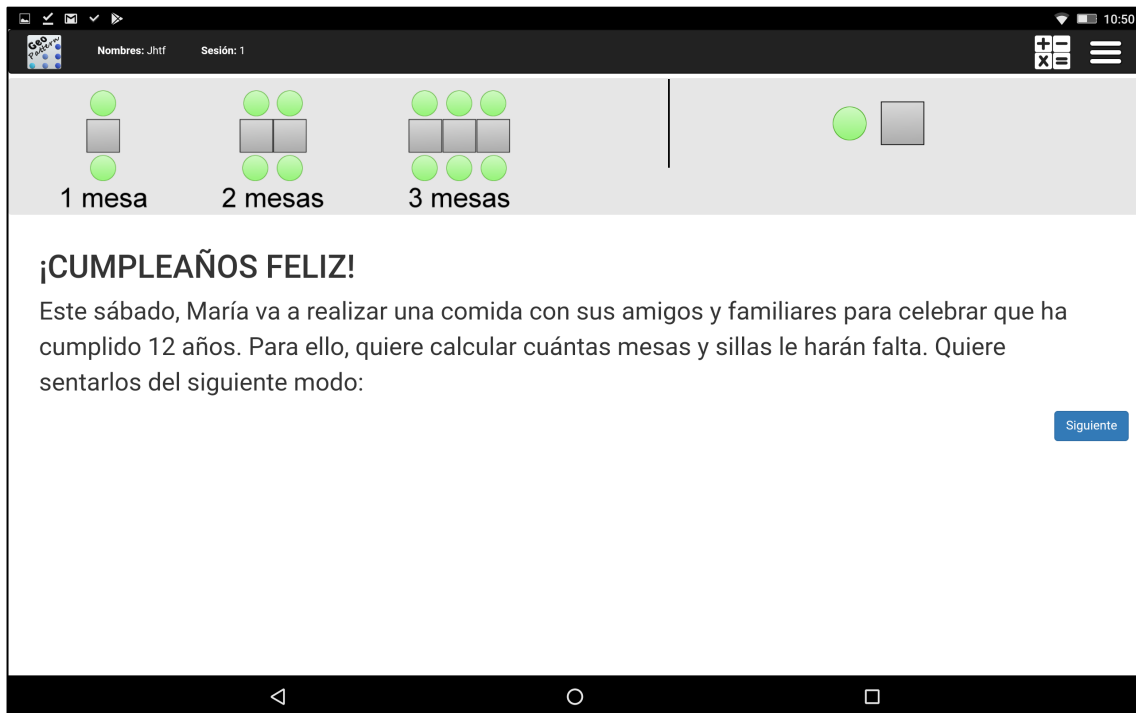


Figura 4.4. Pantalla de introducción del problema en *GeoPattern*.

En referencia a la interfaz de usuario, esta se divide en tres áreas diferenciadas (Figura 4.5):

- *La barra de menú superior*, donde se muestra (de izquierda a derecha):
 - el icono de la aplicación *GeoPattern*,
 - información relevante sobre el usuario y la sesión de enseñanza-aprendizaje que se está desarrollando,
 - el botón de la calculadora, que permite mostrarla y ocultarla para no dificultar la visualización de otros elementos, y
 - el icono de menú, que permite desplegar u ocultar la barra del patrón para disponer de una mayor área de trabajo.
- *La barra del patrón* muestra (de izquierda a derecha) la imagen gráfica del patrón geométrico que va a ser empleado en el problema en curso y las unidades geométricas básicas independientes (de 1 a 4 unidades) que son utilizadas para la formación del patrón (cuadrado, círculo, etc.). Estas unidades pueden ser insertadas en el lienzo gráfico de la zona de

respuestas y ofrecen la posibilidad de reproducir el patrón geométrico presentado.

- *La zona de respuestas*, que cuenta con diversos elementos:
 - la cuestión formulada en este apartado,
 - la ventana de resultado, donde introducir la respuesta numérica obtenida como solución de la cuestión planteada,
 - el botón *Comprobar*, que permite al estudiante verificar si la respuesta numérica introducida en la ventana de resultado es correcta (la ventana cambiará a color verde) o errónea (la ventana cambiará a color rojo),
 - el campo de texto, situado debajo de la ventana de resultado, donde el estudiante puede justificar la respuesta obtenida y explicar su proceso de obtención,
 - el lienzo gráfico, que permite al estudiante “dibujar” o reproducir el patrón utilizando sus unidades básicas y borrar aquellas que no sean necesarias arrastrándolas al icono de la papelera, y
 - los botones “Anterior” y “Siguiente”, que permiten desplazarse libremente por los distintos apartados del problema.

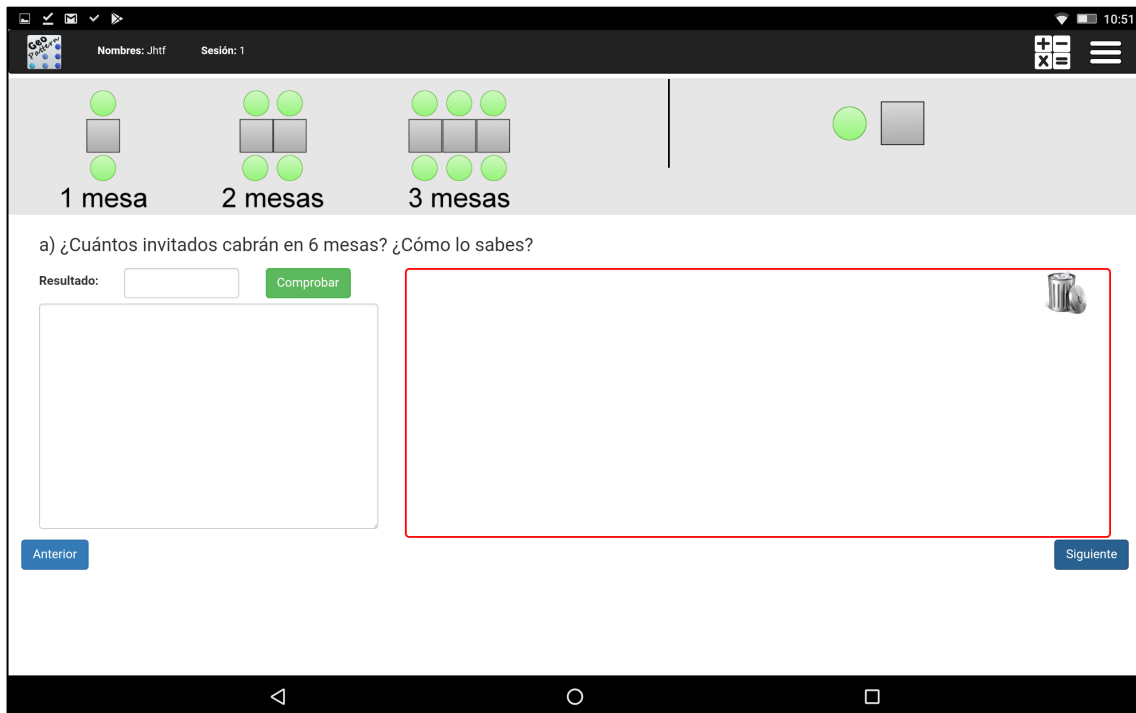


Figura 4.5. Pantalla de cuestiones del problema (interfaz de usuario) en *GeoPattern*.

Durante la resolución de los problemas, la aplicación captura automáticamente todas las acciones que el estudiante realiza y las almacena en la memoria interna del dispositivo electrónico empleado. Estas acciones se recogen en un fichero en formato CSV (*Comma-Separated Values*), donde a cada acción se le asocia una clave identificativa que se almacena junto al valor de la acción (respuesta escrita, numérica, etc.), una marca temporal, información relativa al problema que se está resolviendo y la cuestión en que se produce la acción. En caso de tratarse de una acción realizada en el lienzo gráfico, el valor que la aplicación almacena es la imagen del contenido del lienzo en formato *png*. Posteriormente, toda esta información se puede exportar y procesar con cualquier software de análisis como Excel, R, SPSS o software gráfico. De este modo, la aplicación captura minuciosamente la traza digital que el estudiante deja durante la resolución de los problemas, con el fin de facilitar a profesores e investigadores datos que les informen sobre las diferentes estrategias de resolución seguidas por los estudiantes, las operaciones que han realizado con la calculadora incorporada en la aplicación, la cantidad de intentos de solución que han hecho y si estos han sido correctos o erróneos.

Si hablamos del diseño de la app, *GeoPattern* ha sido diseñada de forma que puede ser compilada y embebida utilizando *Phonegap*, un conjunto de librerías que permite compilar una aplicación web escrita en HTML5, CSS3 y *Javascript* para ser utilizada como aplicación nativa en dispositivos móviles. Esto permite que la aplicación pueda ser compilada para diferentes sistemas operativos, como Android, iOS y Windows Phone, con la ventaja de servirse de un único desarrollo.

Su funcionamiento todavía no permite la introducción y modificación de problemas desde la propia aplicación. Por este motivo, cada vez que se modifica la batería de problemas disponible en la aplicación es necesario volver a compilar e instalar la app en los distintos dispositivos. Para la introducción de nuevos problemas, será imprescindible adjuntar la siguiente información:

- *Un título*, para identificar el problema.
- *Una introducción*, que se mostrará en la primera pantalla del problema y servirá de explicación y contextualización (Figura 4.4).
- *Una serie de cuestiones*, que serán introducidas en un orden concreto preestablecido y se mostrarán en las siguientes pantallas del problema (Figura 4.5).
- *Las soluciones numéricas de las cuestiones*, ordenadas del mismo modo que las cuestiones.
- *La imagen gráfica del patrón geométrico*.
- *Las imágenes independientes de las unidades básicas geométricas del patrón*.

4.2.2. Realización del experimento

En cada una de las sesiones que conforman la secuencia, los investigadores conducen un experimento tratando de anticipar cómo será su desarrollo y los aprendizajes que los estudiantes obtendrán para, posteriormente, analizar cuál ha sido su desempeño real.

Otro de los aspectos clave de esta nuestra será diseñar la recogida de datos, para que permita realizar el análisis del experimento. Para ello, es conveniente recoger todos los registros que sea posible, con el fin de poder capturar todo el proceso, aunque en diversas ocasiones, los instrumentos disponibles no son los más adecuados para la recogida de información y los investigadores deben encontrar nuevas formas de documentación (Cobb et al., 2015). En nuestro caso, la app GeoPattern (descrita en 4.2.1.3) nos ha permitido conseguir más información que en las respuestas de papel y bolígrafo.

4.2.2.1. Duración y sesiones

La duración del experimento fue distinta para cada tipo de estudio, debido a la disponibilidad ofrecida por cada centro y las particularidades del estudio. Todas las secuencias de enseñanza-aprendizaje fueron implementadas durante la segunda mitad del curso académico.

Durante las sesiones, los estudiantes resolvieron los problemas de forma individual y, además, se realizó una puesta en común para el análisis de las estrategias empleadas por los estudiantes y la introducción de nuevos conceptos.

En primer lugar, presentamos el desarrollo global de los distintos objetivos de aprendizaje del experimento. Después, presentaremos la distribución de los objetivos en los diferentes estudios (subapartados 4.2.2.1.1 y 4.2.2.1.2).

- *Identificar y generalizar relaciones funcionales en ppg y expresar generalizaciones mediante expresiones verbales:* Para lograr estos objetivos, introducimos a los niños los ppg y distintos procesos de generalización. Para ello, realizamos un análisis grupal de las estrategias empleadas por los estudiantes en la resolución de algunos ppg, donde los estudiantes describieron sus estrategias explicando el razonamiento seguido y valoraron la corrección y calidad de las mismas.
- *Expresar generalizaciones mediante expresiones algebraicas empleando palabras o letras para representar la incógnita:* En este objetivo los estudiantes resolvieron de forma individual los tres primeros apartados de un ppg tipo A o B (cuestiones de directas de cálculo de términos) y, tras

un análisis grupal, introducimos la expresión algebraica correspondiente a la relación funcional que subyace en el patrón a partir del análisis realizado. Para ello, el grupo-clase i) identificó los datos y las incógnitas que proporcionaba el ppg, así como qué representaba cada uno de los números que utilizaban al realizar los cálculos, ii) escribió una expresión algebraica empleando palabras a modo de incógnita (en esta primera ocasión, copiando de la pizarra) y iii) aplicó la expresión algebraica planteada para la resolución de cuestiones numéricas. Este último paso les permitió comprender el funcionamiento y la utilidad de las expresiones algebraicas formuladas. Posteriormente, incitamos a los estudiantes a transformar sus expresiones algebraicas sustituyendo la palabra empleada como incógnita por su letra inicial. De este modo, los estudiantes podían plantear expresiones algebraicas alfanuméricas sin perder la conexión entre el contexto y el significado de esas expresiones. Además, hicimos especial hincapié en la comprobación del funcionamiento de las expresiones formuladas, puesto que algunos estudiantes proponían fórmulas erróneas. Para ello, les propusimos que aplicaran la fórmula a los tres términos del patrón geométrico proporcionados en el enunciado y comprobaran que el resultado obtenido coincidía con las cantidades que presentaban las imágenes.

- *Simplificar expresiones algebraicas:* Con este objetivo introducimos a los estudiantes en la identificación de expresiones que fuesen susceptibles de simplificación (aquellas en las que la letra aparece varias veces) y la transformación de expresiones alfanuméricas. Para ello, fue necesario que los estudiantes entendieran i) que los números y las letras son constructos diferentes que no pueden operar juntos, ii) la jerarquía de las operaciones y iii) que el objetivo final era formular una expresión alfanumérica que incluyera una única letra. Además, se hizo especial hincapié en la comprobación de la corrección y el funcionamiento de las expresiones algebraicas formuladas antes y después de la simplificación, ya que en muchas ocasiones el proceso de simplificación llevaba a una transformación errónea de la expresión algebraica.

- *Invertir operaciones en expresiones algebraicas*: En este objetivo introducimos la resolución de cuestiones de relación inversa. Para ello, el grupo-clase i) identificó los datos e incógnitas presentes en la última cuestión (e), que eran diferentes a aquellos presentes en las cuestiones de relación directa, ii) asoció qué palabras, letras o números de la expresión algebraica formulada previamente hacían referencia a los datos e incógnitas identificados y planteó una ecuación y iii) trató de resolver la cuestión mediante la inversión de cálculos y operaciones, es decir, de un modo aritmético.
- *Resolver ecuaciones*: En este objetivo introducimos la resolución de ecuaciones a partir de las expresiones algebraicas formuladas y mediante el uso de números concretos y esquemas visuales. Para ello, animamos a los estudiantes a transformar las ecuaciones en esquemas visuales, facilitando así su resolución. Este aspecto lo introducimos a través de un problema basado en Lenz (2019): *Imaginad que tengo dos bolsas con caramelos. Las dos bolsas tienen la misma cantidad de caramelos. En una bolsa tengo 3 caramelos y dos cajitas que contienen la misma cantidad de caramelos, aunque no sé cuántos. En la otra bolsa tengo 7 caramelos. ¿Cuántos caramelos creéis que habrá dentro de las cajitas?* La Figura 4.6 muestra la representación gráfica que dibujamos en la pizarra a los estudiantes durante la resolución. A partir de este problema, animamos a los estudiantes a sustituir las cajitas por las incógnitas y los caramelos por los números concretos de sus ecuaciones. Todo ello se ejemplificó con un ppg ya resuelto por los estudiantes. La Figura 4.7 muestra un ejemplo con Cumpleaños 2B.

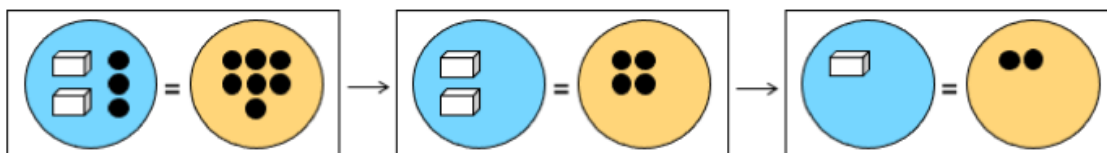


Figura 4.6. Representación gráfica del problema de las canicas.

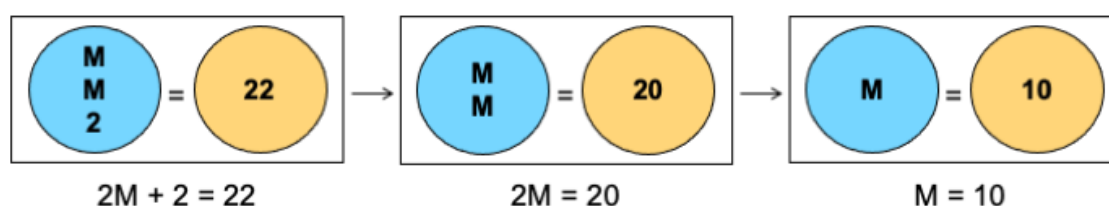


Figura 4.7. Representación gráfica de la resolución con ecuaciones de la cuestión de inversión de Cumpleaños 2B.

4.2.2.1.1. Experimentación longitudinal

En los estudios longitudinales (L456 y L56), en cada curso escolar se llevaron a cabo 3 sesiones grupales de trabajo individual realizadas en el aula ordinaria durante las horas de matemáticas. Estas sesiones tuvieron una duración de 45 minutos aproximadamente. En las Tablas 4.4 y la Tabla 4.6 mostramos los objetivos planteados para cada sesión y curso de la experimentación longitudinal, pudiéndose observar la progresión de la enseñanza a lo largo del estudio.

Durante el primer año de ambos estudios, planteamos problemas distintos en los dos grupos (A y B) para identificar qué grado de dificultad implicaba cada problema en estudiantes de esta edad. A partir del segundo año, planteamos los mismos problemas a ambos grupos de estudiantes (A y B).

Estudio longitudinal en 4.º, 5.º y 6.º

En este estudio longitudinal distribuimos los objetivos de aprendizaje de forma gradual en las tres intervenciones que íbamos a realizar (una por cada curso escolar). Además, distribuimos estos objetivos en cada una de las sesiones que llevaríamos a cabo, siempre desde una perspectiva flexible dependiendo de cómo respondieran los estudiantes a las propuestas de actividades. En la Tabla 4.4 presentamos los objetivos distribuidos por sesión y curso escolar y en la Tabla 4.5 mostramos los problemas que empleamos para responder a estos objetivos de aprendizaje.

Tabla 4.4. Objetivos por sesión del experimento longitudinal en 4.º, 5.º y 6.º (L456).

Objetivos de aprendizaje	L417			L518			L619		
	1	2	3	1	2	3	1	2	3
Identificar y generalizar relaciones funcionales en ppg	X			X			X		
Expresar generalizaciones mediante expresiones verbales	X			X			X		
Expresar generalizaciones mediante expresiones algebraicas empleando palabras para representar la incógnita		X	X		X		X		
Expresar generalizaciones mediante expresiones algebraicas empleando letras para representar la incógnita					X		X	X	
Simplificar expresiones algebraicas						X		X	
Invertir operaciones en expresiones algebraicas		X	X						X
Resolver ecuaciones									X

Tabla 4.5. Problemas por sesión del experimento longitudinal en 4.º, 5.º y 6.º (L456).

Sesión	L417 A	L417 B	L518	L619
1	Magdalenas A	Magdalenas A	Cumpleaños 1A	Cumpleaños 1A
	Gusano A	Supermercado A	Cumpleaños 2A	Cumpleaños 2B
	Robots A	Robots A	Gusano B	Gusano B
2		Gusano A		
	Dibujo B	Enredadera B	Pantalón B	Caramelos B
	Jardín B	Jardín B	Bolos B	Pared D
3	Cumpleaños 2B	Pantalón B	Edificios B2	Urbanización D
	Cumpleaños 1C	Cumpleaños 1C	Pared D	Caramelos D
	Cumpleaños 2C	Cumpleaños 2C	Urbanización D	Pared E
	Olimpiada 1	Olimpiada 1		Familia D

Estudio longitudinal en 5.º y 6.º

En este estudio longitudinal, al igual que en el anterior, distribuimos los objetivos de aprendizaje de forma gradual en las dos intervenciones que íbamos a realizar (una por cada curso escolar). Además, distribuimos estos objetivos en cada una de las sesiones que llevaríamos a cabo, siempre desde una perspectiva flexible

dependiendo de cómo respondieran los estudiantes a las propuestas de actividades. En la Tabla 4.6 presentamos los objetivos distribuidos por sesión y curso escolar y en la Tabla 4.7 mostramos los problemas que empleamos para responder a estos objetivos de aprendizaje.

Tabla 4.6. Objetivos por sesión del experimento longitudinal de 5.º y 6.º (L56).

Objetivos de aprendizaje	L517			L618		
	1	2	3	1	2	3
Identificar y generalizar relaciones funcionales en ppg	X			X		
Expresar generalizaciones mediante expresiones verbales	X			X		
Expresar generalizaciones mediante expresiones algebraicas empleando palabras para representar la incógnita		X	X	X	X	
Expresar generalizaciones mediante expresiones algebraicas empleando letras para representar la incógnita					X	
Simplificar expresiones algebraicas					X	
Invertir operaciones en expresiones algebraicas		X	X			X
Resolver ecuaciones						X

Tabla 4.7. Problemas por sesión del experimento longitudinal de 5.º y 6.º (L56).

Sesión	L517 A	L517 B	L618
1	Magdalenas A Supermercado A Pared A	Magdalenas A Supermercado A Familia A	Cumpleaños 1A Cumpleaños 2B Gusano B
2	Dibujo B Jardín B Edificios B1 Urbanización B	Dibujo B Jardín B Escalera B Urbanización B	Bolos B Pared D Urbanización D
3	Cumpleaños 1C Cumpleaños 2C Olimpiada 2	Cumpleaños 1C Cumpleaños 2C Olimpiada 2	Bolos D Pared E Familia D

4.2.2.1.2. Experimentación con altas capacidades matemáticas

En el estudio con altas capacidades matemáticas, en cada grupo, se llevó a cabo una única sesión grupal de trabajo individual realizada fuera del ámbito escolar.

Estas sesiones tuvieron una duración de 60 minutos aproximadamente. En la Tabla 4.8 mostramos los objetivos planteados para cada sesión y curso de la experimentación y en la Tabla 4.9 mostramos los problemas que empleamos para responder a estos objetivos de aprendizaje.

Tabla 4.8. Objetivos por sesión de los experimentos con aaccmm.

Objetivos de aprendizaje	A3419	A5617	A5619
Identificar y generalizar relaciones funcionales en ppg	X	X	X
Expresar generalizaciones mediante expresiones verbales	X	X	X
Expresar generalizaciones mediante expresiones algebraicas empleando palabras para representar la incógnita	X		X
Expresar generalizaciones mediante expresiones algebraicas empleando letras para representar la incógnita	X	X	X
Simplificar expresiones algebraicas			X
Invertir operaciones en expresiones algebraicas	X	X	
Resolver ecuaciones			X

Tabla 4.9. Problemas por sesión de los experimentos con altas capacidades.

Sesión	A3419	A5617	A5619
1	Cumpleaños 1A	Jardín A	Cumpleaños 1A
	Cumpleaños 2A	Familia A	Cumpleaños 2A
	Gusano B	Clase A	Gusano B
	Pantalón B	Pared A	Jardín D
	Jardín D	Urbanización A	Familia D
	Familia D	Puerta A	Pared E
		Cumpleaños 2A	Urbanización D
			Puerta D
			Clase D
			Bolos D

4.2.2.2. Recogida de datos

En general, los datos recogidos fueron las respuestas de los estudiantes a los distintos problemas (en papel o fichero CSV generado por GeoPattern y

exportado a Excel) y las grabaciones de audio y video generadas por bolígrafos electrónicos, que registraban tanto el audio como el proceso de escritura, y las tabletas Android, que tenían activada la grabación de audio y pantalla. No obstante, cada estudio presentó distintas particularidades.

El primer año de los estudios longitudinales (L456 y L56) los estudiantes resolvieron los problemas con papel y los bolígrafos electrónicos fueron distribuidos por el aula a modo de grabadoras, ya que no disponíamos de suficientes bolígrafos electrónicos para toda la muestra ni la app GeoPattern estaba aún disponible. A partir del segundo año, se dividió cada grupo-clase (A y B) en dos subgrupos. De este modo, en cada clase, aproximadamente la mitad de los estudiantes resolvieron los problemas utilizando bolígrafos electrónicos y papel y, la otra mitad, utilizando tabletas Android con la app GeoPattern. En el caso del estudio L456, el tercer año cada estudiante resolvió los problemas con el mismo sistema empleado durante el curso anterior.

Finalmente, el primer año del estudio con altas capacidades matemáticas (A5617), los estudiantes resolvieron los problemas con papel y los bolígrafos electrónicos fueron distribuidos por el aula a modo de grabadoras junto a la grabación en vídeo del aula. El segundo año del estudio (A5619 y A3419), todos los estudiantes resolvieron los problemas utilizando tabletas Android con la app GeoPattern.

4.2.3. Análisis del experimento

La última etapa de la investigación está destinada a la realización de un análisis del conjunto total de datos recogidos durante la etapa anterior. Para analizar las respuestas de los estudiantes, será necesario, en primer lugar, realizar un análisis de los patrones geométricos utilizados en las distintas secuencias. De este modo, podremos establecer semejanzas entre ellos y formar grupos de patrones comparables que, posteriormente, nos permitirán comparar el análisis de las respuestas de los estudiantes en distintos momentos y grupos.

4.2.3.1. Criterios de identificación de patrones comparables

Analizar los patrones geométricos empleados en las distintas secuencias tiene como objetivo identificar distintas características de los patrones geométricos que, al combinarse entre ellas, nos permitan crear agrupaciones de patrones que, pese a tener diferentes formas o corresponder a distintas progresiones aritméticas, podamos considerar como patrones geométricos comparables. Esta identificación nos permitirá analizar y comparar las respuestas de los estudiantes en los experimentos incluso habiendo resuelto problemas aparentemente distintos.

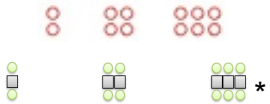
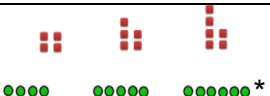
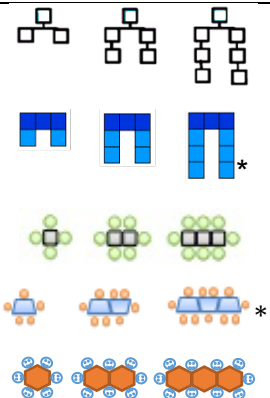
Las características de los patrones que tomamos como criterios para analizar si son comparables son las siguientes:

- *Tipo de relación funcional:* el término general de las progresiones puede corresponder a una función lineal (an) o afín ($an \pm b$; $a = 1$ y $an \pm b$; $a \neq 0$, 1). En las funciones afines diferenciamos entre dos tipos, ya que el segundo tipo ($an \pm b$; $a \neq 0$, 1) incrementa la complejidad al tratarse de un proceso de cálculo en dos pasos y que involucra procesos de multiplicación y suma (Friel y Markworth, 2009). Para ser comparables, dos patrones deben tener el mismo tipo de función.
- *Forma de crecimiento:* gráficamente, el crecimiento de la cantidad de piezas que forman las figuras de un patrón puede ser simple o múltiple, según que los distintos grupos de piezas de la figura que crecen sean fácilmente comparables sin necesidad de contar o no. Un patrón es simple cuando, aunque crezcan varios grupos de piezas al mismo tiempo, no es necesario contar las piezas de todos los grupos porque, por ejemplo, crecen del mismo modo y en paralelo. Sin embargo, un patrón es múltiple cuando ocurre alguno de los casos siguientes:
 - Varias partes de la figura crecen de diferente modo.
 - Varias partes de la figura crecen del mismo modo, pero no es posible abarcarlas todas visualmente por tener crecimientos en distintas direcciones o sentidos, lo cual induce a contar las piezas de cada parte.

- *Descomposición sugerida*: la disposición geométrica de las piezas que forman las figuras del patrón permite identificar y considerar distintas partes de las figuras de manera independiente, sugiriendo, así, una descomposición en partes que facilita el cálculo del valor de los términos pedidos. Un mismo patrón puede sugerir distintas descomposiciones.
- *Parte constante*: una descomposición de un patrón tiene una parte constante cuando, al descomponer sus figuras en partes, hay una de esas partes que se visualiza invariante en las sucesivas figuras del patrón (no tiene por qué coincidir con el término independiente de las funciones afines y puede darse también en el caso de las funciones lineales). Las descomposiciones de un patrón pueden i) no incluir ninguna de ellas una parte constante (no), ii) incluir algunas de ellas una parte constante, pudiendo ser las partes constantes diferentes (a veces) o iii) incluir todas ellas una parte constante (siempre).
- *Piezas compartidas*: una descomposición de un patrón tiene piezas compartidas cuando, al descomponer sus figuras en partes, se utiliza una misma pieza (o varias) en varias partes de la descomposición.

Decimos que *dos patrones son equivalentes* si tienen el mismo tipo de función, la misma forma de crecimiento, sugieren descomposiciones similares (que pueden ser de piezas compartidas o no), y se toman grupos de piezas análogos para las partes constantes. En la tabla 4.10 presentamos la clasificación de los patrones geométricos empleados en las distintas secuencias en grupos de patrones comparables.

Tabla 4.10. Clasificación de los patrones geométricos utilizados en grupos comparables.

PATRONES COMPARABLES	CRITERIOS DE COMPARACIÓN				
	Tipo de función	Crecimiento	Descomposición sugerida ⁵	Parte constante	Piezas compartidas
	an	Simple	Vertical por columnas Horizontal por filas	No	No
	an	Múltiple	Piezas por rama Distancia al centro	No	No
	$n + b$	Simple	Piezas constantes	Siempre	No
	$an + b$	Simple	Horizontal en filas + constantes Vertical en columnas + constantes Constantes + grupos de 2	Siempre	No

⁵ Los datos de las descomposiciones han sido obtenidos de una muestra de 39 estudiantes de 4.º curso del grado de Maestro/a en Educación Primaria. No hay datos de algunos de los patrones (*) por su similitud con otros patrones o porque su clasificación estaba clara.

PATRONES COMPARABLES	CRITERIOS DE COMPARACIÓN				
	Tipo de función	Crecimiento	Descomposición sugerida ⁵	Parte constante	Piezas compartidas
	$an + b$	Simple	Constantes + grupos de piezas Vertical/Horizontal por columnas/filas	A veces	No
	$an + b$	Simple	Constantes + grupos de piezas Grupos de piezas – compartidas Descomposición en filas y columnas	A veces	Sí
	$an + b$	Simple	Grupos de 2 4 constantes + grupos de 2 Serie numérica	A veces	No
	$an + b$	Múltiple	Constantes + grupos de piezas Ramas + centro	A veces	No

4.2.3.2. Procedimiento de análisis de las respuestas

El análisis de las respuestas de los estudiantes en los distintos problemas se basa en las estrategias empleadas para su resolución. En el capítulo 3, destinado al marco teórico, hemos descrito las distintas estrategias que consideramos que los estudiantes de Educación Primaria pueden emplear al resolver problemas de patrones geométricos basados en relaciones funcionales de los tipos lineal y afín. En el Anexo 2 adjuntamos la versión final de las plantillas que empleábamos para la realización de los distintos análisis⁶. En la tabla 4.11 presentamos las diferentes categorías y subcategorías de estrategias y el símbolo asignado para cada una.

Tabla 4.11. Categorías y abreviaturas de estrategias según el tipo de cuestión.

Estrategias en cuestiones de relación directa

Según el procedimiento de resolución		Según el procedimiento de cálculo de valores de términos	
N	Numérica	Rt	Recuento
V	Visual	Rs	Recursiva
NC	No categorizada	F	Funcional
Según el tipo de generalización		FD	Descomposición
		FM	Múltiplo de la diferencia
		FMAx	Auxiliar
		FMAñ	Anterior
		FMP	Primero
		C	Construcción
		CP	Proporcional
II	Inducción ingenua	CA	Aditiva
GA	Aritmética	CC	Combinada
GF	Factual	E-E	Ensayo y error
GC	Contextual	O	Otra
GS	Simbólica	NC	No categorizada
O	Otra		
NC	No categorizada		

⁶ Las plantillas del Anexo 2 incluyen algunos tipos de datos que, posteriormente, no han sido utilizados para la investigación presentada en esta memoria.

Estrategias en cuestiones de relación inversa

Según el procedimiento de cálculo de posiciones de términos

I Ar	Inversión aritmética
I Alg	Inversión algebraica
E	Ecuación
D	Operaciones directas

E-E	Ensayo y error
O	Otra
NC	No categorizada

5. ANÁLISIS Y RESULTADOS

En este capítulo presentamos el análisis de las respuestas de los estudiantes y los resultados de las experimentaciones realizadas dirigidos a dar respuesta a los objetivos de la investigación. En la sección 5.1, describimos los perfiles de razonamiento identificados a partir de las respuestas de los estudiantes. En la sección 5.2, analizamos y comparamos las respuestas a algunos problemas de patrones geométricos en los distintos experimentos llevados a cabo.

5.1. Perfiles de los estudiantes

Tras identificar las estrategias de resolución empleadas por los estudiantes en las distintas secuencias de problemas de patrones geométricos implementadas, nos planteamos tres preguntas, relacionadas con los objetivos de investigación, para el análisis de las respuestas de los estudiantes:

1. ¿Cómo generalizan los estudiantes?
2. ¿Cómo aplican la generalización que han producido?
3. ¿Cómo invierten la generalización que han producido?

La búsqueda de respuestas a estas preguntas nos llevó a la creación de distintos perfiles de respuesta de estudiantes a partir de combinaciones de las estrategias de resolución utilizadas en las sucesivas preguntas de los problemas. Para ello, agrupamos las estrategias empleadas en conjuntos que nos permitiesen tener una visión global del procedimiento utilizado por los estudiantes (Tabla 5.1):

Tabla 5.1. Conjuntos de estrategias.

	Abreviatura	Estrategias
Cuestiones de relación directa	NC	No clasificable, ensayo y error u otros
	Rt	Recuento
	Rs	Recursiva
	C	Construcción: proporcional, aditiva o combinada
	F	Funcional: descomposición, múltiplo de la diferencia, auxiliar, anterior o primero
Cuestiones de relación inversa	NC	No clasificable u otros
	E-E	Ensayo y error
	D	Operaciones directas
	I Ar	Inversión aritmética
	I Alg	Inversión algebraica
	E	Ecuación

A partir de las distintas combinaciones de estos conjuntos de estrategias elaboramos los perfiles de respuestas. De este modo, creamos tres categorías principales de perfiles, que responden a las tres preguntas de análisis planteadas:

1. Perfiles de generalización
2. Perfiles de aplicación (de la generalización realizada)
3. Perfiles de inversión (de la generalización realizada)

No todos los perfiles son identificables en todos los problemas, pues, según las cuestiones que presenta el problema (ver sección 4.2.1.2), podremos identificar unos perfiles, pero no otros. En la Tabla 5.2 presentamos los perfiles identificables para cada tipo de problema:

Tabla 5.2. Perfiles identificables en cada tipo de problema.

Tipos de problema	Perfil de Generalización	Perfil de Aplicación	Perfil de Inversión
A	X		X
B	X		X
C	X	X	X
D	X	X	X
E		X	X

En las siguientes secciones describimos cada perfil y detallamos los subperfiles que aparecen en cada uno de ellos.

5.1.1. Perfiles de generalización

Los perfiles de generalización pretenden dar respuesta a la pregunta *¿cómo generalizan los estudiantes?* Tienen por finalidad mostrar la evolución de las estrategias de cálculo empleadas por los estudiantes (definidas en 3.3) en las cuestiones de relación directa, que llevan a los estudiantes a extraer y formular una generalización del patrón geométrico presentado.

En la Tabla 5.3 mostramos en azul las cuestiones seleccionadas en cada tipo de problema (A a E) para dar respuesta a la pregunta de análisis. En los problemas tipo E no hemos incluido perfiles de generalización porque no incluye cuestiones directas de cálculo de términos, sino únicamente la cuestión de fórmula.

Aunque en la definición de los perfiles no se tienen en cuenta los tipos de generalización definidos en 3.4, pues no se corresponden con estrategias de cálculo de valores de la secuencia y de su término general, sí que se tienen en cuenta en el análisis realizado en 5.2, pues son un componente importante de la resolución de los ppg que aporta información de cómo los estudiantes expresan la generalización. Es por ello que, en 5.2, estudiamos el uso que han hecho de ellos los estudiantes.

Tabla 5.3. Cuestiones seleccionadas para elaborar el perfil de generalización para cada tipo de problema.

	Cuestiones				
	a)	b)	c)	d)	e)
A	Generalización inmediata	Generalización cercana	Generalización lejana	Verbalización	Inversión
B	Generalización inmediata	Generalización cercana	Generalización lejana	Verbalización/ Fórmula	Inversión
C	Generalización inmediata	Generalización lejana	Verbalización/ Fórmula	Aplicación (Gen. cercana)	Inversión
D	Generalización lejana	Fórmula	Simplificación	Aplicación (Gen. cercana)	Inversión
E	Fórmula	Simplificación	Aplicación (Gen. cercana)	Inversión	Inversión

A partir de las respuestas y estrategias mostradas por los estudiantes al resolver estas cuestiones, hemos identificado los perfiles de generalización resultantes. Para ello, descartamos aquellas combinaciones de respuestas que presentaban al menos dos respuestas clasificadas como NC en las cuestiones seleccionadas. En total, hemos encontrado 7 perfiles distintos, algunos de ellos con subperfiles, resumidos en la Tabla 5.4. Es necesario destacar que los perfiles y subperfiles no se pueden ordenar, ya que las estrategias de cada perfil y subperfil presentan calidades diversas, y, por tanto, la numeración asignada no corresponde a ningún orden. En las siguientes secciones detallamos y analizamos cada perfil.

Tabla 5.4. Perfiles de generalización.

Perfil	Definición	Subperfiles	
G1	El estudiante usa una estrategia constante para todas las cuestiones de cálculo de términos, que se mantiene al expresar la generalización.	G1.1	Recuento
		G1.2	Recursiva
		G1.3	Construcción
		G1.4	Funcional
G2	El estudiante usa una estrategia constante en todas las cuestiones de cálculo de términos que cambia a otra mejor al expresar la generalización.	G2.1	Recuento – Recursiva
		G2.2	Recuento – Funcional
		G2.3	Recursiva – Funcional
		G2.4	Construcción – Funcional
G3	El estudiante usa una estrategia constante en todas las cuestiones de cálculo de	G3.1	Construcción – Recuento
		G3.2	Construcción – Recursiva

Perfil	Definición	Subperfiles	
	términos que cambia a otra peor al expresar la generalización.	G3.3	Funcional – Recursiva
G4	Se produce una mejora de las estrategias empleadas al resolver las cuestiones de cálculo de términos que se mantiene o mejora al expresar la generalización.	G4.1	Recuento – Recursiva
		G4.2	Recuento – Recursiva – Funcional
		G4.3	Recuento – Construcción
		G4.4	Recuento – Construcción – Funcional
		G4.5	Recuento – Funcional
		G4.6	Recursiva – Construcción
		G4.7	Recursiva – Construcción – Funcional
		G4.8	Recursiva – Funcional
		G4.9	Construcción – Funcional
G5	Se produce una mejora progresiva de las estrategias empleadas al resolver las cuestiones de cálculo de términos, pero empeora al expresar la generalización.	G5.1	Recuento – Recursiva – Construcción – Recursiva
		G5.2	Recursiva – Construcción – Recursiva
		G5.3	Recuento – Recursiva – Funcional – Recursiva
		G5.4	Recuento – Funcional – Recursiva
		G5.5	Recursiva – Funcional – Recursiva
G6	Otras respuestas que no corresponden a los perfiles anteriores.		
G7	La respuesta a la pregunta de verbalización o fórmula es no clasificable (NC) u otros (O).		

5.1.1.1. Perfil G1

Los estudiantes que presentaron el Perfil G1 utilizaron una estrategia constante al resolver todas las cuestiones de relación directa, ya sean de cálculo de términos o de expresión de la generalización.

En concreto, los estudiantes utilizaron 4 subperfiles del perfil G1, dependiendo de la estrategia de cálculo empleada:

- Perfil G1.1: Estrategia de recuento.
- Perfil G1.2: Estrategia recursiva.
- Perfil G1.3: Estrategia de construcción, pudiendo ser cualquiera de las siguientes: construcción, proporcional, aditiva o combinada.
- Perfil G1.4: Estrategia funcional, pudiendo ser cualquiera de las siguientes: funcional, descomposición, múltiplo de la diferencia, auxiliar, anterior o primero.

En la Tabla 5.5 presentamos todas las combinaciones del perfil G1 que hemos obtenido, para cada tipo de problema, en el análisis de los datos de las experimentaciones.

Tabla 5.5. Perfiles resultantes del Perfil G1 de generalización.

Tipos de problema	Perfil	Cuestiones del problema				
		a)	b)	c)	d)	e)
A	G1.1	Rt	Rt	NC	Rt	
		Rt	Rt	Rt	Rt	
	G1.2	Rs	Rs	NC	Rs	
		Rs	Rs	Rs	Rs	
	G1.3	C	C	C	C	
	G1.4	F	NC	F	F	
		NC	F	F	F	
		F	F	F	F	
	G1.2	NC	Rs	Rs	Rs	
		Rs	Rs	NC	Rs	
		Rs	Rs	Rs	Rs	
B	G1.3	C	C	C	C	
		NC	F	F	F	
		F	F	NC	F	
	G1.4	F	NC	F	F	
		F	F	F	F	
		F	F	F	F	
	G1.2	Rs	Rs	Rs	Rs	
C	G1.3	NC	C	C	C	
		C	C	C	C	
	G1.4	NC	F	F	F	
		F	NC	F	F	
		F	F	F	F	
	G1.2	Rs	Rs	Rs	Rs	
D	G1.2	NC	Rs			

Tipos de problema	Perfil	Cuestiones del problema				
		a)	b)	c)	d)	e)
		Rs	Rs			
	G1.3	C	C			
	G1.4	NC	F			
		F	F			

5.1.1.2. Perfil G2

Los estudiantes que presentaron el Perfil G2 utilizaron una estrategia constante al resolver todas las cuestiones de cálculo de términos y cambiaron a una estrategia de mayor calidad al expresar la generalización.

En concreto, los estudiantes utilizaron 4 subperfiles del perfil G2, dependiendo de la estrategia de cálculo empleada:

- Perfil G2.1: Estrategia de recuento que cambia a recursiva.
- Perfil G2.2: Estrategia de recuento que cambia a funcional.
- Perfil G2.3: Estrategia recursiva que cambia a funcional.
- Perfil G2.4: Estrategia de construcción que cambia a funcional.

En la Tabla 5.6 presentamos todas las combinaciones del perfil G2 que hemos obtenido, para cada tipo de problema, en el análisis de los datos de las experimentaciones.

Tabla 5.6. Perfiles resultantes del Perfil G2 de generalización.

Tipos de problema	Perfil	Cuestiones del problema				
		a)	b)	c)	d)	e)
A	G2.1	Rt	Rt	NC	Rs	
		Rt	Rt	Rt	Rs	
	G2.2	Rt	Rt	NC	F	
		Rt	Rt	Rt	F	
B	G2.1	Rt	Rt	NC	Rs	
		Rt	Rt	Rt	Rs	
	G2.3	Rs	Rs	NC	F	
		Rs	Rs	Rs	F	
	G2.4	C	C	C	F	
		C	C	C	F	
C	G2.4	C	C	F		
D	G2.4	C	F			

5.1.1.3. Perfil G3

Los estudiantes que presentaron el Perfil G3 utilizaron una estrategia constante al resolver todas las cuestiones de cálculo de términos y cambiaron a una estrategia de menor calidad al expresar la generalización.

En concreto, los estudiantes utilizaron 3 subperfiles del perfil G3, dependiendo de la estrategia de cálculo empleada:

- Perfil G3.1: Estrategia de construcción que cambia a recuento.
- Perfil G3.2: Estrategia de construcción que cambia a recursiva.
- Perfil G3.3: Estrategia funcional que cambia a recursiva.

En la Tabla 5.7 presentamos todas las combinaciones del perfil G3 que hemos obtenido, para tipo de problema, en el análisis de los datos de las experimentaciones.

Tabla 5.7. Perfiles resultantes del Perfil G3 de generalización.

Tipos de problema	Perfil	Cuestiones del problema				
		a)	b)	c)	d)	e)
A	G3.1	C	C	NC	Rt	
	G3.2	C	C	C	Rs	
	G3.3	NC	F	F	Rs	
		F	F	NC	Rs	
		F	F	F	Rs	
B	G3.3	F	F	NC	Rs	
		F	F	F	Rs	
C	G3.3	NC	F	Rs		
D	G3.2	C	Rs			
	G3.3	F	Rs			

5.1.1.4. Perfil G4

Los estudiantes que presentaron el Perfil G4 utilizaron estrategias con un aumento progresivo de calidad al resolver todas las cuestiones de relación directa, ya fueran de cálculo de términos o de expresión de la generalización.

En concreto, los estudiantes utilizaron 9 subperfiles del perfil G4, dependiendo de la estrategia de cálculo empleada:

- Perfil G4.1: Estrategia de recuento que cambia a recursiva.
- Perfil G4.2: Estrategia de recuento que cambia a recursiva y, después, a funcional.
- Perfil G4.3: Estrategia de recuento que cambia a construcción.
- Perfil G4.4: Estrategia de recuento que cambia a construcción y, después, a funcional.
- Perfil G4.5: Estrategia de recuento que cambia a funcional.
- Perfil G4.6: Estrategia recursiva que cambia a construcción.
- Perfil G4.7: Estrategia recursiva que cambia a construcción y, después, a funcional.
- Perfil G4.8: Estrategia recursiva que cambia a funcional.
- Perfil G4.9: Estrategia de construcción que cambia a funcional.

En la Tabla 5.8 presentamos todas las combinaciones del perfil G4 que hemos obtenido, para cada tipo de problema, en el análisis de los datos de las experimentaciones.

Tabla 5.8. Perfiles resultantes del Perfil G4 de generalización.

Tipos de problema	Perfil	Cuestiones del problema				
		a)	b)	c)	d)	e)
A	G4.1	Rt	Rs	Rs	Rs	
	G4.2	Rt	Rs	F	F	
	G4.4	Rt	Rt	C	F	
	G4.5	Rt	Rt	F	F	
		Rt	F	F	F	
	G4.6	Rs	C	C	C	
	G4.7	Rs	C	C	F	
	G4.8	Rs	Rs	F	F	
		Rs	F	NC	F	
		Rs	F	F	F	
	G4.9	C	C	F	F	
		C	NC	F	F	
		C	F	F	F	
B	G4.1	Rt	Rt	Rs	Rs	
		Rt	Rs	NC	Rs	

Tipos de problema	Perfil	Cuestiones del problema				
		a)	b)	c)	d)	e)
	G4.2	Rt	Rs	F	F	
	G4.3	Rt	C	C	C	
	G4.4	Rt	Rt	C	F	
	G4.5	Rt	Rt	F	F	
		Rt	F	F	F	
	G4.6	Rs	C	C	C	
	G4.8	NC	Rs	F	F	
		Rs	Rs	F	F	
		Rs	NC	F	F	
		Rs	F	NC	F	
		Rs	F	F	F	
	G4.9	C	F	F	F	
C	G4.3	Rt	C	C		
	G4.5	Rt	F	F		
	G4.8	Rs	NC	F		
		Rs	F	F		
	G4.9	C	F	F		

5.1.1.5. Perfil G5

Los estudiantes que presentaron el Perfil G5 utilizaron estrategias con un aumento progresivo de calidad al resolver todas las cuestiones de cálculo de términos y cambiaron a una estrategia de menor calidad al expresar la generalización.

En concreto, los estudiantes utilizaron 5 subperfiles del perfil G5, dependiendo de la estrategia de cálculo empleada:

- Perfil G5.1: Estrategia de recuento que cambia a recursiva y construcción y utiliza una estrategia recursiva para la expresión de la generalización.
- Perfil G5.2: Estrategia recursiva que cambia a construcción y utiliza una estrategia recursiva para la expresión de la generalización.
- Perfil G5.3: Estrategia de recuento que cambia a recursiva y funcional y utiliza una estrategia recursiva para la expresión de la generalización.
- Perfil G5.4: Estrategia de recuento que cambia a funcional y utiliza una estrategia recursiva para la expresión de la generalización.

- Perfil G5.5: Estrategia recursiva que cambia a funcional y utiliza una estrategia recursiva para la expresión de la generalización.

En la Tabla 5.9 presentamos todas las combinaciones del perfil G5 que hemos obtenido, para cada tipo de problema, en el análisis de los datos de las experimentaciones.

Tabla 5.9. Perfiles resultantes del Perfil G5 de generalización.

Tipos de problema	Perfil	Cuestiones del problema				
		a)	b)	c)	d)	e)
A	G5.1	Rt	Rs	C	Rs	
		Rs	Rs	C	Rs	
	G5.2	Rs	C	C	Rs	
		Rt	Rs	F	Rs	
	G5.3	Rt	Rt	F	Rs	
		Rt	F	F	Rs	
	G5.4	NC	Rs	F	Rs	
		Rs	Rs	F	Rs	
		Rs	F	NC	Rs	
		Rs	F	F	Rs	
B	G5.2	Rs	C	C	Rs	
	G5.3	Rt	Rs	F	Rs	
	G5.5	Rs	F	F	Rs	

5.1.1.6. Perfil G6

Los estudiantes que presentaron el Perfil G6 utilizaron una combinación de estrategias alternativa a los perfiles presentados anteriormente.

En la Tabla 5.10 presentamos todas las combinaciones del perfil G6 que hemos obtenido, para cada tipo de problema, en el análisis de los datos de las experimentaciones.

Tabla 5.10. Perfiles resultantes del Perfil G6 de generalización.

Tipos de problema	Perfil	Cuestiones del problema				
		a)	b)	c)	d)	e)
A	G6	Rt	C	Rs	Rs	
		Rs	Rt	NC	Rs	
		Rs	Rt	Rt	Rs	
		C	Rt	F	F	
		F	Rt	F	F	
		F	C	F	F	

Tipos de problema	Perfil	Cuestiones del problema				
		a)	b)	c)	d)	e)
B	G6	Rt	C	Rt	F	
		Rs	Rt	Rs	F	
C	G6	C	F	C		

5.1.1.7. Perfil G7

Los estudiantes que presentaron el Perfil G7 utilizaron una combinación de estrategias incluida en cualquiera de los perfiles anteriores, pero con una respuesta a la expresión de la generalización catalogada como NC: No Clasificable, Ensayo y error u Otros.

En la Tabla 5.11 presentamos todas las combinaciones del perfil G7 que hemos obtenido, para cada tipo de problema, en el análisis de los datos de las experimentaciones.

Tabla 5.11. Perfiles resultantes del Perfil G7 de generalización.

Tipos de problema	Perfil	Cuestiones del problema				
		a)	b)	c)	d)	e)
A	G7	Rt	Rt	Rt	NC	
		Rt	Rt	F	NC	
		Rt	F	Rs	NC	
		Rt	F	F	NC	
		Rs	Rt	Rt	NC	
		Rs	Rs	Rs	NC	
		Rs	Rs	F	NC	
		Rs	F	F	NC	
		C	C	C	NC	
		C	F	F	NC	
		F	Rt	F	NC	
		F	Rs	F	NC	
		F	F	F	NC	
B	G7	Rt	Rt	C	NC	
		Rt	C	C	NC	
		Rt	Rt	F	NC	
		Rt	F	F	NC	
		Rs	Rs	Rs	NC	
		Rs	Rs	F	NC	
		Rs	F	F	NC	
		C	C	C	NC	
		C	C	F	NC	
		F	F	F	NC	
C	G7	Rs	Rs	NC		

Tipos de problema	Perfil	Cuestiones del problema				
		a)	b)	c)	d)	e)
		Rs	F	NC		
		F	C	NC		
		C	F	NC		
		F	F	NC		
D	G7	Rt	NC			
		C	NC			
		F	NC			

5.1.2. Perfiles de aplicación

Los perfiles de aplicación pretenden dar respuesta a la pregunta: *¿Cómo aplican los estudiantes la generalización?* Tienen por finalidad mostrar la evolución de las estrategias de cálculo empleadas por los estudiantes (definidas en 3.3) en las cuestiones de relación directa, que llevan a los estudiantes a formular una generalización del patrón geométrico presentado y a aplicar esta generalización para la resolución de una cuestión de cálculo de una generalización cercana.

En la Tabla 5.12 mostramos en verde las cuestiones seleccionadas en cada tipo de problema (A a E) para dar respuesta a esta pregunta de análisis. En los problemas tipos A y B no hemos incluido perfiles de generalización porque no incluyen cuestión de aplicación.

Aunque en la definición de los perfiles no se tienen en cuenta los tipos de generalización definidos en 3.4, pues no se corresponden con estrategias de cálculo de valores de la secuencia y de su término general, sí que se tienen en cuenta en el análisis realizado en 5.2, pues son un componente importante de la resolución de ppg que aporta información de cómo los estudiantes expresan la generalización. Es por ello que, en 5.2, estudiamos el uso que han hecho de ellos los estudiantes.

Tabla 5.12. Cuestiones seleccionadas para el perfil de aplicación en cada tipo de problema.

Cuestiones					
	a)	b)	c)	d)	e)
A	Generalización inmediata	Generalización cercana	Generalización lejana	Verbalización	Inversión
B	Generalización inmediata	Generalización cercana	Generalización lejana	Verbalización/ Fórmula	Inversión
C	Generalización inmediata	Generalización lejana	Verbalización/ Fórmula	Aplicación (Gen. cercana)	Inversión
D	Generalización lejana	Fórmula	Simplificación	Aplicación (Gen. cercana)	Inversión
E	Fórmula	Simplificación	Aplicación (Gen. cercana)	Inversión	Inversión

A partir de las respuestas y estrategias mostradas por los estudiantes al resolver estas cuestiones, hemos identificado los perfiles de aplicación resultantes. Para ello, descartamos aquellas combinaciones de respuestas que presentaban al menos dos respuestas clasificadas como NC en las cuestiones seleccionadas. En total, hemos encontrado 6 perfiles distintos, algunos de ellos con subperfiles, resumidos en la Tabla 5.13. Es necesario destacar que los perfiles y subperfiles no se pueden ordenar, ya que las estrategias de cada perfil y subperfil presentan calidades diversas, y, por tanto, la numeración asignada no corresponde a ningún orden. En las siguientes secciones detallamos y analizamos cada perfil.

Tabla 5.13. Perfiles de aplicación.

Perfil	Definición	Subperfiles	
A1	Estrategia constante para las dos cuestiones	A1.1	Recuento
		A1.2	Rekursiva
		A1.3	Construcción
		A1.4	Funcional
A2	Se produce un cambio de estrategia a mejor al aplicar la fórmula en la cuestión cercana	A2.1	Rekursiva – Construcción
		A2.2	Rekursiva – Funcional
		A2.3	Construcción – Funcional
A3	Se produce un cambio de estrategia a peor al aplicar la fórmula en la cuestión cercana	A3.1	Funcional – Recuento
		A3.2	Funcional – Construcción
A4	Otras respuestas que no corresponden a los otros perfiles.		

Perfil	Definición	Subperfiles
A5	La respuesta a la pregunta de verbalización o fórmula es no clasificable (NC) o otros (O)	
A6	La respuesta a la pregunta de aplicación (cercana) es NC o O (0)	

5.1.2.1. Perfil A1

Los estudiantes que presentaron el Perfil A1 utilizaron una estrategia constante al resolver las dos cuestiones de relación directa seleccionadas, de expresión y aplicación de la generalización. En concreto, los estudiantes utilizaron 4 subperfiles del perfil A1, dependiendo de la estrategia de cálculo empleada:

- Perfil A1.1: Estrategia de recuento.
- Perfil A1.2: Estrategia recursiva.
- Perfil A1.3: Estrategia de construcción, pudiendo ser cualquiera de las siguientes: construcción, proporcional, aditiva o combinada.
- Perfil A1.4: Estrategia funcional, pudiendo ser cualquiera de las siguientes: funcional, descomposición, múltiplo de la diferencia, auxiliar, anterior o primero.

En la Tabla 5.14 presentamos todas las combinaciones del perfil A1 que hemos obtenido, para cada tipo de problema, en el análisis de los datos de las experimentaciones.

Tabla 5.14. Perfiles resultantes del Perfil A1 de aplicación.

Tipos de problema	Perfil	Cuestiones del problema				
		a)	b)	c)	d)	e)
C	A1.2			Rs	Rs	
	A1.3			C	C	
	A1.4			F	F	
D	A1.3		C		C	
	A1.4		F		F	
E	A1.2	Rs		Rs		
	A1.4	F		F		

5.1.2.2. Perfil A2

Los estudiantes que presentaron el Perfil A2 utilizaron una estrategia al verbalizar la generalización y/o expresar la fórmula correspondiente y cambiaron a una estrategia de mayor calidad al aplicar la fórmula en la cuestión cercana.

En concreto, los estudiantes utilizaron 3 subperfiles del perfil A2, dependiendo de la estrategia de cálculo empleada:

- Perfil A2.1: Estrategia recursiva que cambia a construcción.
- Perfil A2.2: Estrategia recursiva que cambia a funcional.
- Perfil A2.3: Estrategia de construcción que cambia a funcional.

En la Tabla 5.15 presentamos todas las combinaciones del perfil A2 que hemos obtenido, para cada tipo de problema, en el análisis de los datos de las experimentaciones.

Tabla 5.15. Perfiles resultantes del Perfil 2 de aplicación.

Tipos de problema	Perfil	Cuestiones del problema				
		a)	b)	c)	d)	e)
C	A2.2			Rs	F	
	A2.3			C	F	
D	A2.1		Rs		C	
	A2.2		Rs		F	
E	A2.2	Rs		F		

5.1.2.3. Perfil A3

Los estudiantes que presentaron el Perfil A3 utilizaron una estrategia al verbalizar la generalización y/o expresar la fórmula correspondiente y cambiaron a una estrategia de menor calidad al aplicar la fórmula en la cuestión cercana.

En concreto, los estudiantes utilizaron 2 subperfiles del perfil A3, dependiendo de la estrategia de cálculo empleada:

- Perfil A3.1: Estrategia funcional que cambia a recuento.
- Perfil A3.2: Estrategia funcional que cambia a construcción.

En la Tabla 5.16 presentamos todas las combinaciones del perfil A3 que hemos obtenido, para cada tipo de problema, en el análisis de los datos de las experimentaciones.

Tabla 5.16. Perfiles resultantes del Perfil A3 de aplicación.

Tipos de problema	Perfil	Cuestiones del problema				
		a)	b)	c)	d)	e)
C	A3.1			F	Rt	
	A3.2			F	C	
D	A3.2		F		C	

5.1.2.4. Perfil A4

El Perfil A4 corresponde a estudiantes que utilizaron una combinación de estrategias alternativa a los perfiles presentados anteriormente. En el análisis de los datos de las experimentaciones no hemos obtenido respuestas de este perfil.

5.1.2.5. Perfil A5

Los estudiantes que presentaron el Perfil A5 utilizaron una combinación de estrategias incluida en cualquiera de los perfiles anteriores, pero con una respuesta a la verbalización de la generalización o expresión de la fórmula correspondiente catalogada como NC: no clasificable, ensayo y error u otros.

En la Tabla 5.17 presentamos todas las combinaciones del perfil A5 que hemos obtenido, para cada tipo de problema, en el análisis de los datos de las experimentaciones.

Tabla 5.17. Perfiles resultantes del Perfil A5 de aplicación.

Tipos de problema	Perfil	Cuestiones del problema				
		a)	b)	c)	d)	e)
C	A5			NC	F	
D	A5		NC		C	
			NC		F	
E	A5	NC		F		

5.1.2.6. Perfil A6

Los estudiantes que presentaron el Perfil A6 utilizaron una combinación de estrategias incluida en cualquiera de los perfiles anteriores, pero con una respuesta a la cuestión de aplicación mediante generalización cercana catalogada como NC: no clasificable, ensayo y error u otros.

En la Tabla 5.18 presentamos todas las combinaciones del perfil A6 que hemos obtenido, para cada tipo de problema, en el análisis de los datos de las experimentaciones.

Tabla 5.18. Perfiles resultantes del Perfil A6 de aplicación.

Tipos de problema	Perfil	Cuestiones del problema				
		a)	b)	c)	d)	e)
C	A6			Rs	NC	
				C	NC	
				F	NC	
D	A6		Rs		NC	
			C		NC	
			F		NC	
E	A6	Rs		NC		
		F		NC		

5.1.3. Perfiles de inversión

Los perfiles de inversión pretenden dar respuesta a la pregunta: *¿Cómo invierten la generalización?* Tienen por finalidad mostrar las estrategias de cálculo empleadas por los estudiantes (definidas en 3.3) en las cuestiones de relación inversa, que llevan a los estudiantes a invertir una generalización del patrón geométrico presentado.

En la Tabla 5.19 mostramos en morado las cuestiones seleccionadas en cada tipo de problema (A a E) para dar respuesta a la pregunta de análisis.

Tabla 5.19. Cuestiones seleccionadas para el perfil de inversión en cada tipo de problema.

	Cuestiones				
	a)	b)	c)	d)	e)
A	Generalización inmediata	Generalización cercana	Generalización lejana	Verbalización	Inversión
B	Generalización inmediata	Generalización cercana	Generalización lejana	Verbalización/ Fórmula	Inversión
C	Generalización inmediata	Generalización lejana	Verbalización/ Fórmula	Generalización cercana	Inversión
D	Generalización lejana	Fórmula	Simplificación	Generalización cercana	Inversión
E	Fórmula	Simplificación	Generalización cercana	Inversión	Inversión

A partir de las respuestas y estrategias mostradas por los estudiantes al resolver estas cuestiones, hemos identificado los perfiles de inversión resultantes. Para ello, descartamos aquellas combinaciones de respuestas que presentaban la respuesta (en los problemas A, B, C y D) o las dos respuestas (en los problemas E) clasificadas como NC. En total, hemos encontrado 6 perfiles de inversión distintos en la Tabla 5.20. En las siguientes secciones detallamos y analizamos cada perfil.

Tabla 5.20. Perfiles de inversión.

Perfil	Definición
I1	Estrategia de ensayo y error
I2	Estrategia de operaciones directas
I3	Estrategia de inversión aritmética
I4	Estrategia de inversión algebraica
I5	Estrategia de ecuación
I6	Combinaciones de estrategias anteriores

En función de las características de cada problema mostramos una combinación de las cuestiones de relación directa de los perfiles de generalización y aplicación junto a las cuestiones de inversión del perfil de inversión. De este modo, para los problemas de tipo A y B combinaremos el perfil de generalización con el perfil de inversión y para los problemas de tipo C, D y E combinaremos el perfil de aplicación con el perfil de inversión. Esto nos permitirá ver si hay algunos

perfiles de generalización o de aplicación que inducen un perfil concreto de inversión. En la Tabla 5.21 mostramos en azul las cuestiones del perfil de generalización, en verde las cuestiones del perfil de aplicación y en morado las cuestiones del perfil de inversión seleccionadas en cada tipo de problema para dar respuesta a la pregunta de análisis.

Tabla 5.21. Cuestiones seleccionadas para la combinación de perfiles en cada tipo de problema.

	Cuestiones				
	a)	b)	c)	d)	e)
A	Generalización inmediata	Generalización cercana	Generalización lejana	Verbalización	Inversión
B	Generalización inmediata	Generalización cercana	Generalización lejana	Verbalización/ Fórmula	Inversión
C	Generalización inmediata	Generalización lejana	Verbalización/ Fórmula	Aplicación (Gen. cercana)	Inversión
D	Generalización lejana	Fórmula	Simplificación	Aplicación (Gen. cercana)	Inversión
E	Fórmula	Simplificación	Aplicación (Gen. cercana)	Inversión	Inversión

5.1.3.1. Perfil I1

Los estudiantes que presentaron el Perfil I1 utilizaron una estrategia de ensayo y error al resolver todas las cuestiones de relación inversa. En la Tabla 5.22 presentamos todas las combinaciones del perfil I1 que hemos obtenido, para cada tipo de problema, en el análisis de los datos de las experimentaciones, indicando en cada caso el perfil de generalización o aplicación correspondiente.

Tabla 5.22. Perfiles resultantes del Perfil I1 de inversión.

Tipos de problema	Perfiles		Cuestiones del problema				
			a)	b)	c)	d)	e)
A	I1	G1.4	F	F	F	F	E-E
B	I1	G1.4	F	F	NC	F	E-E
			F	NC	F	F	E-E
			NC	F	F	F	E-E
			F	F	F	F	E-E
			F	F	F	F	E-E
		G4.1	Rt	Rs	NC	Rs	E-E
		G4.5	Rt	F	F	F	E-E
D	I1	G7	Rt	F	F	NC	E-E
		A1.4		F		F	E-E
		A2.2		Rs		F	E-E

Tipos de problema	Perfiles		Cuestiones del problema				
			a)	b)	c)	d)	e)
E	I1	A5		NC		F	E-E
		A6		F		NC	E-E
		A1.2	Rs		Rs	E-E	NC
		A6	Rs		NC	E-E	NC
			F		NC	E-E	NC

5.1.3.2. Perfil I2

Los estudiantes que presentaron el Perfil I2 utilizaron una estrategia de operaciones directas al resolver todas las cuestiones de relación inversa. En la Tabla 5.23 presentamos todas las combinaciones del perfil I2 que hemos obtenido, para cada tipo de problema, en el análisis de los datos de las experimentaciones, indicando en cada caso el perfil de generalización o aplicación correspondiente.

Tabla 5.23. Perfiles resultantes del Perfil I2 de inversión.

Tipos de problema	Perfiles		Cuestiones del problema				
			a)	b)	c)	d)	e)
A	I2	G1.1	Rt	Rt	Rt	Rt	D
		G1.2	Rs	Rs	NC	Rs	D
			Rs	Rs	Rs	Rs	D
		G1.3	C	C	C	C	D
		G1.4	NC	F	F	F	D
			F	NC	F	F	D
			F	F	F	F	D
		G2.1	Rt	Rt	Rt	Rs	D
		G2.2	Rt	Rt	Rt	F	D
		G3.3	F	F	NC	Rs	D
			NC	F	F	Rs	D
			F	F	F	Rs	D
		G4.1	Rt	Rs	Rs	Rs	D
		G4.2	Rt	Rs	F	F	D
		G4.5	Rt	Rt	F	F	D
			Rt	F	F	F	D
		G4.8	Rs	F	NC	F	D
			Rs	F	F	F	D
		G4.9	C	C	F	F	D
			C	F	F	F	D
		G5.4	Rt	Rt	F	Rs	D
		G5.5	Rs	Rs	F	Rs	D
			Rs	F	NC	Rs	D
		G6	Rt	C	Rs	Rs	D

Tipos de problema	Perfiles		Cuestiones del problema				
			a)	b)	c)	d)	e)
		G7	C	Rt	F	F	D
			Rs	Rt	Rt	NC	D
			Rs	Rs	Rs	NC	D
			Rs	Rs	F	NC	D
			C	C	C	NC	D
			C	F	F	NC	D
			F	F	F	NC	D
B	I2	G1.2	Rs	Rs	Rs	Rs	D
		G1.3	C	C	C	C	D
		G1.4	NC	F	F	F	D
			F	F	F	F	D
		G2.4	C	C	C	F	D
		G3.3	F	F	F	Rs	D
		G4.1	Rt	Rt	Rs	Rs	D
		G4.3	Rt	C	C	C	D
		G4.5	Rt	F	F	F	D
		G4.6	Rs	C	C	C	D
		G4.8	NC	Rs	F	F	D
		G4.9	C	F	F	F	D
		G7	Rs	Rs	Rs	NC	D
			Rs	Rs	F	NC	D
			C	C	F	NC	D
			F	F	F	NC	D
C	I2	A1.3			C	C	D
		A1.4			F	F	D
		A2.3			C	F	D
		A3.1			F	Rt	D
		A3.2			F	C	D
		A5			NC	F	D
		A6			F	NC	D
D	I2	A1.4		F		F	D
		A2.2		Rs		F	D
		A5		NC		F	D
		A6		C		NC	D
				F		NC	D
E	I2	A1.4	F		F	D	D
		A2.2	Rs		F	D	NC
		A5	NC		F	D	NC
		A6	F		NC	D	NC

5.1.3.3. Perfil I3

Los estudiantes que presentaron el Perfil I3 utilizaron una estrategia de inversión aritmética al resolver todas las cuestiones de relación inversa. En la Tabla 5.24

presentamos todas las combinaciones del perfil I3 que hemos obtenido, para cada tipo de problema, en el análisis de los datos de las experimentaciones, indicando en cada caso el perfil de generalización o aplicación correspondiente.

Tabla 5.24. Perfiles resultantes del Perfil I3 de inversión.

Tipos de problema	Perfiles		Cuestiones del problema				
			a)	b)	c)	d)	e)
A	I3	G1.3	C	C	C	C	I Ar
		G1.4	F	NC	F	F	I Ar
			NC	F	F	F	I Ar
			F	NC	F	F	I Ar
			F	F	F	F	I Ar
		G2.2	Rt	Rt	Rt	F	I Ar
		G3.2	C	C	C	Rs	I Ar
		G3.3	NC	F	F	Rs	I Ar
			F	F	F	Rs	I Ar
		G4.4	Rt	Rt	C	F	I Ar
		G4.5	Rt	Rt	F	F	I Ar
			Rt	F	F	F	I Ar
		G4.6	Rs	C	C	C	I Ar
		G4.7	Rs	C	C	F	I Ar
		G4.8	Rs	Rs	F	F	I Ar
			Rs	F	F	F	I Ar
		G4.9	C	C	F	F	I Ar
			C	NC	F	F	I Ar
			C	F	F	F	I Ar
		G5.4	Rt	Rt	F	Rs	I Ar
			Rt	F	F	Rs	I Ar
		G5.5	NC	Rs	F	Rs	I Ar
			Rs	Rs	F	Rs	I Ar
			Rs	F	F	Rs	I Ar
		G7	Rt	Rt	Rt	NC	I Ar
			Rs	F	F	NC	I Ar
			C	F	F	NC	I Ar
			C	C	C	NC	I Ar
			F	F	F	NC	I Ar
B	I3	G1.3	C	C	C	C	I Ar
		G1.4	NC	F	F	F	I Ar
			F	F	F	F	I Ar
		G2.3	Rs	Rs	Rs	F	I Ar
		G3.3	F	F	NC	Rs	I Ar
			F	F	F	Rs	I Ar
		G4.2	Rt	Rs	F	F	I Ar
		G4.4	Rt	Rt	C	F	I Ar
		G4.5	Rt	Rt	F	F	I Ar
			Rt	F	F	F	I Ar
		G4.6	Rs	C	C	C	I Ar

Tipos de problema	Perfiles		Cuestiones del problema				
			a)	b)	c)	d)	e)
		G4.8	NC	Rs	F	F	I Ar
			Rs	Rs	F	F	I Ar
			Rs	NC	F	F	I Ar
			Rs	F	NC	F	I Ar
			Rs	F	F	F	I Ar
		G4.9	C	F	F	F	I Ar
		G5.3	Rt	Rs	F	Rs	I Ar
		G5.5	Rs	F	F	Rs	I Ar
		G6	Rs	Rt	Rs	F	I Ar
		G7	Rs	F	F	NC	I Ar
			F	F	F	NC	I Ar
C	I3	A1.3			C	C	I Ar
		A1.4			F	F	I Ar
		A2.2			Rs	F	I Ar
		A5			NC	F	I Ar
		A6			F	NC	I Ar
D	I3	A1.3		C		C	I Ar
		A1.4		F		F	I Ar
		A2.1		Rs		C	I Ar
		A2.2		Rs		F	I Ar
		A3.2		F		C	I Ar
		A5		NC		C	I Ar
				NC		F	I Ar
		A6		C		NC	I Ar
E	I3	A1.4	F		F	NC	I Ar
			F		F	I Ar	NC
			F		F	I Ar	I Ar
		A2.2	Rs		F	I Ar	I Ar

5.1.3.4. Perfil I4

Los estudiantes que presentaron el Perfil I4 utilizaron una estrategia de inversión algebraica al resolver todas las cuestiones de relación inversa. En la Tabla 5.25 presentamos todas las combinaciones del perfil I4 que hemos obtenido, para cada tipo de problema, en el análisis de los datos de las experimentaciones, indicando en cada caso el perfil de generalización o aplicación correspondiente.

Tabla 5.25. Perfiles resultantes del Perfil I4 de inversión.

Tipos de problema	Perfiles		Cuestiones del problema				
			a)	b)	c)	d)	e)
A	I4	G1.4	F	F	F	F	I Alg
		G4.8	Rs	Rs	F	F	I Alg

Tipos de problema	Perfiles		Cuestiones del problema				
			a)	b)	c)	d)	e)
			Rs	F	F	F	I Alg
		G4.9	C	F	F	F	I Alg
B	I4	G1.4	F	F	F	F	I Alg
		G4.5	Rt	F	F	F	I Alg
		G4.8	Rs	F	F	F	I Alg
		G7	F	F	F	NC	I Alg
C	I4	A1.4			F	F	I Alg
D	I4	A1.4		F		F	I Alg
E	I4	A1.4	F		F	I Alg	NC
			F		F	I Alg	I Alg

5.1.3.5. Perfil I5

Los estudiantes que presentaron el Perfil I5 utilizaron una estrategia de ecuación al resolver todas las cuestiones de relación inversa. En la Tabla 5.26 presentamos todas las combinaciones del perfil I5 que hemos obtenido, para cada tipo de problema, en el análisis de los datos de las experimentaciones, indicando en cada caso el perfil de generalización o aplicación correspondiente.

Tabla 5.26. Perfiles resultantes del Perfil I5 de inversión.

Tipos de problema	Perfiles		Cuestiones del problema				
			a)	b)	c)	d)	e)
D	I5	A1.4		F		F	E
E	I5	A1.4	F		F	E	E

5.1.3.6. Perfil I6

Los estudiantes que presentaron el Perfil I6 utilizaron una combinación de estrategias al resolver las cuestiones de relación inversa. En la Tabla 5.27 presentamos todas las combinaciones del perfil I6 que hemos obtenido, para cada tipo de problema, en el análisis de los datos de las experimentaciones, indicando en cada caso el perfil de generalización o aplicación correspondiente.

Tabla 5.27. Perfiles resultantes del Perfil I6 de inversión.

Tipos de problema	Perfiles		Cuestiones del problema				
			a)	b)	c)	d)	e)
E	I6	A1.4	F		F	I Alg	I Ar

5.2. Análisis de los perfiles de los estudiantes

Una vez identificados y descritos los diversos perfiles y subperfiles que han aparecido en las respuestas de los estudiantes, presentamos un análisis de los perfiles observados en los distintos grupos de estudiantes y las semejanzas y diferencias existentes entre ellos. En concreto, vamos a presentar el análisis de los perfiles de respuesta resultantes en cada grupo de estudiantes para varios grupos de problemas comparables tanto en los estudios longitudinales realizados como en los estudios con estudiantes con altas capacidades matemáticas, así como una comparativa entre estos estudios.

En cada grupo de problemas comparables, identificamos los perfiles asociados según el tipo de problema. Cuando identificamos los perfiles de generalización o aplicación empleados por los estudiantes, además analizamos: i) las diferencias existentes entre el uso de la app GeoPattern y la resolución de los problemas con papel y bolígrafo, ii) las subcategorías de las estrategias funcional y construcción usadas en la resolución de los ppg, y iii) los tipos de generalización empleados por los estudiantes. Los tipos de generalización, definidos en 3.4, no se tienen en cuenta en la definición de los perfiles de generalización y aplicación (apartados 5.1.1 y 5.1.2), pues no se corresponden con estrategias de cálculo de valores de la secuencia y de su término general, pero se tienen en cuenta en el análisis por ser un componente importante de la resolución de los ppg que aporta información de cómo los estudiantes expresan la generalización. Cuando identificamos los perfiles de inversión empleados por los estudiantes, además analizamos: i) las diferencias existentes entre el uso de la app GeoPattern y la resolución de los problemas con papel y bolígrafo.

5.2.1. Estudios longitudinales

En los estudios longitudinales (L456 y L56) hemos comparado las diferencias existentes entre las respuestas de los mismos estudiantes en cursos sucesivos, basándonos en los diferentes grupos de problemas que les planteamos en cada curso. Para ello, hemos agrupado estos problemas siguiendo los criterios de identificación de patrones comparables (ver sección 4.2.3.1).

5.2.1.1. Estudio longitudinal en 4.º, 5.º y 6.º (L456)

En este estudio hemos realizado el análisis de los perfiles y las respuestas de los estudiantes en tres grupos de problemas de patrones comparables: i) Magdalenas A, resuelto por el grupo L417, y Cumpleaños 1A, resuelto por los grupos L518 y L619; ii) Jardín B, resuelto por L417, Bolos B, resuelto por L518, y Caramelos B, resuelto por L619; iii) Pared D, resuelto por L518, y Caramelos D, resuelto por L619. Hemos seleccionado estos grupos de problemas por sus patrones identificados como comparables, sus tipos de cuestiones (A, B, C, D, E) y su trazabilidad a lo largo de los cursos. Además, estos grupos de problemas nos permiten realizar una comparación del progreso de los estudiantes en cada una de las tres sesiones realizadas, a excepción de la última sesión de L417 donde se planteó un repaso global sin introducción de nuevos objetivos de aprendizaje.

COMPARACIÓN 1: Magdalenas A y Cumpleaños 1A

Hemos comparado las respuestas a los problemas Magdalenas A, resuelto por los estudiantes cuando cursaban 4.º (L417), y Cumpleaños 1A, resuelto por los mismos estudiantes cuando cursaban 5.º (L518) y 6.º (L619). Para ello, analizaremos por separado los perfiles de generalización e inversión obtenidos.

Perfiles de Generalización

La Tabla 5.28 presenta las cantidades (absolutas y porcentuales) de estudiantes que utilizaron cada perfil de generalización y la Figura 5.1 presenta de manera gráfica las frecuencias de estos perfiles en cada curso.

Tabla 5.28. Perfiles de Generalización en L456 para Magdalenas A (L417) y Cumpleaños 1A (L518 y L619).

Perfil		L417		L518		L619	
		Total	%	Total	%	Total	%
G1	G1.1	1	2,3	-	-	-	-
	G1.2	-	-	-	-	-	-
	G1.3	-	-	-	-	-	-
	G1.4	11	25,6	13	29,5	22	50,0
	Total	12	27,9	13	29,5	22	50,0
G2	G2.1	-	-	-	-	-	-

Perfil		L417		L518		L619	
		Total	%	Total	%	Total	%
	G2.2	3	7,0	-	-	-	-
	G2.3	-	-	-	-	-	-
	G2.4	-	-	-	-	-	-
	Total	3	7,0	0	0,0	0	0,0
G3	G3.1	-	-	-	-	-	-
	G3.2	1	2,3	-	-	-	-
	G3.3	2	4,7	-	-	-	-
	Total	3	7,0	0	0,0	0	0,0
G4	G4.1	-	-	-	-	-	-
	G4.2	1	2,3	-	-	-	-
	G4.3	-	-	-	-	-	-
	G4.4	-	-	-	-	1	2,3
	G4.5	2	4,7	3	6,8	4	9,1
	G4.6	-	-	-	-	-	-
	G4.7	-	-	-	-	-	-
	G4.8	2	4,7	1	2,3	-	-
	G4.9	-	-	4	9,1	9	20,5
	Total	5	11,7	8	18,2	14	31,9
G5	G5.1	-	-	-	-	-	-
	G5.2	1	2,3	-	-	-	-
	G5.3	1	2,3	-	-	-	-
	G5.4	4	9,3	-	-	-	-
	G5.5	-	-	-	-	-	-
	Total	6	13,9	0	0,0	0	0,0
G6		0	0,0	1	2,3	1	2,3
G7		5	11,6	12	27,3	2	4,5
Sin perfil		9	20,9	10	22,7	5	11,4
Total		43	100,0	44	100,0	44	100,0

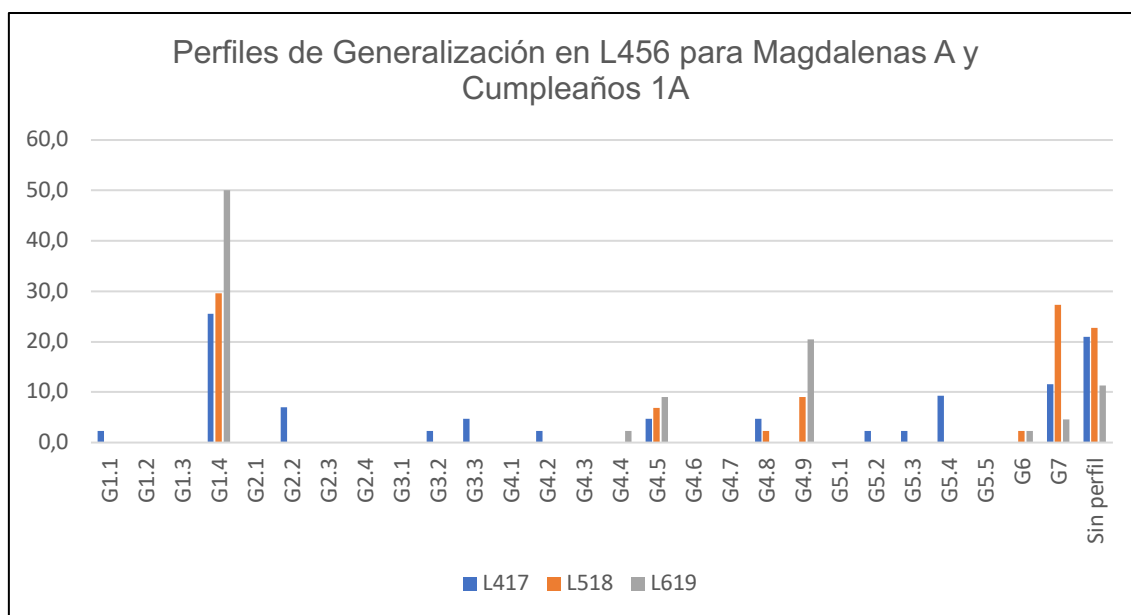


Figura 5.1. Frecuencia (%) de los perfiles de Generalización en L456 para Magdalenas A (L417) y Cumpleaños 1A (L518 y L619).

Podemos observar que L417 presenta una mayor diversidad de perfiles que L518 y L619, ya que aparecen algunos subperfiles de tipo G2, G3 y G5, que hacen referencia al uso de un determinado tipo de estrategias en las cuestiones de cálculo de términos y cuya calidad aumenta o disminuye al expresar la generalización. Sin embargo, L518 y L619 se centran en subperfiles de tipo G1 y G4, referidos al uso constante de una estrategia, en concreto la estrategia funcional, y al uso de estrategias con un aumento progresivo de calidad.

También observamos cómo, de L417 a L518, se incrementa ligeramente el uso de una estrategia funcional constante (G1.4) y estrategias con un aumento progresivo de calidad (G4.5 y G4.9), así como el número de estudiantes que no son capaces de dar una respuesta en la cuestión de verbalización (G7). También podemos ver cómo, de L518 a L619, siguen aumentando las cantidades de respuestas en los subperfiles G1.4, G4.5 y G4.9, llegando a ser usados por un 79,6% de los estudiantes, y se reducen drásticamente los casos del perfil G7 y de estudiantes a los que no ha sido posible asignar un perfil.

De este modo, podemos concluir que, gracias a la práctica, los estudiantes han ido aprendiendo a usar estrategias más adecuadas para la generalización, particularmente la funcional, y han ido abandonando estrategias que no ayudan

o fomentan el desarrollado de una generalización, como las estrategias de recuento y recursividad. Y, aunque en L518 se observa un mayor número de estudiantes que no son capaces de expresar la generalización que han obtenido, este hecho podría deberse a que los estudiantes son conscientes de qué tipo de estrategias son más adecuadas para la resolución de ppg y hacen uso de ellas, pero aun no han adquirido el nivel de competencia necesario para poder explicar el proceso matemático que han seguido en su razonamiento.

En este análisis, creemos importante ampliar la información que nos proporcionan estos perfiles en tres aspectos a destacar: las estrategias seleccionadas en el uso de la app GeoPattern en comparación con el uso de papel y bolígrafo, la distribución del uso de subcategorías de las estrategias funcional y construcción y los tipos de generalización empleados por los estudiantes. Para realizar esta parte del análisis, centraremos el foco en la frecuencia (%) de estrategias y tipos de generalizaciones empleadas por los estudiantes, descartando las respuestas en blanco. La Tabla 5.29 indica la cantidad de respuestas proporcionadas por los estudiantes de cada curso para las distintas cuestiones de los ppg incluidos en esta comparación.

Tabla 5.29. Cantidad de respuestas en L456 para Magdalenas A (L417) y Cumpleaños 1A (L518 y L619).

Cuestiones	L417	L518			L619		
	Papel	App	Papel	Total	App	Papel	Total
a)	42	24	19	43	21	21	42
b)	42	23	19	42	20	21	41
c)	42	19	18	37	21	20	41
d)	42	16	17	33	20	21	41
e)	41	13	18	31	20	20	40

Uso de GeoPattern y de papel y bolígrafo

Para el análisis de las diferencias existentes entre el uso de la app GeoPattern y la resolución de los problemas con papel y bolígrafo, nos hemos centrado en las estrategias empleadas en cuestiones directas por los estudiantes de L518 y L619. No tenemos en cuenta las respuestas de L417 porque todos los estudiantes resolvieron los problemas con papel y bolígrafo sin una posible

comparativa de respuestas. En ambos cursos los estudiantes fueron divididos en dos grupos, de modo que aproximadamente la mitad de ellos resolvieron los problemas con GeoPattern y la otra mitad con papel y bolígrafo. Las Figuras 5.2 y 5.3 presentan la evolución de las estrategias en los sucesivos cursos para las cuestiones directas en ambos entornos de resolución.

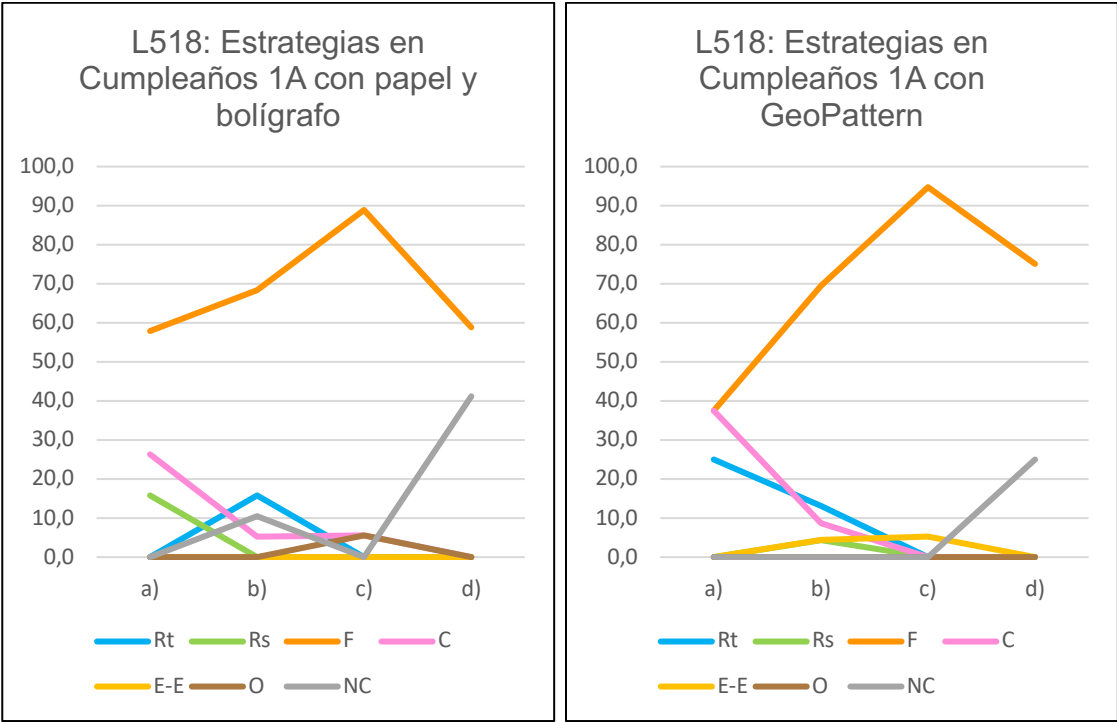


Figura 5.2. Frecuencia (%) de las estrategias de resolución en L456 para Cumpleaños 1A (L518).

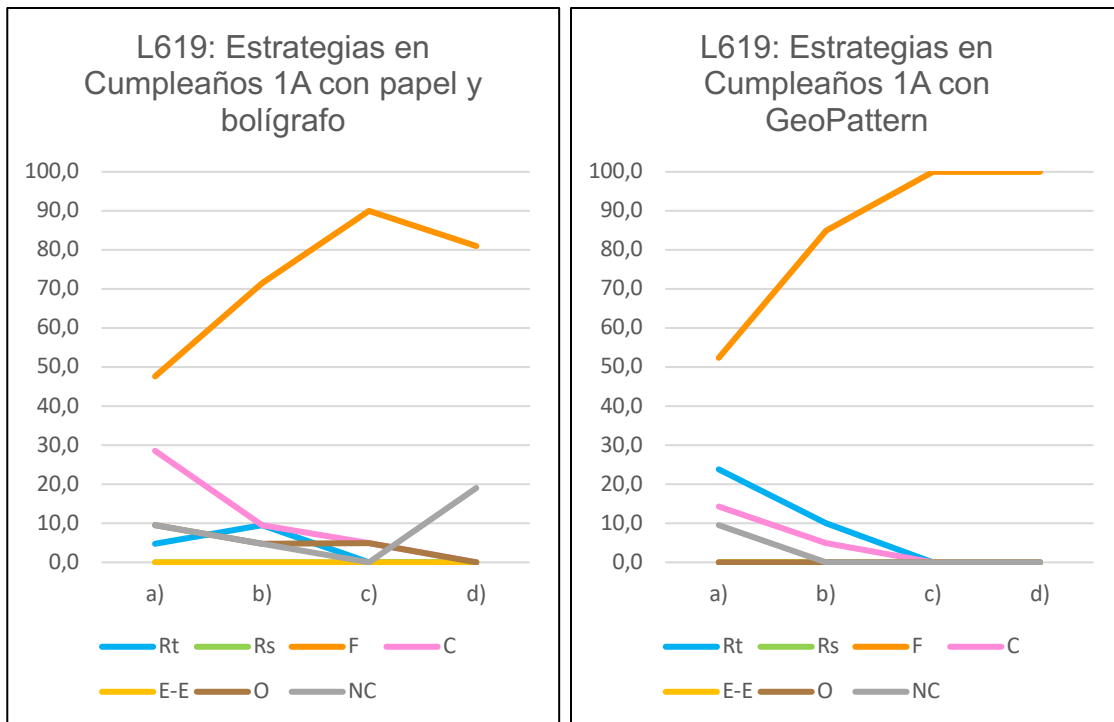


Figura 5.3. Frecuencia (%) de las estrategias de resolución en L456 para Cumpleaños 1A (L619).

Podemos observar cómo GeoPattern fomenta el uso de estrategias de tipo funcional (F), ya que, tanto en L518 como en L619, el porcentaje de estudiantes que usaron estas estrategias en las cuestiones b), c) y d) es mayor con GeoPattern que con papel y bolígrafo. Además, podemos ver cómo el uso de otras estrategias disminuye drásticamente en las respuestas elaboradas con GeoPattern, llegando incluso a desaparecer. No obstante, sí se aprecia una mayor presencia de la estrategia de ensayo y error (E-E) en L518 con GeoPattern, que, posteriormente, desaparece en L619. Finalmente, consideramos necesario destacar las diferencias existentes en las respuestas no clasificables (NC) entre ambos entornos de resolución, ya que el uso de GeoPattern propicia una disminución significativa en la cantidad de respuestas proporcionadas sin sentido.

Estos hechos, tanto el aumento en la calidad de la estrategia empleada como el uso del ensayo y error, pueden deberse a la presencia del botón *Comprobar* en GeoPattern. Este permite al estudiante verificar si la respuesta numérica introducida en la ventana de resultado es correcta o errónea, proporcionándole la posibilidad de revisarla y mejorarla a través del estudio del patrón, los datos

proporcionados y sus anteriores respuestas, así como la posibilidad de introducir diversas respuestas aleatorias hasta obtener la respuesta correcta (ensayo y error).

Subcategorías de las estrategias funcional y construcción

Para el análisis de las subcategorías de las estrategias funcional y construcción en la resolución de ppg, hemos extraído los datos en forma de porcentaje de estudiantes que emplearon cada una de ellas en los problemas Magdalenas A (L417) y Cumpleaños 1A (L518 y L619).

Estrategias de tipo funcional

La Figura 5.4 presenta la evolución de las estrategias de tipo funcional para las cuestiones directas en L456. En ella, podemos observar que las únicas estrategias de tipo funcional empleadas fueron aquellas clasificadas como descomposición (FD) y funcional (F). Este hecho se debe a que los estudiantes centraron su análisis del patrón geométrico en un procedimiento más visual que numérico, es decir, en analizar la representación gráfica de las figuras y su descomposición en partes más que en la información puramente numérica.

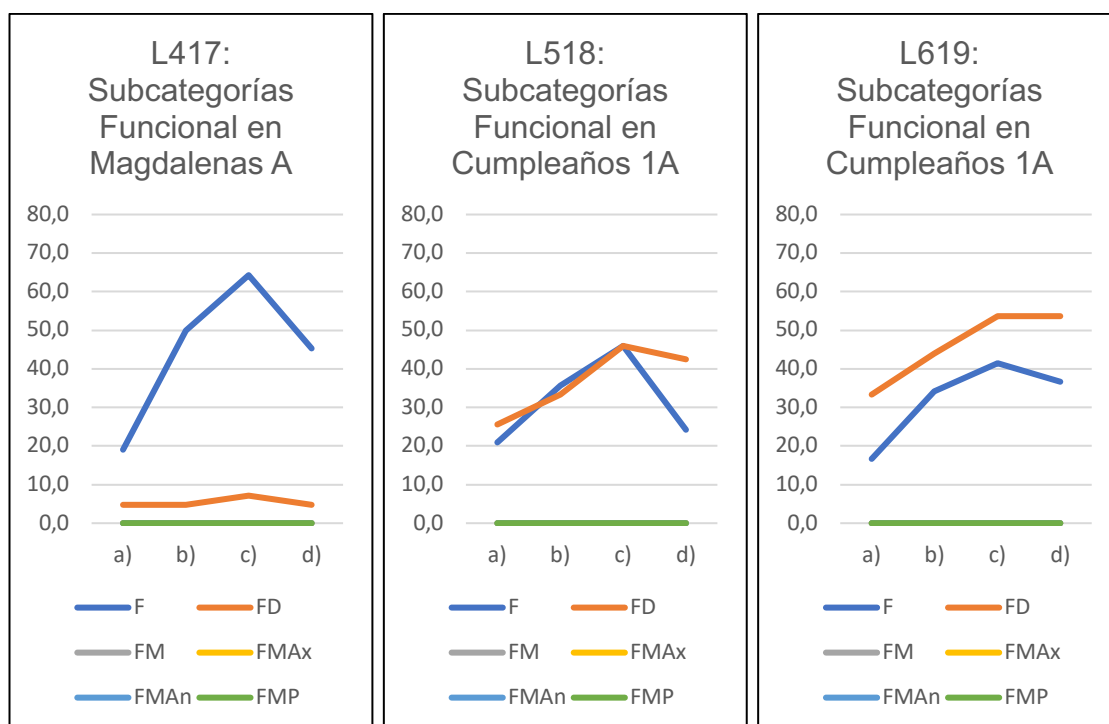


Figura 5.4. Frecuencia (%) de las subcategorías de la estrategia funcional en L456.

Si analizamos la evolución de las estrategias funcionales registradas, podemos apreciar una progresión en el uso de estrategias visuales. En L417 la estrategia más utilizada fue funcional (F), sin embargo, el uso de ambas estrategias se iguala en L518 para, posteriormente, dar paso a un aumento en el uso de descomposición (FD), que pasa a ser la estrategia mayoritaria. Aquí se evidencia cómo los estudiantes han ido desarrollando sus capacidades de generalización y discriminación visual de patrones durante los aprendizajes proporcionados en los distintos cursos.

Estrategias de tipo construcción

La Figura 5.5 presenta la evolución de las estrategias de tipo construcción para las cuestiones directas en L456. En ella, podemos observar que los estudiantes utilizaron las estrategias proporcional (CP), aditiva (CA) y combinada (CC), siendo la estrategia construcción (C).

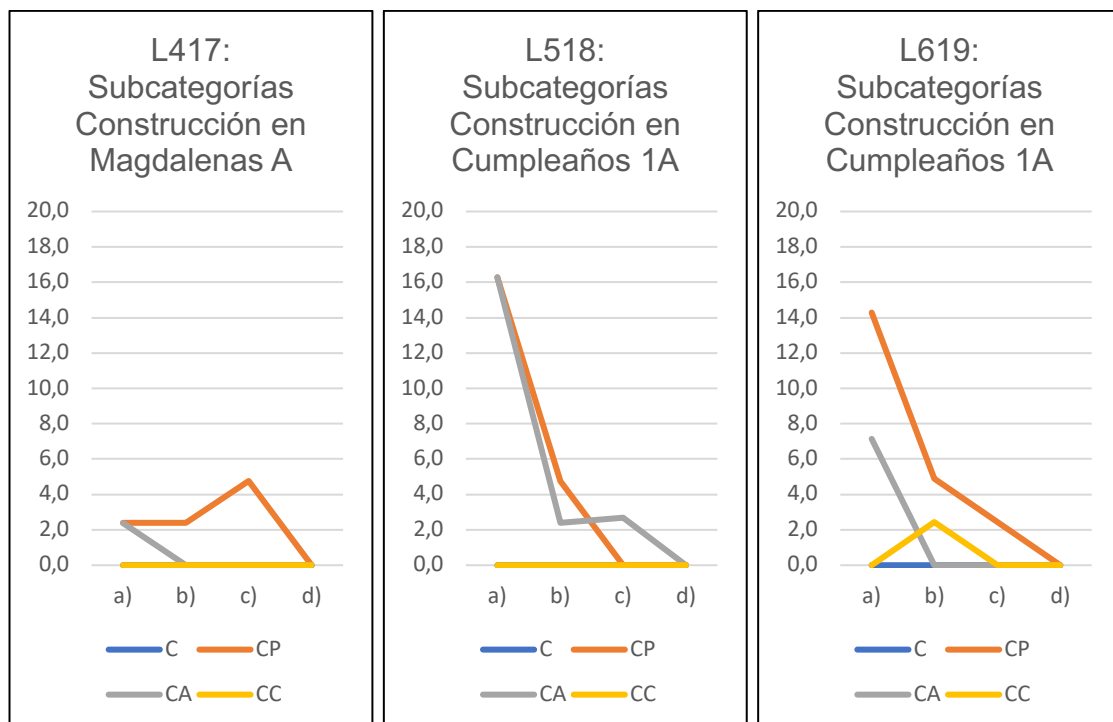


Figura 5.5. Frecuencia (%) de las subcategorías de la estrategia construcción en L456.

Si analizamos la evolución de estas estrategias, podemos apreciar cómo, aunque los estudiantes deciden usar CA y CP para la cuestión inicial (a), su uso disminuye en gran medida a partir de la cuestión b, sobre todo la proporcional

(CP). Este hecho puede deberse a que los estudiantes optan por usar estrategias de análisis de patrones más visuales para intentar resolver cuestiones de generalización más complejas, como la cercana y lejana. Sin embargo, es necesario tener en cuenta que el uso de la estrategia CP en estos problemas es correcto. Quizás por ello, en Magdalenas A se puede observar un aumento progresivo en su uso, aunque desaparece en la cuestión de verbalización (d), probablemente porque los estudiantes no son capaces de expresar con palabras sus procedimientos de cálculo.

Tipos de generalización

Para el análisis de los tipos de generalización empleados por los estudiantes en la resolución de ppg, hemos extraído los datos en forma de porcentaje de la cantidad de estudiantes que emplearon cada una de estas generalizaciones en las cuestiones directas de los problemas Magdalenas A (L417) y Cumpleaños 1A (L518 y L619). La Figura 5.6 presenta la evolución de los distintos tipos de generalización para las cuestiones directas en L456.

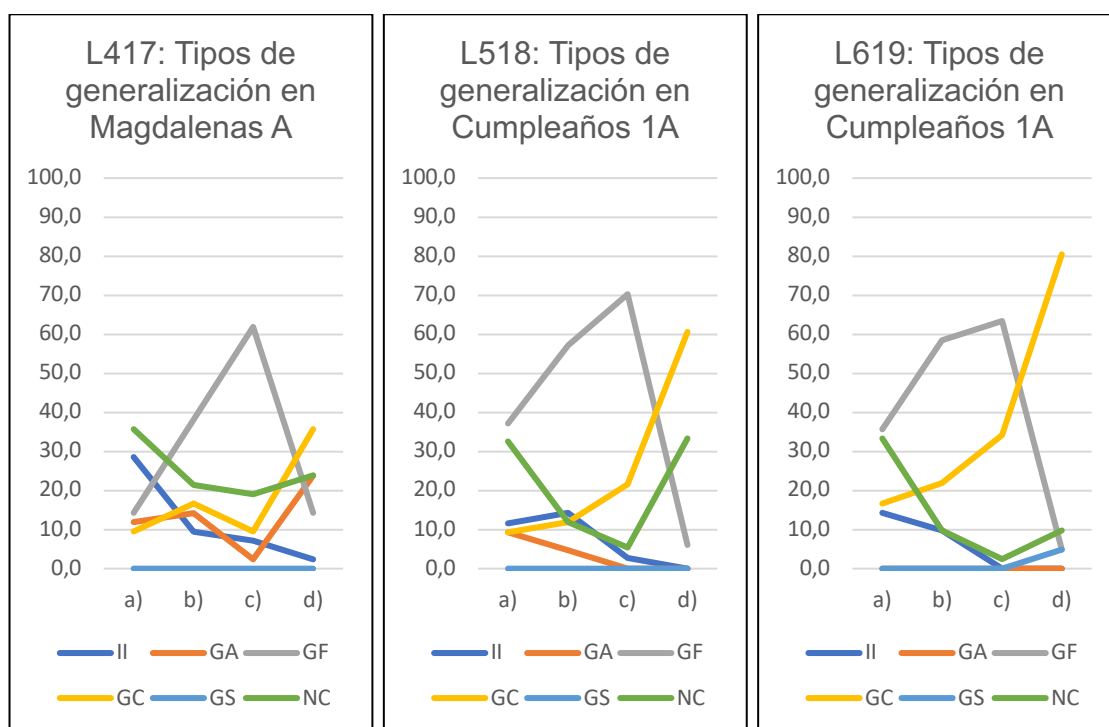


Figura 5.6. Frecuencia (%) de los tipos de generalización en L456.

Podemos observar la presencia en las respuestas proporcionadas de inducción ingenua (II), generalización aritmética (GA), generalización factual (GF),

generalización contextual (GC) y generalizaciones no clasificables (NC), siendo la generalización simbólica (GS) el único tipo de generalización no utilizado por estos estudiantes. Este hecho se debe a que la GS se caracteriza por el uso de expresiones algebraicas alfanuméricas y estos problemas fueron resueltos al inicio de las secuencias de enseñanza-aprendizaje.

Si nos centramos en el análisis de las generalizaciones a través de los cursos, podemos observar cómo destaca el uso de la GF como generalización principal. Podemos ver cómo aumenta su uso de un modo progresivo durante la resolución de las cuestiones directas de cálculo de términos (a, b, c) y, posteriormente, cae prácticamente en desuso en la cuestión de verbalización (d). Esa disminución de la GF viene en parte determinada por el enunciado de la cuestión, que pide explicar el proceso, pero también es una señal de aprendizaje por parte de los estudiantes, ya que pasan de usar esta generalización a la GC, la cual implica un mayor nivel de abstracción. En la Figura 5.6 podemos apreciar cómo el uso de la GC va aumentando progresivamente, siendo la estrategia más utilizada en la expresión verbal de la generalización (d). Además, al comparar los tres cursos, vemos cómo, gracias a la evolución y el aprendizaje de los estudiantes, ambas generalizaciones (GF y GC) se encuentran cada vez más presentes en las resoluciones elaboradas.

Por otra parte, podemos observar también cómo los otros tipos de generalizaciones, más simples y con menor nivel de abstracción, se encuentran más presentes el primer curso (L417) y, posteriormente, van cayendo en desuso.

Perfiles de Inversión

La Tabla 5.30 presenta las cantidades (absolutas y porcentuales) de estudiantes que utilizaron cada perfil de inversión y la Figura 5.7 presenta de gráficamente las frecuencias de dichos perfiles en cada curso.

Tabla 5.30. Perfiles de Inversión en L456 para Magdalenas A (L417) y Cumpleaños 1A (L518 y L619).

Perfil	L417		L518		L619	
	Total	%	Total	%	Total	%
I1	-	-	1	2,3	-	-

Perfil	L417		L518		L619	
	Total	%	Total	%	Total	%
I2	22	51,2	10	22,7	11	25,0
I3	11	25,6	15	34,1	25	56,8
I4	-	-	-	-	-	-
I5	-	-	-	-	-	-
I6	-	-	-	-	-	-
Sin perfil	10	23,3	18	40,9	8	18,2
Total	43	100,0	44	100,0	44	100,0

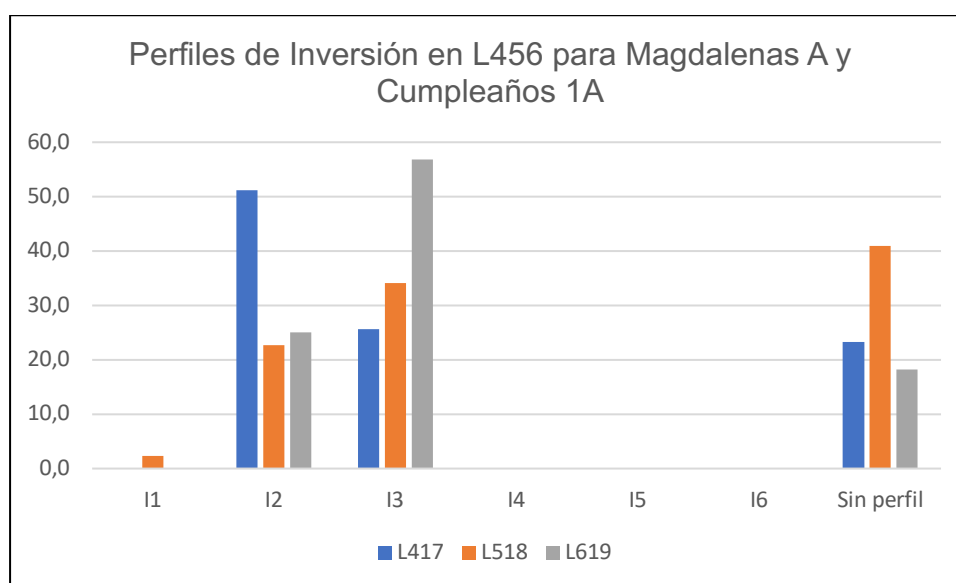


Figura 5.7. Frecuencia (%) de los perfiles de Inversión en L456 para Magdalenas A (L417) y Cumpleaños 1A (L518 y L619).

Podemos observar que los únicos perfiles con presencia significativa son I2 e I3, que hacen referencia al uso de estrategias de operaciones directas y a la aplicación de una inversión aritmética respectivamente.

También observamos cómo, de L417 a L518, disminuye drásticamente la cantidad de estudiantes con perfil I2 y aumenta notablemente la presencia de I3 y los casos de estudiantes a los que no ha sido posible asignar un perfil. También podemos ver cómo, de L518 a L619, se mantiene la cantidad de perfiles I2, se incrementa considerablemente la presencia de I3, llegando a ser usada por un 56,8% de los estudiantes, y se reducen en gran medida los casos sin perfil.

De este modo, podemos concluir que, gracias a la práctica, los estudiantes han ido aprendiendo a usar estrategias más adecuadas para la resolución de la cuestión de inversión en ppg, como la inversión aritmética de cálculos realizados previamente en las cuestiones de relación directa. Este aprendizaje nos servirá de base para que, posteriormente, los estudiantes traten de resolver algebraicamente este tipo de cuestiones. Y, aunque en L518 se observa un mayor número de estudiantes que no son capaces de resolver la cuestión de inversión, este hecho podría deberse a que los estudiantes son conscientes de qué tipo de estrategias no son adecuadas para su resolución, pero aun no han adquirido el nivel de competencia necesario para poder utilizar otras estrategias más idóneas.

Uso de GeoPattern y de papel y bolígrafo

Dentro de este análisis de perfiles de inversión, creemos importante ampliar la información de estos perfiles y centrar el foco en el uso de la app GeoPattern en comparación con el uso de papel y bolígrafo para la resolución de ppg. Para ello, nos hemos centrado en las estrategias empleadas en la cuestión de relación inversa por los estudiantes de L518 y L619, descartando las respuestas de L417, que fueron proporcionadas únicamente con papel y bolígrafo. Para realizar esta parte del análisis, centraremos el foco en la frecuencia (%) de estrategias empleadas por los estudiantes, descartando las respuestas en blanco. La Tabla 5.29 indica la cantidad de respuestas proporcionadas por los estudiantes de cada curso para las distintas cuestiones de los ppg incluidos en esta comparación. La Figura 5.8 presenta la evolución de las estrategias para la cuestión de relación inversa en ambos entornos de resolución de ppg.

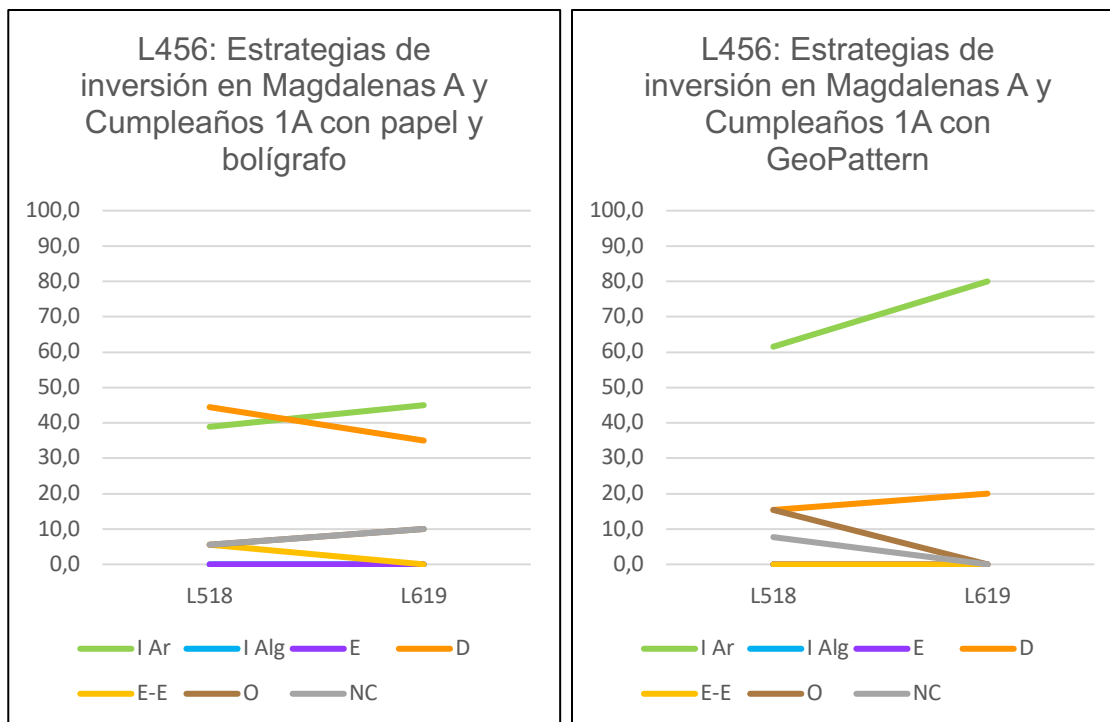


Figura 5.8. Frecuencia (%) de las estrategias de resolución en L456.

Podemos observar cómo GeoPattern fomenta el uso de la inversión aritmética (I Ar), ya que esta destaca en comparación con el uso de otras estrategias y es empleada por un mayor porcentaje de estudiantes con GeoPattern. Además, podemos ver cómo la evolución hacia el uso de estrategias más elaboradas es mayor en los estudiantes que emplearon GeoPattern, pues se aprecia una mayor progresión de L518 a L619 en el uso de I Ar, así como una mayor disminución del uso de estrategias alternativas (O) o no clasificables (NC). Los estudiantes que realizaron la resolución con papel y bolígrafo, aunque también presentan una evolución favorable en el uso de estrategias de inversión de L518 a L619, esta es significativamente menor.

COMPARACIÓN 2: Jardín B, Bolos B y Caramelos B

Hemos comparado las respuestas a los problemas Jardín B, resuelto por los estudiantes en 4.º (L417), Bolos B, resuelto por los estudiantes en 5.º (L518), y Caramelos B, resuelto por los estudiantes en 6.º (L619). Para ello, analizaremos por separado los perfiles de generalización e inversión obtenidos. No obstante, es necesario advertir que un alto porcentaje de estudiantes de L417 y L518 no llegaron a resolver estos problemas.

Perfiles de Generalización

La Tabla 5.31 presenta las cantidades (absolutas y porcentuales) de estudiantes que utilizaron cada perfil de generalización y la Figura 5.9 presenta de manera gráfica las frecuencias de estos perfiles en cada curso.

Tabla 5.31. Perfiles de Generalización en L456 para Jardín B (L417), Bolos B (L518) y Caramelos B (L619).

Perfil		L417		L518		L619	
		Total	%	Total	%	Total	%
G1	G1.1	-	-	-	-	-	-
	G1.2	-	-	-	-	1	2,3
	G1.3	2	4,7	-	-	3	6,8
	G1.4	5	11,6	4	9,1	11	25,0
	Total	7	16,3	4	9,1	15	34,1
G2	G2.1	-	-	-	-	-	-
	G2.2	-	-	-	-	-	-
	G2.3	-	-	-	-	-	-
	G2.4	-	-	1	2,3	-	-
	Total	0	0,0	1	2,3	0	0,0
G3	G3.1	-	-	-	-	-	-
	G3.2	-	-	-	-	-	-
	G3.3	-	-	-	-	-	-
	Total	0	0,0	0	0,0	0	0,0
G4	G4.1	-	-	-	-	-	-
	G4.2	-	-	-	-	-	-
	G4.3	-	-	1	2,3	-	-
	G4.4	-	-	-	-	-	-
	G4.5	3	7,0	2	4,5	3	6,8
	G4.6	2	4,7	-	-	-	-
	G4.7	-	-	-	-	-	-
	G4.8	1	2,3	-	-	10	22,7
	G4.9	-	-	-	-	-	-
	Total	6	14,0	3	6,8	13	29,5
G5	G5.1	-	-	-	-	-	-
	G5.2	-	-	-	-	-	-
	G5.3	-	-	-	-	1	2,3
	G5.4	-	-	-	-	-	-
	G5.5	-	-	2	4,5	1	2,3
	Total	0	0,0	2	4,5	2	4,5
G6		0	0,0	0	0,0	0	0,0
G7		3	7,0	2	4,5	3	6,8
Sin perfil		27	62,8	32	72,7	11	25,0

Perfil	L417		L518		L619	
	Total	%	Total	%	Total	%
Total	43	100,0	44	100,0	44	100,0

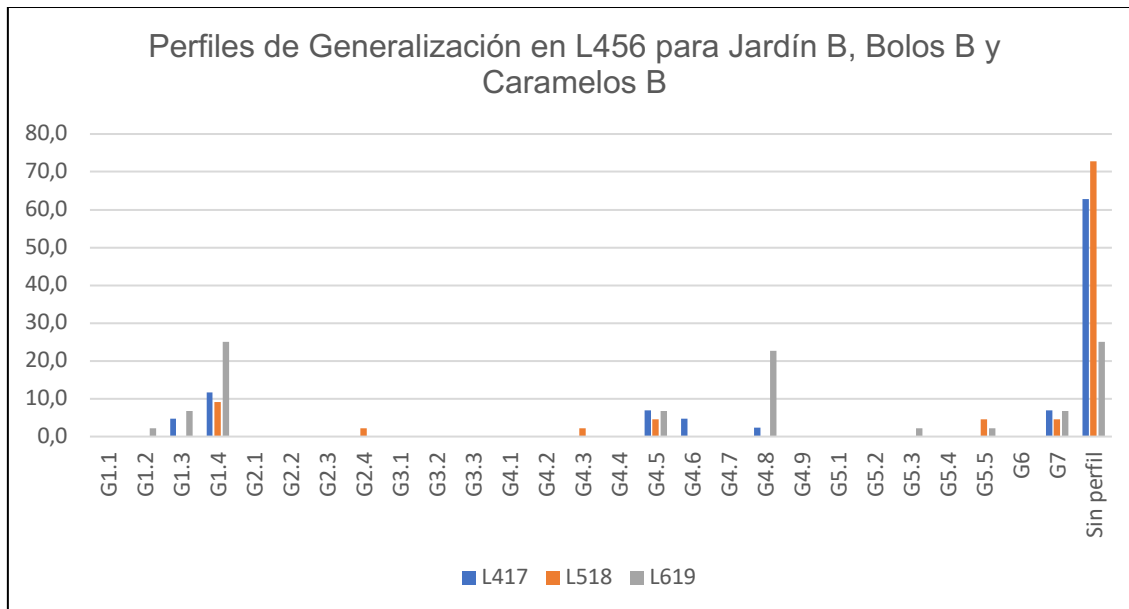


Figura 5.9. Frecuencia (%) de los perfiles de Generalización en L456 para Jardín B (L417) y Bolos B (L518) y Caramelos B (L619).

Aunque L619 presenta una mayor diversidad de subperfiles que L417 y L518 (probablemente debido a que una mayor cantidad de estudiantes resolvieron este ppg), sus estudiantes se centran en dos subcategorías principalmente: G1.4, referido al uso constante de estrategias de tipo funcional, y G4.8, referido al uso de estrategias con un aumento progresivo de calidad, en concreto, con el paso de una estrategia recursiva a funcional. Por su parte, L417 se centra en subperfiles de G1, G4 y G7, que abarca aquellos estudiantes que no son capaces de dar una respuesta en la cuestión de verbalización, y L518 en subperfiles de G1, G4 y G7, así como de G2 y G5, que incluyen el uso de un determinado tipo de estrategias en las cuestiones de cálculo de términos y cuya calidad aumenta o disminuye al expresar la generalización.

Podemos observar cómo, de L417 a L518, hay un cambio considerable en el tipo de subperfiles empleados, aunque se mantiene el uso mayoritario de los perfiles G1, en concreto del tipo funcional G1.4 (11,6% para L417 y 9,1% para L518), y G4 (14% para L417 y 6,8% para L518). También podemos ver cómo, de L518 a

L619, siguen aumentando los perfiles G1 y G4, llegando a ser usados por un 63,6% de los estudiantes en L619, y, aunque sigue presente el perfil G5, este tiene poca relevancia. Por último, cabe destacar que la presencia del perfil G7 se mantiene constante a lo largo de los tres cursos, con un pequeño descenso en L518.

De este modo, podemos concluir que, gracias a la práctica, algunos estudiantes han aplicado estrategias cada vez más adecuadas para la generalización. No obstante, como en todo proceso de aprendizaje, una parte de los estudiantes sigue utilizando estrategias que no fomentan el desarrollo de una generalización o aún no han desarrollado las competencias necesarias para expresar esta generalización.

En este análisis, creemos importante ampliar la información que nos proporcionan estos perfiles en tres aspectos a destacar: las estrategias seleccionadas en el uso de la app GeoPattern en comparación con el uso de papel y bolígrafo, la distribución del uso de subcategorías de las estrategias funcional y construcción y los tipos de generalización empleados por los estudiantes. Para realizar esta parte del análisis, centraremos el foco en las frecuencias (%) de estrategias y tipos de generalizaciones empleadas por los estudiantes, descartando las respuestas en blanco. La Tabla 5.32 indica la cantidad de respuestas proporcionadas por los estudiantes de cada curso para las distintas cuestiones de los ppg incluidos en esta comparación.

Tabla 5.32. Cantidad de respuestas en L456 para Jardín B (L417), Bolos B (L518) y Caramelos B (L619).

Cuestiones	L417	L518			L619		
	Papel	App	Papel	Total	App	Papel	Total
a)	20	7	17	24	21	19	40
b)	20	5	14	19	20	19	39
c)	19	4	11	15	18	19	37
d)	15	3	10	13	20	17	37
e)	14	2	9	11	18	16	34

Uso de GeoPattern y de papel y bolígrafo

Para este análisis, nos hemos centrado en las estrategias empleadas en cuestiones directas por los estudiantes de L518 y L619. En ambos cursos los estudiantes fueron divididos en dos grupos, de modo que aproximadamente la mitad de ellos resolvieron los problemas con GeoPattern y la otra mitad con papel y bolígrafo. Hemos descartado las respuestas de L417 porque todos los estudiantes resolvieron los problemas con papel y bolígrafo. Las Figuras 5.10 y 5.11 presentan las estrategias empleadas en los sucesivos cursos para las cuestiones directas en ambos entornos de resolución.

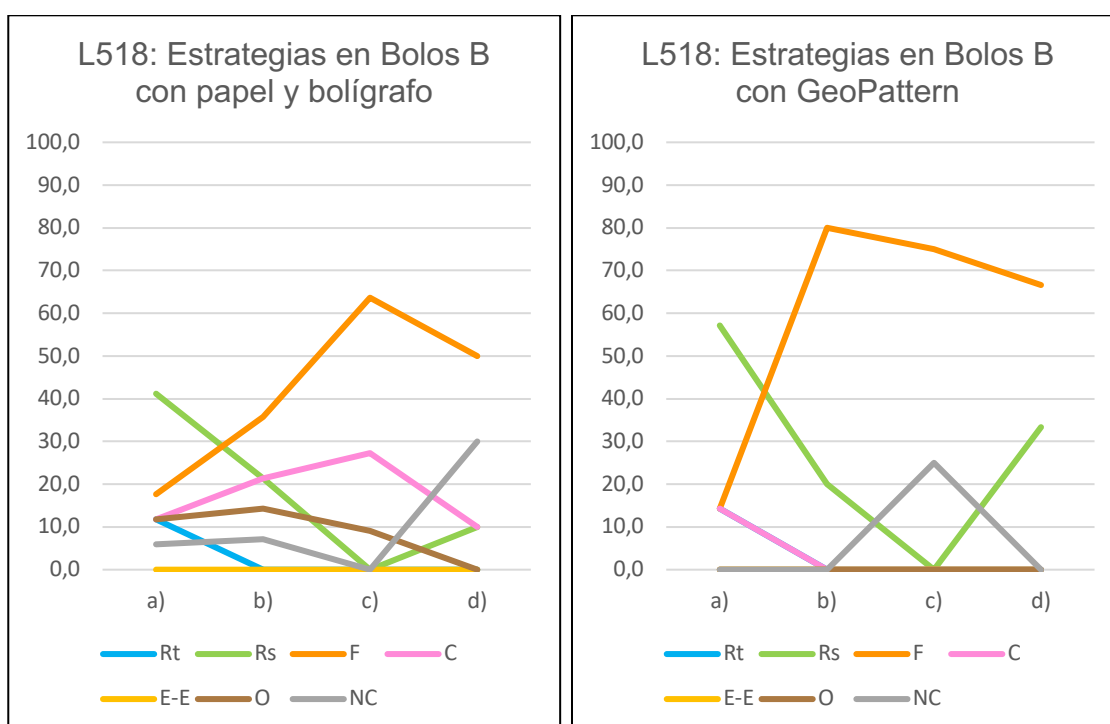


Figura 5.10. Frecuencia (%) de las estrategias de resolución en L456 para Bolos B (L518).

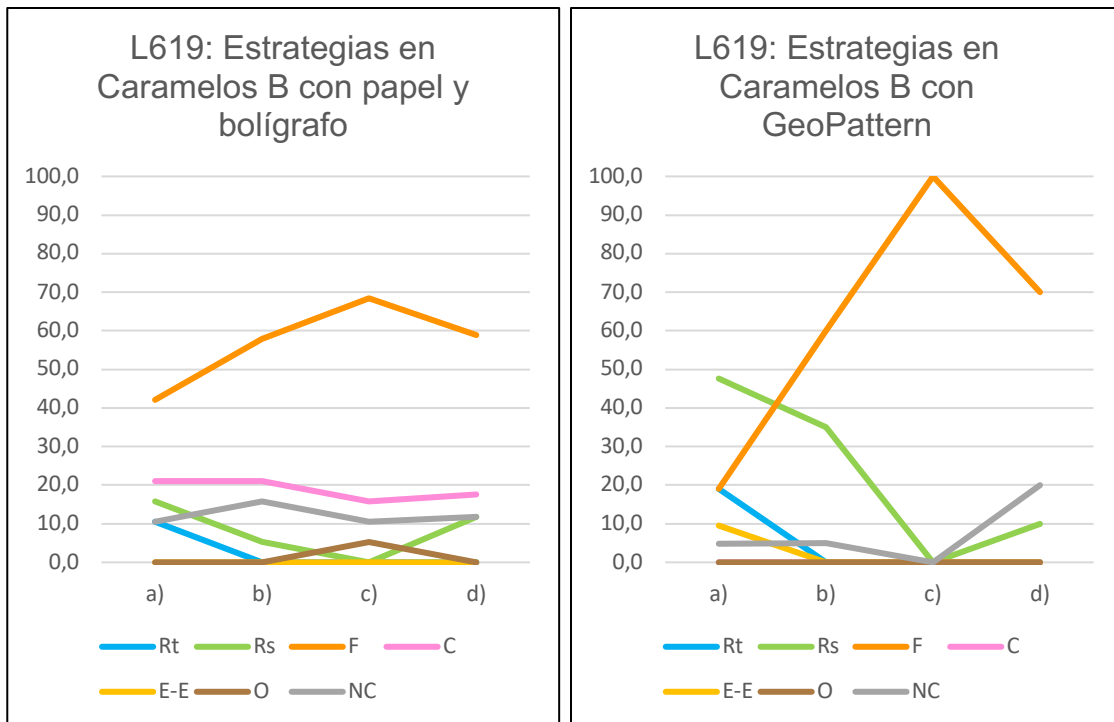


Figura 5.11. Frecuencia (%) de las estrategias de resolución en L456 para Caramelos B (L619).

Podemos observar cómo GeoPattern fomenta el uso de estrategias funcionales (F), pues, tanto en L518 como en L619, se aprecia un aumento en el uso de estas estrategias, llegando incluso al 100% en L619, en comparación con el uso de papel y bolígrafo. También se observa cómo el aumento en el porcentaje de estudiantes que usan estrategias funcionales es mucho más rápido y acusado con GeoPattern que con papel y bolígrafo. Además, aunque en ambos casos, se produce una disminución en el uso de estas estrategias para la expresión de la generalización, este uso sigue siendo mayor con GeoPattern.

En consecuencia, se aprecia una diferencia clara en el uso de otros tipos de estrategias diferentes a las funcionales en ambos entornos. Por una parte, los estudiantes que emplearon papel y bolígrafo muestran una mayor variedad de estrategias, destacando el uso de construcción (C) tanto en L518 y L619, así como otros (O) en L518 y no clasificable (NC) en L619. Por otra parte, los estudiantes que emplearon GeoPattern hicieron más uso de estrategias funcionales (F) y recursivas (Rs), así como de estrategias NC en momentos puntuales, como la cuestión c) en L518 y la cuestión d) en L619. No obstante,

en ambos entornos de resolución, Rs fue la estrategia más utilizada en la cuestión inicial (a).

Estos hechos, tanto la diferencia en la variedad de estrategias empleadas como la cantidad de estudiantes que emplearon estrategias de tipo funcional, pueden deberse a la presencia del botón *Comprobar* en GeoPattern. Este permite al estudiante verificar si la respuesta numérica introducida en la ventana de resultado es correcta o errónea, pudiendo, en el segundo caso, revisarla y mejorarla a través del estudio del patrón, los datos proporcionados y sus anteriores respuestas. Además, la presencia de la calculadora en GeoPattern, puede explicar la persistencia de algunos estudiantes en el uso de la estrategia Rs, ya que facilita la realización de cálculos repetitivos.

Subcategorías de las estrategias funcional y construcción

Para este análisis hemos extraído los datos en forma de porcentaje de estudiantes que emplearon cada una de estas estrategias en los problemas Jardín B (L417), Bolos B (L518) y Caramelos B (L619).

Estrategias de tipo funcional

La Figura 5.12 presenta la evolución de las estrategias de tipo funcional para las cuestiones directas en L456. En ella, podemos observar que las únicas estrategias de tipo funcional empleadas fueron aquellas clasificadas como descomposición (FD), primero (FMP) y funcional (F).

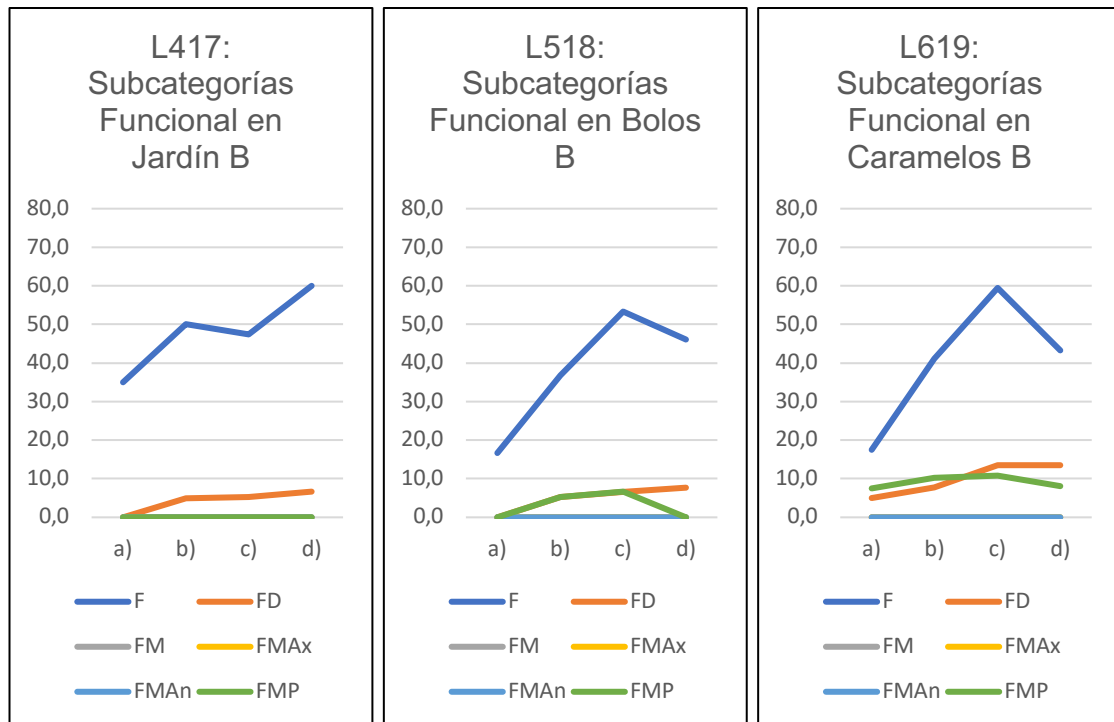


Figura 5.12. Frecuencia (%) de las subcategorías de la estrategia funcional en L456.

Si analizamos la evolución de las estrategias funcionales registradas, podemos apreciar un aumento en el uso de estas tres estrategias a lo largo de los cursos. En L417, L518 y L619 la estrategia más utilizada fue funcional (F), probablemente porque las operaciones y explicaciones proporcionadas por los estudiantes no han dejado rastro del razonamiento previo realizado hasta dar con la generalización empleada. En cuanto a FD y FMP, se observa cómo su uso ha aumentado en los sucesivos cursos, sobre todo, en las cuestiones c) y d) para FD y b) y c) y d) para FMP. Este hecho puede deberse a que, aunque los estudiantes son capaces de aplicar una FMP, su nivel de comprensión de la estrategia no les permite dar una explicación del proceso de razonamiento que han seguido. En cambio, el uso de estrategias de tipo visual, como FD, al analizar la representación gráfica de las figuras y descomponerla en partes, proporciona el nivel de comprensión necesario para explicar el razonamiento numérico en la resolución de ppg y la obtención de una generalización.

Estrategias de tipo construcción

La Figura 5.13 presenta la evolución de las estrategias de tipo construcción para las cuestiones directas en L456. En ella, podemos observar que los estudiantes utilizaron las estrategias proporcional (CP) y aditiva (CA).

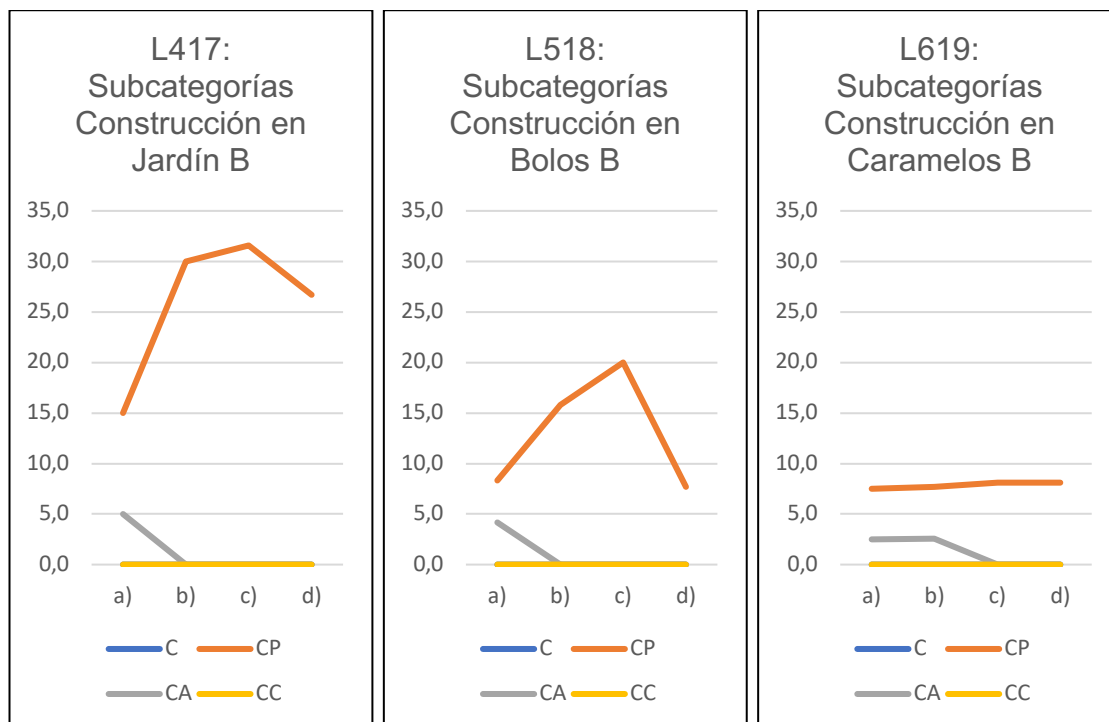


Figura 5.13. Frecuencia (%) de las subcategorías de la estrategia construcción en L456.

Si analizamos la evolución de estas estrategias, podemos apreciar cómo, aunque en L417 hay un uso significativo de la estrategia proporcional (CP), este disminuye ligeramente en L518 hasta quedar por debajo del 10% en L619. Este hecho puede deberse a que los estudiantes, a través de la comprobación de sus cálculos, toman conciencia de que se trata de una estrategia errónea (para estos ppg) y deciden ir en busca de otras estrategias más apropiadas. Además, aquí podemos ver claramente cómo los estudiantes a través de la práctica van aprendiendo a obtener generalizaciones y descartar aquellas estrategias detectadas como erróneas.

Tipos de generalización

Para realizar este análisis, hemos extraído los datos en forma de porcentaje de la cantidad de estudiantes que emplearon cada una de estas generalizaciones en las cuestiones directas de los problemas Jardín B (L417), Bolos B (L518) y Caramelos B (L619). La Figura 5.14 presenta la evolución de los distintos tipos de generalización para las cuestiones directas en L456. En ella, podemos observar la presencia en las respuestas de todos los tipos de generalización: inducción ingenua (II), generalización aritmética (GA), generalización factual (GF), generalización contextual (GC), generalización simbólica (GS) y generalizaciones no clasificables (NC).

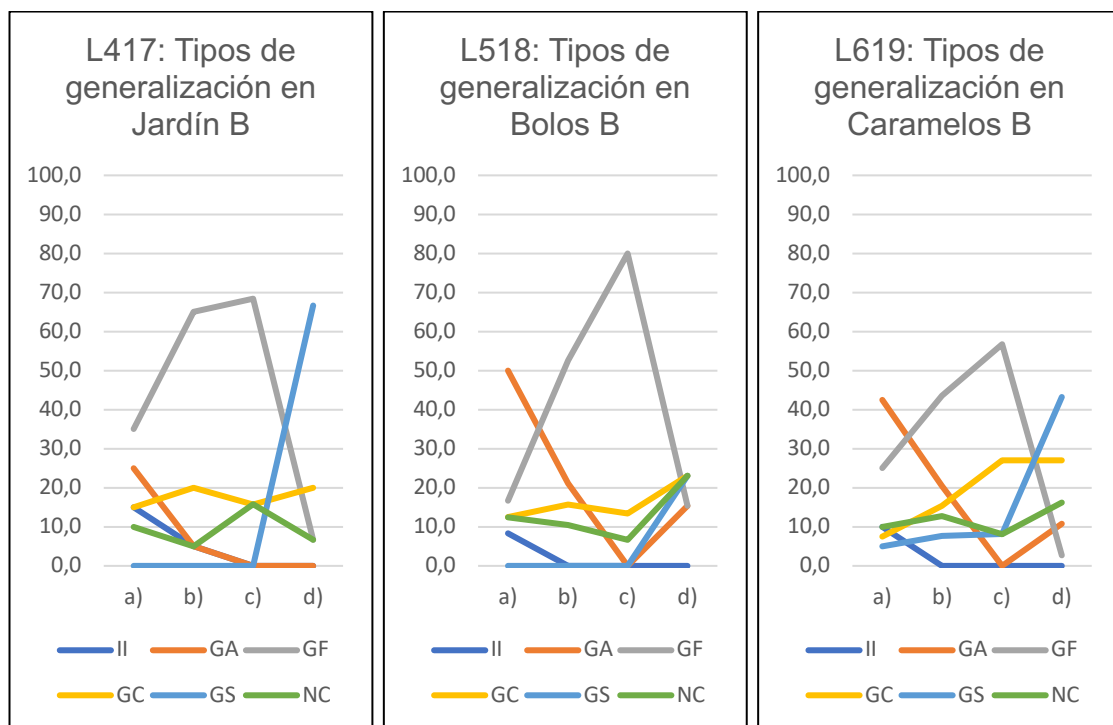


Figura 5.14. Frecuencia (%) de los tipos de generalización en L456.

Si nos centramos en el análisis de las generalizaciones a través de los cursos, podemos observar cómo destaca el uso de la GF como generalización principal. En los tres cursos se puede ver cómo aumenta progresivamente su uso a través de las cuestiones de cálculo de términos (a, b y c) y, posteriormente, se produce un descenso en la cuestión de expresión de la generalización (d). No obstante, este hecho puede deberse al aumento de otros tipos de generalizaciones, como la GC y GS, que implican un mayor nivel de abstracción y, por tanto, un

aprendizaje y evolución hacia el pensamiento algebraico. Por otra parte, podemos ver cómo el uso de II queda relegado únicamente a cuestiones de generalización cercana, como una forma rápida de resolución de ppg sin implicación de la abstracción y la generalización, y el uso de GA también destaca en la cuestión a) y disminuye rápidamente a través de las cuestiones de cálculo de términos para, finalmente, repuntar en la expresión de la generalización (d), como una opción de respuesta para aquellos estudiantes que no consiguen verbalizar las estrategias empleadas en las cuestiones numéricas más complejas.

Perfiles de Inversión

La Tabla 5.33 presenta las cantidades (absolutas y porcentuales) de estudiantes que utilizaron cada perfil de inversión y la Figura 5.15 presenta de gráficamente las frecuencias de dichos perfiles en cada curso.

Tabla 5.33. Perfiles de Inversión en L456 para Jardín B (L417), Bolos B (L518) y Caramelos B (L619).

Perfil	L417		L518		L619	
	Total	%	Total	%	Total	%
I1	0	0,0	0	0,0	3	6,8
I2	3	7,0	3	6,8	3	6,8
I3	9	20,9	1	2,3	17	38,6
I4	1	2,3	0	0,0	2	4,5
I5	0	0,0	0	0,0	0	0,0
I6	0	0,0	0	0,0	0	0,0
Sin perfil	30	69,8	40	90,9	19	43,2
Total	43	100,0	44	100,0	44	100,0

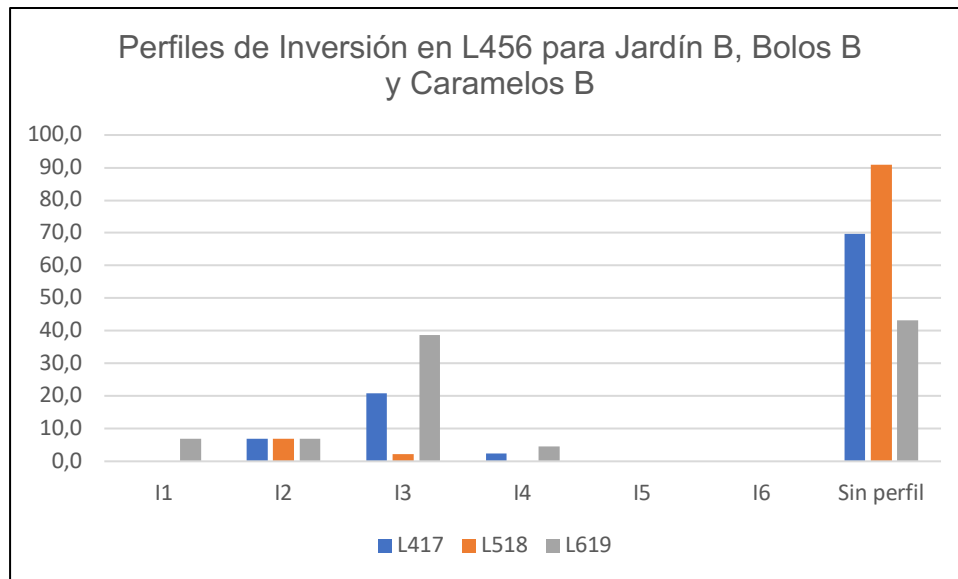


Figura 5.15. Frecuencia (%) de los perfiles de Inversión en L456 para Jardín B (L417), Bolos B (L518) y Caramelos B (L619).

En ellas, podemos observar que los únicos perfiles con presencia en los tres cursos son, como en la Comparación 1, I2 (uso de operaciones directas) e I3 (inversión aritmética). De entre estos dos perfiles, el que más destaca en L417 y L619 es I3. Además, en L619 podemos ver una mayor diversidad de perfiles.

También podemos observar cómo, de L417 a L518, se mantiene el porcentaje de estudiantes con perfil I2 y disminuye notablemente la presencia de I3 y I4, referido al uso de una estrategia de inversión algebraica. Este hecho puede deberse, en parte, al aumento de estudiantes etiquetados sin perfil. También podemos ver cómo, de L518 a L619, sigue manteniéndose la cantidad de estudiantes de I2, pero aumenta significativamente el uso de la inversión aritmética (I3), llegando al 38,6% de los estudiantes, y vuelve a aparecer la inversión algebraica (I4) y el uso de estrategias de ensayo y error (I1). Estas últimas pueden ser consecuencia del incremento de estudiantes que proporcionan una respuesta.

Estos análisis nos llevan a concluir que los estudiantes, a través de las secuencias de enseñanza-aprendizaje, han ido desarrollando sus capacidades de inversión aritmética y, en algunos casos, también de inversión algebraica, ambas estrategias adecuadas para la resolución de la cuestión de inversión en ppg. Así pues, se observa un avance en la comprensión de este tipo de

cuestiones y estrategias que abre paso a un posterior desarrollo de las competencias algebraicas del alumnado.

Uso de GeoPattern y de papel y bolígrafo

Dentro de este análisis de perfiles de inversión, creemos importante ampliar la información de estos perfiles y centrar el foco en el uso de la app GeoPattern en comparación con el uso de papel y bolígrafo para la resolución de ppg. Para ello, nos hemos centrado en las estrategias empleadas en la cuestión de relación inversa por los estudiantes de L518 y L619, descartando las respuestas de L417, que fueron proporcionadas únicamente con papel y bolígrafo.

Para realizar esta parte del análisis, centraremos el foco en la frecuencia (%) de estrategias empleadas por los estudiantes, descartando las respuestas en blanco. La Tabla 5.32 (presentada unas páginas más arriba) indica la cantidad de respuestas proporcionadas por los estudiantes de cada curso para las distintas cuestiones de los ppg incluidos en esta comparación. Además, la Figura 5.16 presenta la evolución de las estrategias para la cuestión de relación inversa en ambos entornos de resolución de ppg.

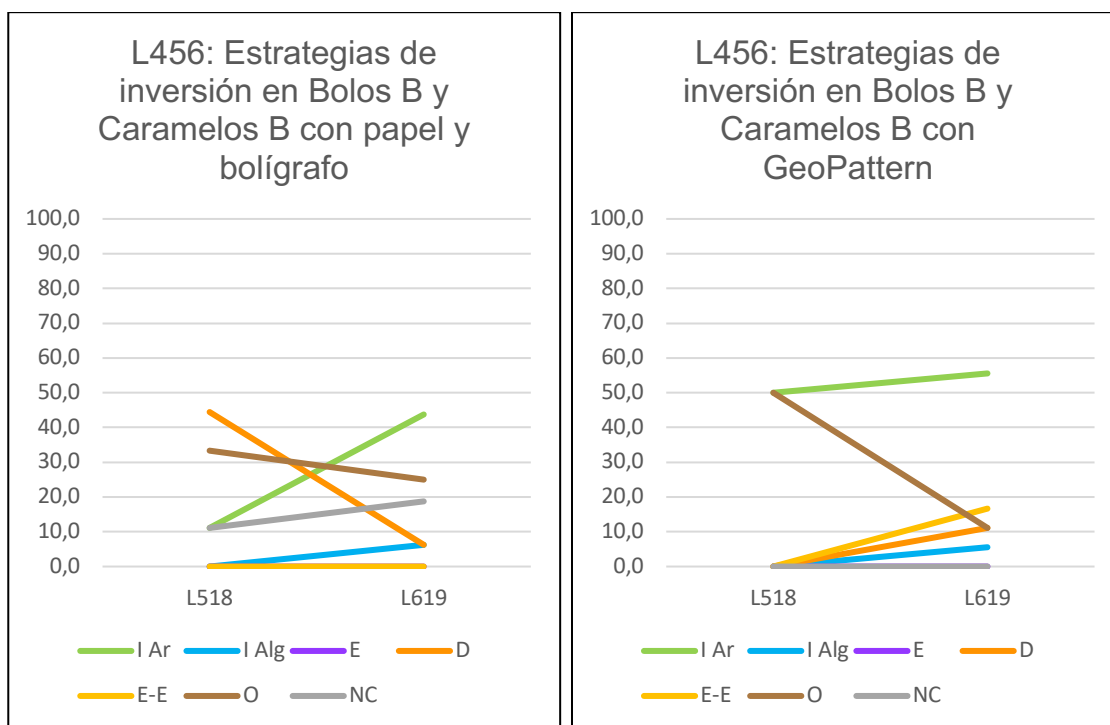


Figura 5.16. Frecuencia (%) de las estrategias de resolución en L456.

En la figura podemos observar cómo GeoPattern fomenta el uso de la inversión aritmética (I Ar), ya que un mayor porcentaje de estudiantes emplearon esta estrategia con GeoPattern que con papel y bolígrafo. No obstante, en ambos entornos se observa un aumento en el uso de esta estrategia de L518 a L619. Además, en este ppg, el uso de GeoPattern propicia una desaparición de las estrategias no clasificables (NC), que en papel y bolígrafo sí se encuentran presentes tanto en L518 como en L619.

Otra de las diferencias que podemos encontrar en esta comparación es la presencia de otras estrategias (O). Aunque estudiantes de ambos entornos las emplean, con el uso de GeoPattern podemos ver cómo disminuyen sustancialmente de L518 a L619, mientras que con el uso de papel y bolígrafo sufren una pequeña disminución no significativa. Este hecho propicia, en L619, la aparición de otras estrategias (I Alg, D y E-E) que los estudiantes no habían empleado previamente.

COMPARACIÓN 3: Pared D y Caramelos D

Hemos comparado las respuestas a los problemas Pared D, resuelto por los estudiantes en 5.º (L518), y Caramelos D, resuelto por los estudiantes en 6.º (L619). Para ello, analizamos por separado los perfiles de aplicación e inversión obtenidos. Las respuestas de los estudiantes de L417 no han sido incluidas en este análisis porque durante esta secuencia de enseñanza-aprendizaje no se resolvieron ppg de tipo D.

Perfiles de Aplicación

La Tabla 5.34 presenta las cantidades (absolutas y porcentuales) de estudiantes que utilizaron cada perfil de aplicación y la Figura 5.17 presenta de manera gráfica las frecuencias de estos perfiles en cada curso.

Tabla 5.34. Perfiles de Aplicación en L456 para Pared D (L518) y Caramelos D (L619).

Perfil		L518		L619	
		Total	%	Total	%
A1	A1.1	-	-	-	-
	A1.2	-	-	-	-
	A1.3	1	2,3	-	-
	A1.4	13	29,5	29	65,9

Perfil		L518		L619	
		Total	%	Total	%
Total		14	31,8	29	65,9
A2	A2.1	-	-	-	-
	A2.2	1	2,3	1	2,3
	A2.3	-	-	-	-
	Total	1	2,3	1	2,3
A3	A3.1	-	-	-	-
	A3.2	-	-	-	-
	Total	0	0,0	0	0,0
A4		0	0,0	0	0,0
A5		3	6,8	2	4,5
A6		9	20,5	0	0,0
Sin perfil		17	38,6	12	27,3
Total		44	100,0	44	100,0

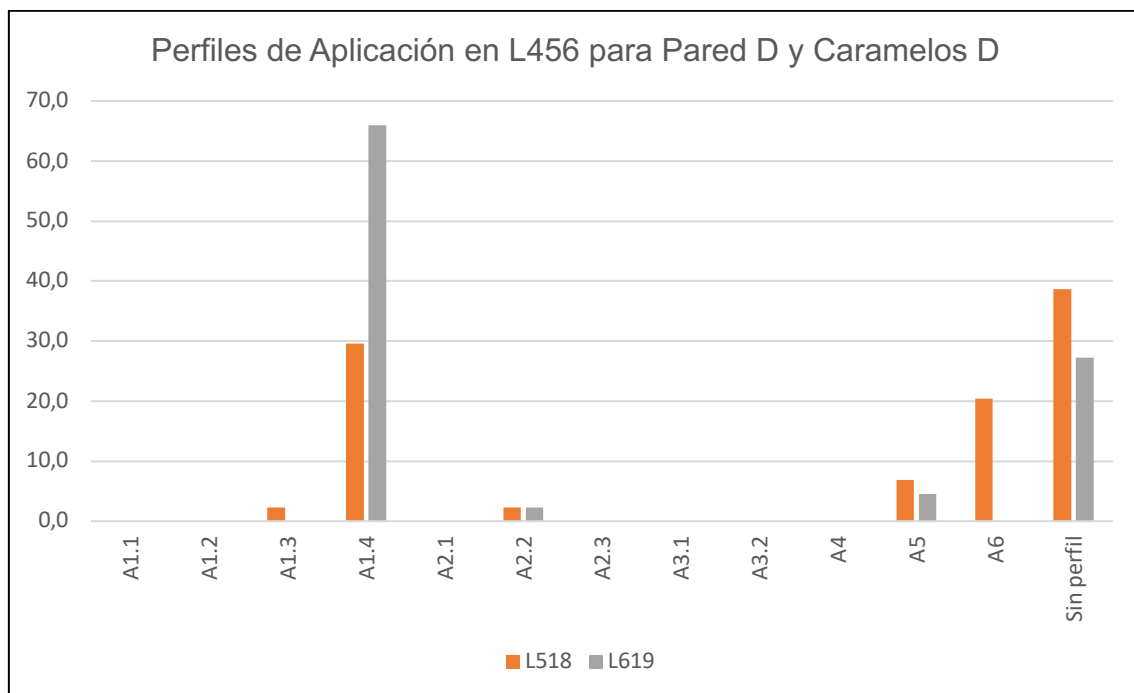


Figura 5.17. Frecuencia (%) de los perfiles de Aplicación en L456 para Pared D (L518) y Caramelos D (L619).

Estos datos nos muestran que en L518 hay una mayor variedad de subperfiles que en L619. Entre ellos, destacan claramente el A1.4, referido al uso de una estrategia constante de uso funcional, para ambos grupos, y el A6, donde los

estudiantes que no son capaces de dar una respuesta en la cuestión de aplicación, para L518.

Podemos observar cómo, de L518 a L619, se incrementa notablemente el uso constante de una estrategia de tipo funcional (A1.4) y desaparecen completamente los casos de estudiantes que no saben aplicar su expresión algebraica de la generalización a una cuestión directa de generalización cercana.

Estos datos nos permiten concluir que los estudiantes han ido evolucionando favorablemente hacia el aprendizaje, siendo cada vez más capaces de expresar generalizaciones mediante estrategias de calidad, como la funcional, y cuya comprensión les permite, posteriormente, aplicar estas expresiones en la resolución de nuevos cálculos.

En este análisis, creemos importante ampliar la información que nos proporcionan estos perfiles en tres aspectos a destacar: las estrategias seleccionadas en el uso de la app GeoPattern en comparación con el uso de papel y bolígrafo, la distribución del uso de subcategorías de las estrategias funcional y construcción y los tipos de generalización empleados por los estudiantes. Para realizar esta parte del análisis, centraremos el foco en las frecuencias (%) de las estrategias y los tipos de generalizaciones empleadas por los estudiantes, descartando las respuestas en blanco.

La Tabla 5.35 muestra la cantidad de respuestas proporcionadas por los estudiantes de cada curso en las distintas cuestiones de los ppg incluidos en esta comparación.

Tabla 5.35. Cantidad de respuestas en L456 para Pared D (L518) y Caramelos D (L619).

Cuestiones	L518			L619		
	App	Papel	Total	App	Papel	Total
a)	21	18	39	22	18	40
b)	15	16	31	19	17	36
c)	12	17	29	20	16	36
d)	8	17	25	21	15	36
e)	6	15	21	21	15	36

Uso de GeoPattern y de papel y bolígrafo

Para el análisis de las diferencias existentes entre el uso de la app GeoPattern y la resolución de los problemas con papel y bolígrafo, nos hemos centrado en las estrategias empleadas en cuestiones directas por los estudiantes de L518 y L619. Como en análisis anteriores, no hemos tenido en cuenta las respuestas de L417 porque todos los estudiantes de este curso resolvieron los problemas con papel y bolígrafo.

Las Figuras 5.18 y 5.19 presentan la evolución de las estrategias a lo largo de los cursos para las cuestiones directas en ambos entornos de resolución. En ellas, podemos observar cómo GeoPattern fomenta el uso de estrategias funcionales (F), siendo este tipo de estrategias prácticamente las únicas utilizadas junto con las estrategias no clasificables (NC). Por su parte, el uso de papel y bolígrafo propicia una mayor diversidad de estrategias entre el alumnado, como las estrategias recursiva (Rs) y construcción (C), de menor calidad.

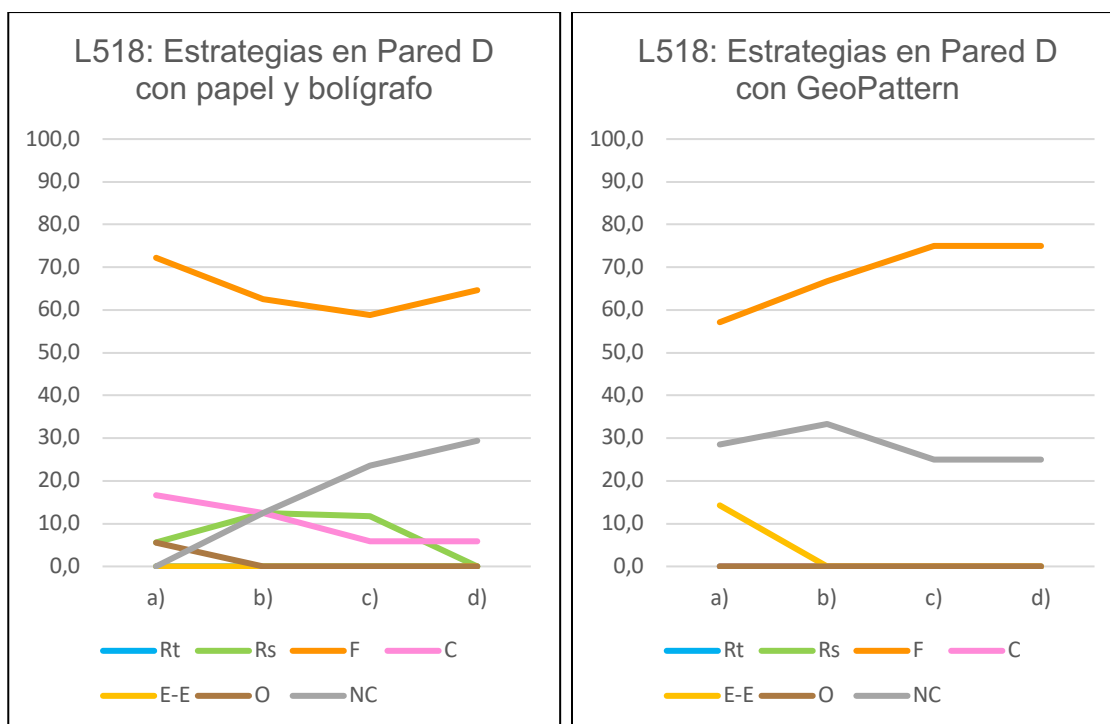


Figura 5.18. Frecuencia (%) de las estrategias de resolución en L456 para Pared D (L518).

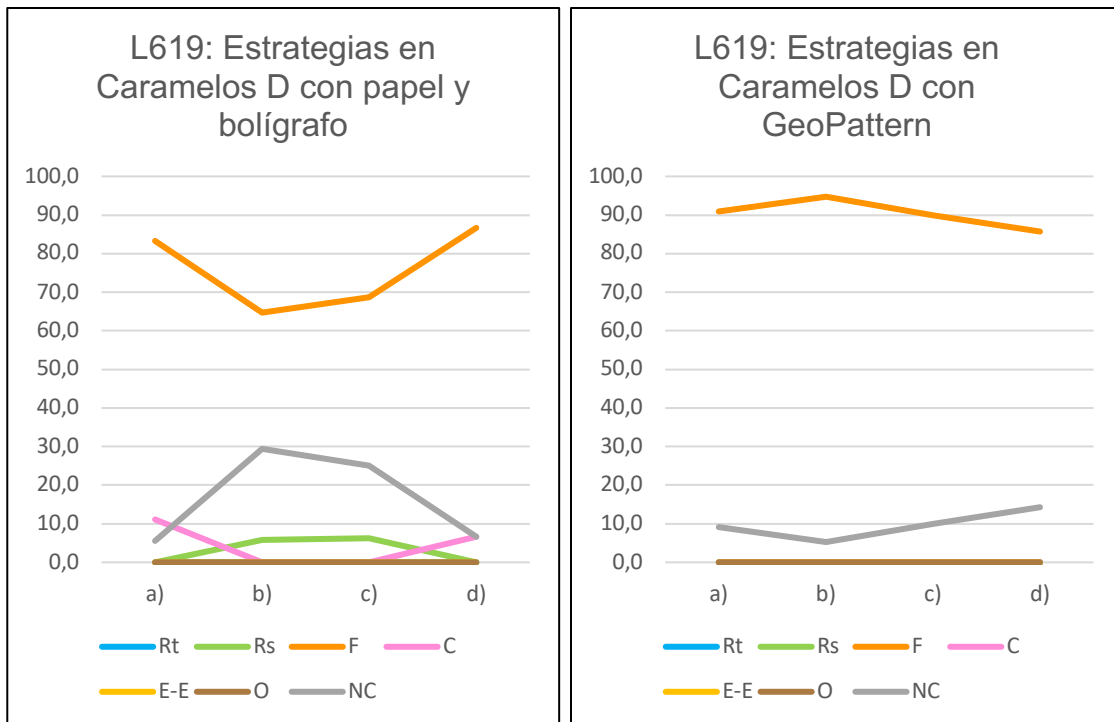


Figura 5.19. Frecuencia (%) de las estrategias de resolución en L456 para Caramelos D (L619).

Si centramos la atención en las estrategias de tipo funcional, tanto los estudiantes que utilizan papel y bolígrafo como los que utilizan GeoPattern, se centran en el uso de este tipo de estrategias, siendo empleadas entre un 58,8% y un 94,7% según el grupo, el curso y la cuestión. No obstante, existen diferencias claras entre el uso que hacen de estas estrategias. Aquellos estudiantes que emplearon papel y bolígrafo muestran un mayor uso de estrategias funcionales en las cuestiones de cálculo de términos (a y d), mientras que los estudiantes que emplearon GeoPattern mantienen unos porcentajes más o menos estables en todas las cuestiones y presentan un mayor porcentaje de uso en las cuestiones de expresión de la generalización (b y c). Este hecho puede deberse a que los estudiantes que emplearon papel y bolígrafo como entorno de resolución eran capaces de utilizar estrategias de tipo funcional, pero no todos ellos habían conseguido desarrollar el nivel de comprensión y competencia necesaria para expresar esa generalización. Sin embargo, GeoPattern sí que permitió alcanzar las capacidades necesarias para expresar, en su mayoría, una generalización de un modo funcional.

Subcategorías de las estrategias funcional y construcción

Para el análisis de las subcategorías de las estrategias funcional y construcción en la resolución de ppg, hemos extraído los datos en forma de porcentaje de estudiantes que emplearon cada una de ellas en los problemas Pared D (L518) y Caramelos D (L619).

Estrategias de tipo funcional

La Figura 5.20 presenta la evolución de las estrategias de tipo funcional para las cuestiones directas en L456. En ella, podemos observar que las únicas estrategias de tipo funcional empleadas fueron aquellas clasificadas como descomposición (FD), primero (FMP) y funcional (F).

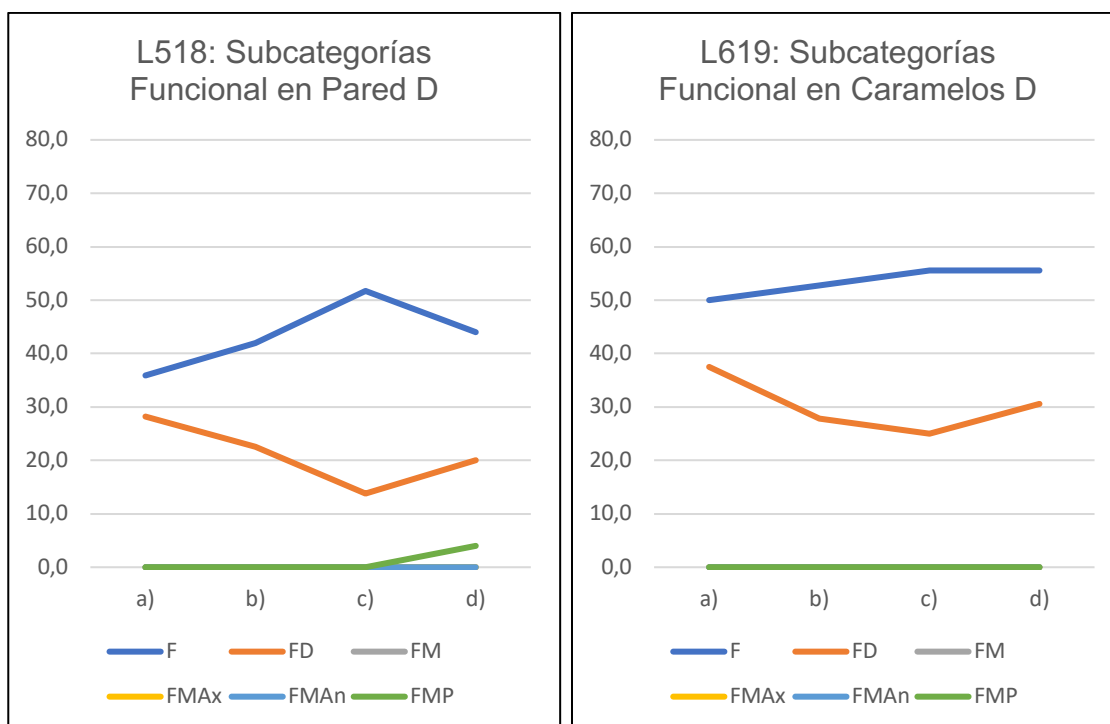


Figura 5.20. Frecuencia (%) de las subcategorías de la estrategia funcional en L456.

Si analizamos la evolución de las estrategias funcionales registradas, podemos apreciar cómo F es la estrategia mayoritaria en ambos grupos, aunque también se aprecia un aumento en su uso de L518 a L619, pasando a ser usada por cerca de un 60% de los estudiantes. En cuanto a FD, también se aprecia un incremento en su uso entre ambos cursos, siendo empleada sobre todo para las cuestiones a) y d). En este aspecto, resulta curioso observar cómo la gráfica de

L518 muestra una figura simétrica, donde el aumento de F supone la disminución en igual medida de FD y viceversa. Este hecho muestra cómo los estudiantes simplifican sus generalizaciones en las cuestiones de formulación de expresiones algebraicas, abstrayendo y perdiendo así el rastro de su origen, pero, sin embargo, muestran esa descomposición visual en partes del patrón geométrico para la resolución de cuestiones de cálculo de términos.

Estrategias de tipo construcción

La Figura 5.21 presenta la evolución de las estrategias de tipo construcción para las cuestiones directas en L456. En ella, podemos observar que los estudiantes utilizaron únicamente la estrategia proporcional (CP). Si analizamos su evolución, podemos apreciar cómo, de L518 a L619, su uso disminuye, llegando incluso a desaparecer en las cuestiones de expresiones algebraicas de la generalización. Este hecho puede deberse a que la mayoría de los estudiantes, a través de la práctica y el aprendizaje, se han percatado de que este tipo de estrategias en algunos ppg pueden resultar erróneas y han optado por el uso de otro tipo de estrategias con mayor probabilidad de éxito.

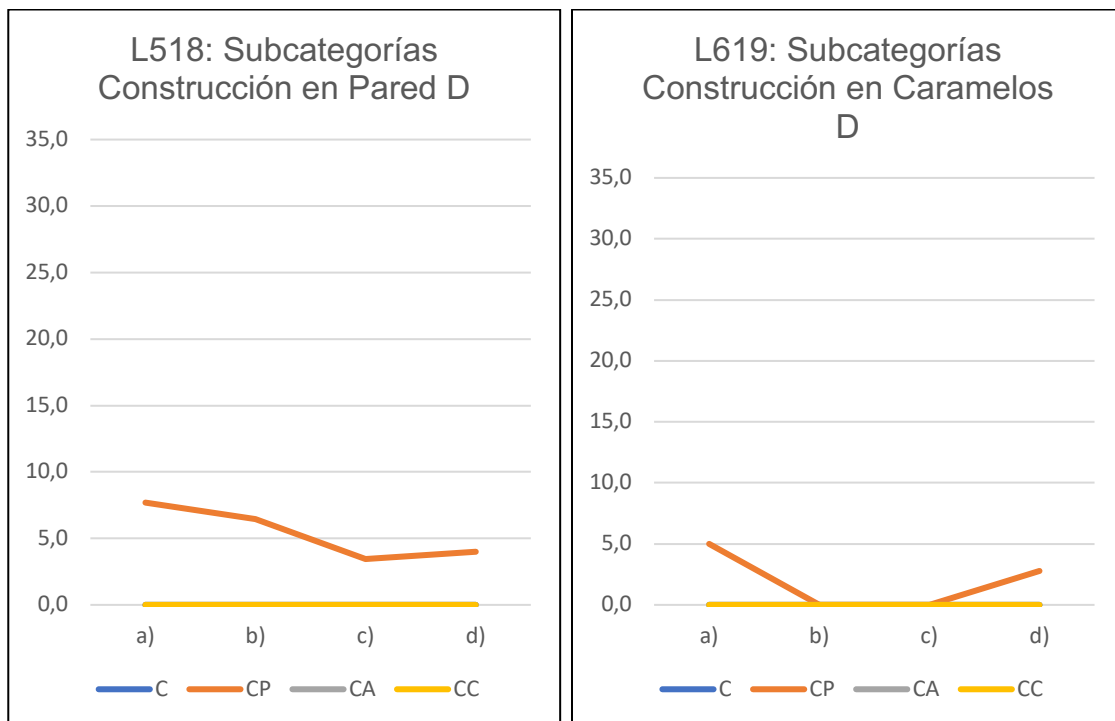


Figura 5.21. Frecuencia (%) de las subcategorías de la estrategia construcción en L456.

Tipos de generalización

Para el análisis de los tipos de generalización empleados por los estudiantes en la resolución de ppg, hemos extraído los datos en forma de porcentaje de la cantidad de estudiantes que emplearon cada una de estas generalizaciones en las cuestiones directas de los problemas Pared D (L518) y Caramelos D (L619).

La Figura 5.22 presenta la evolución de los distintos tipos de generalización para las cuestiones directas en L456. En ella, podemos observar la presencia en las respuestas proporcionadas de todos los tipos de generalización: inducción ingenua (II), generalización aritmética (GA), generalización factual (GF), generalización contextual (GC), generalización simbólica (GS) y generalizaciones no clasificables (NC).

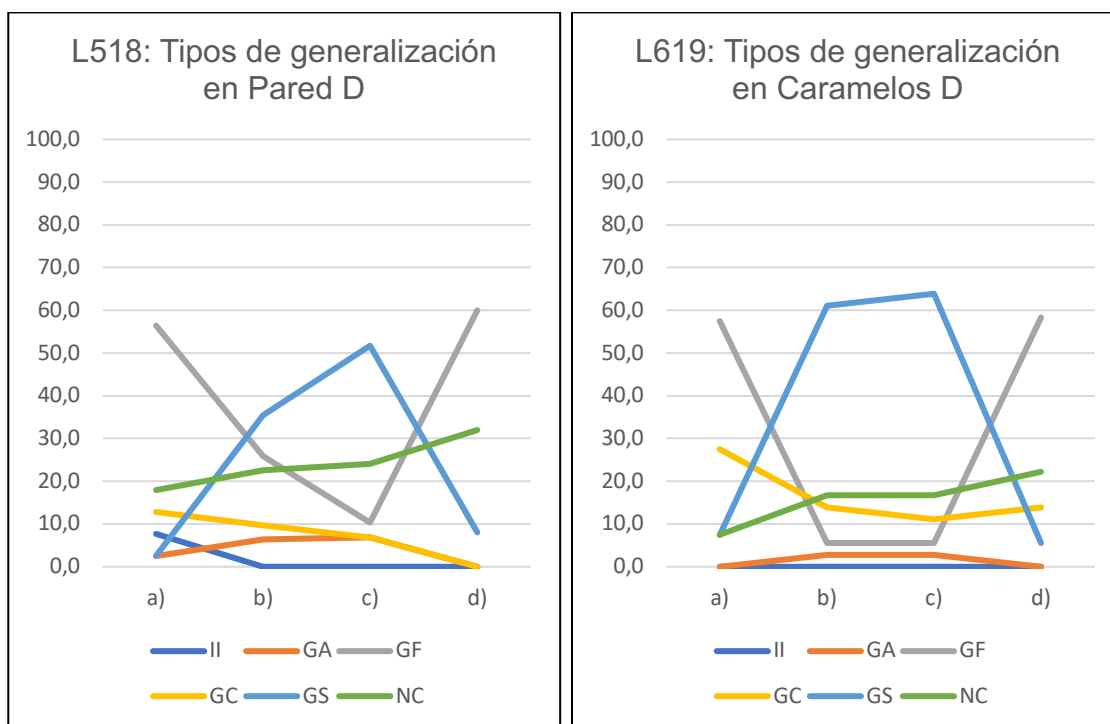


Figura 5.22. Frecuencia (%) de los tipos de generalización en L456.

Si nos centramos en el análisis de las generalizaciones en los sucesivos cursos, podemos observar cómo destaca el uso de GF para las cuestiones de cálculo de valores de términos concretos (a y d) y el uso de GS para las cuestiones de expresión de generalizaciones (b y c) en ambos cursos. Este hecho muestra que la mayoría de estudiantes han ido evolucionando y aprendiendo a través de las distintas secuencias de enseñanza-aprendizaje hasta conseguir las

competencias necesarias para obtener y expresar generalizaciones acordes a cada tipo de pregunta: han realizado generalizaciones del tipo GF para realizar los cálculos necesarios en las cuestiones numéricas y del GS para expresar algebraicamente las generalizaciones.

Además, también podemos destacar que, de L518 a L619, se observa un aumento del uso de GC, principalmente en las cuestiones de cálculo de términos para poder realizar una explicación verbal de la generalización obtenida, y una ligera disminución en los tipos II, GA y NC.

Perfiles de Inversión

La Tabla 5.36 presenta las cantidades (absolutas y porcentuales) de estudiantes que utilizaron cada perfil de inversión y la Figura 5.23 presenta de gráficamente las frecuencias de dichos perfiles en cada curso.

Tabla 5.36. Perfiles de Inversión en L456 para Pared D (L518) y Caramelos D (L619).

Perfil	L518		L619	
	Total	%	Total	%
I1	3	6,8	2	4,5
I2	5	11,4	4	9,1
I3	6	13,6	20	45,5
I4	0	0,0	1	2,3
I5	0	0,0	1	2,3
I6	0	0,0	0	0,0
Sin perfil	30	68,2	16	36,4
Total	44	100,0	44	100,0

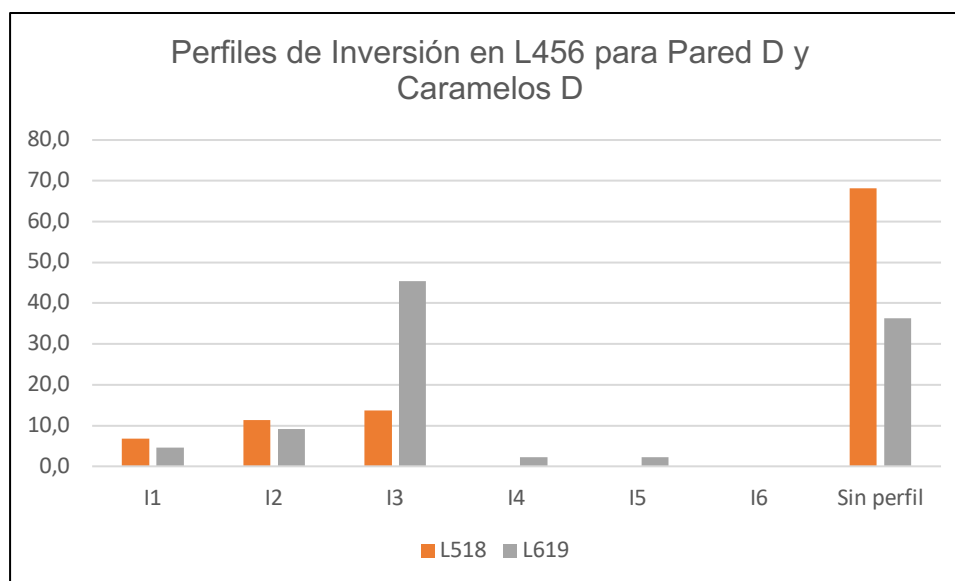


Figura 5.23. Frecuencia (%) de los perfiles de Inversión en L456 para Pared D (L518 y L619).

Podemos observar que, en L518, los estudiantes se distribuyen de modo casi uniforme entre los perfiles I1 (ensayo y error), I2 (operaciones directas) e I3 (inversión aritmética). Sin embargo, en L619, aunque se encuentran presentes todos los perfiles menos A6, los estudiantes se concentran principalmente en I3.

Por otra parte, de L518 a L619, se incrementa significativamente el uso de inversiones aritméticas (I3), llegando a suponer un 45,5% de los estudiantes, al tiempo que disminuyen ligeramente los casos de ensayo y error (I1) y de estrategias directas (I2).

De este modo, podemos concluir que, gracias a la práctica, gran parte de los estudiantes ha desarrollado estrategias adecuadas para la resolución de cuestiones de inversión (50,1%), bien sea de un modo aritmético o algebraico. Este hecho les permitirá, en un futuro, tener una mayor comprensión de los conceptos algebraicos y llevar a cabo un buen trabajo a nivel sintáctico en la resolución de ecuaciones, gracias al desarrollo previo realizado del nivel semántico a través de la resolución de ppg.

Uso de GeoPattern y de papel y bolígrafo

Dentro de este análisis de perfiles de inversión, creemos importante ampliar la información de estos perfiles y centrar el foco en el uso de la app GeoPattern en

en comparación con el uso de papel y bolígrafo para la resolución de ppg. Para ello, nos hemos centrado en las estrategias empleadas en la cuestión de relación inversa por los estudiantes de L518 y L619. Para realizar esta parte del análisis, centraremos el foco en la frecuencia (%) de estrategias empleadas por los estudiantes, descartando las respuestas en blanco. La Tabla 5.35 (presentada en una página anterior) indica la cantidad de respuestas de los estudiantes de cada curso a las distintas cuestiones de los ppg incluidos en esta comparación y la Figura 5.24 presenta la evolución de las estrategias para la cuestión de relación inversa en ambos entornos de resolución de ppg.

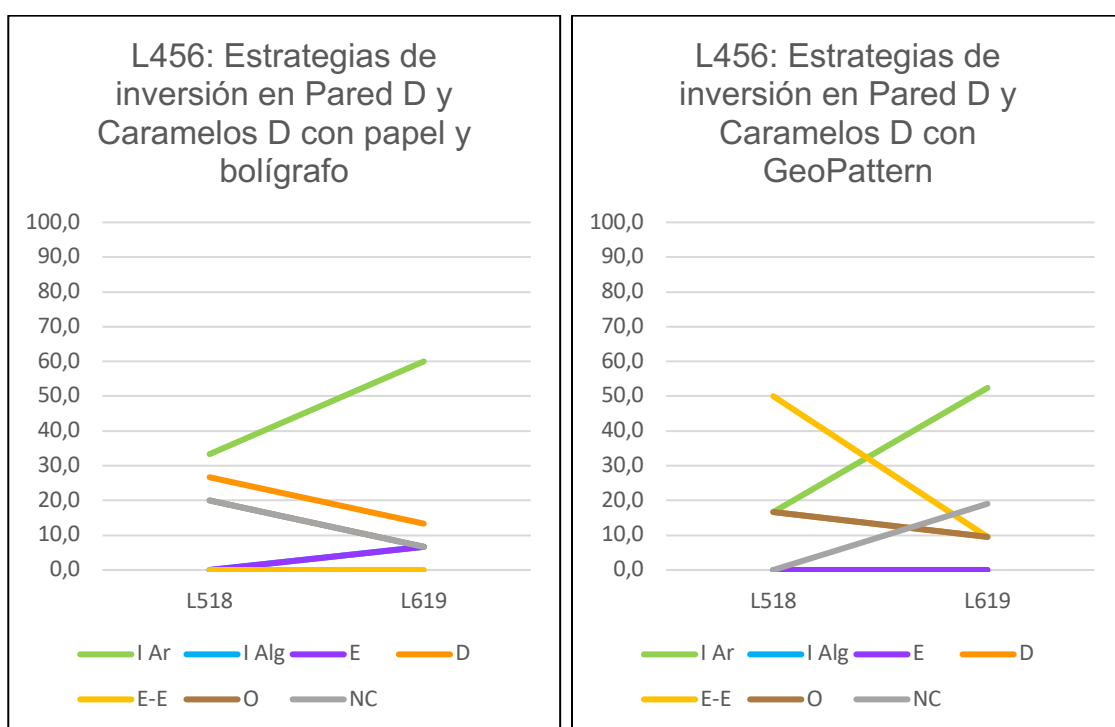


Figura 5.24. Frecuencia (%) de las estrategias de inversión en L456.

Podemos observar cómo, gracias a las secuencias de enseñanza-aprendizaje implementadas, ambos entornos de resolución propician principalmente el uso de la inversión aritmética (I Ar) con un desempeño similar. También destaca que GeoPattern ha fomentado el uso de estrategias de ensayo y error (E-E), si bien esta estrategia disminuye en gran medida de L518 a L619, aunque esto también repercute en un aumento de estrategias no clasificables (NC) debido a la búsqueda de estrategias alternativas por parte del estudiantado. Este hecho puede deberse al incremento de dificultad que implican los problemas de tipo D.

Por último, consideramos necesario destacar el uso de la estrategia ecuación (E) en L619 con papel y bolígrafo, pues, aunque su uso no es significativo, implica un aprendizaje y mayor nivel de comprensión por parte de algunos estudiantes de papel y bolígrafo en comparación con GeoPattern. Este hecho se debe, en gran medida, a que GeoPattern no está preparada para la resolución de ecuaciones mediante esquemas visuales, metodología utilizada para su enseñanza a los estudiantes.

Resultados del estudio longitudinal en 4.º, 5.º y 6.º (L456)

Tras analizar los perfiles y las respuestas de los estudiantes en estos tres grupos de ppg comparables (Magdalenas A y Cumpleaños 1A; Jardín B, Bolos B y Caramelos B; Pared D y Caramelos D), presentamos los resultados en relación con los objetivos de aprendizaje (Tabla 4.4). Para ello, agruparemos los resultados en tres bloques, correspondientes a diferentes aprendizajes: i) identificar y generalizar relaciones funcionales en ppg, ii) expresar generalizaciones e iii) invertir operaciones y resolver ecuaciones.

i) Identificar y generalizar relaciones funcionales en ppg

Una de las capacidades básicas que se deben desarrollar mediante el aprendizaje del álgebra es la identificación y generalización de relaciones funcionales. Teniendo en cuenta el contexto de los ppg y el análisis de las respuestas de los estudiantes que hemos realizado, consideramos que los perfiles de generalización y aplicación obtenidos, así como la distribución del uso de subcategorías de las estrategias funcional y construcción nos pueden aportar información sobre la capacidad desarrollada por los estudiantes de nuestra muestra en este aspecto.

Al inicio de la secuencia de enseñanza-aprendizaje (ppg tipo A), los estudiantes de L417 emplearon prácticamente todos los perfiles de generalización descritos, aunque el uso constante (en las sucesivas preguntas del problema) de una estrategia funcional (G1.4) fue el subperfil más destacable. Posteriormente, en L518 los estudiantes abandonaron el uso de los perfiles G2, G3 y G5, referidos al uso de ciertas estrategias en las cuestiones de cálculo de términos y cuya calidad aumenta o disminuye al expresar la generalización, y se centraron en

perfiles de mayor calidad o eficiencia como el G1 y G4, que hacen referencia, respectivamente, al uso constante de una estrategia y al uso de estrategias diferentes pero con un aumento progresivo de la calidad. No obstante, también aumentó la cantidad de estudiantes que no fueron capaces de expresar la generalización obtenida (G7), probablemente porque estos estudiantes eran capaces de aplicar un procedimiento matemático general de cálculo de valores concretos, pero aun no eran capaces de realizar el proceso de abstracción necesario para expresar el procedimiento seguido en su razonamiento. Finalmente, en L619 los estudiantes consiguieron alcanzar este nivel de abstracción, reduciendo así los casos de G7 y enfocándose en los subperfiles más eficientes como G1.4 (50%) y G4.9 (20,5%). Esta evolución de los perfiles de generalización en el momento inicial de las secuencias nos muestra un aprendizaje por parte de los estudiantes, aumentando en cada curso el porcentaje de estudiantes que identifica y generaliza relaciones funcionales en ppg haciendo uso de estrategias más eficientes.

En la segunda sesión (ppg tipo B), los perfiles de generalización G1 y G4 siguieron siendo los más destacados para los tres cursos, en especial G1.4. Sin embargo, el aumento de la complejidad de los patrones geométricos propició la aparición de perfiles G2 y G5 en cantidades muy poco significativas en L518 y L619. Además, hubo un alto porcentaje de estudiantes a los que no se les pudo asignar un perfil, sobre todo en L417 y L518, probablemente debido a que este fue el segundo ppg resuelto durante la sesión.

Al final de la secuencia de enseñanza-aprendizaje (ppg tipo D), los estudiantes de L518 y L619 manifestaron un uso constante de una estrategia funcional (A1.4), con un porcentaje superior al 60% para L619. Aunque alrededor de un 20% de los estudiantes de L518 no fueron capaces de aplicar su generalización en forma de expresión algebraica para la resolución de una cuestión directa de cálculo de términos cercana (A6), en L619 no se detectó ningún caso de A6. Así pues, estos hechos evidencian el aprendizaje obtenido por los estudiantes que, al finalizar la secuencia de enseñanza-aprendizaje, no solo eran capaces, en su mayoría, de identificar y generalizar relaciones funcionales en ppg empleando estrategias constantes de tipo funcional, sino también de obtenerlas más rápidamente, ya que la cuestión inicial de los ppg tipo D es una generalización

lejana, y de aplicar estas generalizaciones para la resolución de cuestiones de cálculo de términos.

Estos hechos se ven reflejados también en las subcategorías de estrategias de tipo funcional, donde se evidencia el desarrollo del análisis visual de los patrones con un aumento del uso de la estrategia funcional de descomposición (FD) a través de los cursos en las tres sesiones. No obstante, la estrategia funcional (F), se mostró como la estrategia mayoritaria, sobre todo en las cuestiones de expresión de la generalización, ejemplificando cómo los estudiantes simplificaban sus generalizaciones en estas cuestiones, abstrayendo todo posible rastro de la estrategia de origen. Por su parte, las estrategias de tipo construcción sufrieron un abandono gradual, probablemente debido a que el aprendizaje obtenido les permitió ser conscientes de que este tipo de estrategias pueden resultar erróneas en algunos ppg y optaron por utilizar estrategias con mayor probabilidad de éxito.

En referencia al uso de GeoPattern, es importante señalar que este entorno de resolución fomentó en los estudiantes el uso de estrategias de tipo funcional (F), pero también de la estrategia de ensayo y error (E-E).

ii) Expresar generalizaciones

Ser capaz de expresar las generalizaciones obtenidas es un aspecto fundamental para seguir trabajando y aprendiendo conceptos de índole algebraico. Además, la forma en que los estudiantes expresan sus generalizaciones aporta mucha información sobre los procesos mentales llevados a cabo. Por este motivo, consideramos que los tipos de generalización desarrollados por los estudiantes nos pueden ayudar en este aspecto.

La generalización más utilizada en todas las sesiones de los tres cursos fue la generalización factual (GF). En las dos primeras sesiones (ppg tipo A y B) su uso sufrió un aumento progresivo durante la resolución de las cuestiones directas de cálculo de términos (a, b y c) y, posteriormente, cayó prácticamente en desuso en la cuestión de verbalización (d). Asimismo, en la tercera sesión (ppg tipo D) fue el tipo de generalización principal (alrededor de un 60%) en las cuestiones de cálculo de términos (a y d) y su presencia fue prácticamente nula para las

cuestiones de expresión de la generalización (b y c). Esta disminución en el uso de GF estuvo determinada, en parte, por el enunciado de la cuestión, que, en vez de calcular términos, pide explicar la generalización obtenida. No obstante, también evidencia aprendizaje por parte de los estudiantes, que se enfocaron en el uso de la generalización contextual (GC) en las dos primeras sesiones (ppg tipo A y B) y la generalización simbólica (GS) en las dos últimas sesiones (ppg tipo B y D). Las principales diferencias entre cursos podemos encontrarlas en los porcentajes de uso de GF, en general menores en L417, y la presencia de otros tipos de generalizaciones de menor calidad, como la inducción ingenua (II), la generalización aritmética (GA) y las generalizaciones no clasificables (NC), normalmente menos frecuentes en L619.

En referencia al uso de las generalizaciones contextual (GC) y simbólica (GS), ambas implican un mayor nivel de abstracción de la generalización que GF, siendo GS aquella que más dificultades presenta, pues implica la formulación de una expresión algebraica alfanumérica. En la primera sesión (ppg tipo A), GC fue la única de estas dos generalizaciones presente, debido a que estos problemas fueron resueltos al inicio de las secuencias de enseñanza-aprendizaje y aún no se había realizado una explicación sobre la formulación de expresiones algebraicas. Aun así, el uso de GC a través de los cursos nos muestra una mayor capacidad de abstracción y expresión de la generalización en los estudiantes, pasando de ser usada por aproximadamente un 35% de los estudiantes en L417 a alrededor del 80% en L619 para la cuestión de verbalización (d). En la segunda sesión (ppg tipo B), el uso de GC disminuyó en gran medida y apareció el uso de GS, junto con un repunte de GA, seguramente utilizada por aquellos estudiantes que aún no eran capaces de verbalizar las estrategias que habían empleado en las cuestiones de cálculo de términos. Finalmente, en la tercera sesión (ppg tipo D), se afianzó el uso de GS, siendo la generalización principal (entre un 35% y un 60% aproximadamente según el curso) en las cuestiones de expresión de la generalización (b y c) y relegando a un segundo plano el uso de GC. Este hecho se encuentra determinado, en parte, por el enunciado de la cuestión que pide una expresión en forma de fórmula para la generalización. Sin embargo, también evidencia aprendizaje y una mejora en las capacidades de expresión de generalizaciones y comprensión de conceptos algebraicos en los

estudiantes, haciendo uso del tipo de generalización más idóneo según el tipo de cuestión: GF para el cálculo de términos y GS en la expresión de generalizaciones.

iii) Invertir operaciones y resolver ecuaciones

Aprender a invertir operaciones y resolver ecuaciones no es tarea fácil, tal y como han demostrado diversas investigaciones (Banerjee y Subramaniam, 2012; Jupri et al., 2015). No obstante, la destreza manipulativa de las expresiones algebraicas es una capacidad fundamental del álgebra que nos puede aportar información sobre el entendimiento y la comprensión de las expresiones formuladas. Por este motivo, consideramos que los perfiles de inversión obtenidos nos pueden ayudar a vislumbrar la capacidad desarrollada por nuestros estudiantes en este aspecto.

Al inicio de la secuencia de enseñanza-aprendizaje (ppg tipo A), los estudiantes centraron sus esfuerzos en el uso de estrategias de operaciones directas (I2) y la aplicación de inversiones aritméticas (I3). Sin embargo, aunque se utilizaron los mismos perfiles de inversión, sus porcentajes de uso varían de un curso a otro. En L417 el perfil mayoritario fue I2, con un 51,2% de uso, mientras que en L619 el perfil principal fue I3, con un 56,8%. Estos datos muestran cómo las tendencias de uso cambiaron por completo a lo largo del estudio longitudinal, siendo L518 el curso donde los porcentajes de uso de I2 e I3 fueron más parecidos y hubo una mayor cantidad de estudiantes a los que no se les pudo asignar un perfil. Este hecho probablemente sea consecuencia de este cambio de tendencia, donde los estudiantes eran conscientes de qué estrategias no resultaban útiles, pero todavía no tenían la capacidad necesaria para aplicar otras estrategias más eficientes. Esta evolución de los perfiles de inversión en el momento inicial de las secuencias nos muestra un aprendizaje por parte de los estudiantes, aumentando en cada curso el porcentaje de estudiantes que es capaz de invertir los procesos mentales a través de operaciones aritméticas.

En la segunda sesión (ppg tipo B), aumentó notablemente la cantidad de estudiantes sin un perfil asignado, llegando al 90,9% en L518, probablemente debido a que este fue el segundo ppg resuelto durante la sesión en L417 y L518. Entre los estudiantes a los que se les pudo asignar un perfil, destaca la presencia

de I3, especialmente en L619 con un 38,6%. Además, I2 continuó estando presente en un porcentaje menor pero similar en los tres cursos y apareció el uso de estrategias de ensayo y error (I1) en L619. No obstante, el perfil que nos permite observar un aprendizaje por parte de los estudiantes, además de la disminución del uso de I2, es el I4, referido al uso de estrategias de inversión algebraica, presente principalmente en L619 y, en menor medida, en L417. Este perfil muestra cómo unos pocos estudiantes empezaron a obtener cierta destreza manipulativa de las expresiones algebraicas siendo capaces también de realizar procesos algebraicos de inversión.

Al final de la secuencia de enseñanza-aprendizaje (ppg tipo D), los estudiantes de L518 se distribuyeron de un modo similar entre los perfiles I1, I2 e I3, siendo I3 el perfil mayoritario. Por su parte, en L619 aparecieron casi todos los perfiles de inversión (I1, I2, I3, I4 e I5), destacando el uso de I3 como perfil principal (45,5%). La persistencia en el uso de perfiles de menor eficiencia, como I1 e I2, probablemente fuera debida al aumento de complejidad del ppg utilizado y al uso de GeoPattern. Además, en L619 también aparece el uso de I4 e I5 (resolución de ecuaciones) y, aunque se trata de casos aislados, su presencia muestra un mayor nivel de comprensión y manejo de las expresiones algebraicas por parte de unos pocos estudiantes. De este modo, estos hechos evidencian el aprendizaje obtenido por los estudiantes que, en su mayoría, al finalizar la secuencia de enseñanza-aprendizaje, eran capaces de resolver las cuestiones de inversión mediante el uso de estrategias de inversión aritmética, pero también algebraica en unos pocos casos. Estos aprendizajes les permitirán en un futuro obtener una mejor comprensión del trabajo sintáctico de los conceptos algebraicos y la resolución de ecuaciones.

En referencia al uso de GeoPattern es importante señalar que este entorno de resolución fomentó el uso de inversiones aritméticas (I Ar) como estrategia principal de resolución y propició un menor uso de otros tipos de estrategias. No obstante, el incremento de dificultad en la última sesión (ppg tipo D) parece que generó la aparición de un porcentaje considerable de estudiantes que optaron por estrategias de ensayo y error (E-E) y no clasificables (NC). Además, GeoPattern está diseñada principalmente para la resolución de cuestiones de relación directa y la obtención de generalizaciones, no siendo tan adecuada para

la resolución de ecuaciones mediante esquemas visuales como el uso de papel y bolígrafo. Este aspecto pudo determinar, en parte, la aparición de la estrategia ecuación (E) únicamente cuando usaban papel y bolígrafo.

5.2.1.2. Estudio longitudinal en 5.º y 6.º (L56)

En este estudio realizamos el análisis de los perfiles y las respuestas de los estudiantes en dos grupos de problemas de patrones comparables: i) Magdalenas A, resuelto por L517, y Cumpleaños 1A, resuelto por L618; ii) Jardín B, resuelto por L517, y Bolos B, resuelto por L618. Hemos seleccionado estos grupos de problemas por sus patrones identificados como comparables (Tabla 4.10), sus tipos de cuestiones (A, B, C, D, E) y su trazabilidad a lo largo de los cursos. Además, estos grupos de problemas nos permiten realizar una comparación del progreso de los estudiantes en las dos primeras sesiones realizadas. No podemos comparar el progreso en la última sesión de L517 porque la dedicamos a hacer un repaso global, sin introducir de nuevos objetivos de aprendizaje.

COMPARACIÓN 1: Magdalenas A y Cumpleaños 1A

Hemos comparado las respuestas a los problemas Magdalenas A, resuelto por los estudiantes en 5.º (L517), y Cumpleaños 1A, resuelto por los estudiantes en 6.º (L618). Para ello, analizaremos por separado los perfiles de generalización e inversión obtenidos.

Perfiles de Generalización

La Tabla 5.37 presenta las cantidades (absolutas y porcentuales) de estudiantes que utilizaron cada perfil de generalización y la Figura 5.25 presenta de manera gráfica las frecuencias de estos perfiles en cada curso.

Tabla 5.37. Perfiles de Generalización en L56 para Magdalenas A (L517) y Cumpleaños 1A (L618).

Perfil		L517		L618	
		Total	%	Total	%
G1	G1.1	1	2,9	-	-
	G1.2	7	20,6	-	-
	G1.3	-	-	-	-
	G1.4	8	23,5	21	61,8
	Total	16	47,1	21	61,8
G2	G2.1	-	-	-	-
	G2.2	-	-	-	-
	G2.3	-	-	-	-
	G2.4	-	-	-	-
	Total	0	0,0	0	0,0
G3	G3.1	-	-	-	-
	G3.2	-	-	-	-
	G3.3	2	5,9	-	-
	Total	2	5,9	0	0,0
G4	G4.1	1	2,9	-	-
	G4.2	-	-	-	-
	G4.3	-	-	-	-
	G4.4	-	-	-	-
	G4.5	3	8,8	1	2,9
	G4.6	-	-	-	-
	G4.7	1	2,9	-	-
	G4.8	3	8,8	-	-
	G4.9	-	-	4	11,8
	Total	8	23,5	5	14,7
G5	G5.1	1	2,9	-	-
	G5.2	-	-	-	-
	G5.3	-	-	-	-
	G5.4	-	-	-	-
	G5.5	2	5,9	-	-
	Total	3	8,8	0	0,0
G6		1	2,9	2	5,9
G7		1	2,9	3	8,8
Sin perfil		3	8,8	3	8,8
Total		34	100,0	34	100,0

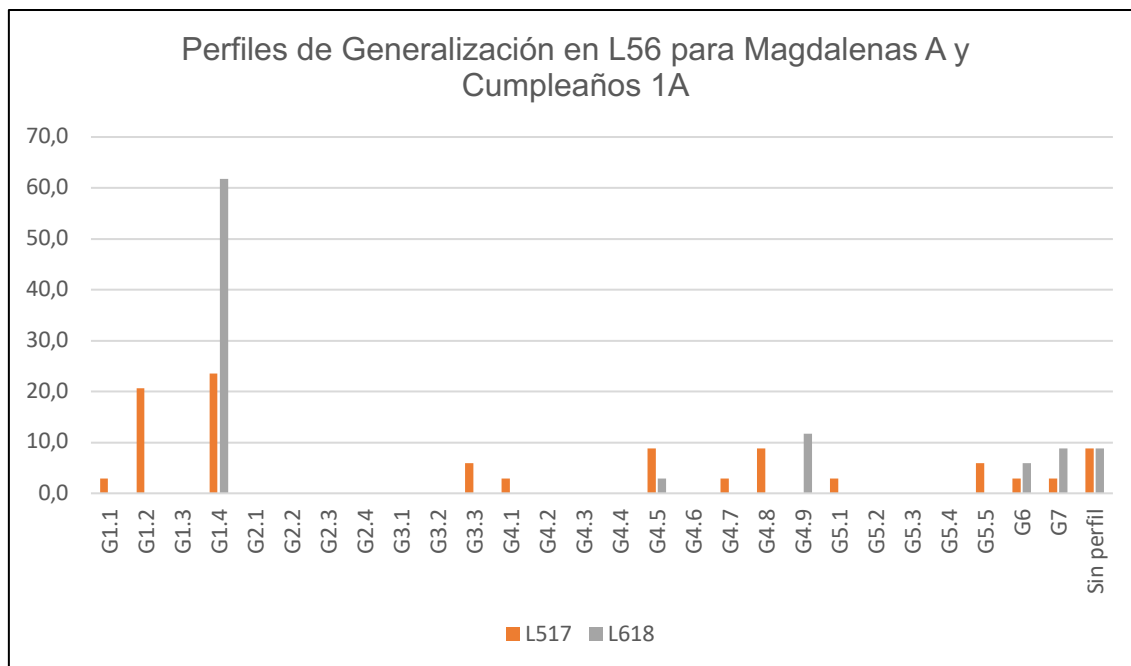


Figura 5.25. Frecuencia (%) de los perfiles de Generalización en L56 para Magdalenas A (L517) y Cumpleaños 1A (L618).

Podemos observar que L517 presenta una mayor diversidad de perfiles que L618, pues incluye subperfiles de todos los tipos menos el G2, referido al uso de un determinado tipo de estrategias en las cuestiones de cálculo de términos y cuya calidad aumenta al expresar la generalización. Sin embargo, en L618, los estudiantes centraron su atención mayoritariamente en G1.4, que hace referencia al uso de una estrategia funcional constante, y, en menor medida, en los subperfiles G4.5 y G4.9, referidos al uso de estrategias con un aumento progresivo de calidad.

También podemos observar cómo, de L517 a L618, se incrementa significativamente la cantidad de estudiantes que optan por hacer uso constante de una estrategia funcional, pasando de un 23,5% a un 61,8%, y desaparecen los subperfiles referidos al uso de estrategias con un aumento progresivo de calidad que disminuye al expresar la generalización (G5) y al uso de un determinado tipo de estrategias en las cuestiones de cálculo de términos y cuya calidad disminuye al expresar la generalización (G3). En cuanto a los subperfiles de estrategias con un aumento progresivo de calidad (G4), sufren un descenso en su uso, pasando a suponer únicamente un 14,7% y centrándose en el uso de estrategias de recuento, de construcción y funcionales. Por último, es importante

destacar que se produce un ligero aumento en el número de estudiantes que no son capaces de dar una respuesta en la cuestión de verbalización (G7).

De este modo, podemos concluir que, gracias a la práctica y el aprendizaje obtenido a través de las secuencias de enseñanza-aprendizaje, los estudiantes han ido adquiriendo y desarrollando estrategias más adecuadas para la obtención de generalizaciones. En concreto, han ido abandonando perfiles que sufren una disminución de calidad al expresar la generalización y centrando sus esfuerzos en perfiles constantes de tipo funcional, cosa que nos demuestra que, no solo son más capaces de generalizar, sino también de expresar dicha generalización de un modo funcional.

En este análisis, creemos importante ampliar la información que nos proporcionan estos perfiles en tres aspectos a destacar: las estrategias seleccionadas en el uso de la app GeoPattern en comparación con el uso de papel y bolígrafo, la distribución del uso de subcategorías de las estrategias funcional y construcción y los tipos de generalización empleados por los estudiantes. Para realizar esta parte del análisis, hemos descartado las respuestas en blanco. La Tabla 5.38 indica la cantidad de respuestas proporcionadas por los estudiantes de cada curso para las distintas cuestiones de los ppg incluidos en esta comparación.

Tabla 5.38. Cantidad de respuestas en L56 para Magdalenas A (L517) y Cumpleaños 1A (L618).

Cuestiones	L517	L618		
	Papel	App	Papel	Total
a)	33	20	13	33
b)	33	20	13	33
c)	32	20	13	33
d)	33	19	12	31
e)	31	18	13	31

Uso de GeoPattern y de papel y bolígrafo

Para el análisis de las diferencias existentes entre el uso de la app GeoPattern y la resolución de los problemas con papel y bolígrafo, nos hemos centrado en las estrategias empleadas en cuestiones directas por los estudiantes de L618.

No podemos tener en cuenta las respuestas de L517 porque todos los estudiantes resolvieron los problemas con papel y bolígrafo, ya que GeoPattern no estaba todavía disponible. En L618, los estudiantes fueron divididos en dos grupos, de modo que aproximadamente la mitad de ellos resolvieron los problemas con GeoPattern y la otra mitad con papel y bolígrafo. La Figura 5.26 presenta la evolución de las estrategias para las cuestiones directas en ambos entornos de resolución.

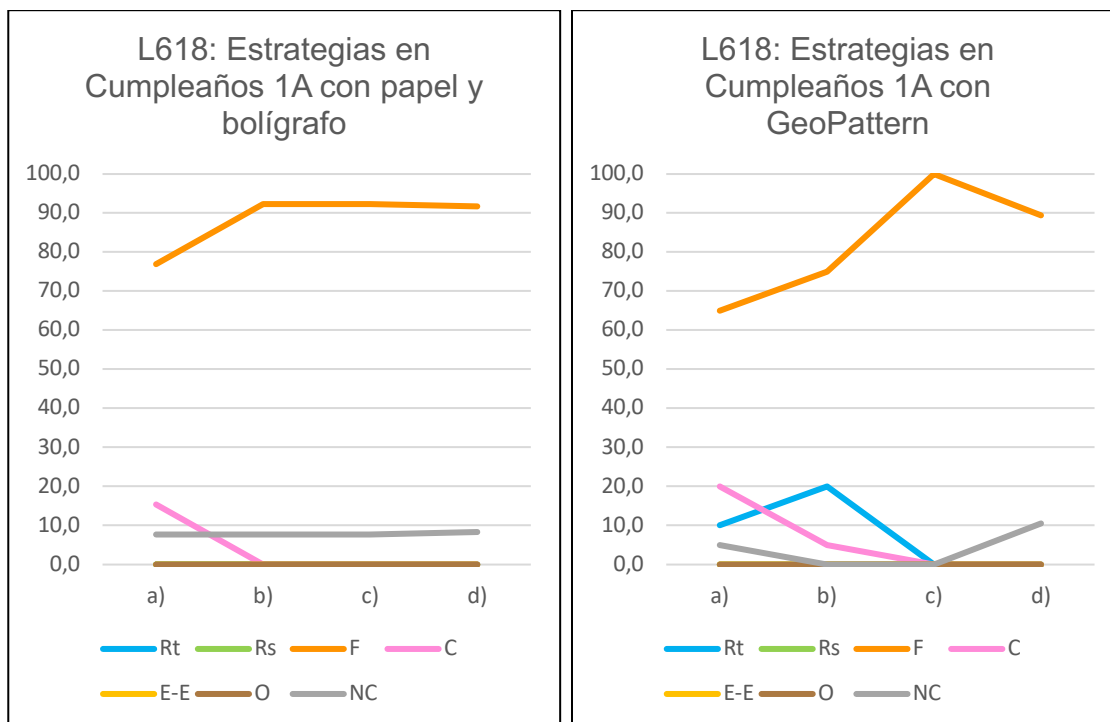


Figura 5.26. Frecuencia (%) de las estrategias de resolución en L56 para Cumpleaños 1A (L618).

Podemos observar cómo la estrategia mayoritaria en ambos entornos de resolución es la funcional (F). No obstante, la evolución de su presencia a través de las cuestiones es diferente. Por una parte, los estudiantes que resolvieron este ppg con papel y bolígrafo optaron por emplear una estrategia de un modo constante para todo el problema, a excepción de unos pocos estudiantes que utilizaron la estrategia construcción (C) para la primera cuestión (a). Por otra parte, los estudiantes que resolvieron este ppg con GeoPattern optaron por una mayor diversidad de estrategias, ya que también observamos la presencia de recuento (Rt) y construcción (C) en las dos primeras cuestiones (a y b). De este modo, el uso de F va aumentando de un modo progresivo a través de las

cuestiones de cálculo de términos, llegando a ser usada por un 100% de los estudiantes (c), y disminuye ligeramente en la cuestión de verbalización de la generalización (d).

El aumento progresivo de la presencia de F en GeoPattern junto con la aparición de la Rt para las primeras cuestiones del ppg puede deberse al carácter visual de la interfaz de GeoPattern, donde la barra del patrón y el lienzo gráfico permiten utilizar las unidades básicas geométricas del patrón para reproducir sus términos. En cuanto a la disminución del uso de F en la expresión de la verbalización, es probable que se deba a que los estudiantes han desarrollado las capacidades necesarias para obtener una generalización del patrón geométrico, sin embargo, aún no han desarrollado aquellas necesarias para expresar esa generalización, puesto que se trata de dos capacidades distintas.

Subcategorías de las estrategias funcional y construcción

Para el análisis de las subcategorías de las estrategias funcional y construcción en la resolución de ppg, hemos extraído los datos en forma de porcentaje de estudiantes que emplearon cada una de ellas en los problemas Magdalenas A (L517) y Cumpleaños 1A (L618).

Estrategias de tipo funcional

La Figura 5.27 presenta la evolución de las estrategias de tipo funcional para las cuestiones directas en L56. En ella, podemos observar que las únicas estrategias de tipo funcional empleadas fueron aquellas clasificadas como descomposición (FD) y funcional (F). Este hecho se debe a que los estudiantes centraron su análisis del patrón geométrico en un procedimiento más visual que numérico, es decir, en analizar la representación gráfica de las figuras y su descomposición en partes más que en la información puramente numérica.

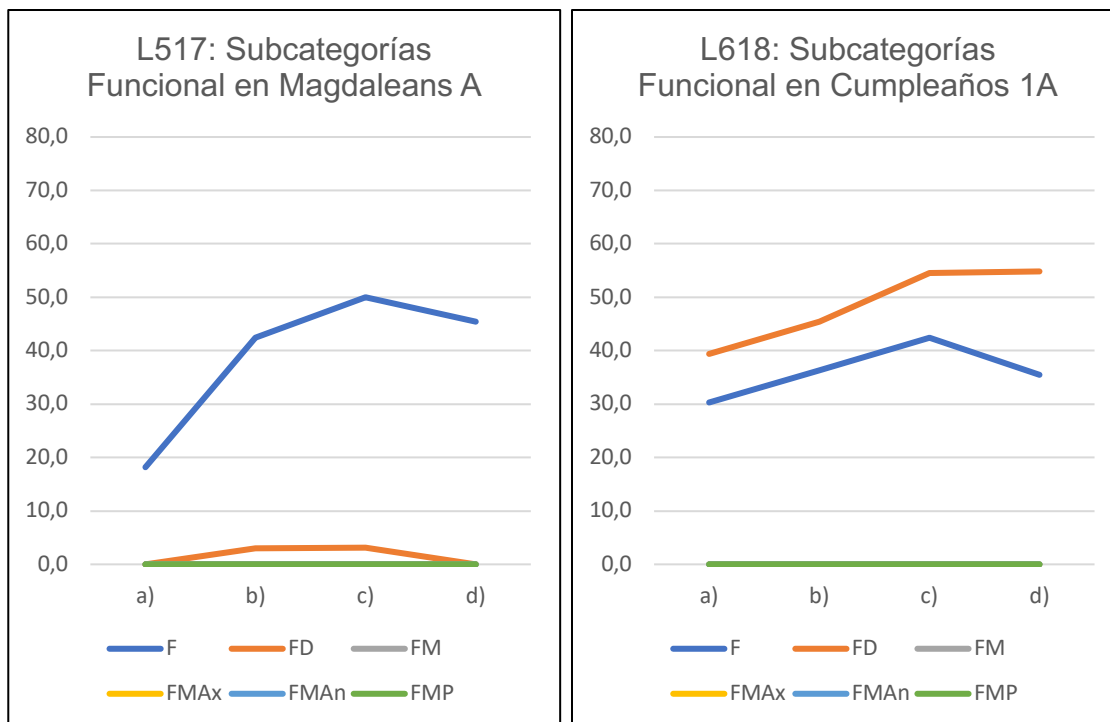


Figura 5.27. Frecuencia (%) de las subcategorías de la estrategia funcional en L56.

Si analizamos la evolución de las estrategias funcionales registradas, podemos apreciar una progresión en el uso de estrategias visuales. En L517 prácticamente la única estrategia utilizada fue funcional (F), ya que el uso de descomposición se encuentra por debajo del 10% del alumnado. No obstante, en L618 se incrementa notablemente el uso de FD, pasando a ser la estrategia funcional principal. Aquí se evidencia cómo los estudiantes han ido desarrollando sus capacidades de generalización y discriminación visual de patrones durante los aprendizajes proporcionados en los distintos cursos. Además, también podemos ver cómo todos los estudiantes que utilizan una FD son capaces de, posteriormente, expresar y explicar esta generalización en la cuestión d y, en cambio, gran parte de los que usan una F no son capaces de explicar sus procedimientos de cálculo de un modo funcional.

Estrategias de tipo construcción

La Figura 5.28 presenta la evolución de las estrategias de tipo construcción para las cuestiones directas en L56. En ella, podemos observar que los estudiantes utilizaron las estrategias proporcional (CP) y aditiva (CA).

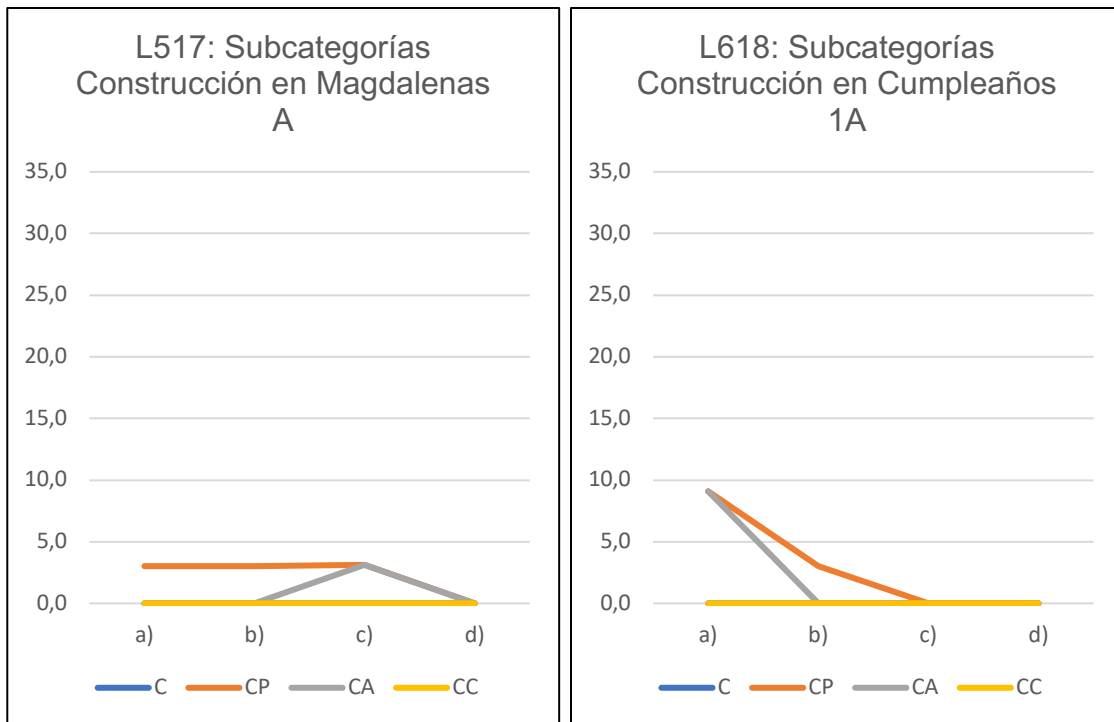


Figura 5.28. Frecuencia (%) de las subcategorías de la estrategia construcción en L56.

Si analizamos la evolución de estas estrategias, podemos apreciar una tendencia diferente para ambos cursos. En L517, aunque menos estudiantes emplearon estas estrategias, las usaron en las tres cuestiones de cálculo de términos (a, b y c) y únicamente desaparecieron en la cuestión de verbalización (d). Sin embargo, en L618, se observa cómo el uso mayoritario de estas estrategias se produce en la primera cuestión (a) y, a continuación, se produce una disminución en su uso, llegando a desaparecer en la última cuestión de cálculo de términos (c). Esta disminución en el uso de estrategias de construcción en la cuestión de verbalización (d) puede deberse a que los estudiantes no son capaces de explicar los razonamientos lógico-matemáticos que han empleado para obtener la generalización. Además, la tendencia gráfica de L618 puede deberse a que, gracias al aprendizaje realizado, los estudiantes son conscientes de que este tipo de estrategias no siempre son válidas para la resolución de ppg y, por ello, buscan otras vías de resolución en las siguientes cuestiones.

Tipos de generalización

Para el análisis de los tipos de generalización empleados por los estudiantes en la resolución de ppg, hemos extraído los datos en forma de porcentaje de la cantidad de estudiantes que emplearon cada una de estas generalizaciones en las cuestiones directas de los problemas Magdalenas A (L517) y Cumpleaños 1A (L618). La Figura 5.29 presenta la evolución de los distintos tipos de generalización para las cuestiones directas en L56.

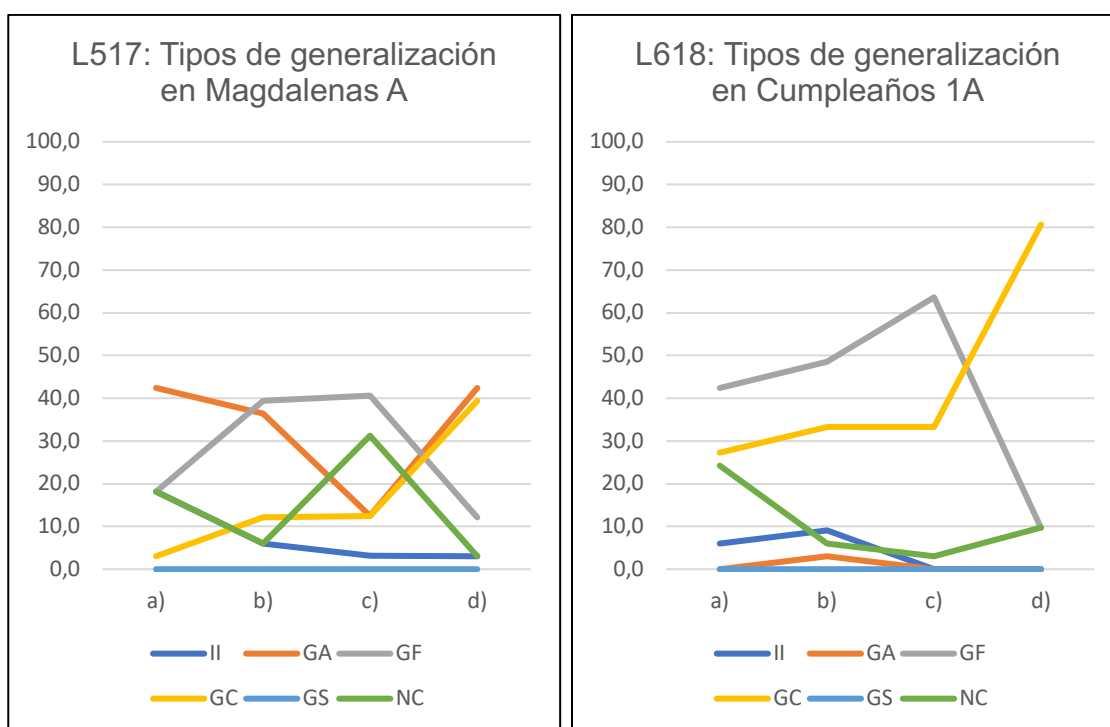


Figura 5.29. Frecuencia (%) de los tipos de generalización en L56.

Podemos observar la presencia en las respuestas proporcionadas de inducción ingenua (II), generalización aritmética (GA), generalización factual (GF), generalización contextual (GC) y generalizaciones no clasificables (NC), siendo la generalización simbólica (GS) el único tipo de generalización no utilizado por estos estudiantes. Este hecho se debe a que estos problemas fueron resueltos al inicio de las secuencias de enseñanza-aprendizaje.

Si nos centramos en el análisis de las generalizaciones a través de los cursos, podemos observar cómo destaca el uso de GF y GC como generalizaciones principales en ambos cursos. Por una parte, podemos ver cómo los estudiantes emplean GF en las cuestiones de cálculo de términos (a, b, c) y, posteriormente,

centran sus esfuerzos en el uso de GC para la expresión de la generalización (d). Este hecho viene en parte determinado por el tipo de cuestión planteada, pero también muestra un aprendizaje por parte de los estudiantes, empleando el tipo de generalización más idóneo para cada cuestión, y demuestra su capacidad de abstracción en la generalización, siendo capaces de expresar verbalmente sus procesos lógico-matemáticos. Además, si comparamos la cantidad de estudiantes que utilizan GC en ambos cursos, podemos observar cómo, en general, la capacidad de abstracción en L517 es menor y, como consecuencia, muchos de estos estudiantes recurren de nuevo al uso de GA en la cuestión de verbalización (d), tras haberla abandonado en c).

Perfiles de Inversión

La Tabla 5.39 presenta las cantidades (absolutas y porcentuales) de estudiantes que utilizaron cada perfil de inversión y la Figura 5.30 presenta de gráficamente las frecuencias de dichos perfiles en cada curso.

Tabla 5.39. Perfiles de Inversión en L56 para Magdalenas A (L517) y Cumpleaños 1A (L618).

Perfil	L517		L618	
	Total	%	Total	%
I1	0	0,0	1	2,9
I2	10	29,4	8	23,5
I3	7	20,6	20	58,8
I4	0	0,0	1	2,9
I5	0	0,0	0	0,0
I6	0	0,0	0	0,0
Sin perfil	17	50,0	4	11,8
Total	34	100,0	34	100,0

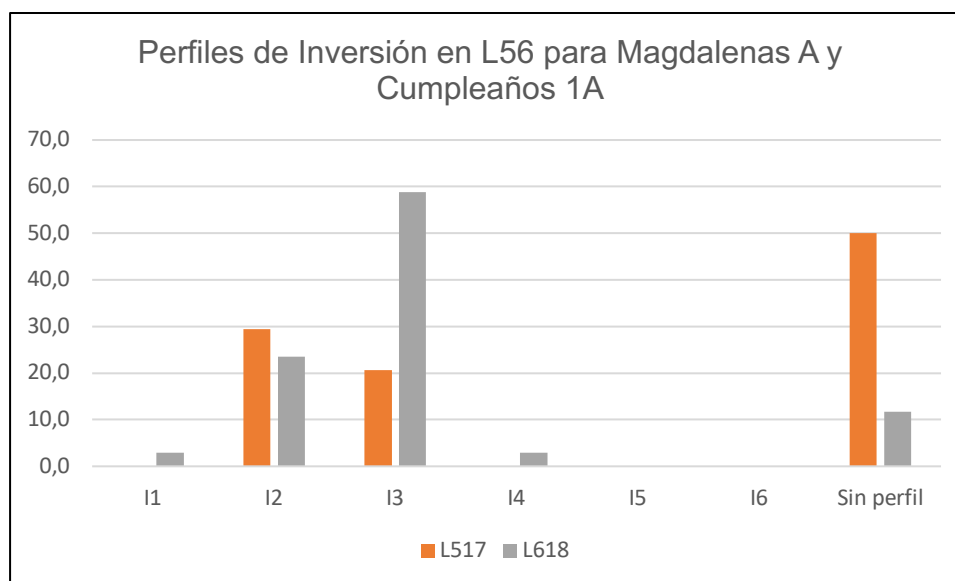


Figura 5.30. Frecuencia (%) de los perfiles de Inversión en L56 para Magdalenas A (L517) y Cumpleaños 1A (L618).

Podemos observar que los perfiles con presencia significativa son I2 e I3, que hacen referencia al uso de estrategias de operaciones directas y a la aplicación de una inversión aritmética. No obstante, en L618 también se aprecia una ligera presencia de I1 e I4, referidos al uso de estrategias de ensayo y error y de inversiones algebraicas, respectivamente.

También podemos observar cómo, de L517 a L618, se incrementa sustancialmente la cantidad de estudiantes que optan por una estrategia de inversión aritmética (I3), llegando a superar el 50% de los estudiantes, y disminuyen ligeramente los estudiantes que eligieron una estrategia de operaciones directas (I2). Además, es necesario destacar la reducción de estudiantes sin perfil, que pasa de un 50% a un 11,8%.

De este modo, podemos concluir que, gracias a la secuencia de enseñanza-aprendizaje implementada, los estudiantes han ido adquiriendo las competencias necesarias para escoger las estrategias más idóneas en la resolución de cuestiones de inversión en ppg. Y, aunque en L618 todavía se observa una presencia significativa del perfil I2, esto puede ser consecuencia de un primer acercamiento a su resolución de aquellos estudiantes que en L517 no fueron capaces de dar una respuesta a la pregunta de inversión.

Uso de GeoPattern y de papel y bolígrafo

Dentro de este análisis de perfiles de inversión, creemos importante ampliar la información de estos perfiles y centrar el foco en el uso de la app GeoPattern en comparación con el uso de papel y bolígrafo para la resolución de ppg. Para ello, nos hemos centrado en las estrategias empleadas en la cuestión de relación inversa por los estudiantes de L618, descartando las respuestas de L517, que fueron proporcionadas únicamente con papel y bolígrafo. Para realizar esta parte del análisis, centraremos el foco en la frecuencia (%) de estrategias empleadas por los estudiantes, descartando las respuestas en blanco. La Tabla 5.38 (presentada anteriormente) informa de la cantidad de respuestas proporcionadas por los estudiantes para las distintas cuestiones de los ppg incluidos en esta comparación y la Figura 5.31 presenta la evolución de las estrategias para la cuestión de relación inversa en ambos entornos de resolución de ppg.

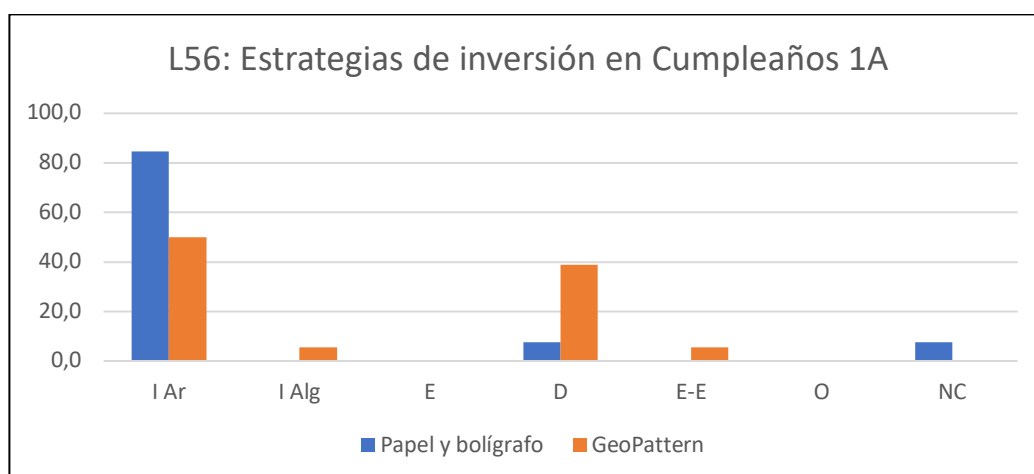


Figura 5.31. Frecuencia (%) de las estrategias de resolución en L56.

Podemos observar cómo los estudiantes que resolvieron este ppg con GeoPattern presentan una mayor diversidad de estrategias, como la inversión aritmética (I Ar), la inversión algebraica (I Alg), las operaciones directas (D) y el ensayo y error (E-E), en comparación con aquellos que lo resolvieron con papel y bolígrafo, que centraron sus esfuerzos principalmente en I Ar. Este hecho puede deberse a que la presencia del botón Comprobar y la calculadora en GeoPattern proporcionan la oportunidad de realizar una mayor cantidad de cálculos y poder llevar a cabo estrategias de menor calidad, que en otros

contextos, como el papel y bolígrafo, resultarían más costosas y, por tanto, menos viables de realizar.

COMPARACIÓN 2: Jardín B y Bolos B

Hemos comparado las respuestas a los problemas Jardín B, resuelto por los estudiantes en 5.º (L517), y Bolos B, resuelto por los estudiantes en 6.º (L618). Para ello, analizaremos por separado los perfiles de generalización e inversión obtenidos.

Perfiles de Generalización

La Tabla 5.40 presenta las cantidades (absolutas y porcentuales) de estudiantes que utilizaron cada perfil de generalización y la Figura 5.32 presenta de manera gráfica las frecuencias de estos perfiles en cada curso.

Tabla 5.40. Perfiles de Generalización en L56 para Jardín B (L517) y Bolos B (L618).

Perfil		L517		L618	
		Total	%	Total	%
G1	G1.1	-	-	-	-
	G1.2	4	11,8	2	5,9
	G1.3	1	2,9	-	-
	G1.4	18	52,9	11	32,4
	Total	23	67,6	13	38,2
G2	G2.1	-	-	-	-
	G2.2	-	-	-	-
	G2.3	-	-	1	2,9
	G2.4	-	-	-	-
	Total	0	0,0	1	2,9
G3	G3.1	-	-	-	-
	G3.2	-	-	-	-
	G3.3	-	-	1	2,9
	Total	0	0,0	1	2,9
G4	G4.1	-	-	-	-
	G4.2	-	-	1	2,9
	G4.3	-	-	-	-
	G4.4	-	-	-	-
	G4.5	-	-	6	17,6
	G4.6	1	2,9	-	-
	G4.7	-	-	-	-
	G4.8	1	2,9	3	8,8
	G4.9	-	-	-	-
	Total	2	5,9	10	29,4

Perfil		L517		L618	
		Total	%	Total	%
G5	G5.1	-	-	-	-
	G5.2	1	2,9	-	-
	G5.3	-	-	-	-
	G5.4	-	-	-	-
	G5.5	-	-	-	-
	Total	1	2,9	0	0,0
G6		0	0,0	0	0,0
G7		2	5,9	0	0,0
Sin perfil		6	17,6	9	26,5
Total		34	100,0	34	100,0

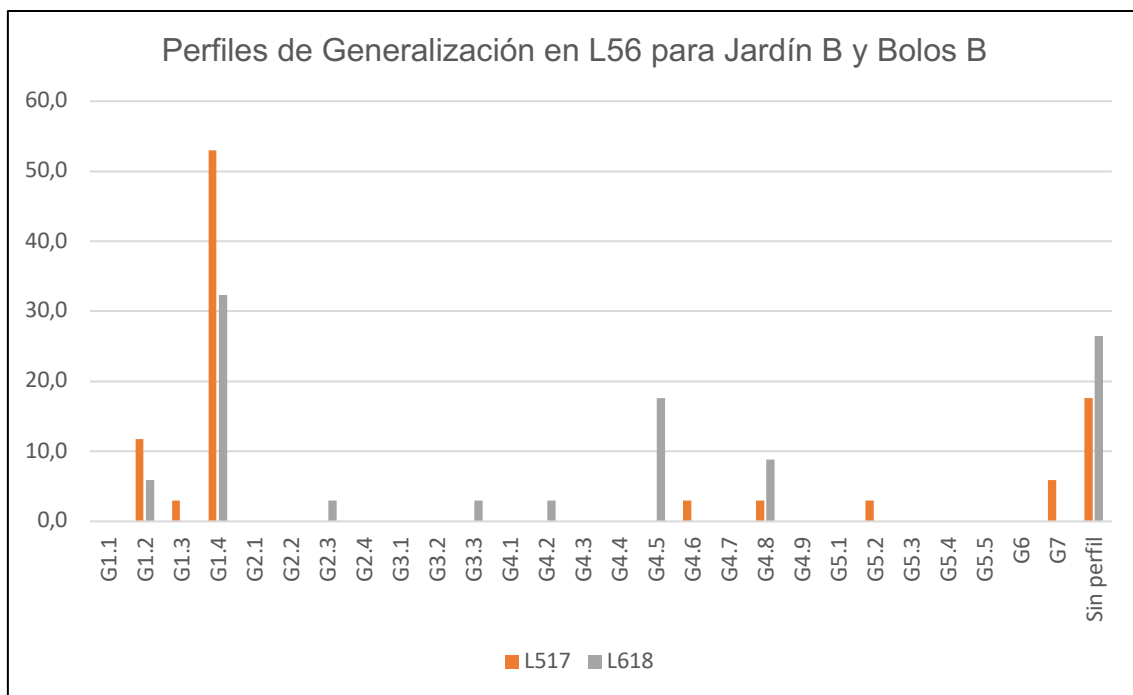


Figura 5.32. Frecuencia (%) de los perfiles de Generalización en L56 para Jardín B (L517) y Bolos B (L618).

Podemos observar que tanto L517 como L618 presentan una gran diversidad de subperfiles, aunque la distribución de los estudiantes en estos difiere. En L517 podemos ver cómo sus estudiantes se centran en subperfiles de tipo G1, referidos al uso constante de una estrategia, y, en concreto, en el de tipo funcional (G1.4). En L618 observamos que, aunque también hay una gran cantidad de subperfiles G1, aparecen otros subperfiles que destacan en el

gráfico, como los subperfiles G4, que hacen referencia al uso de estrategias con un aumento progresivo de calidad.

También podemos observar cómo, de L517 a L618, disminuye significativamente la cantidad de estudiantes que optan por el uso constante de una estrategia (G1) y, a su vez, se incrementan los subperfiles que presentan un aumento progresivo de calidad (G4), centrándose en el uso de estrategias de recuento, recursivas y funcionales. Además, desaparecen los estudiantes que no son capaces de dar una respuesta en la cuestión de verbalización (G7).

De este modo, podemos extraer que hay una parte de los estudiantes que aún no tienen afianzado el uso de estrategias funcionales de un modo constante (G1.4) y, por este motivo, en L618, inician la resolución del ppg con otras estrategias de menor calidad hasta obtener la comprensión necesaria del patrón que les permite generalizar y finalizar la resolución del ppg con una estrategia de tipo funcional, empleando así subperfiles de tipo G4. Sin embargo, es importante destacar que, en ambos cursos, podemos ver cómo los estudiantes han desarrollado su capacidad de generalizar, ya que han abandonado el uso de perfiles con retrocesos y han centrado sus esfuerzos en aquellos perfiles que implican un uso constante de estrategias (G1) y un aumento progresivo de calidad en las estrategias (G4).

En este análisis, creemos importante ampliar la información que nos proporcionan estos perfiles en tres aspectos a destacar. Por una parte, las estrategias seleccionadas en el uso de la app GeoPattern en comparación con el uso de papel y bolígrafo. Por otra parte, la distribución del uso de subcategorías de las estrategias funcional y construcción. Finalmente, los tipos de generalización empleados por los estudiantes. Para realizar esta parte del análisis, centraremos el foco en la frecuencia (%) de estrategias y tipos de generalizaciones empleadas por los estudiantes, descartando las respuestas en blanco. La Tabla 5.41 indica la cantidad de respuestas proporcionadas por los estudiantes de cada curso para las distintas cuestiones de los ppg incluidos en esta comparación.

Tabla 5.41. Cantidad de respuestas en L56 para Jardín B (L517) y Bolos B (L618).

Cuestiones	L517	L618		
	Papel	App	Papel	Total
a)	30	20	14	34
b)	30	20	13	33
c)	29	20	13	33
d)	29	16	14	30
e)	29	17	13	30

Uso de GeoPattern y de papel y bolígrafo

Para el análisis de las diferencias existentes entre el uso de la app GeoPattern y la resolución de los problemas con papel y bolígrafo, nos hemos centrado en las estrategias empleadas en cuestiones directas por los estudiantes de L618. Hemos descartado las respuestas de L517 porque todos los estudiantes resolvieron los problemas con papel y bolígrafo sin una posible comparativa de respuestas. En L618, los estudiantes fueron divididos en dos grupos, de modo que aproximadamente la mitad de ellos resolvieron los problemas con GeoPattern y la otra mitad con papel y bolígrafo. La Figura 5.33 presenta la evolución de las estrategias para las cuestiones directas en ambos entornos de resolución.

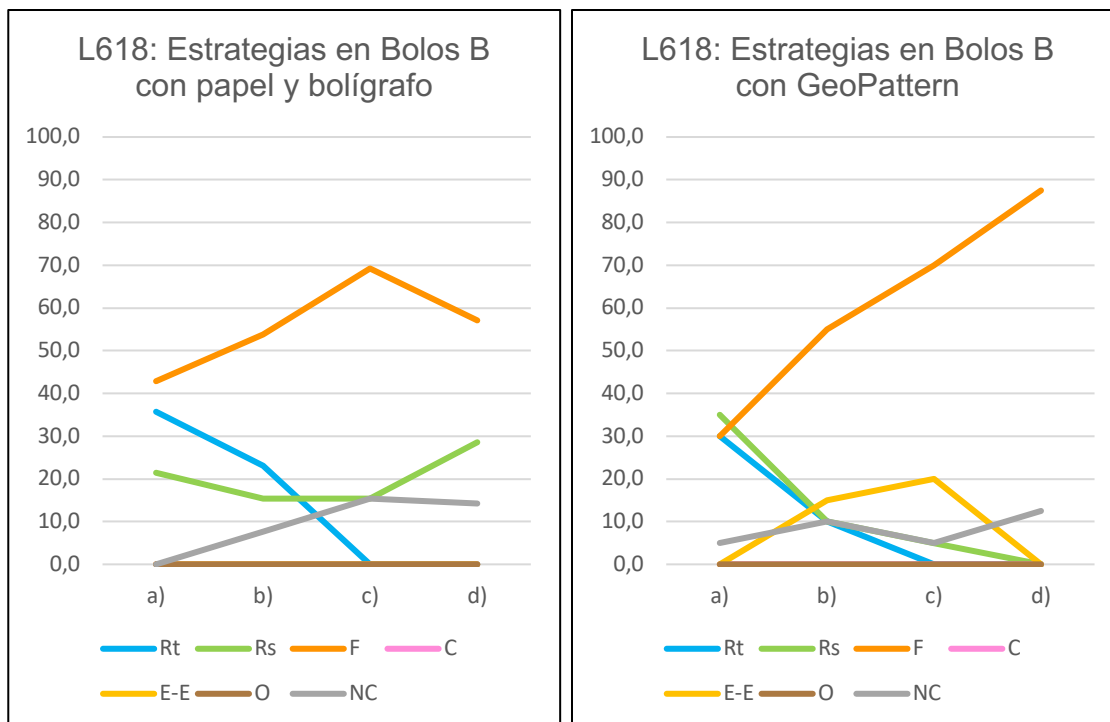


Figura 5.33. Frecuencia (%) de las estrategias de resolución en L56 para Bolos B (L618).

Las gráficas nos muestran que, aunque la estrategia principal en ambos entornos de resolución es la funcional (F), su presencia y evolución difiere bastante. Por una parte, los estudiantes que resolvieron este ppg con papel y bolígrafo centran sus esfuerzos en el uso de F, que va aumentando progresivamente en las cuestiones de cálculo de términos (a, b y c). No obstante, este uso disminuye significativamente en la cuestión de expresión de la generalización (d) y la estrategia recursiva (Rs), que había ido descendiendo ligeramente, experimenta un aumento en su uso. Por otra parte, los estudiantes que resolvieron este ppg con GeoPattern incrementan progresivamente el uso de F, alcanzando su mayor uso en la cuestión d) con casi un 90% de los estudiantes. Este caso, las estrategias recursiva (Rs) y de recuento (Rt) únicamente son empleadas en las cuestiones iniciales (a y b) y, aunque aparece la estrategia de ensayo y error (E-E) con un porcentaje significativo en las cuestiones b) y c), sufre una caída en picado hacia el desuso en d).

Esta diferencia en el uso de estrategias a través de las cuestiones puede deberse a que GeoPattern proporciona un entorno idóneo para obtener una mayor comprensión del patrón geométrico y, por tanto, poder desarrollar

generalizaciones funcionales que los estudiantes son capaces de abstraer y expresar en la cuestión d). Sin embargo, un entorno con papel y bolígrafo es más propenso a que los estudiantes no hayan alcanzado el nivel de abstracción necesario para poder expresar su generalización y sufran un pequeño retroceso hacia estrategias de menor calidad como la recursividad. Por último, la aparición de la E-E en GeoPattern se debe a la presencia del botón *Comprobar*, que permite verificar si la respuesta numérica introducida en la ventana de resultado es correcta o errónea, así como introducir diversas respuestas aleatorias hasta obtener la respuesta correcta.

Subcategorías de las estrategias funcional y construcción

Para el análisis de las subcategorías de las estrategias funcional y construcción en la resolución de ppg, hemos extraído los datos en forma de porcentaje de estudiantes que emplearon cada una de ellas en los problemas Jardín B (L517) y Bolos B (L618).

Estrategias de tipo funcional

La Figura 5.34 presenta la evolución de las estrategias de tipo funcional para las cuestiones directas en L56.

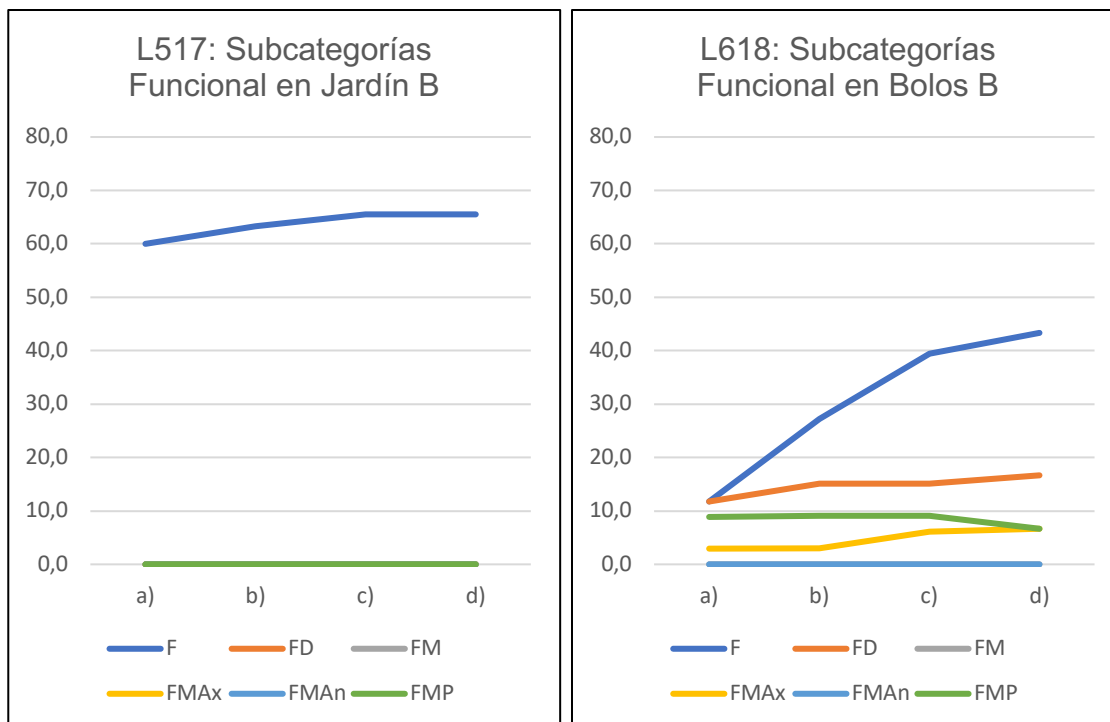


Figura 5.34. Frecuencia (%) de las subcategorías de la estrategia funcional en L56.

En las gráficas podemos observar que la única estrategia de tipo funcional empleada por L517 fue aquella clasificada como funcional (F), mientras que, en L618, además de F, también se emplearon las estrategias clasificadas como descomposición (FD), auxiliar (FMAx) y primero (FMP). Este hecho se debe a que los estudiantes de L618, gracias a su aprendizaje y experiencia con ppg, han podido desarrollar su capacidad de generalización y desarrollar estrategias funcionales más diversas, así como su expresión y explicación.

Si analizamos la evolución de las estrategias funcionales registradas, podemos apreciar cómo de L517 a L618 se diversifican las estrategias y, aunque el porcentaje de estudiantes es similar en ambos casos, estos parecen ser más precisos en sus explicaciones de la generalización obtenida, dando lugar a la identificación de estrategias funcionales que anteriormente pueden haber pasado desapercibidas y clasificadas como F. Entre estas, destaca el uso de estrategias visuales, como FD, por encima de estrategias más numéricas, como FMAx y FMP, aunque el uso de las tres es constante en las sucesivas cuestiones.

Estrategias de tipo construcción

La Figura 5.35 presenta la evolución de las estrategias de tipo construcción para las cuestiones directas en L56.

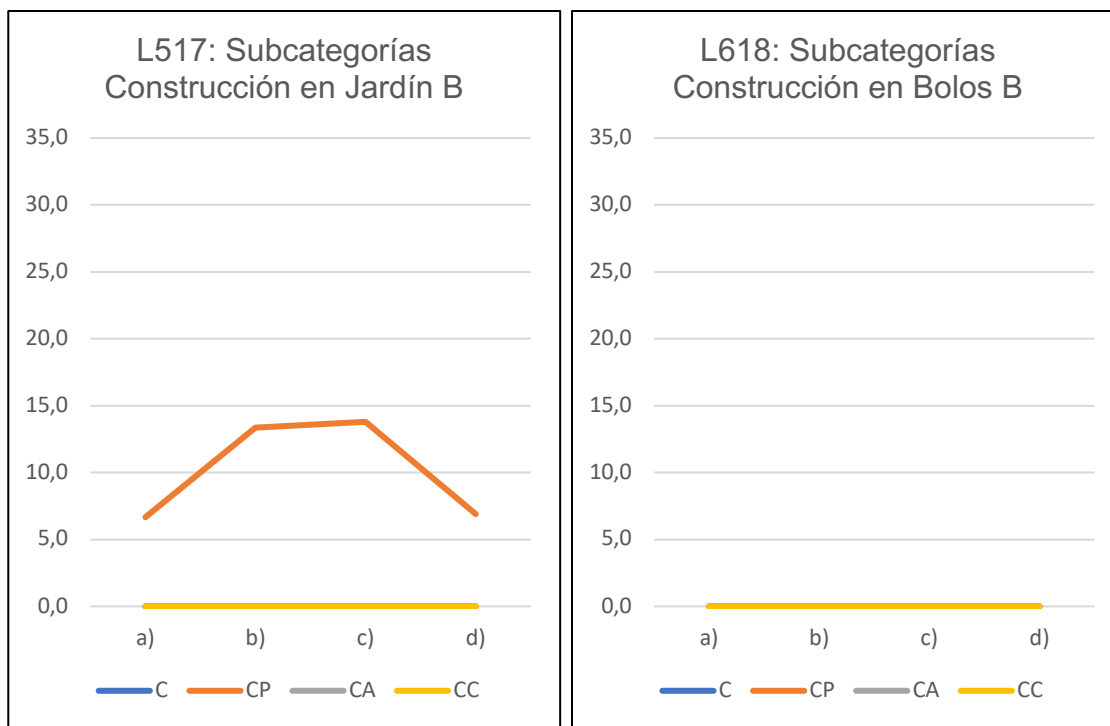


Figura 5.35. Frecuencia (%) de las subcategorías de la estrategia construcción en L56.

En las gráficas podemos observar que, en L517, los estudiantes utilizaron únicamente la estrategia proporcional (CP) y que, en L618, no utilizaron ninguna estrategia de tipo construcción. Este hecho se debe a que, a través de la secuencia de enseñanza-aprendizaje, los estudiantes han ido adquiriendo una mayor capacidad de generalización que les permite discriminar y descartar aquellas estrategias que conducen a la obtención de una respuesta errónea, como en este caso.

Tipos de generalización

Para el análisis de los tipos de generalización empleados por los estudiantes en la resolución de ppg, hemos extraído los datos en forma de porcentaje de la cantidad de estudiantes que emplearon cada una de estas generalizaciones en las cuestiones directas de los problemas Jardín B (L517) y Bolos B (L618).

La Figura 5.36 presenta la evolución de los distintos tipos de generalización para las cuestiones directas en L56. En ella, podemos observar la presencia en las respuestas proporcionadas de todos los tipos de generalización: inducción ingenua (II), generalización aritmética (GA), generalización factual (GF), generalización contextual (GC), generalización simbólica (GS) y generalizaciones no clasificables (NC).

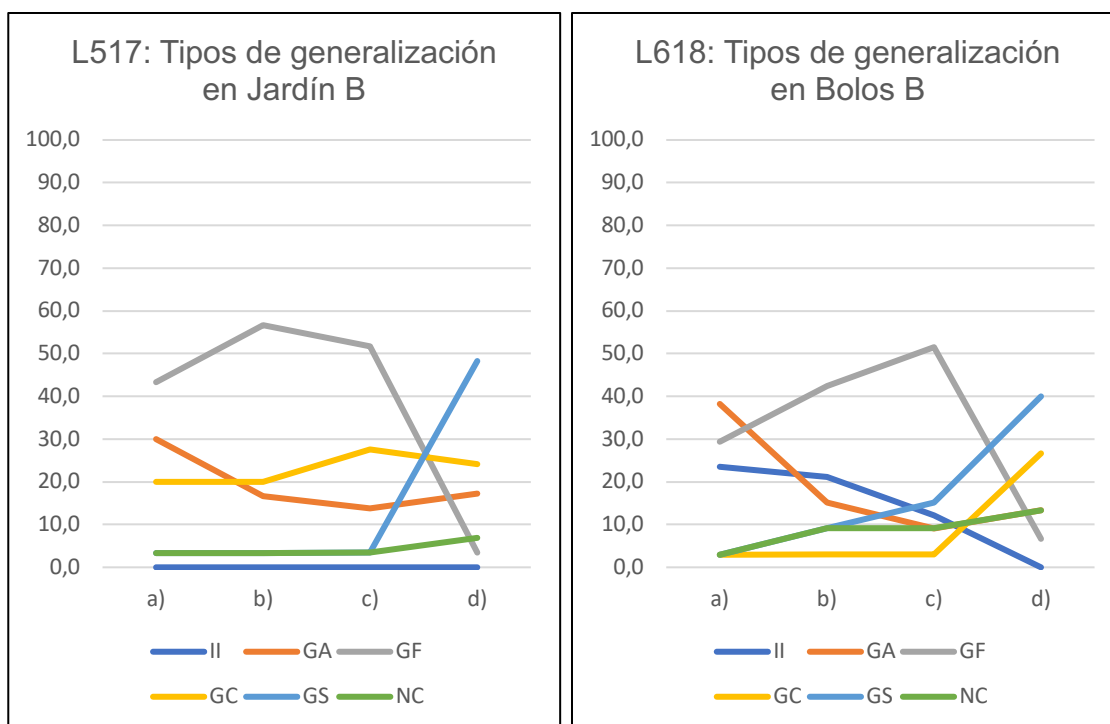


Figura 5.36. Frecuencia (%) de los tipos de generalización en L56.

En el análisis de las generalizaciones a través de los cursos, nos indica que destaca el uso de GF para las cuestiones de cálculo de términos en ambos cursos. Es curioso cómo, en esta ocasión, hay una mayor presencia de II y GA en L618, sobre todo en las cuestiones iniciales (a y b), así como los estudiantes de L517 emplean en mayor porcentaje GA y GC durante las cuestiones de cálculo de términos. No obstante, en L618 podemos observar la presencia de GS desde la primera cuestión, aunque su uso aumenta y destaca principalmente en la cuestión de verbalización o expresión de la generalización (d) en ambos cursos.

Perfiles de Inversión

La Tabla 5.42 presenta las cantidades (absolutas y porcentuales) de estudiantes que utilizaron cada perfil de inversión y la Figura 5.37 presenta de gráficamente las frecuencias de dichos perfiles en cada curso.

Tabla 5.42. Perfiles de Inversión en L56 para Jardín B (L517) y Bolos B (L618).

Perfil	L517		L618	
	Total	%	Total	%
I1	0	0,0	4	11,8
I2	6	17,6	0	0,0
I3	15	44,1	16	47,1
I4	0	0,0	2	5,9
I5	0	0,0	0	0,0
I6	0	0,0	0	0,0
Sin perfil	13	38,2	12	35,3
Total	34	100,0	34	100,0

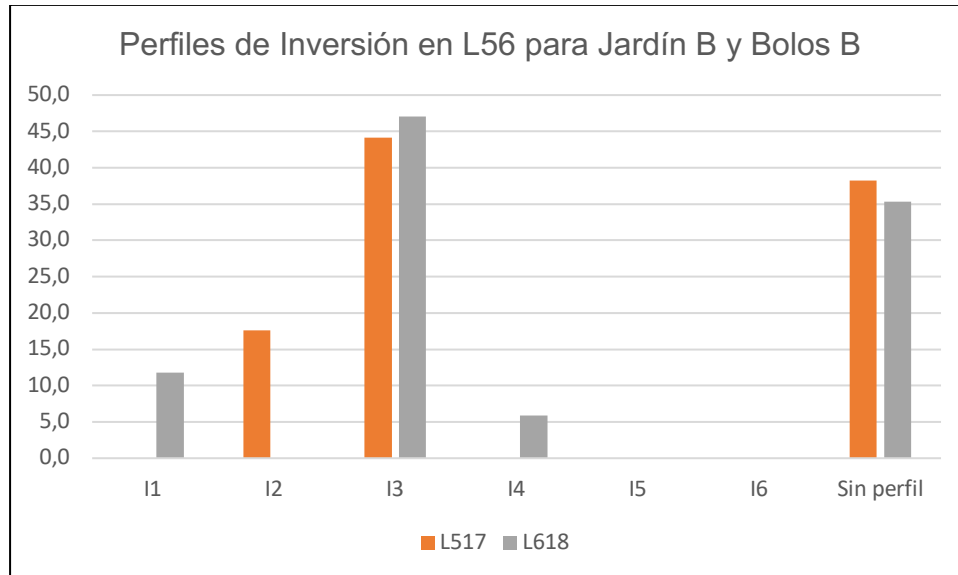


Figura 5.37. Frecuencia (%) de los perfiles de Inversión en L56 para Jardín B (L517) y Bolos B (L618).

Podemos observar que el perfil con mayor presencia es el I3, referido a la aplicación de una inversión aritmética. No obstante, también podemos ver la presencia en menor medida de los perfiles I1 e I4 para L618, que hacen referencia al uso de estrategias de ensayo y error y de inversiones algebraicas, y del perfil I2 para L517, que se refiere al uso de estrategias de operaciones directas.

También podemos observar cómo, de L517 a L618, aumenta ligeramente la cantidad de estudiantes que emplean una estrategia de inversión aritmética (I3), quedando cerca del 50% de los estudiantes. Además, desaparecen los casos que optan por estrategias de operaciones directas (I2), que, aparentemente, se redistribuyen entre las estrategias de ensayo y error (I1) e inversiones algebraicas (I4).

De este modo, podemos concluir que, gracias a la práctica de la resolución de ppg, los estudiantes van adquiriendo las competencias necesarias para implementar las estrategias más idóneas para resolver cuestiones de relación inversa, como la inversión aritmética. Además, la caída en desuso de las operaciones directas y la aparición de la inversión algebraica nos demuestran cómo los estudiantes van adaptando sus estrategias a través del aprendizaje, descartando aquellas menos exitosas y tratando de implementar estrategias más eficientes. No obstante, se trata de estudiantes en constante aprendizaje y, en esta búsqueda de nuevas estrategias, algunos de ellos han optado por probar con la estrategia de ensayo y error, seguramente influenciados por el botón *Comprobar* de GeoPattern.

Uso de GeoPattern y de papel y bolígrafo

Para completar el análisis del uso de los perfiles de inversión, creemos interesante prestar atención a las posibles diferencias entre los estudiantes que GeoPattern o papel y bolígrafo. Para ello, nos hemos centrado en las estrategias empleadas en la cuestión de relación inversa por los estudiantes de L618. No hemos tenido en cuenta a los estudiantes de L517 porque todos respondieron con papel y bolígrafo. Para realizar esta parte del análisis, centraremos el foco en la frecuencia (%) de estrategias empleadas por los estudiantes, descartando las respuestas en blanco. La Tabla 5.41 (presentada más arriba) indica la

cantidad de respuestas a las distintas cuestiones de los ppg incluidos en esta comparación y la Figura 5.38 presenta la evolución de las estrategias para la cuestión de relación inversa en ambos entornos de resolución de ppg.

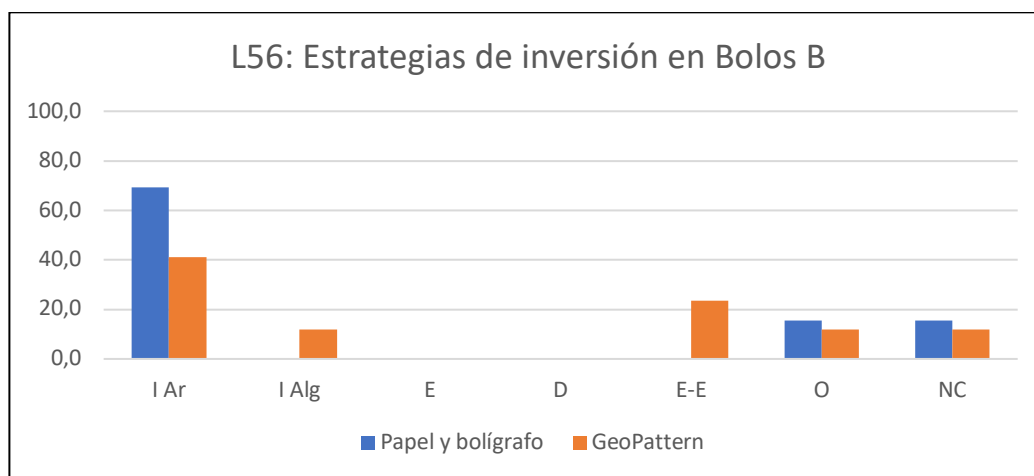


Figura 5.38. Frecuencia (%) de las estrategias de resolución en L56.

Podemos observar cómo GeoPattern fomenta una mayor variedad de estrategias entre los estudiantes, pues emplearon estrategias de inversión aritmética (I Ar), inversión algebraica (I Alg) y ensayo y error (E-E), mientras que los estudiantes con papel y bolígrafo centraron casi todos sus esfuerzos en I Ar. La presencia de I Alg en GeoPattern se puede deber a que esta app fomenta el desarrollo de estrategias de tipo visual entre los estudiantes proporcionándoles una mayor comprensión del patrón y su generalización y esto hace posible la puesta en práctica de estrategias que implican un mayor nivel de abstracción. Por otra parte, la aparición de E-E entre las respuestas de los estudiantes se debe a la presencia del botón *Comprobar* en GeoPattern, ya que ofrece la posibilidad de probar números aleatorios hasta obtener la solución numérica a esta cuestión.

Resultados del estudio longitudinal en 5.º y 6.º (L56)

Tras analizar los perfiles y las respuestas de los estudiantes en estos dos grupos de problemas de patrones geométricos comparables (Magdalenas A y Cumpleaños 1A; Jardín B y Bolos B), presentamos los resultados en relación con los objetivos de aprendizaje (ver Tabla 4.6). Para ello, agruparemos los resultados en tres bloques, correspondientes a diferentes aprendizajes: i)

identificar y generalizar relaciones funcionales en problemas de patrones geométricos, ii) expresar generalizaciones e iii) invertir operaciones y resolver ecuaciones.

i) Identificar y generalizar relaciones funcionales en ppg

Una de las capacidades básicas que se deben desarrollar mediante el aprendizaje del álgebra es la identificación y generalización de relaciones funcionales. Teniendo en cuenta el contexto de los ppg y el análisis de las respuestas de los estudiantes que hemos realizado, consideramos que los perfiles de generalización obtenidos, así como la distribución del uso de subcategorías de las estrategias funcional y construcción nos pueden aportar información sobre la capacidad desarrollada por los estudiantes de nuestra muestra en este aspecto.

Al inicio de la secuencia de enseñanza-aprendizaje (ppg tipo A), los estudiantes de L517 emplearon prácticamente todos los perfiles de generalización descritos, aunque el uso constante (en las sucesivas preguntas del problema) de una estrategia recursiva (G1.2) o funcional (G1.4) fueron los subperfiles más destacables. Posteriormente, en L618 los estudiantes abandonaron el uso de los perfiles G3 y G5, referidos al uso de ciertas estrategias en las cuestiones de cálculo de términos y cuya calidad disminuye al expresar la generalización, y se centraron en perfiles de mayor calidad o eficiencia como el G1.4, con un 61,8% de uso, y algunos subperfiles de G4, que hacen referencia al uso de estrategias diferentes pero con un aumento progresivo de la calidad. Esta evolución de los perfiles de generalización en el momento inicial de las secuencias nos muestra un aprendizaje por parte de los estudiantes, pues son pocos los estudiantes que usaron perfiles caracterizados por una disminución de calidad al expresar la generalización verbalmente y se enfocaron en el uso de estrategias eficientes para la identificación y generalización de relaciones funcionales, como el perfil de uso constante de estrategias funcionales (G1.4).

En la segunda sesión (ppg tipo B), los subperfiles de G1 siguieron siendo los más destacados, en especial G1.4 (52,9% en L517 y 32,4% en L618). Sin embargo, en L618 el aumento de la complejidad de los patrones geométricos propició una disminución del uso de G1 junto con un aumento de los subperfiles

de G4 (29,4%). Estos hechos muestran que, aunque los estudiantes siguen desarrollando su capacidad para identificar y generalizar relaciones funcionales en ppg, algunos estudiantes aun necesitan recurrir a perfiles y estrategias de menor calidad para poder identificar y expresar la generalización.

No ha sido posible analizar y comparar el progreso del final de la secuencia de enseñanza-aprendizaje (ppg tipo D) en este apartado porque para L517 se planteó un repaso global sin introducción de nuevos objetivos de aprendizaje.

En cuanto a las subcategorías de estrategias de tipo funcional, evidencian el desarrollo del análisis visual de los patrones con un aumento del uso de la estrategia funcional de descomposición (FD) a lo largo de los cursos. No obstante, la estrategia funcional (F), entendida como aquellas estrategias de tipo funcional no clasificables dentro de las otras subcategorías, sigue teniendo una gran presencia, tanto en L517 como en L618, quedando en un segundo plano estrategias de tipo numérico como auxiliar (FMAx) y primero (FMP). Este hecho muestra que, aunque los estudiantes simplifican las explicaciones de sus generalizaciones borrando con ello el rastro de la estrategia de origen, a lo largo de los cursos y la secuencia de enseñanza-aprendizaje sus explicaciones van volviéndose más precisas. Por su parte, las estrategias de tipo construcción sufren un abandono gradual, probablemente debido a que el aprendizaje obtenido les permite ser conscientes de que este tipo de estrategias pueden resultar erróneas en algunos ppg y optan por utilizar estrategias más eficientes y con mayor probabilidad de éxito.

En referencia al uso de GeoPattern es importante señalar que la app fomentó el uso de estrategias de tipo funcional (F), disminuyendo el uso de estrategias de recuento (Rt) y recursivas (Rs), y parece proporcionar un mejor entorno para la comprensión del patrón geométrico y la identificación de generalizaciones funcionales. No obstante, también propició la aparición de la estrategia de ensayo y error (E-E).

ii) Expresar generalizaciones

Ser capaz de expresar las generalizaciones obtenidas es un aspecto fundamental para seguir trabajando y aprendiendo conceptos de índole

algebraico. Además, la forma en que los estudiantes expresan sus generalizaciones aporta mucha información sobre los procesos mentales llevados a cabo. Por este motivo, consideramos que los tipos de generalización desarrollados por los estudiantes nos pueden ayudar en este aspecto.

Una de las principales diferencias entre cursos que podemos encontrar es la presencia de tipos de generalizaciones no algebraicas y, por tanto, de baja calidad, como la inducción ingenua (II), la generalización aritmética (GA) y las generalizaciones no clasificables (NC). En la primera sesión (ppg tipo A), este tipo de generalizaciones fueron menores en L618, mientras que, en la segunda sesión (ppg tipo B), este tipo de generalizaciones aumentó y fue mayor en L618, especialmente en las cuestiones iniciales (a y b), probablemente debido al aumento de dificultad del patrón geométrico.

La generalización más utilizada fue la generalización factual (GF). En las dos primeras sesiones (ppg tipo A y B) su uso sufrió un aumento progresivo durante la resolución de las cuestiones directas de cálculo de términos (a, b y c) y, posteriormente, su presencia fue prácticamente nula en la cuestión de verbalización (d). Esta disminución en el uso de GF estuvo determinada, en parte, por el enunciado de la cuestión, que, en vez de pedir calcular términos, pedía explicar la generalización obtenida. No obstante, también evidenció aprendizaje por parte de los estudiantes, que se enfocaron en el uso de la generalización contextual (GC) y la generalización simbólica (GS), haciendo uso de la forma de generalización más idóneo según el tipo de cuestión.

En referencia al uso de las generalizaciones contextual (GC) y simbólica (GS), ambas implican un mayor nivel de abstracción de la generalización que la generalización factual (GF), siendo GS la que más dificultades presentó para los estudiantes, pues implica la formulación de una expresión algebraica alfanumérica. En la primera sesión (ppg tipo A), GC fue la única de estas generalizaciones evidenciada, debido a que estos problemas fueron resueltos al inicio de las secuencias de enseñanza-aprendizaje y todavía no se había realizado una explicación sobre la formulación de expresiones algebraicas. Aun así, el uso de GC a lo largo de los cursos nos muestra una mayor capacidad de abstracción y expresión de la generalización en L618, con alrededor de un 80%

de uso para la cuestión de verbalización (d). Además, en L517 hubo un repunte de GA en esta misma cuestión, obteniendo un uso similar al de GC, en torno al 40%, seguramente utilizada por aquellos estudiantes que todavía no eran capaces de verbalizar las estrategias empleadas en las cuestiones de cálculo de términos. En la segunda sesión (ppg tipo B), el uso de GC disminuyó y apareció el uso de GS con un porcentaje similar en ambos cursos. No obstante, en L618, los estudiantes emplearon GS desde la primera cuestión, con un aumento gradual a través de las cuestiones de cálculo de términos (a, b y c) y un uso mayoritario en la expresión de la generalización (d), mientras que en L517 únicamente habían utilizado GS en la cuestión d). Estos hechos evidencian aprendizaje y mejora en las capacidades de expresión de generalizaciones y comprensión de conceptos algebraicos en los estudiantes, aunque podamos encontrar estudiantes con diferentes ritmos de aprendizaje.

iii) Invertir operaciones y resolver ecuaciones

Aprender a invertir operaciones y resolver ecuaciones no es tarea fácil, tal y como han demostrado diversas investigaciones (Banerjee y Subramaniam, 2012; Jupri et al., 2015). No obstante, la destreza manipulativa de las expresiones algebraicas es una capacidad fundamental del álgebra que nos puede aportar información sobre el entendimiento y la comprensión de las expresiones formuladas. Por este motivo, consideramos que los perfiles de inversión obtenidos nos pueden ayudar a vislumbrar la capacidad desarrollada por nuestros estudiantes en este aspecto.

Al inicio de la secuencia de enseñanza-aprendizaje (ppg tipo A), los estudiantes centraron sus esfuerzos en el uso de estrategias de operaciones directas (I2) y la aplicación de inversiones aritméticas (I3). Sin embargo, aunque se utilizaron los mismos perfiles de inversión, sus porcentajes de uso variaron de un curso a otro. En L517 el perfil mayoritario fue I2, con un 29,4% de uso, mientras que en L618 el perfil principal fue I3, con un 58,8%. Además, en L517 hubo una mayor cantidad de estudiantes a los que no se les pudo asignar un perfil, llegando incluso al 50%, pero en L618 la presencia de estos estudiantes se redujo hasta el 11,8% y apareció un caso de inversión algebraica (I4). Esta evolución de los perfiles de inversión en el momento inicial de las secuencias nos muestra un

aprendizaje por parte de los estudiantes, aumentando de un curso a otro no solo el porcentaje de estudiantes que es capaz de resolver este tipo de cuestión, sino también de invertir los procesos mentales mediante operaciones aritméticas.

En la segunda sesión (ppg tipo B), el perfil I3 destacó como perfil principal para los dos cursos, con alrededor del 45% de uso. Además, aunque I2 siguió estando presente en L517 su uso disminuyó y, posteriormente, desapareció por completo en L618. Entre los perfiles presentes en L618, también destacó el uso de I4, con un ligero aumento, y la utilización de estrategias de ensayo y error (I1), probablemente consecuencia del abandono de I2 y el uso de GeoPattern como entorno de resolución. Estos hechos nos permiten observar un aprendizaje por parte de los estudiantes, que iban adquiriendo las capacidades necesarias para resolver cuestiones de relación inversa, así como abandonando las estrategias de menor calidad (I2) e intentando implementar otras más idóneas (I3). Asimismo, la presencia del perfil I4 muestra cómo algunos estudiantes empezaron a obtener cierta destreza manipulativa de las expresiones algebraicas siendo capaces también de realizar procesos de inversión algebraicamente.

No ha sido posible analizar y comparar el progreso del final de la secuencia de enseñanza-aprendizaje (ppg tipo D) en este apartado porque para L517 se planteó un repaso global sin introducción de nuevos objetivos de aprendizaje.

En referencia al uso de GeoPattern es importante señalar que este entorno de resolución fomentó una mayor diversidad de estrategias entre los estudiantes. En cambio, aquellos que utilizaron papel y bolígrafo centraron sus esfuerzos en el uso de inversiones aritméticas (I Ar) como estrategia principal de resolución. Así pues, GeoPattern propició la aparición de la estrategia de ensayo y error (E-E), seguramente debido a la posibilidad que ofrece esta app de probar números al azar hasta que la app indicaba que habían encontrado la solución numérica correcta. Pero GeoPattern también incentivó el uso de inversiones algebraicas (I Alg) a través del desarrollo de estrategias de tipo visual que proporcionan una mejor comprensión del patrón y su generalización.

5.2.2. Estudios con altas capacidades matemáticas

En los estudios con altas capacidades matemáticas (A3419, A5617 y A5619) hemos comparado las diferencias existentes entre las respuestas de distintos estudiantes con aaccmm en un momento concreto, a partir de diferentes grupos de problemas. Para ello, hemos agrupado estos problemas siguiendo los criterios de identificación de patrones comparables (ver sección 4.2.3.1).

En concreto, hemos realizado el análisis de los perfiles presentes en las respuestas de los estudiantes a tres grupos de problemas de patrones comparables: i) Cumpleaños 1A, resuelto por A3419 y A5619; ii) Cumpleaños 2A, resuelto por A3419 y A5619, y Familia A, resuelto por A5617; iii) Jardín D, resuelto por A3419 y A5619. Hemos seleccionado estos grupos de problemas por sus patrones identificados como comparables, sus tipos de cuestiones (A, B, C, D, E) y su trazabilidad a lo largo de los cursos. Además, estos grupos de problemas nos permiten realizar una comparación del progreso de los estudiantes a lo largo de la sesión realizada.

COMPARACIÓN 1: Cumpleaños 1A

Hemos comparado las respuestas al problema Cumpleaños 1A, resuelto por los estudiantes en 3.º y 4.º (A3419) y 5.º y 6.º (A5619). Para ello, analizaremos por separado los perfiles de generalización e inversión obtenidos.

Perfiles de Generalización

La Tabla 5.43 presenta las cantidades (absolutas y porcentuales) de estudiantes que utilizaron cada perfil de generalización y la Figura 5.39 presenta de manera gráfica las frecuencias de estos perfiles en cada curso.

Tabla 5.43. Perfiles de Generalización en aaccmm para Cumpleaños 1A (A3419 y A5619).

Perfil		A3419		A5619	
		Total	%	Total	%
G1	G1.1	-	-	-	-
	G1.2	-	-	-	-
	G1.3	-	-	2	20,0
	G1.4	8	72,7	8	80,0
	Total	8	72,7	10	100,0
G2	G2.1	-	-	-	-
	G2.2	-	-	-	-
	G2.3	-	-	-	-
	G2.4	-	-	-	-
	Total	0	0,0	0	0,0
G3	G3.1	-	-	-	-
	G3.2	-	-	-	-
	G3.3	-	-	-	-
	Total	0	0,0	0	0,0
G4	G4.1	-	-	-	-
	G4.2	-	-	-	-
	G4.3	-	-	-	-
	G4.4	-	-	-	-
	G4.5	-	-	-	-
	G4.6	-	-	-	-
	G4.7	-	-	-	-
	G4.8	-	-	-	-
	G4.9	2	18,2	-	-
	Total	2	18,2	0	0,0
G5	G5.1	-	-	-	-
	G5.2	-	-	-	-
	G5.3	-	-	-	-
	G5.4	-	-	-	-
	G5.5	-	-	-	-
	Total	0	0,0	0	0,0
G6		0	0,0	0	0,0
G7		1	9,1	0	0,0
Sin perfil		0	0,0	0	0,0
Total		11	100,0	10	100,0

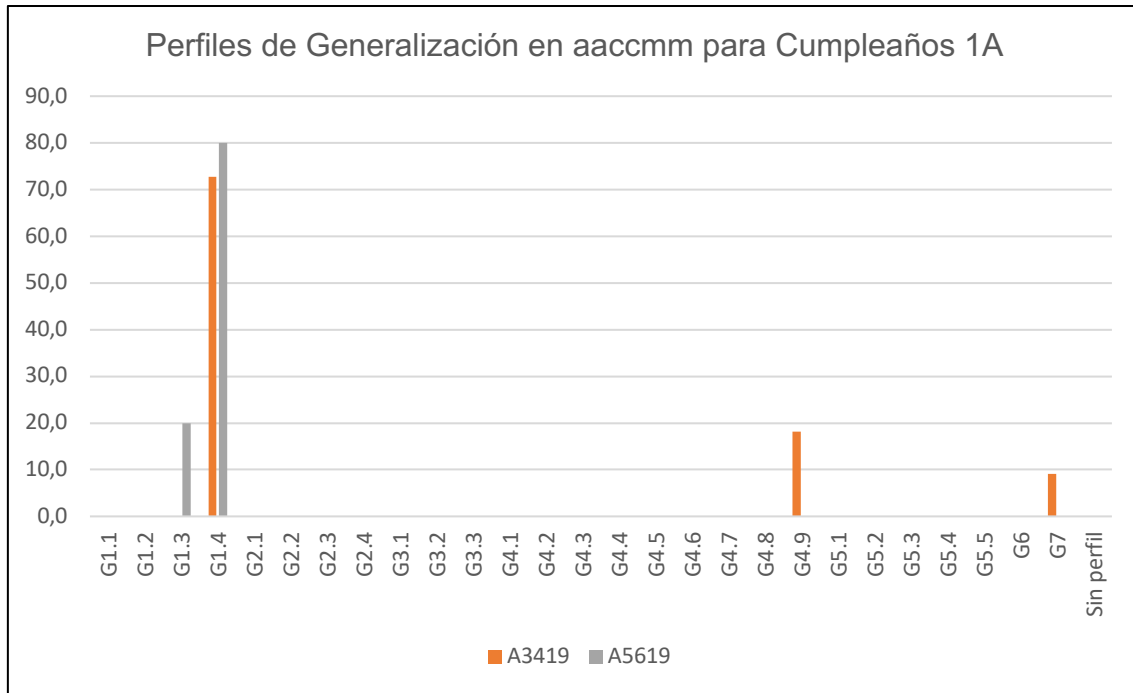


Figura 5.39. Frecuencia (%) de los perfiles de Generalización en aaccmm para Cumpleaños 1A (A3419 y A5619).

Podemos observar que A3419, con perfiles de los tipos G1, G4 y G7, presenta una mayor diversidad de perfiles que A5619, que solo han usado perfiles del tipo G1, destacando significativamente en ambos grupos el subperfil G1.4 como mayoritario.

También notamos que, en A3419, el porcentaje de estudiantes que no opta por utilizar la misma estrategia en todas las preguntas (G1) es relativamente bajo, pues implica a una cuarta parte de los estudiantes. Por otra parte, la cantidad de estudiantes que emplearon una estrategia funcional (G1.4) es bastante parecida en ambos grupos.

De este modo, podemos concluir que la mayoría de estudiantes con aaccmm son consistentes en la estrategia que eligen para resolver el ppg, siendo casi siempre la estrategia funcional. Además, son capaces de realizar generalizaciones funcionales desde edades tempranas, descartando otras estrategias de menor complejidad y calidad como las estrategias de recuento y recursiva. Por último, es importante destacar que casi el 100% de los estudiantes de ambos grupos fueron capaces de proporcionar una respuesta a la cuestión

de verbalización de la generalización, siendo prácticamente inexistente el perfil G7.

En este análisis, creemos importante ampliar la información que nos proporcionan estos perfiles en dos aspectos a destacar: la distribución del uso de subcategorías de las estrategias funcional y construcción y los tipos de generalización empleados por los estudiantes. Para ello, centraremos el foco en la frecuencia (%) de estrategias y tipos de generalizaciones empleadas por los estudiantes, descartando las respuestas en blanco. La Tabla 5.44 indica la cantidad de respuestas proporcionadas por los estudiantes de cada curso para las distintas cuestiones de los ppg incluidos en esta comparación.

Tabla 5.44. Cantidad de respuestas en aaccmm para Cumpleaños 1A (A3419 y A5619).

Cuestiones	A3419	A5619
	App	App
a)	11	10
b)	11	10
c)	11	10
d)	11	10
e)	11	10

Subcategorías de las estrategias funcional y construcción

Para el análisis de las subcategorías de las estrategias funcional y construcción en la resolución de ppg, hemos extraído los datos en forma de porcentaje de estudiantes que emplearon cada una de ellas en el problema Cumpleaños 1A (A3419 y A5619).

Estrategias de tipo funcional

La Figura 5.40 presenta la evolución de las estrategias de tipo funcional usadas en las cuestiones directas por los estudiantes con aaccmm. En ella, podemos observar que las únicas estrategias de tipo funcional empleadas fueron aquellas clasificadas como descomposición (FD) y funcional (F).

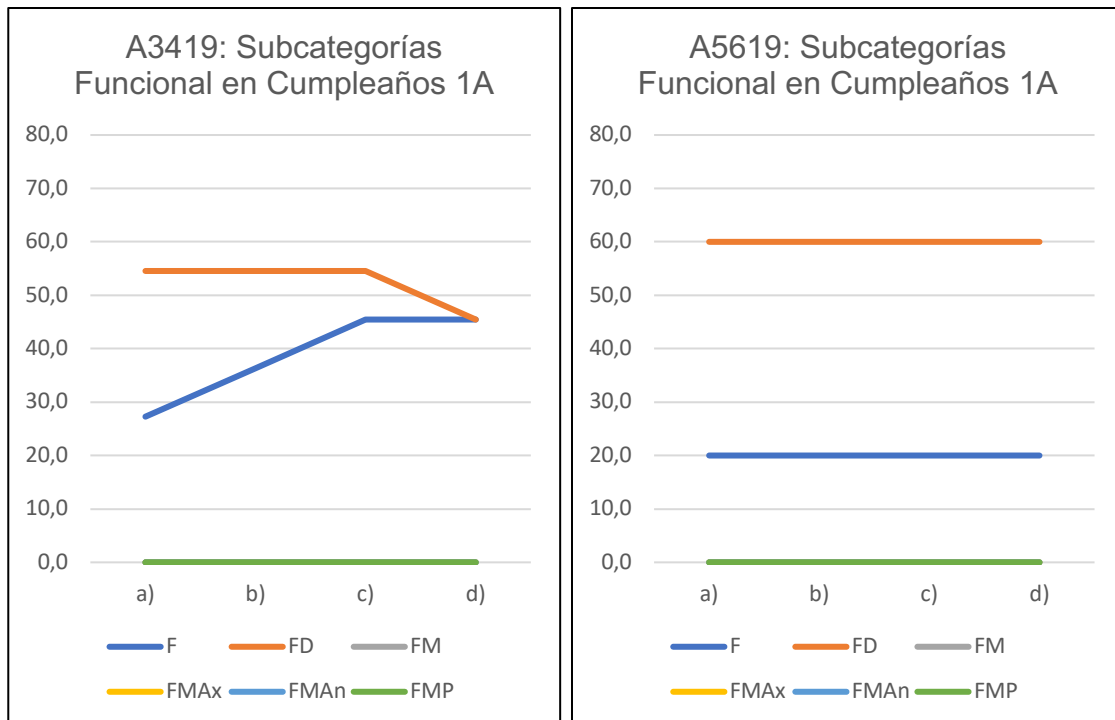


Figura 5.40. Frecuencia (%) de las subcategorías de la estrategia funcional en aaccmm.

Si analizamos la evolución de las estrategias funcionales registradas, podemos apreciar que FD fue la estrategia mayoritaria en ambos grupos, siendo empleada por más de la mitad de los estudiantes. Además, su uso fue constante en las cuestiones de cálculo de términos y únicamente disminuyó para A3419 en la cuestión de verbalización, porque algunos estudiantes no fueron capaces de describir adecuadamente su razonamiento lógico-matemático. En cuanto a la estrategia F, los estudiantes de A5619 la usaron en todas las preguntas del problema, mientras que en A3419 fue aumentando de a) a c). Este hecho evidencia que estos estudiantes son capaces de obtener una generalización a través de estrategias funcionales, así como apoyarse en la discriminación visual para realizar un análisis del patrón y descomponer su representación gráfica en partes.

Estrategias de tipo construcción

La Figura 5.41 presenta la evolución de las estrategias de tipo construcción para las cuestiones directas en aaccmm. En ella, podemos observar que los

estudiantes utilizaron únicamente la estrategia proporcional (CP), cuyo uso es correcto en este ppg.

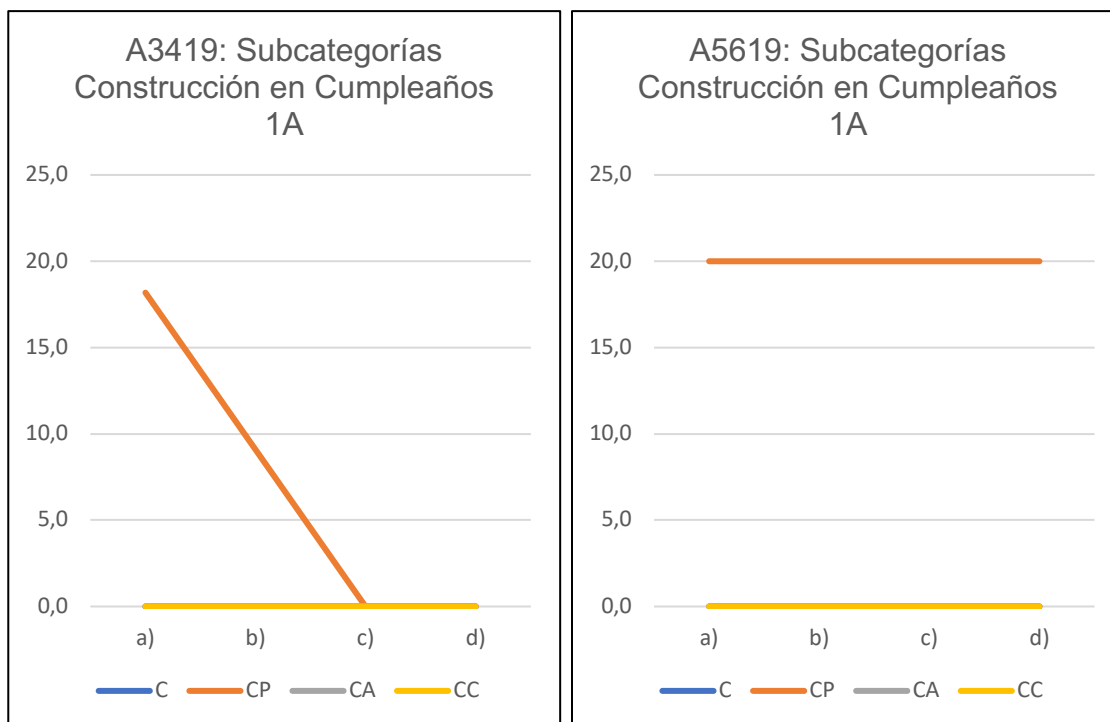


Figura 5.41. Frecuencia (%) de las subcategorías de la estrategia construcción en aaccmm.

Si analizamos la evolución de estas estrategias, podemos apreciar cómo, aunque inicialmente en ambos grupos emplea CP alrededor de un 20% de los estudiantes, en A3419 su uso va disminuyendo a través de las cuestiones para desaparecer en c), mientras que, en A5619, se realiza un uso constante de la estrategia. Este hecho puede deberse a que la aplicación de CP puede suponer un reto a los estudiantes de A3419, por sus conocimientos sobre proporcionalidad, y buscan otras vías en las que se sientan más cómodos para resolver las cuestiones.

Tipos de generalización

Para el análisis de los tipos de generalización empleados por los estudiantes en la resolución de ppg, hemos extraído los datos en forma de porcentaje de la cantidad de estudiantes que emplearon cada una de estas generalizaciones en las cuestiones directas del problema Cumpleaños 1A (A3419 y A5619). La Figura

5.42 presenta la evolución de los distintos tipos de generalización para las cuestiones directas en aaccmm.

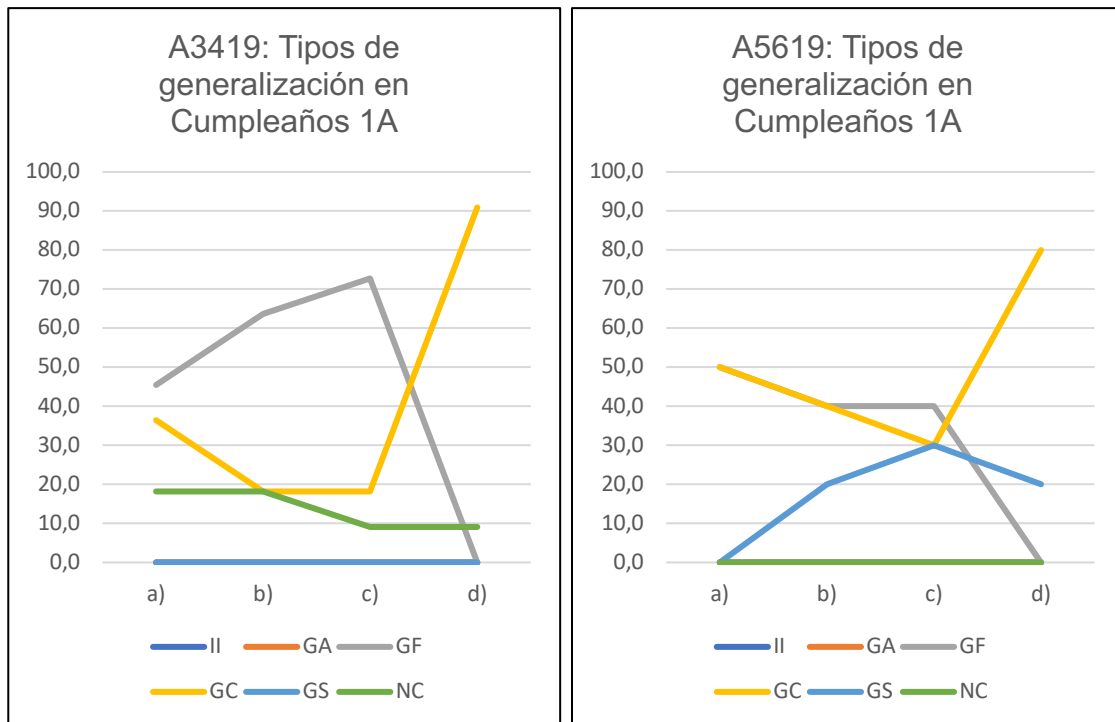


Figura 5.42. Frecuencia (%) de los tipos de generalización en aaccmm.

Podemos observar la presencia en las respuestas de generalización factual (GF), generalización contextual (GC), la generalización simbólica (GS), así como generalizaciones no clasificables (NC). Por otra parte, estos estudiantes no utilizaron la inducción ingenua (II) y la generalización aritmética (GA).

Si nos centramos en el análisis de las generalizaciones en los sucesivos cursos, podemos observar cómo destaca el uso de la GF para las cuestiones de cálculo de términos (a, b y c) y la GC en la cuestión de verbalización (d). Este hecho viene determinado en parte por el tipo de cuestiones, pero también muestra cómo ambos grupos son capaces de usar el tipo de generalización más idóneo en cada ocasión y, además, alcanzar el nivel de abstracción necesario para proporcionar una generalización contextual del procedimiento utilizado.

Asimismo, en A5619, también destaca el uso de GS entre los estudiantes, llegando a ser utilizada casi por un 30% de ellos. La aparición de GS entre los tipos de generalizaciones evidencia que algunos de estos estudiantes ya son capaces de producir expresiones algebraicas alfanuméricas para expresar sus

generalizaciones. El uso de GS disminuye en la cuestión de verbalización (d), lo cual podría deberse a cómo está formulada la pregunta, ya que incita a proporcionar una expresión verbal o descripción de la generalización.

Perfiles de Inversión

La Tabla 5.45 presenta las cantidades (absolutas y porcentuales) de estudiantes que utilizaron cada perfil de inversión y la Figura 5.43 presenta de gráficamente las frecuencias de dichos perfiles en cada curso.

Tabla 5.45. Perfiles de Inversión en aaccmm para Cumpleaños 1A (A3419 y A5619).

Perfil	A3419		A5619	
	Total	%	Total	%
I1	0	0,0	0	0,0
I2	0	0,0	0	0,0
I3	8	72,7	9	90,0
I4	1	9,1	1	10,0
I5	0	0,0	0	0,0
I6	0	0,0	0	0,0
Sin perfil	2	18,2	0	0,0
Total	11	100,0	10	100,0

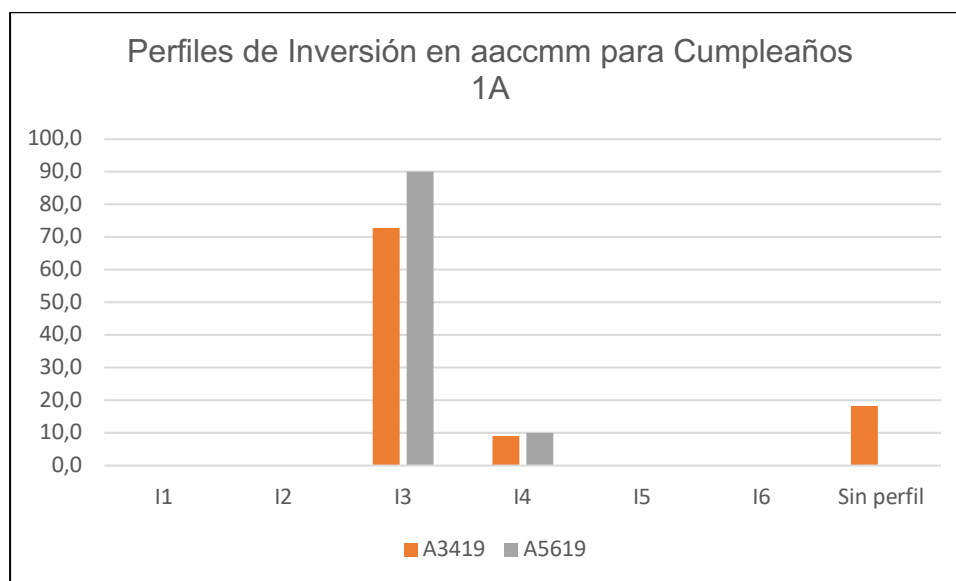


Figura 5.43. Frecuencia (%) de los perfiles de Inversión en aaccmm para Cumpleaños 1A (A3419 y A5619).

Podemos observar que I3, referido al uso de inversiones aritméticas, es el perfil mayoritario en ambos grupos. También podemos ver una pequeña presencia de I4, que hace referencia al uso de inversiones algebraicas. Los datos en ambos casos son muy similares, siendo la cantidad de estudiantes sin perfil casi la única diferencia que podemos encontrar. Así pues, entre un 70% y un 90% de los estudiantes optó por un perfil I3 y alrededor de un 10% por un perfil I4. De este modo, podemos concluir que, tanto los estudiantes de A3419 como A5619, muestran una predisposición por el uso de inversiones aritméticas al inicio de la secuencia de enseñanza.

COMPARACIÓN 2: Cumpleaños 2A y Familia A

Hemos comparado las respuestas a los problemas Cumpleaños 2A, resuelto por los estudiantes en 3.º y 4.º (A3419) y 5.º y 6.º (A5619), y Familia A, resuelto por los estudiantes en 5.º y 6.º (A5617). Para ello, analizaremos por separado los perfiles de generalización e inversión obtenidos.

Perfiles de Generalización

La Tabla 5.46 presenta las cantidades (absolutas y porcentuales) de estudiantes que utilizaron cada perfil de generalización y la Figura 5.44 presenta de manera gráfica las frecuencias de estos perfiles en cada curso.

Tabla 5.46. Perfiles de Generalización en aaccmm para Cumpleaños 2A (A3419 y A5619) y Familia A (A5617).

Perfil		A3419		A5617		A5619	
		Total	%	Total	%	Total	%
G1	G1.1	-	-	-	-	-	-
	G1.2	-	-	-	-	-	-
	G1.3	-	-	-	-	-	-
	G1.4	7	63,6	3	37,5	9	90,0
	Total	7	63,6	3	37,5	9	90,0
G2	G2.1	-	-	-	-	-	-
	G2.2	-	-	-	-	-	-
	G2.3	-	-	-	-	-	-
	G2.4	-	-	-	-	-	-
	Total	0	0,0	0	0,0	0	0,0
G3	G3.1	-	-	-	-	-	-
	G3.2	-	-	-	-	-	-
	G3.3	-	-	1	12,5	-	-

Perfil		A3419		A5617		A5619	
		Total	%	Total	%	Total	%
	Total	0	0,0	1	12,5	0	0,0
G4	G4.1	-	-	-	-	-	-
	G4.2	-	-	-	-	-	-
	G4.3	-	-	-	-	-	-
	G4.4	-	-	-	-	-	-
	G4.5	-	-	1	12,5	-	-
	G4.6	-	-	-	-	-	-
	G4.7	-	-	-	-	-	-
	G4.8	-	-	-	-	-	-
	G4.9	1	9,1	-	-	-	-
	Total	1	9,1	1	12,5	0	0,0
G5	G5.1	-	-	-	-	-	-
	G5.2	-	-	-	-	-	-
	G5.3	-	-	-	-	-	-
	G5.4	-	-	-	-	-	-
	G5.5	-	-	3	37,5	-	-
	Total	0	0,0	3	37,5	0	0,0
G6		0	0,0	0	0,0	0	0,0
G7		0	0,0	0	0,0	0	0,0
Sin perfil		3	27,3	0	0,0	1	10,0
Total		11	100,0	8	100,0	10	100,0

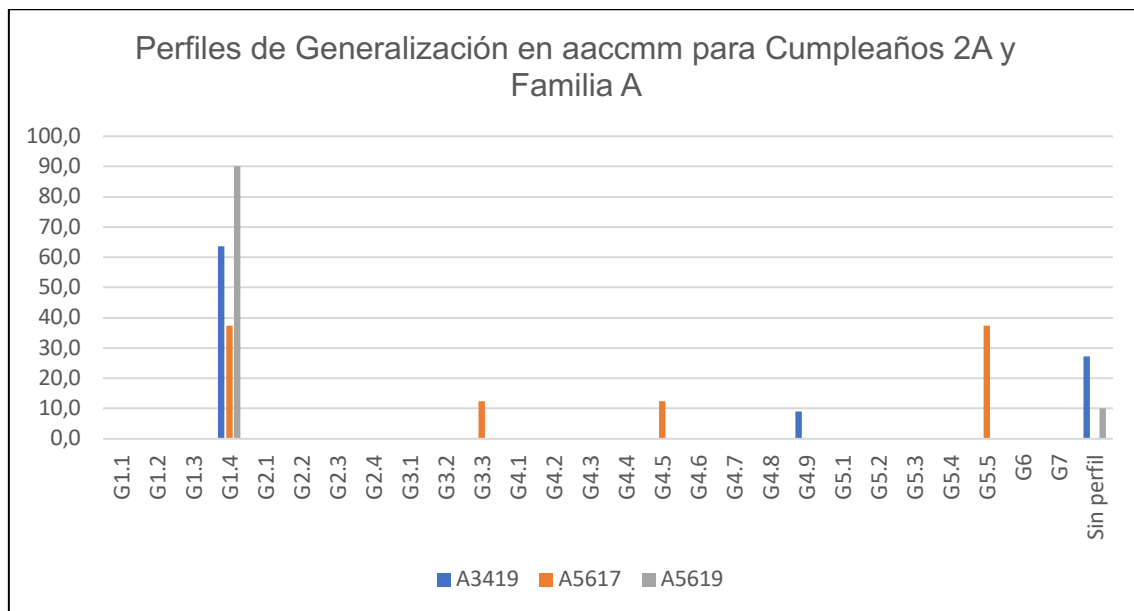


Figura 5.44. Frecuencia (%) de los perfiles de Generalización en aaccmm para Cumpleaños 2A (A3419 y A5619) y Familia A (A5617).

Podemos observar que el subperfil G1.4, referido al uso constante de una estrategia funcional, ha sido el mayoritario entre los estudiantes, aunque también podemos ver una elevada cantidad de respuestas del grupo A5617 en el perfil G5.5, que hace referencia al uso de una estrategia recursiva que aumenta su calidad hacia una estrategia funcional, pero, posteriormente, vuelve a una estrategia recursiva en la cuestión de verbalización.

También podemos observar cómo, en A3419 y A5619, el subperfil G1.4 es usado por más de un 60% de los estudiantes, mientras que, en A5617, es utilizado por menos de un 40%. Este hecho puede deberse a la diferencia de entornos de resolución entre estos grupos, ya que los estudiantes de A5617 resolvieron los problemas usando papel y bolígrafo y, en cambio, los estudiantes de A3419 y A5619 emplearon la app GeoPattern.

En este análisis, creemos importante ampliar la información que nos proporcionan estos perfiles en tres aspectos a destacar: comparar las estrategias seleccionadas por los estudiantes que usaron GeoPattern y los que usaron papel y bolígrafo, la distribución del uso de subcategorías de las estrategias funcional y construcción y los tipos de generalización empleados por los estudiantes. Para realizar esta parte del análisis, centraremos el foco en la frecuencia (%) de estrategias y tipos de generalizaciones empleadas por los estudiantes, descartando las respuestas en blanco. La Tabla 5.47 indica la cantidad de respuestas proporcionadas por los estudiantes de cada curso para las distintas cuestiones de los ppg incluidos en esta comparación.

Tabla 5.47. Cantidad de respuestas en aaccmm para Cumpleaños 1A (A3419 y A5619) y Familia A (A5617).

Cuestiones	A3419	A5619	A5617
	App	App	Papel
a)	10	9	8
b)	10	9	8
c)	9	9	8
d)	9	9	8
e)	9	8	8

Uso de GeoPattern y de papel y bolígrafo

Para el análisis de las diferencias existentes entre el uso de la app GeoPattern y la resolución de los problemas con papel y bolígrafo, nos hemos centrado en las estrategias empleadas en cuestiones directas por los estudiantes de A3419 y A5619, que resolvieron los problemas con GeoPattern, y A5617, que los resolvieron con papel y bolígrafo. La Figura 5.45 presenta la presencia de las estrategias en los diferentes cursos para las cuestiones directas en ambos entornos de resolución.

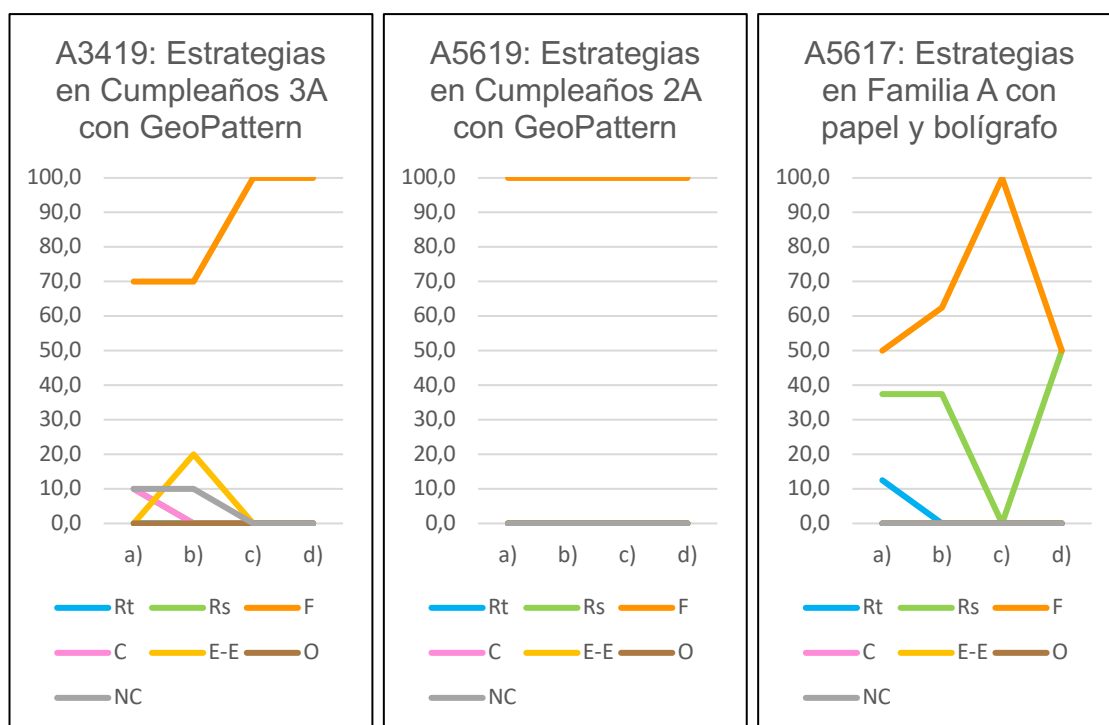


Figura 5.45. Frecuencia (%) de las estrategias de resolución en aaccmm para Cumpleaños 2A (A3419 y A5619) y Familia A (A5617).

Podemos observar cómo GeoPattern fomenta el uso de estrategias de tipo funcional (F), ya que estas llegaron a ser empleadas por un 100% de los estudiantes con GeoPattern en más de una cuestión. En cambio, en A5617, aunque las estrategias de tipo F son las más usadas, su uso es bastante más irregular y llega a disminuir hasta un 50%. Así pues, en A3419 podemos ver cómo el uso de F aumenta progresivamente y, posteriormente, se mantiene en la cuestión de verbalización. Asimismo, en A5619, todos los estudiantes emplean F de un modo constante durante la resolución de este ppg. Si nos fijamos en

A5617, vemos cómo existe una simetría entre el número de estudiantes que emplean la estrategia recursiva (Rs) y las estrategias de tipo funcional (F) en los apartados b), c) y d), pues el aumento de uso de la estrategia F coincide con la disminución de uso de la estrategia Rs y viceversa. De este modo, una parte importante de los estudiantes que resuelven este ppg con papel y bolígrafo inician un primer acercamiento hacia el patrón geométrico mediante estrategias (Rt y Rs) que son de menor calidad que la estrategia F pero que les permiten comprender adecuadamente el patrón y poder emplear estrategias de tipo F en la cuestión c). No obstante, muchos de estos estudiantes obtienen una comprensión limitada del patrón que no les permite alcanzar el nivel de abstracción necesario para expresar su generalización en el apartado d) de un modo funcional y recurren nuevamente a las estrategias recursivas de menor calidad.

El hecho de que GeoPattern fomente el uso de estrategias funcionales puede deberse a la presencia del botón *Comprobar* y la posibilidad que proporciona de verificar si la respuesta numérica introducida es correcta o errónea y revisarla y mejorarla en caso necesario, utilizando su comprensión del patrón y sus anteriores respuestas. Además, GeoPattern ofrece a los estudiantes la posibilidad de reproducir el patrón geométrico presentado, favoreciendo un acercamiento visual al patrón a partir de su descomposición en partes.

Subcategorías de las estrategias funcional y construcción

Para el análisis de las subcategorías de las estrategias funcional y construcción en la resolución de ppg, hemos extraído los datos en forma de porcentaje de estudiantes que emplearon cada una de ellas en los problemas Cumpleaños 2A (A3419 y A5619) y Familia A (A5617).

Estrategias de tipo funcional

La Figura 5.46 presenta la evolución de las estrategias de tipo funcional para las cuestiones directas en aaccmm. En ella, podemos observar que las únicas estrategias de tipo funcional empleadas fueron aquellas clasificadas como descomposición (FD), anterior (FMA_n) y funcional (F).

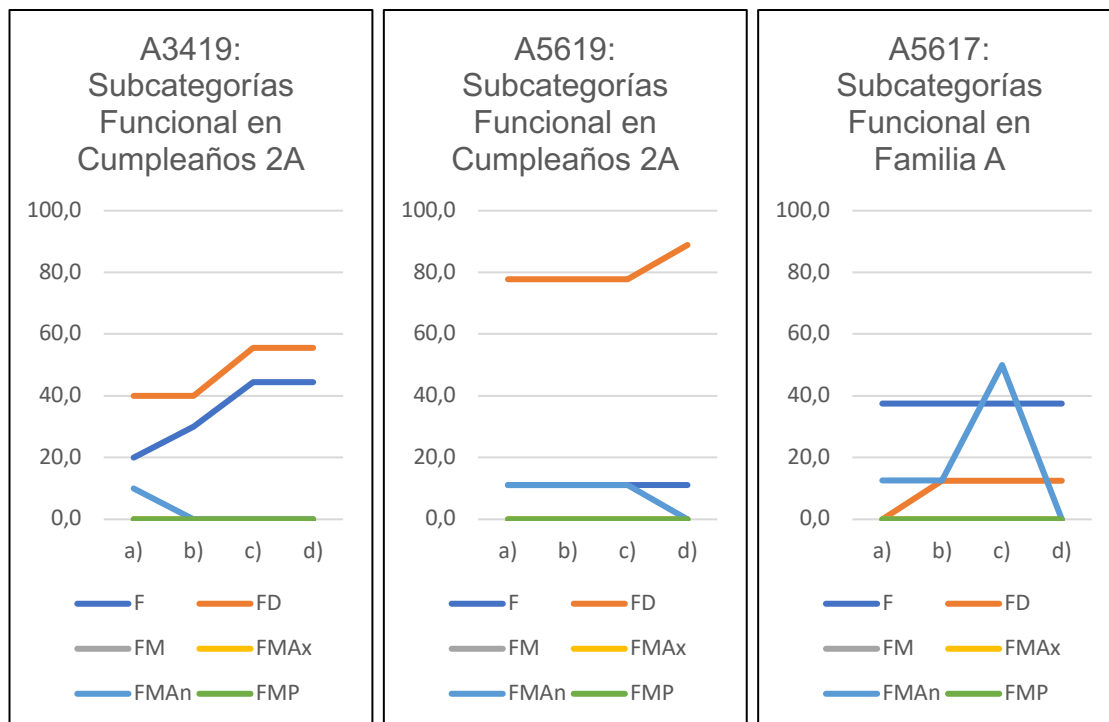


Figura 5.46. Frecuencia (%) de las subcategorías de la estrategia funcional en aaccmm.

Si analizamos la evolución de las estrategias funcionales registradas, podemos apreciar cómo destaca el uso de FD en A3419 y A5619, implicando casi un 80% de los estudiantes en A5619. En ambos casos, los estudiantes resolvieron los ppg haciendo uso de la app GeoPattern, mientras que los estudiantes en A5617 resolvieron los ppg con papel y bolígrafo. En este caso, la presencia de FD es menor al 20% y la estrategia que destaca junto con F es FMAAn, una estrategia principalmente numérica, ya que se basa en usar los valores numéricos de las figuras sin prestar atención a la organización gráfica de estas. Este hecho podría poner de manifiesto que el uso de GeoPattern fomenta un análisis visual del patrón dando lugar al uso de estrategias como FD, basada en la descomposición en partes del patrón geométrico y el análisis de las relaciones existentes entre ellas.

Estrategias de tipo construcción

La Figura 5.47 presenta la evolución de las estrategias de tipo construcción para las cuestiones directas en aaccmm. En ella, podemos observar que, en A3419, los estudiantes utilizaron únicamente la estrategia proporcional (CP) y lo hicieron

solo en la cuestión de generalización inmediata (a). Sin embargo, en A5619 y A5617, los estudiantes decidieron no usar estrategias de tipo construcción. Este hecho se debe a que los estudiantes fueron capaces de discriminar y desestimar este tipo de estrategias consideradas erróneas en estos ppg.

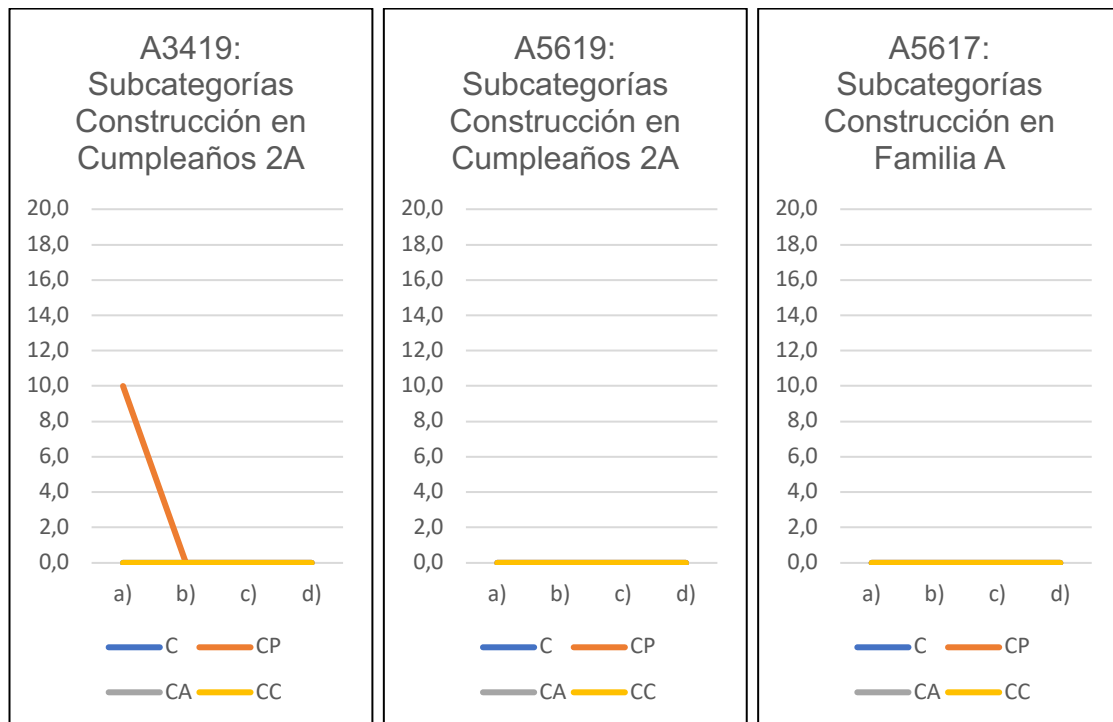


Figura 5.47. Frecuencia (%) de las subcategorías de la estrategia construcción en aaccmm.

Tipos de generalización

Para el análisis de los tipos de generalización empleados por los estudiantes en la resolución de ppg, hemos extraído los datos en forma de porcentaje de la cantidad de estudiantes que emplearon cada una de estas generalizaciones en las cuestiones directas del problema Cumpleaños 2A (A3419 y A5619) y Familia A (A3417). La Figura 5.48 presenta la evolución de los distintos tipos de generalización para las cuestiones directas en aaccmm.

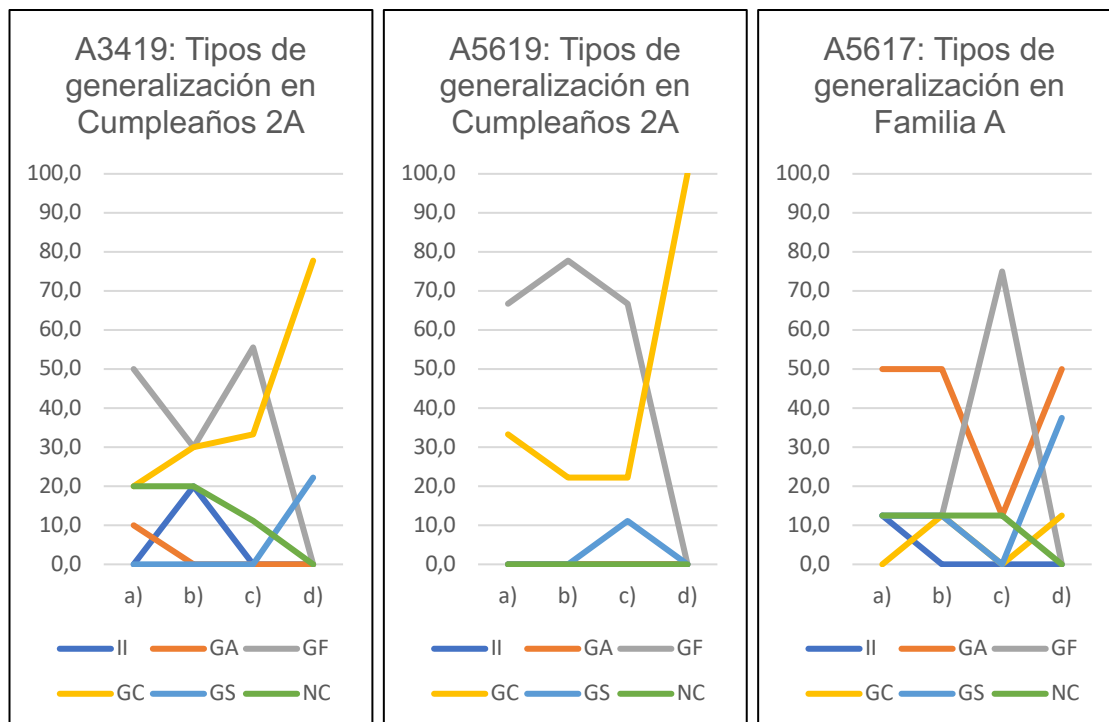


Figura 5.48. Frecuencia (%) de los tipos de generalización en aaccmm.

Podemos observar la presencia en las respuestas de todos los tipos de generalización: inducción ingenua (II), generalización aritmética (GA), generalización factual (GF), generalización contextual (GC), generalización simbólica (GS) y generalizaciones no clasificables (NC).

Si nos centramos en el análisis de las generalizaciones en los sucesivos cursos, podemos observar cómo destaca el uso de GF en los tres grupos, sobre todo, para las cuestiones de cálculo de términos (a, b y c). Asimismo, destaca GC en A3419 y A5619, especialmente en la cuestión de verbalización (d), y GA en A5617 para la verbalización (d) y las cuestiones iniciales (a y b). La aparición de GF en las cuestiones a) a c) y GC en la cuestión d) se debe, en parte, al planteamiento y objetivo de las cuestiones y, por tanto, es un indicativo de comprensión y aprendizaje por parte de los estudiantes al ser capaces de mostrar el nivel de abstracción necesario para transformar su generalización en palabras y expresiones verbales. Este hecho, además, se intensifica en A5619 mostrando que los estudiantes de los últimos cursos de Educación Primaria, por sus características psicoevolutivas, pueden alcanzar un mayor grado de comprensión, aunque ya en 3.º y 4.º de Primaria los estudiantes pueden desarrollar sus capacidades de generalización.

Por otra parte, en A5617 destaca el uso de GA en la cuestión d), probablemente debido a que los estudiantes no han alcanzado el nivel de comprensión y abstracción necesario para expresar su generalización por medio de expresiones verbales ni numéricas y recurren a expresar su generalización mediante un sistema aritmético no algebraico y, por tanto, de menor calidad. Esta diferencia existente entre A5617 y A5619 puede deberse a los diferentes entornos de resolución empleados, ya que A5617 resolvió los ppg usando papel y bolígrafo y A5619 los resolvió utilizando GeoPattern.

Otro aspecto interesante es la presencia de GS que destaca principalmente en A5617, mientras que, en A3419, aparece ligeramente en la cuestión d) y, en A5619, casi no se encuentra presente. Es probable que, en esta ocasión, el entorno de resolución (papel y bolígrafo o GeoPattern) también haya influido en el tipo de generalización empleada. De este modo, los estudiantes que resolvieron los ppg con papel y bolígrafo (A5617) decidieron expresar su generalización mediante GA o GS, mientras que aquellos que los resolvieron con GeoPattern (A3419 o A5619) optaron en su mayoría emplear GC. Esto nos muestra como GeoPattern permite avanzar al alumnado de un modo más uniforme en su aprendizaje. En cambio, el uso de papel y bolígrafo posibilita avanzar más allá a un grupo reducido de estudiantes, mientras que la mayoría aún no han alcanzado los conocimientos necesarios para obtener una generalización de tipo algebraico (GF, GC o GS).

Perfiles de Inversión

La Tabla 5.48 presenta las cantidades (absolutas y porcentuales) de estudiantes que utilizaron cada perfil de inversión y la Figura 5.49 presenta de gráficamente las frecuencias de dichos perfiles en cada curso.

Tabla 5.48. Perfiles de Inversión en aaccmm para Cumpleaños 2A (A3419 y A5619) y Familia A (A5617).

Perfil	A3419		A5617		A5619	
	Total	%	Total	%	Total	%
I1	1	9,1	0	0,0	0	0,0
I2	1	9,1	2	25,0	1	10,0
I3	7	63,6	3	37,5	6	60,0

Perfil	A3419		A5617		A5619	
	Total	%	Total	%	Total	%
I4	0	0,0	2	25,0	0	0,0
I5	0	0,0	0	0,0	0	0,0
I6	0	0,0	0	0,0	0	0,0
Sin perfil	2	18,2	1	12,5	3	30,0
Total	11	100,0	8	100,0	10	100,0

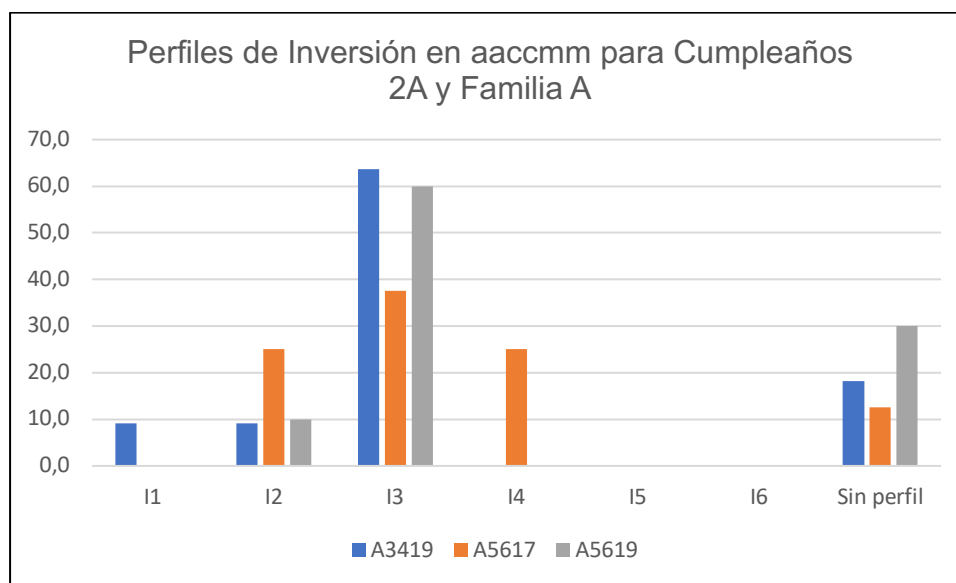


Figura 5.49. Frecuencia (%) de los perfiles de Inversión en aaccmm para Cumpleaños 2A (A3419 y A5619) y Familia A (A5617).

Podemos observar que, en A3419 y A5619, destaca el perfil I3, referido al uso de inversiones aritméticas, mientras que, en A5617, además de este, también destacan los perfiles I2 e I4, que hacen referencia al uso de estrategias de operaciones directas y al uso de inversiones algebraicas.

También se observa que los datos de A3419 y A5619 son muy similares, pues ambos presentan alrededor de un 60% de estudiantes en I3 a pesar de la diferencia de cursos. Sin embargo, aunque A5617 también muestra una preferencia por el uso de inversiones aritméticas, sus respuestas tienen una distribución bastante equilibrada entre I2, I3 e I4, muy diferente de la anterior.

De este modo, podemos concluir que los estudiantes con aaccmm muestran una clara predisposición al uso de inversiones aritméticas (I3). Además, aquellos

estudiantes que emplearon papel y bolígrafo en la resolución de ppg optan también por estrategias de mayor y menor calidad en estas cuestiones, como el uso de inversiones algebraicas y operaciones directas, respectivamente.

Uso de GeoPattern y de papel y bolígrafo

Dentro de este análisis de perfiles de inversión, creemos importante ampliar la información de estos perfiles y centrar el foco en el uso de la app GeoPattern en comparación con el uso de papel y bolígrafo para la resolución de ppg. Para ello, nos hemos centrado en las estrategias empleadas en la cuestión de relación inversa por los estudiantes de A3419 y A5619, que resolvieron los problemas con GeoPattern, y A5617, que los resolvieron con papel y bolígrafo. Para realizar esta parte del análisis, centraremos el foco en la frecuencia (%) de estrategias empleadas por los estudiantes, descartando las respuestas en blanco. La Tabla 5.47 (presentada en una página anterior) indica la cantidad de respuestas de cada curso para las distintas cuestiones de los ppg incluidos en esta comparación y la Figura 5.50 presenta la evolución de las estrategias para la cuestión de relación inversa en ambos entornos de resolución de ppg.

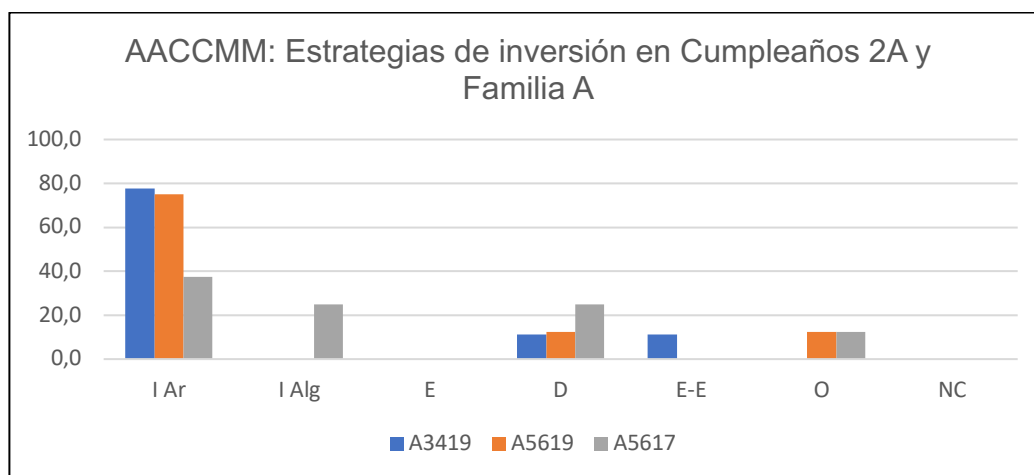


Figura 5.50. Frecuencia (%) de las estrategias de resolución en aaccmm.

Podemos observar cómo GeoPattern fomenta el uso de inversiones aritméticas, mientras que el uso de papel y bolígrafo ofrece un espacio de trabajo más amplio en el que poder desarrollar otras estrategias como la inversión algebraica y el uso de las operaciones directas.

COMPARACIÓN 3: Jardín D

Hemos comparado las respuestas al problema Jardín D, resuelto por los estudiantes en 3.º y 4.º (A3419) y 5.º y 6.º (A5619). Para ello, analizaremos por separado los perfiles de aplicación e inversión obtenidos.

Perfiles de Aplicación

La Tabla 5.49 presenta las cantidades (absolutas y porcentuales) de estudiantes que utilizaron cada perfil de aplicación y la Figura 5.51 presenta de manera gráfica las frecuencias de estos perfiles en cada curso.

Tabla 5.49. Perfiles de Aplicación en aaccmm para Jardín D (A3419 y A5619).

Perfil		A3419		A5619	
		Total	%	Total	%
A1	A1.1	-	-	-	-
	A1.2	-	-	-	-
	A1.3	-	-	-	-
	A1.4	3	27,3	8	80,0
	Total	3	27,3	8	80,0
A2	A2.1	-	-	-	-
	A2.2	-	-	-	-
	A2.3	-	-	-	-
	Total	0	0,0	0	0,0
A3	A3.1	-	-	-	-
	A3.2	-	-	-	-
	Total	0	0,0	0	0,0
A4		0	0,0	0	0,0
A5		0	0,0	0	0,0
A6		0	0,0	0	0,0
Sin perfil		8	72,7	2	20,0
Total		11	100,0	10	100,0

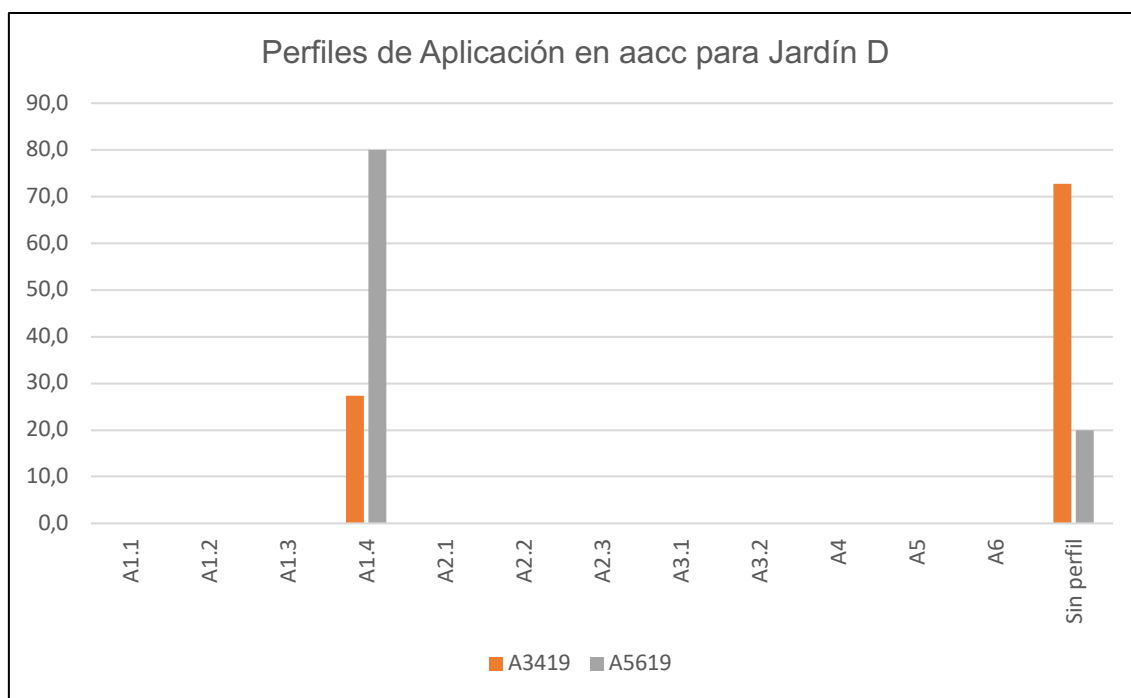


Figura 5.51. Frecuencia (%) de los perfiles de Aplicación en en aaccmm para Jardín D (A3419 y A5619).

Podemos observar que el único subperfil presente en ambos grupos es el A1.4, que hace referencia al uso de una estrategia constante de tipo funcional. También observamos que, en A3419, el subperfil A1.4 únicamente supuso un 27,3% de los estudiantes frente a un 80% en A5619. No obstante, también es importante señalar que, en A3419, a un 72,7% de los estudiantes no le pudimos asignar ningún perfil.

Esto nos permite concluir que todos los estudiantes que llegaron a resolver este ppg emplearon a una estrategia funcional en todas sus respuestas. Este hecho nos muestra un aprendizaje por parte de los estudiantes durante la secuencia de enseñanza empleada, ya que han desarrollado su capacidad de generalización y optado por la estrategia más idónea en su resolución.

En este análisis, creemos importante ampliar la información que nos proporcionan estos perfiles en dos aspectos a destacar: la distribución del uso de subcategorías de las estrategias funcional y construcción y los tipos de generalización empleados por los estudiantes. Para realizar esta parte del análisis, centraremos el foco en la frecuencia (%) de estrategias y tipos de generalizaciones empleadas por los estudiantes, descartando las respuestas en

blanco. La Tabla 5.50 indica la cantidad de respuestas proporcionadas por los estudiantes de cada curso para las distintas cuestiones de los ppg incluidos en esta comparación.

Tabla 5.50. Cantidad de respuestas en aaccmm para Jardín D (A3419 y A5619).

Cuestiones	A3419	A5619
	App	App
a)	4	8
b)	4	8
c)	3	8
d)	4	8
e)	4	8

Subcategorías de las estrategias funcional y construcción

Para el análisis de las subcategorías de las estrategias funcional y construcción en la resolución de ppg, hemos extraído los datos en forma de porcentaje de estudiantes que emplearon cada una de ellas en el problema Jardín D (A3419 y A5617).

Estrategias de tipo funcional

La Figura 5.52 presenta la evolución de las estrategias de tipo funcional para las cuestiones directas en aaccmm. En ella, podemos observar que las únicas estrategias de tipo funcional empleadas fueron aquellas clasificadas como descomposición (FD), primero (FMP) y funcional (F).

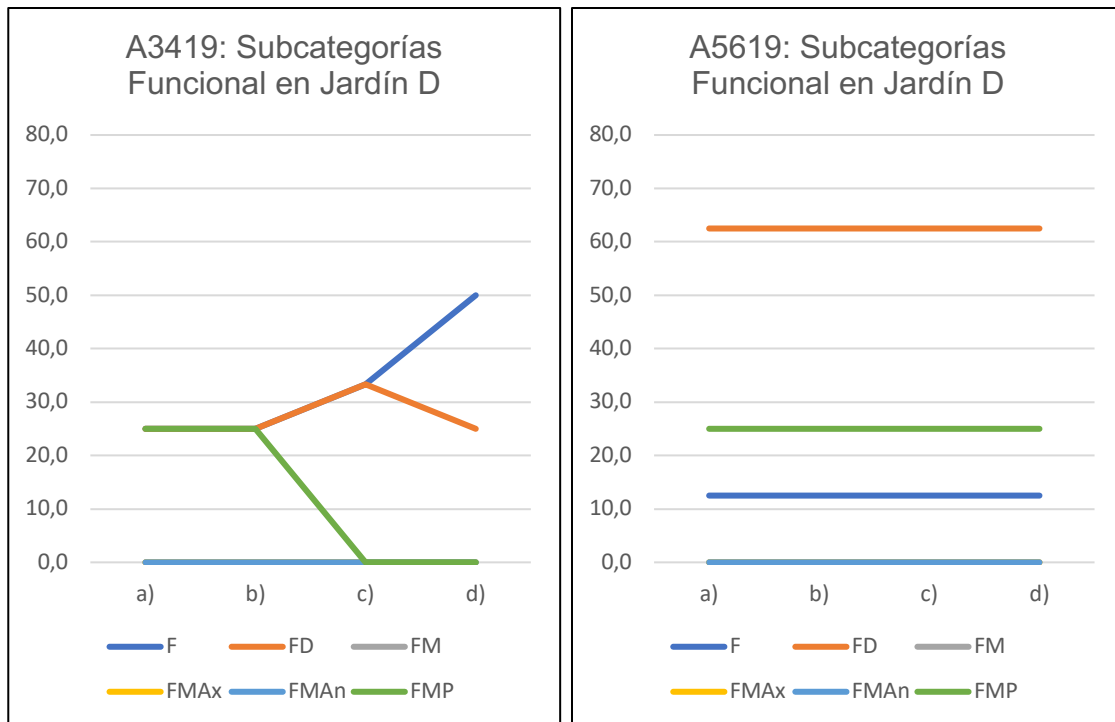


Figura 5.52. Frecuencia (%) de las subcategorías de la estrategia funcional en aaccmm.

Si analizamos la evolución de las estrategias funcionales utilizadas, podemos apreciar cómo los estudiantes de A5619 emplean la misma estrategia en todas sus respuestas a este ppg. En cambio, los estudiantes de A3419 van cambiando de estrategia y evolucionando hacia una estrategia más genérica o global, como F, que acaba siendo la más utilizada. Este dato contrasta con que F es la estrategia menos usada entre los estudiantes de A5619. Este hecho puede deberse a que los estudiantes de A3419 van buscando la estrategia que más se adecue a las necesidades de las cuestiones, pasando así de una estrategia de tipo numérica (FMP) a otra visual (FD) al simplificar la fórmula proporcionada y, posteriormente, a una más global (F) al tener que aplicarla. Por su parte, los estudiantes de A5619 han adquirido la comprensión necesaria del patrón para ser capaces de mantener presente la conexión de las fórmulas con el contexto inicial del problema.

Estrategias de tipo construcción

La Figura 5.53 presenta la evolución de las estrategias de tipo construcción para las cuestiones directas en aaccmm. En ella, podemos observar que los

estudiantes no utilizaron ninguna estrategia de estas categorías. Este hecho se debe a que, gracias a la práctica, los estudiantes han adquirido las competencias necesarias para generalizar y deducir cuándo las estrategias de tipo construcción son erróneas para la resolución de ppg.

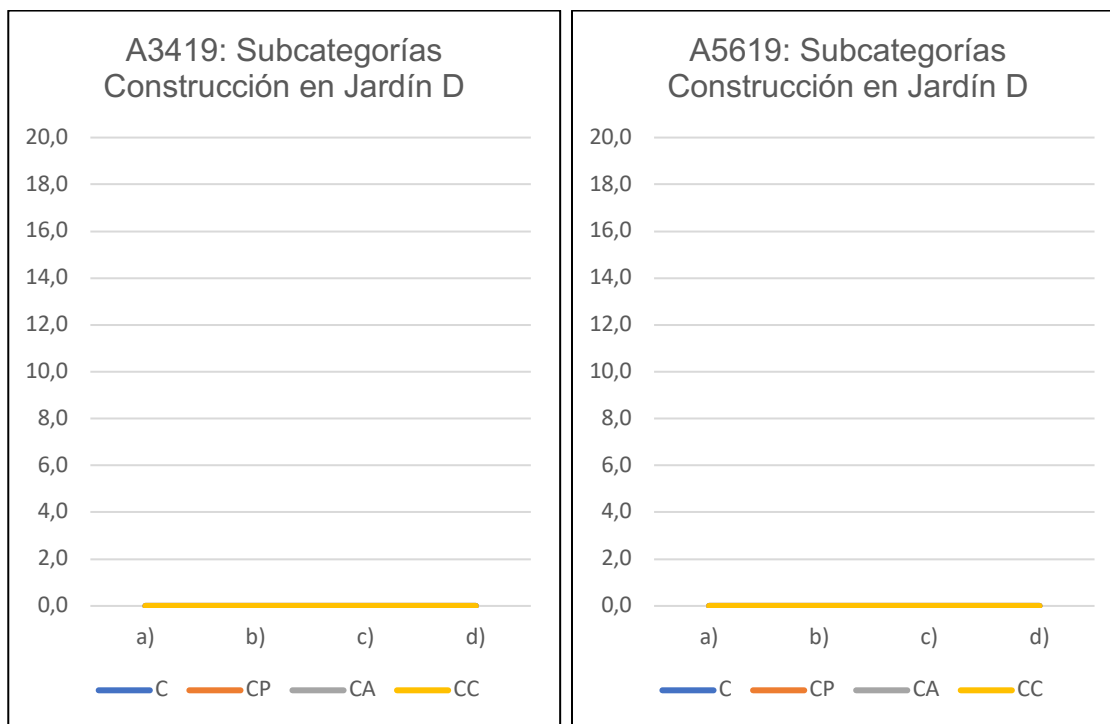


Figura 5.53. Frecuencia (%) de las subcategorías de la estrategia construcción en aaccmm.

Tipos de generalización

Para el análisis de los tipos de generalización empleados por los estudiantes en la resolución de ppg, hemos extraído los datos en forma de porcentaje de la cantidad de estudiantes de los cursos A3419 y A5619 que emplearon cada una de estas generalizaciones en las cuestiones directas del problema Jardín D. La Figura 5.54 presenta la evolución de los distintos tipos de generalización para las cuestiones directas en aaccmm.

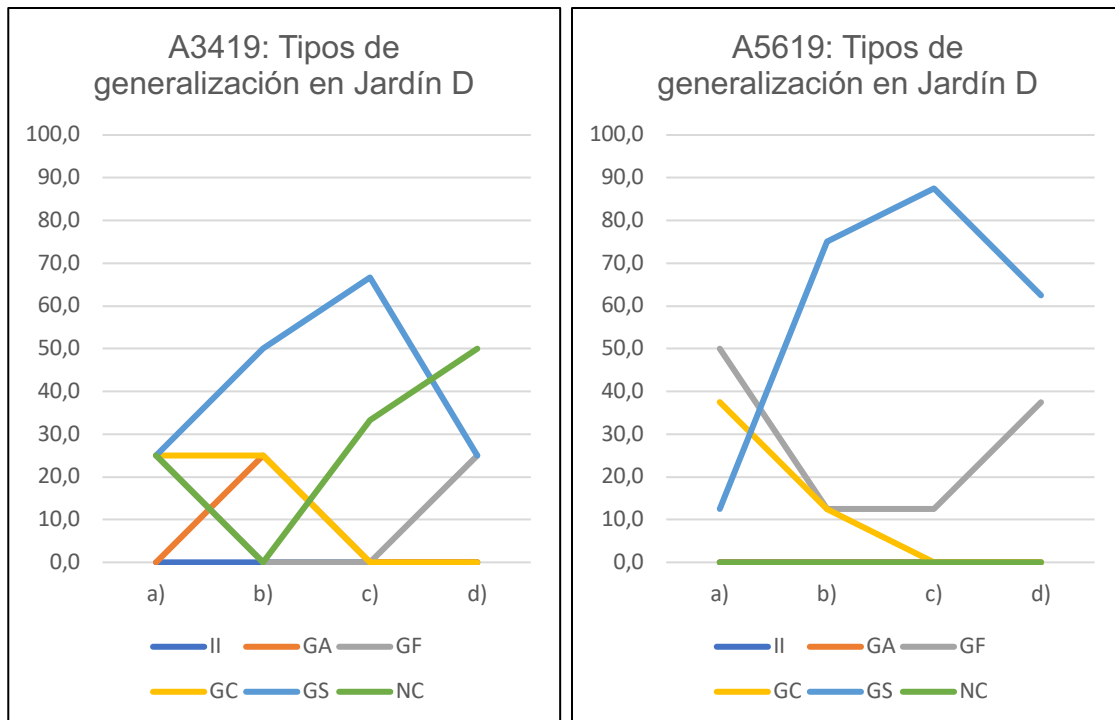


Figura 5.54. Frecuencia (%) de los tipos de generalización en aaccmm.

La figura muestra la presencia en las respuestas de las generalizaciones aritmética (GA), factual (GF), contextual (GC), simbólica (GS) y no clasificables (NC), siendo la inducción ingenua (II) el único tipo de generalización no utilizado por estos estudiantes. Este hecho se debe a que los estudiantes han comprendido que la II es la opción menos idónea para proporcionar una explicación de su generalización.

Si nos centramos en el análisis de las frecuencias de las generalizaciones en cada grupo, podemos observar cómo destaca el uso de GS en ambos. Este tipo de generalización es la más utilizada en casi todas las cuestiones, destacando especialmente en b) y c), pues se trata de las cuestiones dedicadas a la expresión y simplificación de la generalización. Este hecho demuestra el aprendizaje por parte de los estudiantes con aaccmm, pues son capaces de proporcionar expresiones algebraicas alfanuméricas desde cursos como 3.º y 4.º de Educación Primaria.

Si comparamos ambos grupos, podemos observar algunas diferencias propias de la diferencia de edad. Entre ellas destaca el aumento de respuestas NC en A3419 a partir de la cuestión c), de mayor dificultad. No obstante, ambos grupos

hacen un uso similar de GF y GC, teniendo sus puntos máximos de uso en las cuestiones a) y d) de cálculo de términos.

Perfiles de Inversión

La Tabla 5.51 presenta las cantidades (absolutas y porcentuales) de estudiantes que utilizaron cada perfil de inversión y la Figura 5.55 presenta de gráficamente las frecuencias de dichos perfiles en cada curso.

Tabla 5.51. Perfiles de Inversión en en aaccmm para Jardín D (A3419 y A5619).

Perfil	A3419		A5619	
	Total	%	Total	%
I1	0	0,0	0	0,0
I2	0	0,0	0	0,0
I3	1	9,1	2	20,0
I4	1	9,1	3	30,0
I5	1	9,1	0	0,0
I6	0	0,0	0	0,0
Sin perfil	8	72,7	5	50,0
Total	11	100,0	10	100,0

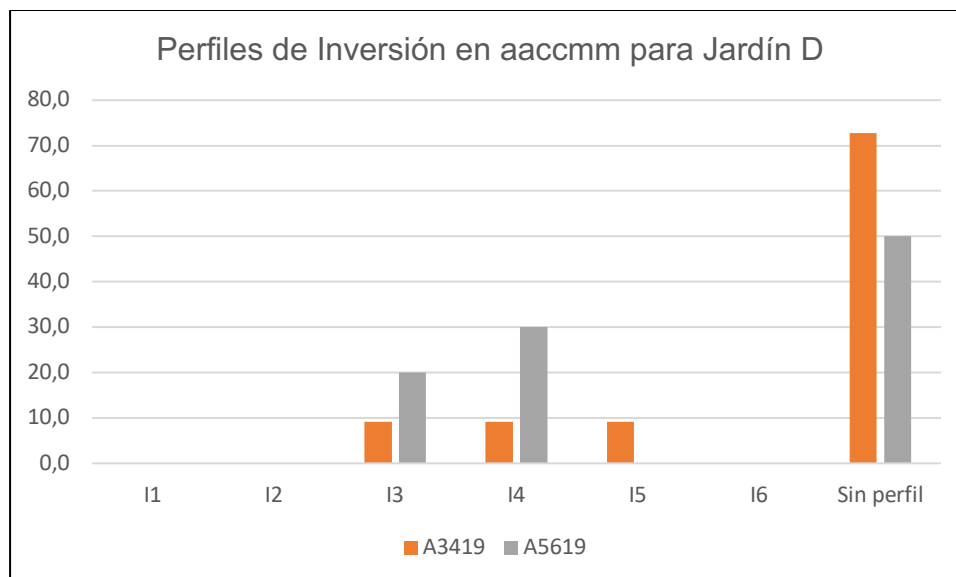


Figura 5.55. Frecuencia (%) de los perfiles de Inversión en aaccmm para Jardín D (A3419 y A5619).

Podemos observar que, en A3419, los tres perfiles significativos con una presencia similar son I3, I4 e I5, que hacen referencia al uso de inversiones aritméticas, inversiones algebraicas y ecuaciones, respectivamente. En cambio, en A5619, únicamente vemos la presencia de los perfiles I3 e I4, siendo este último el mayoritario.

Los datos muestran también que, en A3419, hay una gran cantidad de estudiantes a los que no se le asignó ningún perfil (un 72,8%) y los perfiles asignados tienen la misma presencia entre los estudiantes (un 9,1%). Sin embargo, en A5619, podemos ver una clara predominancia por el uso de inversiones algebraicas (I4), aunque esta tampoco dista mucho de las inversiones aritméticas (I3). También hay un alto porcentaje de estudiantes sin un perfil asignado (un 50%).

De este modo, podemos concluir que, los estudiantes de ambos grupos emplean estrategias adecuadas para la resolución de esta cuestión en ppg. Sin embargo, en función de su nivel de dominio y destreza en la transformación y manipulación de expresiones algebraicas, estos estudiantes optaron por una u otra, siendo el perfil I3 aquel que implica un menor nivel de dominio y destreza y el perfil I5 el que más.

Resultados de los estudios con altas capacidades matemáticas

Tras analizar los perfiles y las respuestas de los estudiantes en estos tres grupos de ppg comparables (Cumpleaños 1A; Cumpleaños 2A y Familia A; Jardín D), presentamos los resultados en relación con los objetivos de aprendizaje (ver Tabla 4.8). Para ello, agruparemos los resultados en tres bloques, correspondientes a diferentes aprendizajes: i) identificar y generalizar relaciones funcionales en problemas de patrones geométricos, ii) expresar generalizaciones e iii) invertir operaciones y resolver ecuaciones.

i) Identificar y generalizar relaciones funcionales en ppg

Una de las capacidades básicas que se deben desarrollar mediante el aprendizaje del álgebra es la identificación y generalización de relaciones funcionales. Teniendo en cuenta el contexto de los ppg y el análisis de las respuestas de los estudiantes que hemos realizado, consideramos que los

perfiles de generalización y aplicación obtenidos, así como la distribución del uso de subcategorías de las estrategias funcional y construcción nos pueden aportar información sobre la capacidad desarrollada por los estudiantes de nuestra muestra en este aspecto.

Al inicio de la secuencia de enseñanza-aprendizaje (ppg tipo A), el uso constante (en las sucesivas preguntas del problema) de una estrategia funcional (G1.4) fue el subperfil más utilizado por los tres grupos de estudiantes. Sin embargo, sus porcentajes de uso y la presencia de otros subperfiles variaron de un grupo a otro. Más de un 60% de los estudiantes en A3419 emplearon el subperfil G1.4, así como un aumento progresivo de calidad pasando de estrategias de tipo construcción a funcional (G4.9), que supuso menos de un 20%. En cambio, los estudiantes de A5619 centraron sus esfuerzos en subperfiles de tipo G1, como el uso constante de la estrategia de construcción (G1.3), con menos de un 20% de uso, o funcional (G1.4), con más de un 80% de uso. Por su parte, los estudiantes de A5617 presentaron una mayor variedad de perfiles. Estos estudiantes, además del subperfil G1.4 (37,5%), también siguieron un subperfil con un aumento progresivo de calidad pasando de una estrategia recursiva a funcional (G4.5), así como subperfiles de tipo G3 y G5 (37,5%) que implicaron una disminución de calidad al expresar la generalización (cuestión d). Estas diferencias en la cantidad de perfiles utilizados por los estudiantes pueden deberse al entorno de resolución empleado, ya que los estudiantes de A3419 y A5619 utilizaron la app GeoPattern, mientras que los estudiantes de A5617 resolvieron los ppg usando papel y bolígrafo. No obstante, estos datos nos muestran la gran capacidad que presentan los estudiantes con aaccmm para identificar y generalizar relaciones funcionales en ppg desde edades tempranas, descartando, en su mayoría, estrategias de menor calidad o eficiencia.

En referencia al uso de GeoPattern es importante señalar que este entorno de resolución fomentó una mayor comprensión del patrón geométrico. Mientras que los estudiantes que utilizaron GeoPattern alcanzaron un alto porcentaje de uso de estrategias de tipo funcional (F), sobre todo, en las cuestiones de generalización lejana (c) y verbalización (d), una parte importante de los estudiantes que emplearon papel y bolígrafo sufrió un retroceso en la cuestión de verbalización (d), siendo incapaces de expresar los procesos matemáticos

funcionales utilizados en la cuestión c) y teniendo que recurrir a la estrategia recursiva (Rs).

Al final de la secuencia de enseñanza-aprendizaje (ppg tipo D), el uso constante de una estrategia funcional (A1.4) fue el único subperfil utilizado por los estudiantes. Sin embargo, los porcentajes de uso difieren bastante de un grupo a otro, con un 27,3% en A3419 frente a un 80% en A5619. Este hecho se debe a que hubo un alto porcentaje de estudiantes a los que no se les pudo asignar un perfil en A3419 (72,7%), probablemente consecuencia de la diferencia de edad entre ambos grupos que propició que, en general, los estudiantes de A5619 fueran capaces de resolver más ppg. No podemos comparar el progreso con A5617 porque estos estudiantes no resolvieron problemas de tipo D durante la sesión. No obstante, podemos apreciar la capacidad de estos estudiantes para desarrollar estrategias eficientes, así como para identificar y generalizar relaciones funcionales en ppg.

En cuanto a las subcategorías de estrategias de tipo funcional, en general, la estrategia más utilizada en los tres grupos de ppg analizados fue la descomposición (FD) para los estudiantes que utilizaron GeoPattern como entorno de resolución (A3419 y A5619). En cambio, las estrategias más destacables en A5617 fueron anterior (FMA) y funcional (F). Además, en los ppg de tipo D también apareció el uso de primero (FMP), aunque en menor proporción que FD. Estos hechos evidencian que el uso de GeoPattern fomenta una mayor comprensión e identificación de las relaciones entre las partes del patrón geométrico a partir del desarrollo de su análisis visual. Por su parte, las estrategias de tipo construcción sufren un abandono gradual, probablemente debido a que el aprendizaje obtenido les permite ser conscientes de que este tipo de estrategias pueden resultar erróneas en algunos ppg y optan por utilizar estrategias más eficientes y con mayor probabilidad de éxito.

ii) Expresar generalizaciones

Ser capaz de expresar las generalizaciones obtenidas es un aspecto fundamental para seguir trabajando y aprendiendo conceptos de índole algebraica. Además, la forma en que los estudiantes expresan sus generalizaciones aporta mucha información sobre los procesos mentales

llevados a cabo. Por este motivo, consideramos que los tipos de generalización desarrollados por los estudiantes nos pueden ayudar en este aspecto.

Al inicio de la secuencia de enseñanza-aprendizaje (ppg tipo A), destaca el uso de la generalización factual (GF) en las cuestiones de cálculo de términos (a, b y c) junto con la generalización contextual (GC) para la cuestión de expresión de la generalización (d). Este cambio de generalización estuvo determinado, en parte, por el enunciado de la cuestión, que, en vez de calcular términos, pedía explicar la generalización obtenida. No obstante, también evidencia aprendizaje por parte de los estudiantes, que se enfocaron en el uso del tipo de generalización más idóneo según la demanda de la cuestión. Además, una pequeña cantidad de estudiantes de los tres grupos también fue capaz de emplear la generalización simbólica (GS), que implica un mayor nivel de abstracción al tener que formular la generalización mediante una expresión algebraica alfanumérica. No obstante, una de las grandes diferencias que encontramos entre los diferentes grupos de estudiantes con aacmm es la presencia de la generalización aritmética (GA). Mientras que los estudiantes de A3419 y A5619 no utilizaron este tipo de generalización, en A5617 fue la generalización principal para las cuestiones a), b) y d), seguida por GF que destacó en c). Es probable que el entorno de resolución empleado haya influido en este aspecto, pues, como ya hemos comentado, GeoPattern parece fomentar una mayor comprensión del patrón, dando lugar, por tanto, a poder alcanzar un mayor nivel de abstracción y poder formular generalizaciones de tipo algebraico como GF y GC.

Al final de la secuencia de enseñanza-aprendizaje (ppg tipo D), destaca el uso de GS en todas las cuestiones de relación directa, pero, en especial, en las cuestiones de expresión de la generalización (b y c). La utilización de GF y GC queda relegada a un segundo plano, siendo los momentos álgidos de uso la cuestión de generalización lejana (a) para GF y GC y la cuestión de aplicación (d) para GF. Las principales diferencias entre A3419 y A5619 se observan en los porcentajes de uso de los tipos de generalización, así como la presencia en A3419 de un alto porcentaje de estudiantes (alrededor del 50%) a los que no se les pudo asignar una generalización en la cuestión de aplicación (d). No podemos comparar el progreso con A5617 porque estos estudiantes no

resolvieron problemas de tipo D durante la sesión. Esta evolución en los tipos de generalización empleados por estos estudiantes con aaccmm demuestra el aprendizaje que lograron los estudiantes a través de la secuencia de enseñanza-aprendizaje, siendo, en su mayoría, capaces de formular expresiones algebraicas de la generalización realizada desde cursos tan tempranos como 3.º y 4.º de Educación Primaria.

iii) Invertir operaciones y resolver ecuaciones

Aprender a invertir operaciones y resolver ecuaciones no es tarea fácil, tal y como han demostrado diversas investigaciones (Banerjee y Subramaniam, 2012; Jupri et al., 2015). No obstante, la destreza manipulativa de las expresiones algebraicas es una capacidad fundamental del álgebra que nos puede aportar información sobre el entendimiento y la comprensión de las expresiones formuladas. Por este motivo, consideramos que los perfiles de inversión obtenidos nos pueden ayudar a vislumbrar la capacidad desarrollada por nuestros estudiantes en este aspecto.

Al inicio de la secuencia de enseñanza-aprendizaje (ppg tipo A), los estudiantes mostraron una clara preferencia por el uso de inversiones aritméticas (I3), sobre todo en A3419 y A5619, con más de un 60% de uso. Por su parte, en A5617 los estudiantes distribuyeron sus esfuerzos de un modo bastante similar entre el uso de estrategias de operaciones directas (I2), las inversiones aritméticas (I3) y algebraicas (I4). Y, aunque algunos estudiantes de A3419 y A5619 también emplearon perfiles I1 (ensayo y error), I2 e I4, estos fueron solo algunos casos aislados. Estas diferencias de perfiles pueden deberse, nuevamente, al entorno de resolución empleado, pues GeoPattern, utilizado por A3419 y A5619, parece fomentar el uso de inversiones aritméticas (I Ar).

Al final de la secuencia de enseñanza-aprendizaje (ppg tipo D), hubo un alto porcentaje de estudiantes a los que no se les pudo asignar un perfil (un 50% en A5619 y un 72,7% en A3419). Entre los estudiantes a los que se les pudo asignar un perfil, destaca el uso de perfiles eficientes como I3 e I4 en A5619 e I3, I4 e I5 (uso de ecuaciones) en A3419. Estos hechos evidencian la capacidad que presentan los estudiantes con aaccmm para la inversión de procesos mentales,

pues optaron por el uso de estrategias que implicaban una inversión, bien aritmética (I3) o algebraica (I4).

5.2.3. Comparativa de los estudios

Para comparar las diferencias existentes entre los diferentes estudios (L456, L56 y aaccmm), hemos realizado el análisis de los perfiles y las respuestas de los estudiantes en cuatro grupos de problemas de patrones comparables: i) Magdalenas A, resuelto por L417, y Cumpleaños 1A, resuelto por L517 y A3419; ii) Cumpleaños 1A, resuelto por L619, L618 y A5619; iii) Caramelos D, resuelto por L619, Bolos D, resuelto por L618, y Jardín D, resuelto por A3419 y A5619; iv) Pared E, resuelto por L619, L618 y A5619. Hemos seleccionado estos grupos de problemas por sus patrones identificados como comparables, sus tipos de cuestiones (A, B, C, D, E) y su trazabilidad en los distintos estudios. Además, estos grupos de problemas nos permiten realizar una comparación del progreso de los estudiantes a través de la secuencia de enseñanza y aprendizaje.

COMPARACIÓN 1: Magdalenas A y Cumpleaños 1A

Hemos comparado las respuestas a los problemas Magdalenas A, resuelto por los estudiantes en 4.º (L417) de L456 y en 5.º (L517) de L56, y Cumpleaños 1A, resuelto por los estudiantes en 3.º y 4.º (A3419) de aaccmm. Para ello, analizaremos por separado los perfiles de generalización e inversión obtenidos.

Perfiles de Generalización

La Tabla 5.52 presenta las cantidades (absolutas y porcentuales) de estudiantes que utilizaron cada perfil de generalización y la Figura 5.56 presenta de manera gráfica las frecuencias de estos perfiles en cada curso.

Tabla 5.52. Perfiles de Generalización en para Magdalenas A (L417 y L517) y Cumpleaños 1A (A3419).

Perfil		L417		L517		A3419	
		Total	%	Total	%	Total	%
G1	G1.1	1	2,3	1	2,9	-	-
	G1.2	-	-	7	20,6	-	-
	G1.3	-	-	-	-	-	-
	G1.4	11	25,6	8	23,5	8	72,7
	Total	12	27,9	16	47,1	8	72,7
G2	G2.1	-	-	-	-	-	-
	G2.2	3	7,0	-	-	-	-
	G2.3	-	-	-	-	-	-
	G2.4	-	-	-	-	-	-
	Total	3	7,0	0	0,0	0	0,0
G3	G3.1	-	-	-	-	-	-
	G3.2	1	2,3	-	-	-	-
	G3.3	2	4,7	2	5,9	-	-
	Total	3	7,0	2	5,9	0	0,0
G4	G4.1	-	-	1	2,9	-	-
	G4.2	1	2,3	-	-	-	-
	G4.3	-	-	-	-	-	-
	G4.4	-	-	-	-	-	-
	G4.5	2	4,7	3	8,8	-	-
	G4.6	-	-	-	-	-	-
	G4.7	-	-	1	2,9	-	-
	G4.8	2	4,7	3	8,8	-	-
	G4.9	-	-	-	-	2	18,2
	Total	5	11,6	8	23,5	2	18,2
G5	G5.1	-	-	1	2,9	-	-
	G5.2	1	2,3	-	-	-	-
	G5.3	1	2,3	-	-	-	-
	G5.4	4	9,3	-	-	-	-
	G5.5	-	-	2	5,9	-	-
	Total	6	14,0	3	8,8	0	0,0
G6		0	0,0	1	2,9	0	0,0
G7		5	11,6	1	2,9	1	9,1
Sin perfil		9	20,9	3	8,8	0	0,0
Total		43	100,0	34	100,0	11	100,0

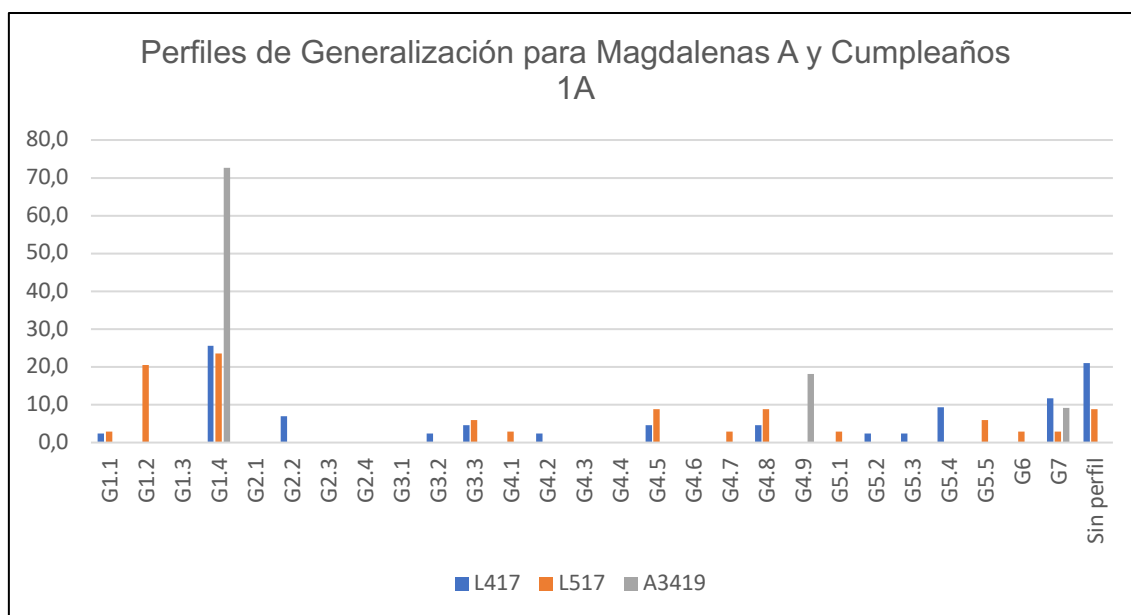


Figura 5.56. Frecuencia (%) de los perfiles de Generalización para Magdalenas A (L417 y L517) y Cumpleaños 1A (A3419).

Podemos observar que los estudios longitudinales (L417 y L517) presentan una mayor diversidad de perfiles y subperfiles que A3419. No obstante, en los tres grupos de estudiantes destaca la presencia de G1.4, que hace referencia al uso constante de la estrategia funcional. Asimismo, también tiene una presencia destacable el subperfil G1.2 en L517 y la cantidad de estudiantes sin perfil en L417.

También observamos cómo los estudiantes con aaccmm (A3419) se corresponden con tres subperfiles concretos, que hacen referencia al uso constante de la estrategia funcional (G1.4), el aumento progresivo de la calidad en las estrategias, pasando de construcción a funcional (G4.9), y un pequeño porcentaje de estudiantes que no fueron capaces de dar una respuesta en la cuestión de verbalización (G7). En cambio, los estudiantes ordinarios (L417 y L517) hicieron uso de todos los perfiles, incluidos aquellos que implican una disminución en la calidad de las estrategias empleadas al expresar la generalización (perfiles G3 y G5). Y, aunque en estos dos grupos de estudiantes el subperfil mayoritario es también el más eficiente (G1.4), se puede observar una gran distancia en su porcentaje de uso respecto a los estudiantes con aaccmm, con una diferencia aproximada del 50%. Estos hechos nos muestran que al inicio de la secuencia de enseñanza-aprendizaje implementada ya

existían diferencias claras entre las capacidades de los estudiantes con aaccmm y los estudiantes ordinarios. Así pues, los estudiantes con aaccmm presentaron una mayor habilidad para el desarrollo de estrategias eficientes, pues la mayoría optaron por un subperfil G1.4, así como más capacidad de generalización, descartando el uso de perfiles y subperfiles G3 y G5.

Si nos centramos en los dos estudios longitudinales, podemos ver que, aunque los datos son parecidos, también presentan algunas diferencias. Ambos grupos de estudiantes ordinarios (L471 y L517) centraron sus esfuerzos en el uso de subperfiles G1, donde realizaron un uso constante de la estrategia. Sin embargo, en L517 (L56) aproximadamente un 20% más de estudiantes optó por este tipo de perfil, en concreto, por el subperfil G1.2, que hace referencia a la estrategia recursiva. Además, mientras que en L417 (L456) los otros perfiles (distintos a G1) tienen una presencia similar entre sus estudiantes, en L517 destaca claramente el perfil G4, con un aumento progresivo de calidad en las estrategias empleadas. Asimismo, L417 tiene mayores porcentaje de estudiantes que no fueron capaces de expresar la generalización (G7) y a los que no fue posible asignar un perfil. Estas diferencias entre ambos estudios al inicio de la secuencia de enseñanza-aprendizaje pueden deberse a la diferencia de edad y conocimientos entre ambos grupos, pues, aunque un año pueda parecer poco, entre estudiantes de esas edades puede significar una gran diferencia.

De este modo, podemos concluir que los estudiantes con aaccmm mostraron ya desde edades tempranas una mayor habilidad para generalizar y desarrollar estrategias eficientes que los estudiantes ordinarios. Además, los resultados de ambos estudios longitudinales también presentan diferencias en la elección de estrategias y la resolución del ppg, siendo los estudiantes de L56 aquellos que mostraron una mayor capacidad de generalización.

En este análisis, creemos importante ampliar la información que nos proporcionan estos perfiles en dos aspectos a destacar: la distribución del uso de subcategorías de las estrategias funcional y construcción y los tipos de generalización empleados por los estudiantes. Para realizar esta parte del análisis, centraremos el foco en la frecuencia (%) de estrategias y tipos de generalizaciones empleadas por los estudiantes, descartando las respuestas en

blanco. La Tabla 5.53 indica la cantidad de respuestas proporcionadas por los estudiantes de cada curso para las distintas cuestiones de los ppg incluidos en esta comparación.

Tabla 5.53. Cantidad de respuestas para Magdalenas A (L417 y L517) y Cumpleaños 1A (A3419).

Cuestiones	L417	L517	A3419
	Papel	Papel	App
a)	42	33	11
b)	42	33	11
c)	42	32	11
d)	42	33	11
e)	41	31	11

Subcategorías de las estrategias funcional y construcción

Para el análisis de las subcategorías de las estrategias funcional y construcción en la resolución de ppg, hemos extraído los datos en forma de porcentaje de estudiantes que emplearon cada una de ellas en el problema Magdalenas A (L417 y L517) y Cumpleaños 1A (A3419).

Estrategias de tipo funcional

La Figura 5.57 presenta la evolución de las estrategias de tipo funcional para las cuestiones directas. En ella, podemos observar que las únicas estrategias de tipo funcional empleadas fueron aquellas clasificadas como descomposición (FD) y funcional (F), entendida esta última como aquellas estrategias de tipo funcional no clasificables dentro de las otras subcategorías.

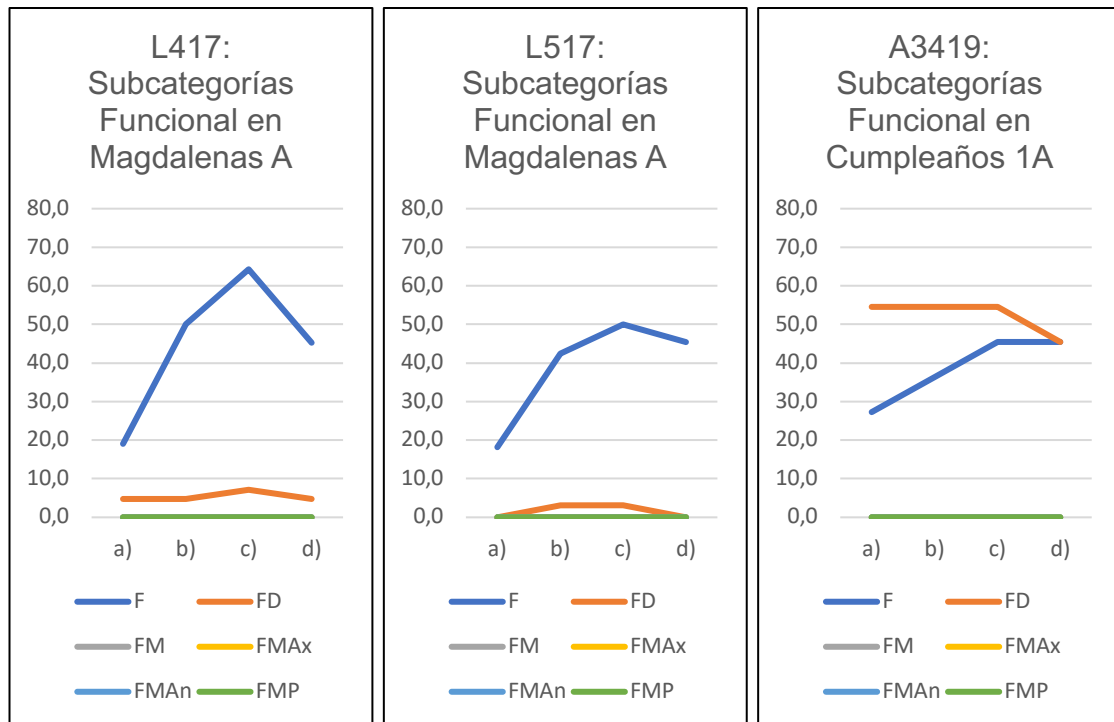


Figura 5.57. Frecuencia (%) de las subcategorías de la estrategia funcional.

Si analizamos la evolución de las estrategias funcionales registradas, podemos apreciar una clara diferencia entre los estudiantes ordinarios (L417 y L517), cuya estrategia mayoritaria fue F, y los estudiantes con aaccmm (A3419), que optaron por una estrategia de tipo más visual como FD. Además, los estudiantes con aaccmm emplearon la estrategia FD de un modo constante y lineal, con una ligera disminución en la cuestión de verbalización de la generalización (d), y aumentaron gradualmente el uso de F a través de las cuestiones. Sin embargo, los estudiantes ordinarios presentan un uso más irregular de las estrategias de tipo funcional, teniendo su momento álgido en la cuestión de generalización lejana (c), seguido de una caída en el uso de F y FD para la expresión de la generalización (d). Estas diferencias evidencian las habilidades de los estudiantes con aaccmm para el desarrollo de estrategias eficientes y la búsqueda de regularidades, siendo capaces de identificar visualmente las relaciones existentes entre las piezas que conforman las figuras del patrón.

Si nos centramos en los dos estudios longitudinales, podemos ver que los resultados son bastante parecidos. No obstante, en L417 los estudiantes parecen mostrar una mayor predisposición por el uso de estrategias funcionales,

tanto F como FD, y en L517 por un uso más regular de F, es decir, sin grandes variaciones en sus estrategias de resolución de las cuestiones b), c) y d).

Estrategias de tipo construcción

La Figura 5.58 presenta la evolución de las estrategias de tipo construcción para las cuestiones directas. En ella, podemos observar que los estudiantes utilizaron las estrategias proporcional (CP) y aditiva (CA).

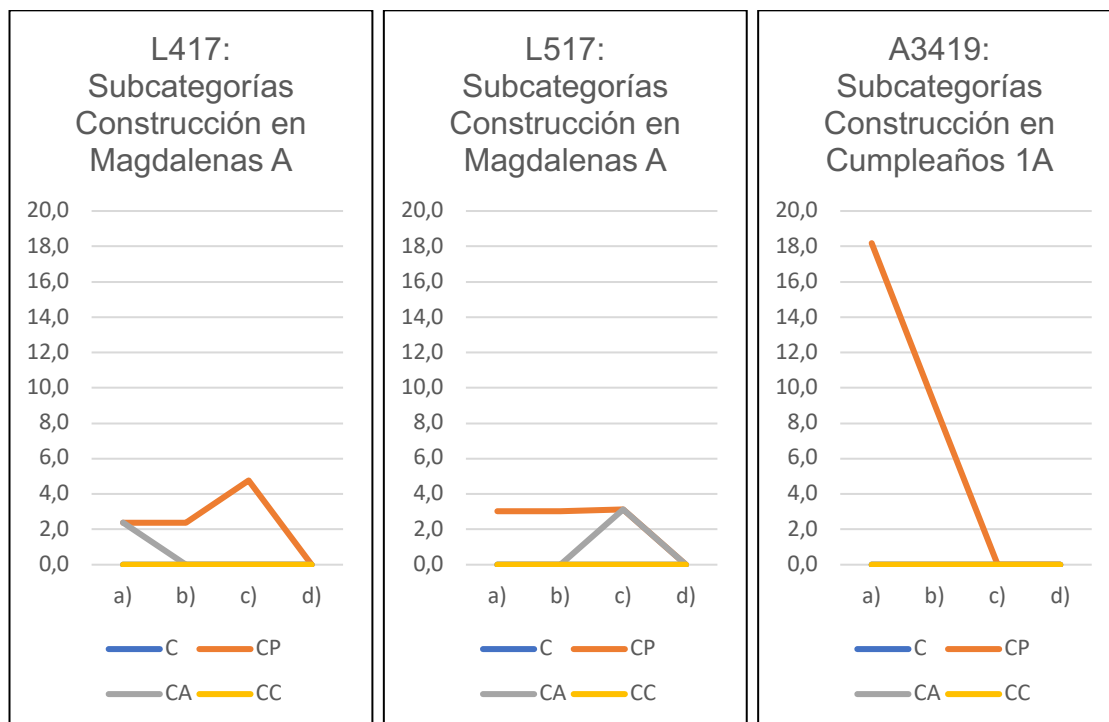


Figura 5.58. Frecuencia (%) de las subcategorías de la estrategia construcción.

Si analizamos la evolución de estas estrategias, podemos apreciar cómo los estudiantes con aaccmm (A3419) únicamente hacen uso de CP, mientras que los estudiantes ordinarios (L417 y L517) también recurren a CA en algunas cuestiones. Además, aunque los estudiantes con aaccmm comenzaron usando este tipo de estrategias en una mayor proporción que los estudiantes ordinarios, abandonaron su uso a partir de la cuestión de generalización lejana (c), pese a tratarse de una estrategia totalmente válida y correcta para la resolución de estos ppg. En cambio, los estudiantes ordinarios siguieron usando CP y únicamente decayó su uso para la expresión de la generalización (d). Esta disminución en el uso de estrategias de construcción en la cuestión de verbalización (d) puede deberse a que los estudiantes ordinarios no eran capaces de explicar los

razonamientos lógico-matemáticos que habían empleado para obtener la generalización. Asimismo, la aplicación de CP pudo suponer un reto para los estudiantes más jóvenes, debido a sus conocimientos sobre proporcionalidad, y, por este motivo, puede que buscaran otras estrategias de resolución que les resultaran más cómodas y eficientes.

Si nos centramos en las diferencias entre los dos estudios longitudinales, podemos ver que los estudiantes de L517 (L56) realizaron un uso constante de CP en las cuestiones de cálculo de términos, mientras que los estudiantes de L417 (L456) mostraron un repunte en su uso para la cuestión de generalización lejana (c). Además, aunque ambos grupos de estudiantes realizaron un uso similar de CA, el momento elegido para su uso difiere de un grupo a otro. En L417 usaron CA únicamente en la cuestión inicial de generalización inmediata (a) y, en cambio, en L517 usaron CA en la cuestión de generalización lejana (c). Estas diferencias entre ambos grupos de estudiantes al inicio de la secuencia de enseñanza-aprendizaje se pueden deber a la búsqueda de distintas estrategias para la resolución de este ppg por parte de los estudiantes, donde las mayores variaciones se pueden observar en la cuestión de generalización lejana (c), que es también aquella que implica una mayor dificultad para los estudiantes.

Tipos de generalización

Para el análisis de los tipos de generalización empleados por los estudiantes en la resolución de ppg, hemos extraído los datos en forma de porcentaje de la cantidad de estudiantes que emplearon cada una de estas generalizaciones en las cuestiones directas de los problemas Magdalenas A (L417 y L517) y Cumpleaños 1A (A3419). La Figura 5.59 presenta la evolución de los distintos tipos de generalización para las cuestiones directas.

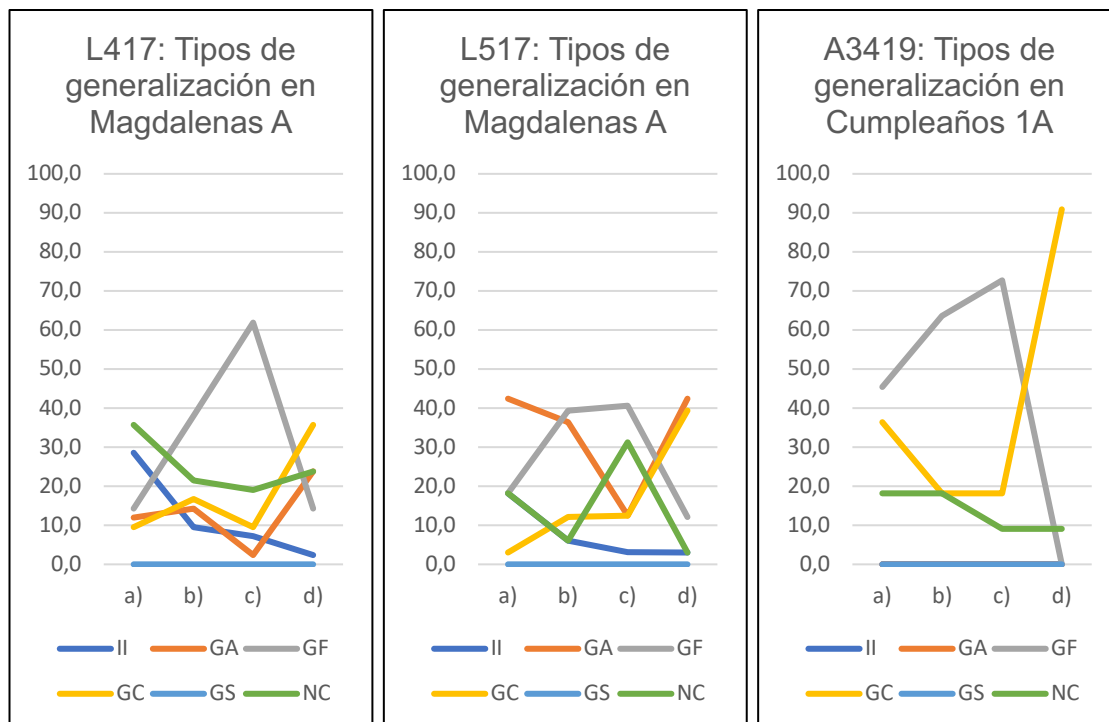


Figura 5.59. Frecuencia (%) de los tipos de generalización.

Podemos observar la presencia en las respuestas proporcionadas de inducción ingenua (II), generalización aritmética (GA), generalización factual (GF), generalización contextual (GC) y generalizaciones no clasificables (NC), siendo la generalización simbólica (GS) el único tipo de generalización no utilizado por estos estudiantes. Este hecho se debe a que la GS se caracteriza por el uso de expresiones algebraicas alfanuméricas y estos problemas fueron resueltos al inicio de las secuencias de enseñanza-aprendizaje.

Si nos centramos en el análisis de las generalizaciones, podemos observar cómo destaca el uso de GF en los tres grupos. No obstante, se pueden observar diferencias claras entre los estudiantes con aaccmm (A3419) y los estudiantes ordinarios (L417 y L517). La principal diferencia que observamos es en la diversidad de tipos de generalización empleados. Mientras que los estudiantes con aaccmm únicamente hicieron un uso de GF y GC, con un pequeño porcentaje de NC, los estudiantes ordinarios hicieron uso de una gran variedad de tipos de generalización. Además, la presencia de GF y GC entre los estudiantes con aaccmm fue bastante mayor que entre los estudiantes ordinarios, siendo GF el tipo de generalización mayoritario para las cuestiones de cálculo de términos (a, b y c) y GC para la expresión de la generalización (d).

Este hecho evidencia la capacidad de los estudiantes con aaccmm de abstracción y adaptación a la demanda de la cuestión, pues escogían el tipo de generalización más idóneo para la tarea solicitada en la cuestión. Y, aunque en los estudiantes ordinarios también se puede observar esta adaptación, se realizó en un porcentaje bastante menor y junto a una gran presencia de GA, que rivaliza con el uso de GC en la cuestión de verbalización (d).

Si nos centramos en los dos estudios longitudinales (L417 y L517), podemos ver que sus resultados son parecidos a nivel general, pero también presentan algunas diferencias. Entre ellas, destaca el uso de GF, empleada por casi un 20% más de estudiantes en L417 en la cuestión de generalización lejana (c) y GA, con una gran presencia en L517. Además, podemos ver que en L517 hay un mayor porcentaje de estudiantes que no han sido capaces de expresar la generalización obtenida en la cuestión de generalización lejana (c). Estos datos nos muestran las capacidades que presentaban estos estudiantes al inicio de la secuencia de enseñanza-aprendizaje, donde los de L417 (L456) presentaban una mayor capacidad de expresión algebraica a través de términos y ejemplos concretos (GF), mientras que los de L517 (L56) se decantaban por el uso de expresiones aritméticas (GA), fijándose en los cambios que se producen entre términos consecutivos.

Perfiles de Inversión

La Tabla 5.54 presenta las cantidades (absolutas y porcentuales) de estudiantes que utilizaron cada perfil de inversión y la Figura 5.60 presenta de gráficamente las frecuencias de dichos perfiles en cada curso.

Tabla 5.54. Perfiles de Inversión en para Magdalenas A (L417 y L517) y Cumpleaños 1A (A3419).

Perfil	L417		L517		A3419	
	Total	%	Total	%	Total	%
I1	-	-	-	-	-	-
I2	22	51,2	10	29,4	-	-
I3	11	25,6	7	20,6	8	72,7
I4	-	-	-	-	1	9,1
I5	-	-	-	-	-	-

Perfil	L417		L517		A3419	
	Total	%	Total	%	Total	%
I6	-	-	-	-	-	-
Sin perfil	10	23,3	17	50,0	2	18,2
Total	43	100,0	34	100,0	11	100,0

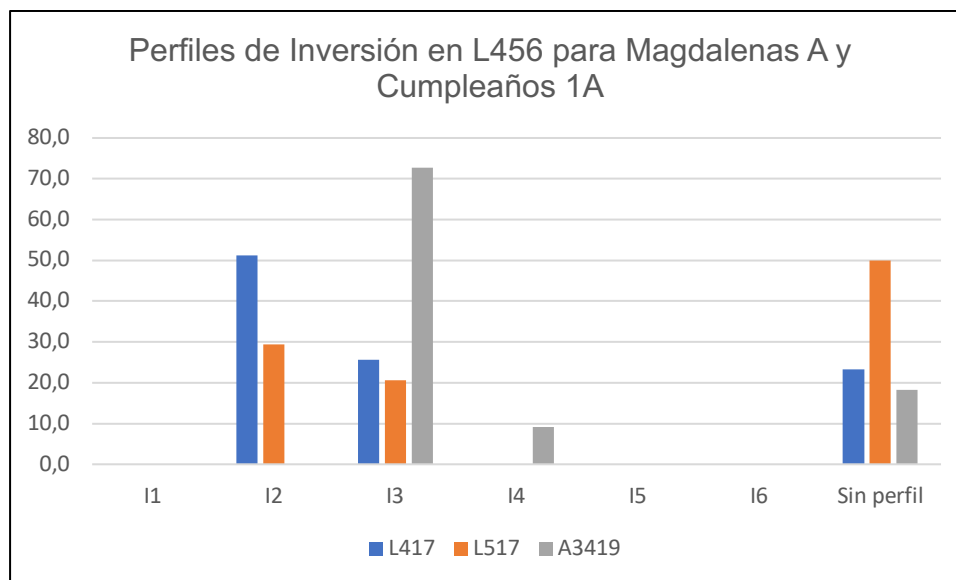


Figura 5.60. Frecuencia (%) de los perfiles de Inversión para Magdalenas A (L417 y L517) y Cumpleaños 1A (A3419).

Podemos observar que el único perfil con presencia en los tres casos es I3, referido al uso de inversiones aritméticas, así como la cantidad de estudiantes sin perfil, que destaca especialmente en L517, llegando a suponer el 50% de los estudiantes.

También observamos cómo los estudiantes con aaccmm (A3419) presentan una mayor predisposición al uso de estrategias eficientes, ya que únicamente emplearon los perfiles I3 e I4, que hacen referencia al empleo de inversiones aritméticas y algebraicas, siendo I3 el perfil mayoritario con un porcentaje superior al 70%. En cambio, los estudiantes ordinarios (L417 y L517) tuvieron un uso mayoritario de estrategias propias de operaciones directas (I2), seguido por I3, aunque en un porcentaje de uso bastante menor. Estas diferencias nos ayudan a evidenciar las distintas capacidades que presentan ambos tipos de estudiantes al inicio de la secuencia de enseñanza-aprendizaje, pues los estudiantes con aaccmm mostraron una mayor habilidad para la inversión de

procesos mentales que los estudiantes ordinarios, incluso con aquellos que son un año mayor que ellos (L517).

Si nos centramos en las diferencias entre los dos estudios longitudinales, podemos ver que L417 (L456) mostró una mayor habilidad para la resolución de este tipo de cuestión que L517 (L56), a pesar de la diferencia de edad. Además, el porcentaje de estudiantes capaz de emplear una inversión aritmética (I3) fue mayor en L417 que en L517.

De este modo, podemos concluir que los estudiantes con aaccmm presentan una mayor habilidad para la inversión de procesos mentales y la resolución de cuestiones de inversión. Además, los resultados de los dos estudios longitudinales son similares, aunque muestran una mayor predisposición para la resolución de este tipo de cuestiones y el empleo de inversiones por parte de los estudiantes de 4º curso de L456.

COMPARACIÓN 2: Cumpleaños 1A

Hemos comparado las respuestas al problema Cumpleaños 1A, resuelto por los estudiantes en 6.º (L619 y L618) de L456 y L56 y en 5.º y 6.º (A5619) de aaccmm. Para ello, analizaremos por separado los perfiles de generalización e inversión obtenidos.

Perfiles de Generalización

La Tabla 5.55 presenta las cantidades (absolutas y porcentuales) de estudiantes que utilizaron cada perfil de generalización y la Figura 5.61 presenta de manera gráfica las frecuencias de estos perfiles en cada curso.

Tabla 5.55. Perfiles de Generalización Cumpleaños 1A (L619, L618 y A5619).

Perfil		L619		L618		A5619	
		Total	%	Total	%	Total	%
G1	G1.1	-	-	-	-	-	-
	G1.2	-	-	-	-	-	-
	G1.3	-	-	-	-	2	20,0
	G1.4	22	50,0	21	61,8	8	80,0
	Total	22	50,0	21	61,8	10	100,0
G2	G2.1	-	-	-	-	-	-
	G2.2	-	-	-	-	-	-
	G2.3	-	-	-	-	-	-
	G2.4	-	-	-	-	-	-
	Total	0	0,0	0	0,0	0	0,0
G3	G3.1	-	-	-	-	-	-
	G3.2	-	-	-	-	-	-
	G3.3	-	-	-	-	-	-
	Total	0	0,0	0	0,0	0	0,0
G4	G4.1	-	-	-	-	-	-
	G4.2	-	-	-	-	-	-
	G4.3	-	-	-	-	-	-
	G4.4	1	2,3	-	-	-	-
	G4.5	4	9,1	1	2,9	-	-
	G4.6	-	-	-	-	-	-
	G4.7	-	-	-	-	-	-
	G4.8	-	-	-	-	-	-
	G4.9	9	20,5	4	11,8	-	-
	Total	14	31,8	5	14,7	0	0,0
G5	G5.1	-	-	-	-	-	-
	G5.2	-	-	-	-	-	-
	G5.3	-	-	-	-	-	-
	G5.4	-	-	-	-	-	-
	G5.5	-	-	-	-	-	-
	Total	0	0,0	0	0,0	0	0,0
G6		1	2,3	2	5,9	0	0,0
G7		2	4,5	3	8,8	0	0,0
Sin perfil		5	11,4	3	8,8	0	0,0
Total		44	100,0	34	100,0	10	100,0

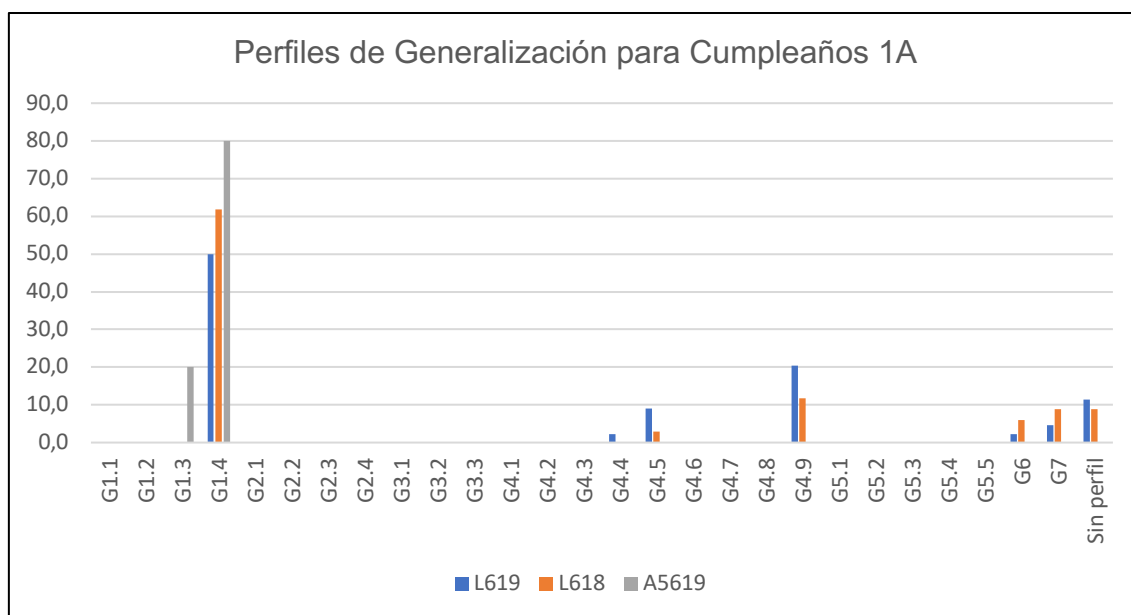


Figura 5.61. Frecuencia (%) de los perfiles de Generalización para Cumpleaños 1A (L619, L618 y A5619).

Podemos observar una clara preferencia por el subperfil G1.4, que hace referencia al uso constante de la estrategia funcional. No obstante, también podemos observar la presencia en menor grado de otros subperfiles, siendo los grupos longitudinales (L619 y L618) los que presentaron una mayor diversidad de subperfiles.

También observamos cómo todos los estudiantes con aaccmm optaron por utilizar una estrategia de un modo constante para la resolución de este ppg, ya sea de tipo construcción (G1.3) o funcional (G1.4). Sin embargo, aunque la mayoría de estudiantes ordinarios también escogieron el uso de una estrategia constante funcional (G1.4), una parte considerable de ellos inició la resolución de este ppg con el uso de estrategias menos eficientes, como la estrategia de recuento, y progresivamente fue aumentando la calidad y eficacia de estas (G4). Asimismo, alrededor de un 20% de los estudiantes ordinarios emplearon estrategias alternativas (G6), no expresaron la generalización (G7) o no se les pudo asignar un perfil. Este hecho se puede deber a que los estudiantes con aaccmm presentan una mayor habilidad para desarrollar estrategias eficientes y generalizar, permitiéndoles escoger, en su mayoría, la estrategia más idónea, en este caso de tipo funcional, y resolver todas las cuestiones aplicando esta estrategia desde el inicio.

Si nos centramos en las diferencias entre los dos estudios longitudinales, podemos ver que L618 (L56) presenta mejores resultados en términos de perfiles de generalización que L619 (L456). Así pues, hay un 10% más de estudiantes que optaron por el subperfil G1.4 y casi la mitad de estudiantes que optaron por subperfiles de tipo G4. Estos datos son bastante sorprendentes, pues cabría esperar que los estudiantes de L456 obtuvieran mejores resultados que los de L56, ya que han estado un año más trabajando con este tipo de problemas y aprendiendo a generalizar.

De este modo, podemos concluir que los estudiantes con aaccmm presentan una mayor capacidad de generalización y elección de estrategias eficientes y de calidad frente a estudiantes ordinarios de su misma edad con experiencia previa en ppg (estudios longitudinales). Además, los resultados de los dos estudios longitudinales son bastante similares, aunque sorprende una ligera mejora en el tipo de perfiles de generalización en el de dos años frente al de tres años de duración.

En este análisis, creemos importante ampliar la información que nos proporcionan estos perfiles en tres aspectos a destacar: las estrategias seleccionadas en el uso de la app GeoPattern en comparación con el uso de papel y bolígrafo, la distribución del uso de subcategorías de las estrategias funcional y construcción y los tipos de generalización empleados por los estudiantes. Para realizar esta parte del análisis, centraremos el foco en la frecuencia (%) de estrategias y tipos de generalizaciones empleadas por los estudiantes, descartando las respuestas en blanco. La Tabla 5.56 indica la cantidad de respuestas proporcionadas por los estudiantes de cada curso para las distintas cuestiones de los ppg incluidos en esta comparación.

Tabla 5.56. Cantidad de respuestas para Cumpleaños 1A (L619, L618 y A5619).

Cuestiones	L619			L618			A5619
	App	Papel	Total	App	Papel	Total	App
a)	21	21	42	20	13	33	10
b)	20	21	41	20	13	33	10
c)	21	20	41	20	13	33	10
d)	20	21	41	19	12	31	10
e)	20	20	40	18	13	31	10

Uso de GeoPattern y de papel y bolígrafo

Para el análisis de las diferencias existentes entre el uso de la app GeoPattern y la resolución de los problemas con papel y bolígrafo, nos hemos centrado en las estrategias empleadas en cuestiones directas por los estudiantes de L619 y L618. En los dos casos, los estudiantes fueron divididos en dos grupos, de modo que aproximadamente la mitad de ellos resolvieron los problemas con GeoPattern y la otra mitad con papel y bolígrafo. Hemos descartado las respuestas de A5619 porque todos los estudiantes resolvieron los problemas con GeoPattern sin una posible comparativa de respuestas. Las Figuras 5.62 y 5.63 presentan la evolución de las estrategias a lo largo de los cursos para las cuestiones directas en ambos entornos de resolución.

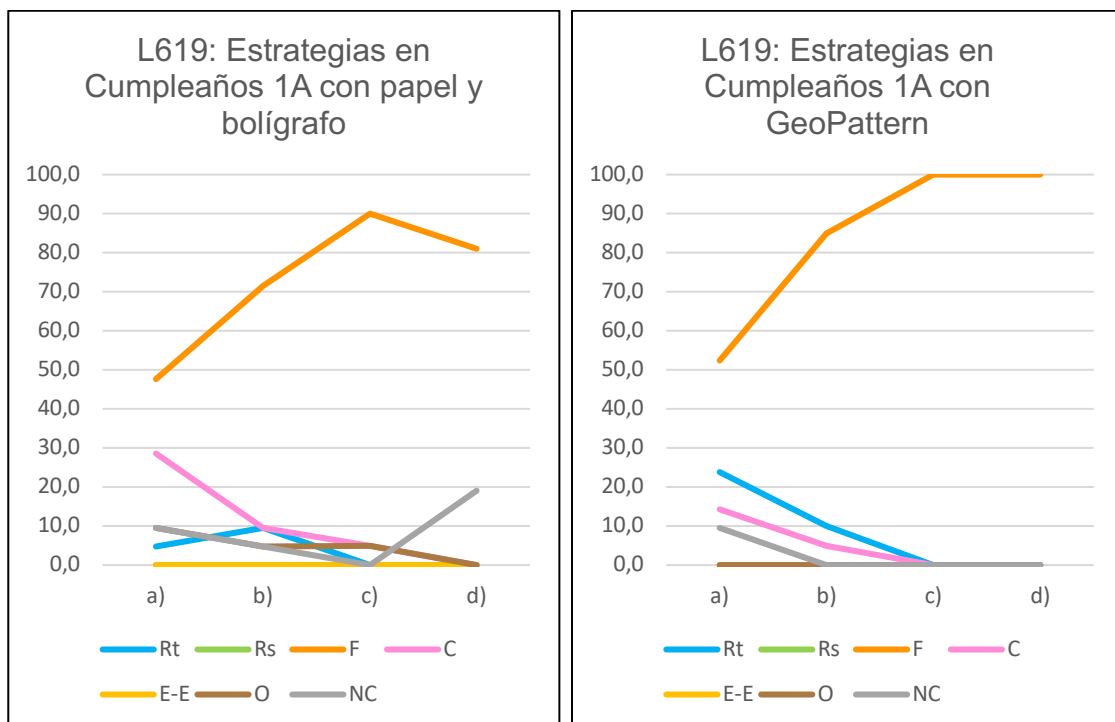


Figura 5.62. Frecuencia (%) de las estrategias de resolución para Cumpleaños 1A (L619).

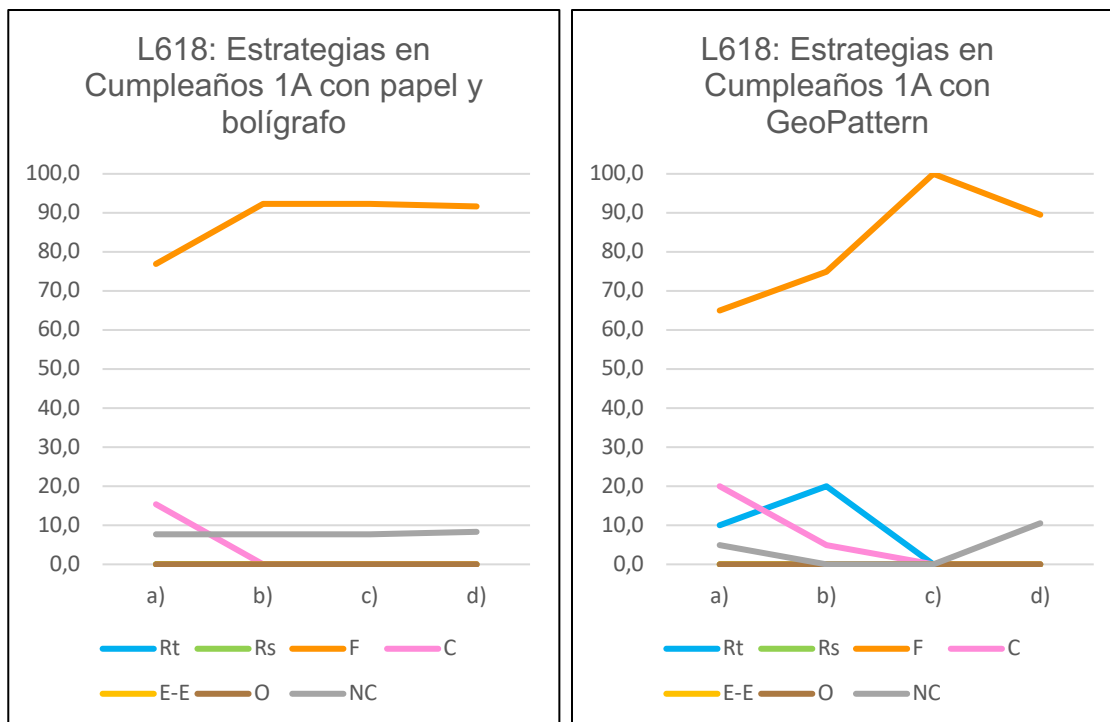


Figura 5.63. Frecuencia (%) de las estrategias de resolución para Cumpleaños 1A (L618).

Podemos observar cómo GeoPattern fomentó el uso de estrategias funcionales (F), pues en ambos grupos las estrategias de este tipo llegaron a ser utilizadas por el 100% de los estudiantes en al menos una cuestión, descartando cualquier otro tipo de estrategia. En cambio, aunque las estrategias funcionales también tuvieron una presencia mayoritaria en los estudiantes que emplearon papel y bolígrafo, también podemos usar otras estrategias en todas las cuestiones directas.

Este hecho puede deberse a las posibilidades de discriminación visual que ofrece GeoPattern para analizar un patrón geométrico, pues tanto L618 como L619 presentan un porcentaje considerable de estudiantes que optaron por una estrategia de recuento (Rt) en la resolución de las cuestiones iniciales (a y b), comparado con los estudiantes que emplearon papel y bolígrafo cuya presencia es menor o incluso nula. La interfaz de GeoPattern incluye la barra del patrón y el lienzo gráfico que permiten utilizar las unidades básicas geométricas del patrón para reproducir sus términos.

En cuanto a las diferencias entre L618 y L619, podemos observar cómo los estudiantes de L618 que usaron papel y bolígrafo han conseguido un mayor aprendizaje de generalización y han optado por un uso constante de estrategias funcionales (F), mientras que L619 ha seguido un aumento progresivo de este tipo de estrategias a través de las cuestiones. En cambio, con GeoPattern los estudiantes de L619 tuvieron una mejor evolución y progresión a través de las cuestiones, con un 100% de estudiantes que expresan su generalización de un modo funcional.

Subcategorías de las estrategias funcional y construcción

Para el análisis de las subcategorías de las estrategias funcional y construcción en la resolución de ppg, hemos extraído los datos en forma de porcentaje de estudiantes que emplearon cada una de ellas en el problema Cumpleaños 1A (L619, L618 y A5619).

Estrategias de tipo funcional

La Figura 5.64 presenta la evolución de las estrategias de tipo funcional para las cuestiones directas. En ella, podemos observar que las únicas estrategias de tipo funcional empleadas fueron aquellas clasificadas como descomposición (FD) y funcional (F), entendida esta última como aquellas estrategias de tipo funcional no clasificables dentro de las otras subcategorías.

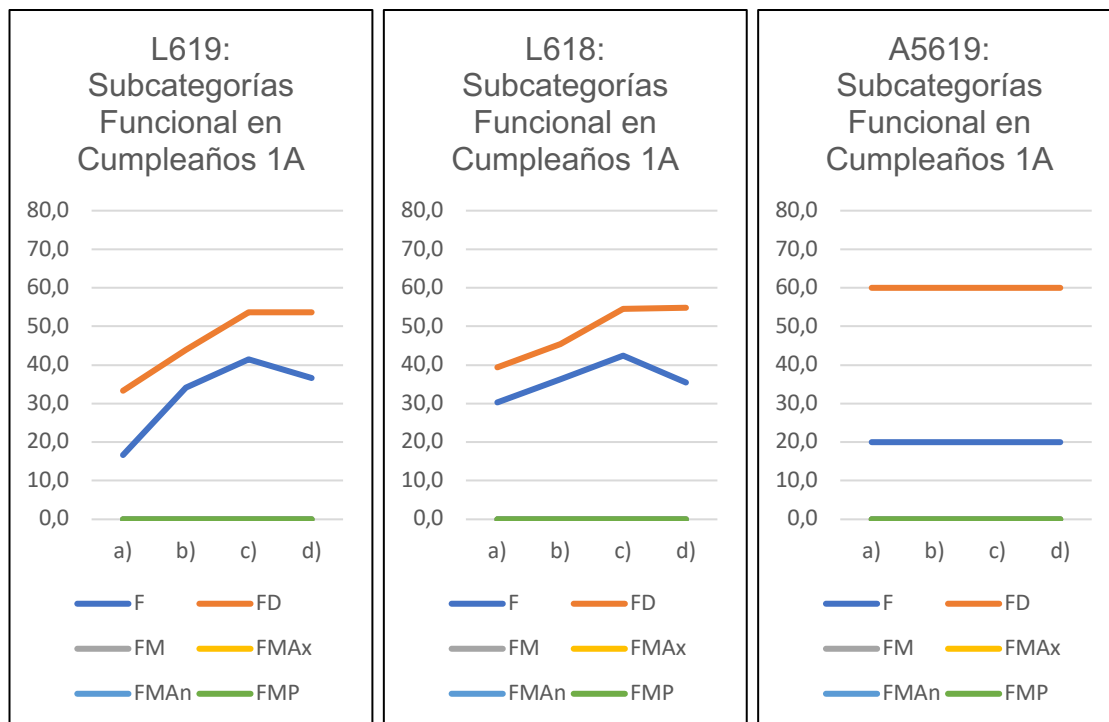


Figura 5.64. Frecuencia (%) de las subcategorías de la estrategia funcional.

Si analizamos la evolución de las estrategias funcionales registradas, podemos apreciar cómo destaca el uso de FD en todos los grupos. No obstante, A5619 es el único grupo que presenta un uso constante de la misma y una mayor distancia entre el porcentaje de estudiantes que usó FD y F. Si comparamos los dos estudios longitudinales, podemos ver que sus resultados son muy similares y casi la única diferencia que podemos encontrar es en el porcentaje inicial de estudiantes que optó por el uso de estrategias funcionales, que es mayor en L618. Así pues, aquí se evidencia que, aunque los datos son muy similares, existe una diferencia de habilidades entre los estudiantes ordinarios y los estudiantes con aaccmm.

Estrategias de tipo construcción

La Figura 5.65 presenta la evolución de las estrategias de tipo construcción para las cuestiones directas. En ella, podemos observar que los estudiantes utilizaron las estrategias proporcional (CP), aditiva (CA) y combinada (CC).

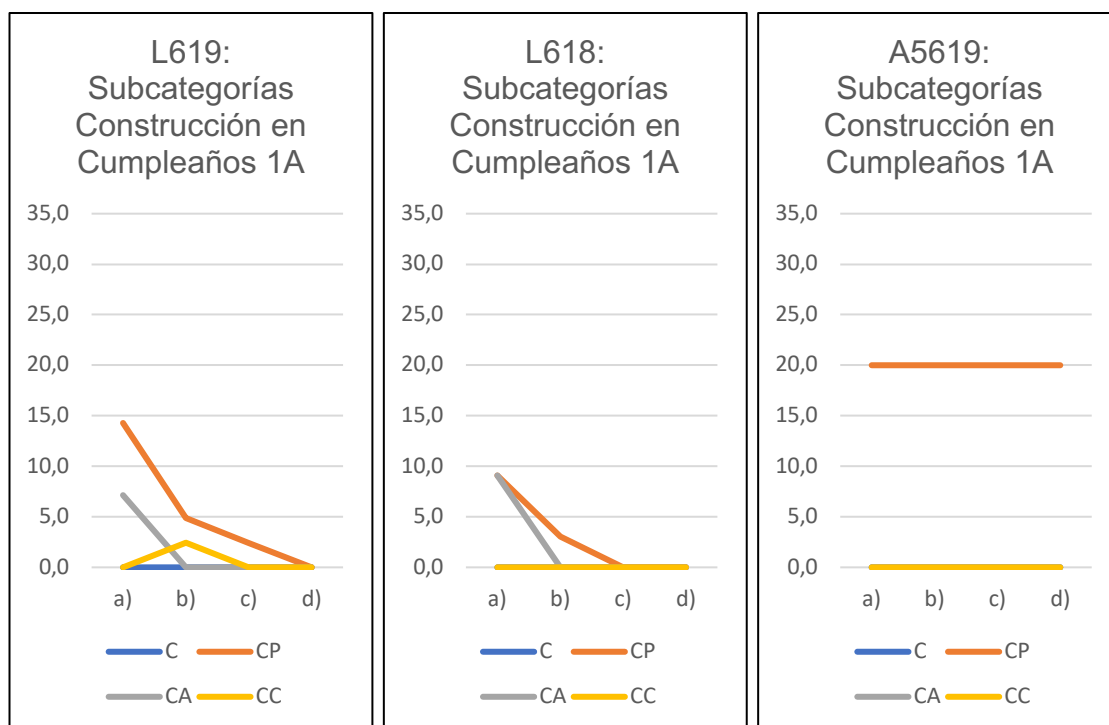


Figura 5.65. Frecuencia (%) de las subcategorías de la estrategia construcción.

Si analizamos la evolución de estas estrategias, podemos apreciar cómo CP es la estrategia más utilizada por los estudiantes, aunque su uso difiere de unos grupos a otros. Por una parte, es la única estrategia utilizada por A5619, cuyos estudiantes hicieron un uso constante de esta estrategia en las cuestiones directas. Por otra parte, una menor cantidad de estudiantes ordinarios (L619 y L618) utilizaron CP y su uso disminuyó a través de las cuestiones hasta desaparecer. Además, también aparece un uso inicial de CA en ambos grupos que desaparece en la cuestión b y el uso de CC en menor medida para la cuestión b en L619.

Estas diferencias de aplicación de las estrategias de tipo construcción pueden deberse a las habilidades que presentan los distintos tipos de estudiantes. En primer lugar, es necesario señalar que, en este ppg, CP es una estrategia totalmente válida y correcta para la resolución de las cuestiones resueltas por los estudiantes. Así pues, los estudiantes con aaccmm, gracias a su habilidad para la generalización, eran conscientes de la corrección de esta estrategia y la aplicaban de un modo sistemático y constante en todas las cuestiones. Sin embargo, los estudiantes ordinarios, aunque iniciaban la resolución del ppg con CP, iban abandonando su uso, al igual que el de CA y CC, en búsqueda de otras

estrategias para intentar resolver cuestiones de generalización más complejas, como la cercana y lejana, así como proporcionar una explicación de sus procedimientos de cálculo.

Tipos de generalización

Para el análisis de los tipos de generalización empleados por los estudiantes en la resolución de ppg, hemos extraído los datos en forma de porcentaje la cantidad de estudiantes que emplearon cada una de estas generalizaciones en las cuestiones directas de los problemas Cumpleaños 1A (L619, L618 y A5619). La Figura 5.66 presenta la evolución de los distintos tipos de generalización para las cuestiones directas.

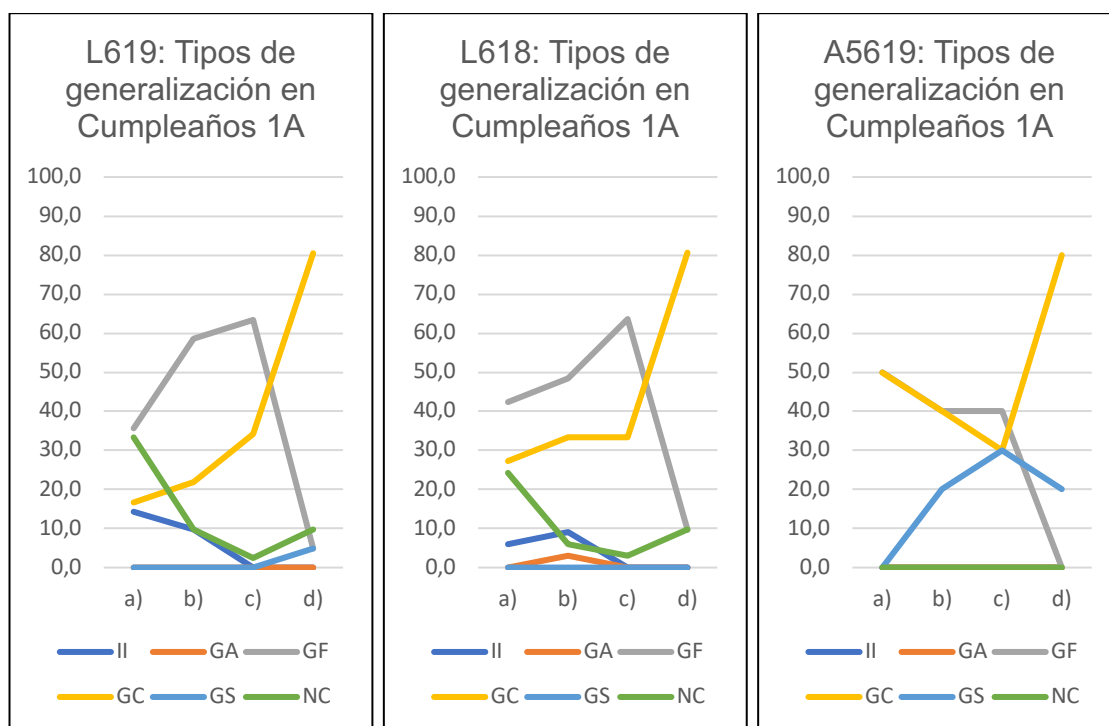


Figura 5.66. Frecuencia (%) de los tipos de generalización.

En las respuestas de los estudiantes podemos observar de todos los tipos de generalización: inducción ingenua (II), generalización aritmética (GA), generalización factual (GF), generalización contextual (GC), generalización simbólica (GS) y generalizaciones no clasificables (NC).

Si nos centramos en el análisis de las generalizaciones, podemos observar cómo destaca el uso de GF y GC en los tres grupos, así como de NC en los estudios

longitudinales (L619 y L618) y GS en A5619. El uso de GF destaca en los tres casos en las cuestiones de cálculo de términos, sobre todo, en las cuestiones de generalización cercana (b) y lejana (c), y, posteriormente, cae prácticamente en desuso en la cuestión de verbalización (d). Esa disminución de la GF viene en parte determinada por el enunciado de la cuestión, que pide explicar el proceso, pero también la consideramos como una señal de aprendizaje por parte de los estudiantes, ya que pasan de usar esta generalización a la GC, la cual implica un mayor nivel de abstracción.

En este aspecto, una de las grandes diferencias que encontramos entre los estudiantes ordinarios (L619 y L618) y los estudiantes con aaccmm (A5619) es la trayectoria de uso de GC. Mientras los estudiantes ordinarios realizan un aumento progresivo del uso de GC, que es más frecuente en la expresión verbal de la generalización (d), los estudiantes con aaccmm mostraron además otro momento clave en el uso de GC: la cuestión de generalización inmediata (a). Este hecho nos muestra que, al iniciar la resolución del ppg, aproximadamente la mitad de los estudiantes de A5619 ya habían sido capaces de obtener una generalización del patrón geométrico y, además, realizar el proceso de abstracción necesario para poder expresar verbalmente los procesos matemáticos realizados.

En cuanto al uso de otros tipos de generalización, podemos ver cómo los estudiantes ordinarios, al inicio de la resolución de este ppg, siguieron empleando generalizaciones que implicaban procesos mentales más elementales, como II o GA, y hubo un porcentaje considerable de estudiantes a los que no ha sido posible asignar un tipo de generalización (NC). En cambio, los estudiantes con aaccmm se decantaron por el uso de generalizaciones que implican procesos mentales más elevados y un mayor nivel de abstracción, como GS. Así pues, en A5619 podemos observar un aumento progresivo de GS a través de las cuestiones de cálculo de términos, llegando a ser utilizada por aproximadamente un 30% de los estudiantes. Este hecho puede deberse, en gran parte, al planteamiento del enunciado de esta cuestión, aunque en la cuestión de expresión verbal de la generalización disminuye su uso. Una vez más, se evidencia una clara diferencia entre las habilidades de generalización y abstracción que presentan estos dos grupos de estudiantes.

Perfiles de Inversión

La Tabla 5.57 presenta las cantidades (absolutas y porcentuales) de estudiantes que utilizaron cada perfil de inversión y la Figura 5.67 presenta de gráficamente las frecuencias de dichos perfiles en cada curso.

Tabla 5.57. Perfiles de Inversión en para Cumpleaños 1A (L619, L618 y A5619).

Perfil	L619		L618		A5619	
	Total	%	Total	%	Total	%
I1	-	-	1	2,9	-	-
I2	11	25,0	8	23,5	-	-
I3	25	56,8	20	58,8	9	90,0
I4	-	-	1	2,9	1	10,0
I5	-	-	-	-	-	-
I6	-	-	-	-	-	-
Sin perfil	8	18,2	4	11,8	-	-
Total	44	100,0	34	100,0	10	100,0

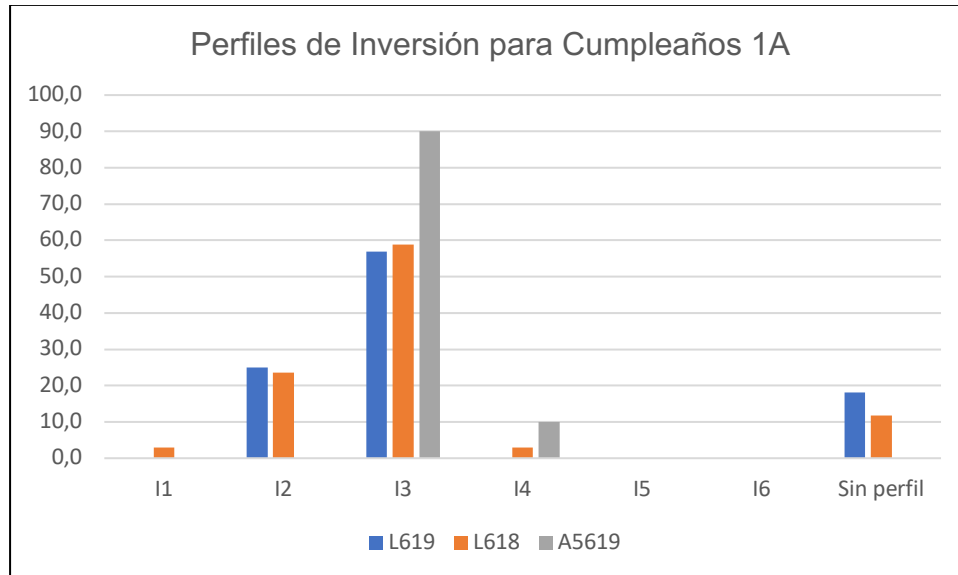


Figura 5.67. Frecuencia (%) de los perfiles de Inversión para Cumpleaños 1A (L619, L618 y A5619).

Podemos observar que el único perfil con presencia en los tres grupos es I3, que consiste en la aplicación de una inversión aritmética. También destaca el uso del perfil I2 para los grupos ordinarios (L619 y L618) y el perfil I4 para A5619, que hacen referencia al uso de estrategias de operaciones directas y la aplicación de inversiones algebraicas, respectivamente.

También observamos cómo todos los estudiantes con aaccmm (A5619) optaron por el uso de inversiones, en su mayoría aritméticas (I3) y alguna algebraica (I4), en la resolución de la cuestión de inversión (e). Sin embargo, los estudiantes ordinarios (L619 y L618) dividieron sus esfuerzos entre el uso de estrategias de operaciones directas (I2) y la aplicación de inversiones aritméticas (I3), siendo I3 el perfil mayoritario también en este caso. Además, hubo un porcentaje considerable de estudiantes (entre un 10% y un 20% aproximadamente) a los que no se les pudo asignar un perfil. Este hecho evidencia otra de las características propias de los estudiantes con aaccmm: su habilidad para invertir procesos mentales, pues todos sus estudiantes optaron por esta estrategia de resolución.

Si nos centramos en las diferencias entre los dos estudios longitudinales, podemos ver que L618 (L56) presenta una mayor diversidad de perfiles que L619 (L456). Así pues, aunque ambos grupos optaron por el uso de I2 e I3 con porcentajes similares, algunos estudiantes de L618 escogieron emplear estrategias de ensayo y error (I1) y de inversión algebraica (I4). Además, el porcentaje de estudiantes sin perfil de L618 fue menor que el de L619. Estos datos son bastante sorprendentes, pues cabría esperar que los estudiantes de L456 obtuvieran mejores resultados que los de L56 porque han estado un año más trabajando con este tipo de problemas y aprendiendo a invertir procesos.

De este modo, podemos concluir que los estudiantes con aaccmm presentan una mayor capacidad de inversión de procesos mentales frente a los estudiantes ordinarios de su misma edad con experiencia previa en ppg (estudios longitudinales). Además, los resultados de los dos estudios longitudinales son bastante similares, aunque sorprende una ligera mejora en el tipo de perfiles de inversión (como el uso de I4) en L56 frente a L456, de mayor duración.

Uso de GeoPattern y de papel y bolígrafo

Dentro de este análisis de perfiles de inversión, creemos importante ampliar la información de estos perfiles y centrar el foco en el uso de la app GeoPattern en comparación con el uso de papel y bolígrafo para la resolución de ppg. Para ello, nos hemos centrado en las estrategias empleadas en la cuestión de relación inversa por los estudiantes de L618 y L619, descartando las respuestas de A5619, que fueron proporcionadas únicamente con GeoPattern. Para realizar esta parte del análisis, centraremos el foco en la frecuencia (%) de estrategias empleadas por los estudiantes, descartando las respuestas en blanco. La Tabla 5.56 indica la cantidad de respuestas proporcionadas por los estudiantes de cada grupo para las distintas cuestiones de los ppg incluidos en esta comparación. La Figura 5.68 presenta la evolución de las estrategias para la cuestión de relación inversa en ambos entornos de resolución de ppg.

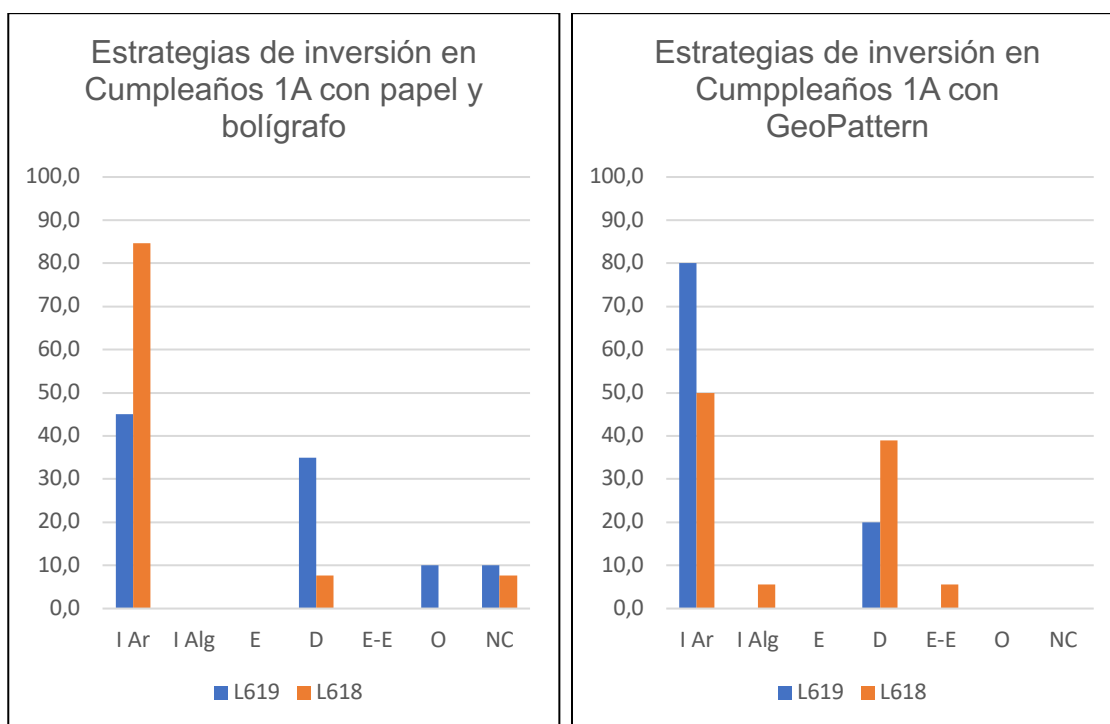


Figura 5.68. Frecuencia (%) de las estrategias de resolución.

Podemos observar cómo el entorno de resolución empleado (papel y bolígrafo o GeoPattern) afecta de un modo distinto a cada grupo. Por una parte, en L619, GeoPattern fomentó el uso de inversiones aritméticas (I Ar) para la resolución de este ppg, mientras que el uso de papel y bolígrafo implica un mayor porcentaje

de estrategias de operaciones directas (D). Por otra parte, en L618, parece ocurrir al revés: GeoPattern fomenta el uso de D, mientras que el uso de papel y bolígrafo implica un mayor porcentaje de I Ar. Sin embargo, el caso de inversión algebraica en L618 que veíamos en el apartado anterior apareció al usar GeoPattern. Estos datos son bastante sorprendentes, ya que cabría esperar unos resultados similares, tal y como hemos ido viendo hasta ahora, donde el entorno de resolución afectara de forma parecida en ambos estudios.

COMPARACIÓN 3: Caramelos D, Bolos D y Jardín D

Hemos comparado las respuestas a los problemas Caramelos D, resuelto por los estudiantes en 6.º (L619) de L456, Bolos D, resuelto por los estudiantes en 6.º (L618) de L56, y Jardín D, resuelto por los estudiantes en 3.º y 4.º (A3419) y 5.º y 6.º (A5619) de aaccmm. Para ello, analizaremos por separado los perfiles de aplicación e inversión obtenidos.

Perfiles de Aplicación

La Tabla 5.58 presenta las cantidades (absolutas y porcentuales) de estudiantes que utilizaron cada perfil de aplicación y la Figura 5.69 presenta de manera gráfica las frecuencias de estos perfiles en cada curso.

Tabla 5.58. Perfiles de Aplicación para Caramelos D (L619), Bolos D (L618) y Jardín D (A3419 y A5619).

Perfil		L619		L618		A3419		A5619	
		Total	%	Total	%	Total	%	Total	%
A1	A1.1	-	-	-	-	-	-	-	-
	A1.2	-	-	-	-	-	-	-	-
	A1.3	-	-	-	-	-	-	-	-
	A1.4	29	65,9	22	64,7	3	27,3	8	80,0
	Total	29	65,9	22	64,7	3	27,3	8	80,0
A2	A2.1	-	-	-	-	-	-	-	-
	A2.2	1	2,3	2	5,9	-	-	-	-
	A2.3	-	-	-	-	-	-	-	-
	Total	1	2,3	2	5,9	0	0,0	0	0,0
A3	A3.1	-	-	-	-	-	-	-	-
	A3.2	-	-	-	-	-	-	-	-
	Total	0	0,0	0	0,0	0	0,0	0	0,0
A4		0	0,0	0	0,0	0	0,0	0	0,0

Perfil	L619		L618		A3419		A5619	
	Total	%	Total	%	Total	%	Total	%
A5	2	4,5	3	8,8	0	0,0	0	0,0
A6	0	0,0	2	5,9	0	0,0	0	0,0
Sin perfil	12	27,3	5	14,7	8	72,7	2	20,0
Total	44	100,0	34	100,0	11	100,0	10	100,0

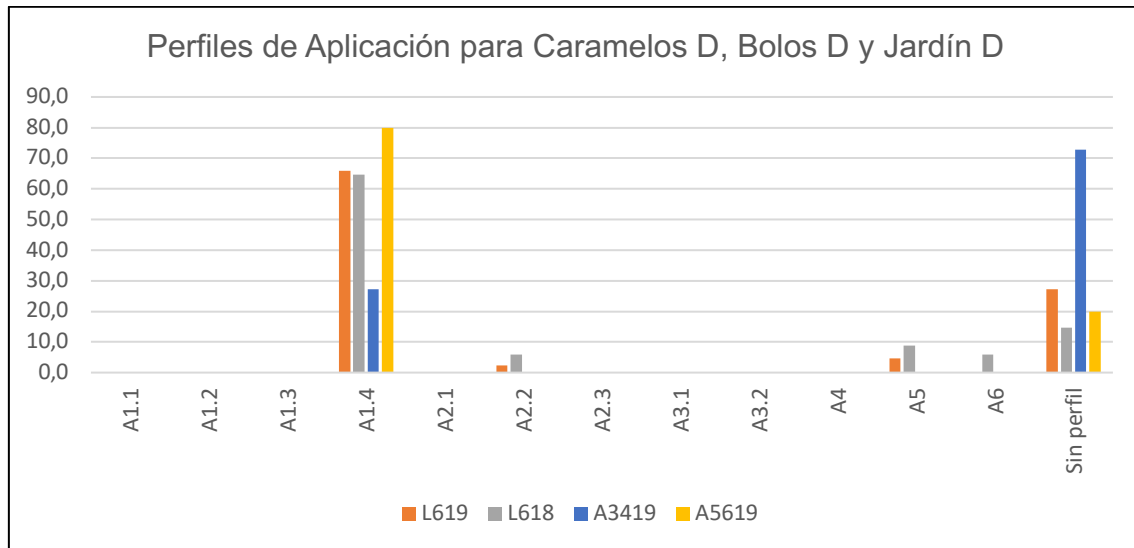


Figura 5.69. Frecuencia (%) de los perfiles de Aplicación para Caramelos D (L619), Bolos D (L618) y Jardín D (A3419 y A5619).

Podemos observar que el principal subperfil en todos los grupos es el A1.4, referido al uso de una estrategia constante de tipo funcional, seguido por la cantidad de estudiantes a los que no se les pudo asignar un perfil, que destaca, sobre todo, en A3419, probablemente por la diferencia de edad con los otros grupos.

También observamos cómo los estudiantes ordinarios (L619 y L618) presentaron una mayor diversidad de perfiles que los estudiantes con aaccmm (A3419 y A5619). Estos últimos centraron sus esfuerzos únicamente en el uso de una estrategia funcional constante (A1.4), mientras que un pequeño porcentaje de los estudiantes ordinarios optaron por el uso de subperfiles que implican un aumento progresivo de calidad con el uso de la estrategia recursiva (A2.2) y perfiles con alguna respuesta no clasificable (A5 y A6). Esta diferencia en la diversidad de perfiles puede deberse a las distintas capacidades de estos grupos

de estudiantes, pues los estudiantes con aaccmm presentaban una mayor habilidad para generalizar y desarrollar estrategias eficientes. Y, aunque los resultados de los estudiantes ordinarios demuestran que ha habido un aprendizaje gracias a la secuencia seguida, no todos los estudiantes tienen el mismo ritmo de aprendizaje y puede haber alumnos que aún presenten dificultades en el proceso de generalización y expresión de esta generalización.

Si nos centramos en las diferencias entre los dos estudios longitudinales, podemos ver que L618 (L56) presenta un mayor porcentaje de estudiantes que optaron por subperfiles distintos al A1.4. Sin embargo, la cantidad de estudiantes sin perfil es mayor en L619 (L456) que en L618 (L56). Así pues, aunque los resultados de ambos estudios son bastante similares, vemos que en L56 un mayor porcentaje de estudiantes ha sido capaz de dar una respuesta a este ppg, aunque sea con subperfiles más variados que en L456. Este hecho sorprende un poco, pues cabría esperar que aquellos estudiantes que han estado más expuestos a este tipo de problemas (L456) obtuviese un menor porcentaje de estudiantes sin perfil.

De este modo, podemos concluir que los estudiantes con aaccmm presentaron una mayor habilidad para generalizar y desarrollar estrategias eficientes frente a estudiantes ordinarios de su misma edad con experiencia previa en ppg (estudios longitudinales). Además, los resultados de los dos estudios longitudinales son bastante parecidos, aunque sorprende un menor porcentaje de estudiantes sin perfil en el estudio de menor duración (L56).

En este análisis, creemos importante ampliar la información que nos proporcionan estos perfiles en tres aspectos a destacar: las estrategias seleccionadas en el uso de la app GeoPattern en comparación con el uso de papel y bolígrafo, la distribución del uso de subcategorías de las estrategias funcional y construcción y los tipos de generalización empleados por los estudiantes. Para realizar esta parte del análisis, centraremos el foco en la frecuencia (%) de estrategias y tipos de generalizaciones empleadas por los estudiantes, descartando las respuestas en blanco. La Tabla 5.59 indica la cantidad de respuestas proporcionadas por los estudiantes de cada curso para las distintas cuestiones de los ppg incluidos en esta comparación.

Tabla 5.59. Cantidad de respuestas para Caramelos D (L619), Bolos D (L618) y Jardín D (A3419 y A5619).

	L619			L618			A3419	A5619
	App	Papel	Total	App	Papel	Total	App	App
a)	22	18	40	19	11	30	4	8
b)	19	17	36	19	11	30	4	8
c)	20	16	36	20	11	31	3	8
d)	21	15	36	19	11	30	4	8
e)	21	15	36	18	11	29	4	8

Uso de GeoPattern y de papel y bolígrafo

Para el análisis de las diferencias existentes entre el uso de la app GeoPattern y la resolución de los problemas con papel y bolígrafo, nos hemos centrado en las estrategias empleadas en cuestiones directas por los estudiantes de L619 y L618. Hemos descartado las respuestas de A3419 y A5619 porque todos los estudiantes resolvieron los problemas con GeoPattern sin una posible comparativa de respuestas. En ambos casos los estudiantes fueron divididos en dos grupos, de modo que aproximadamente la mitad de ellos resolvieron los problemas con GeoPattern y la otra mitad con papel y bolígrafo. Las Figuras 5.70 y 5.71 presentan la evolución de las estrategias a lo largo de los cursos para las cuestiones directas en ambos entornos de resolución.

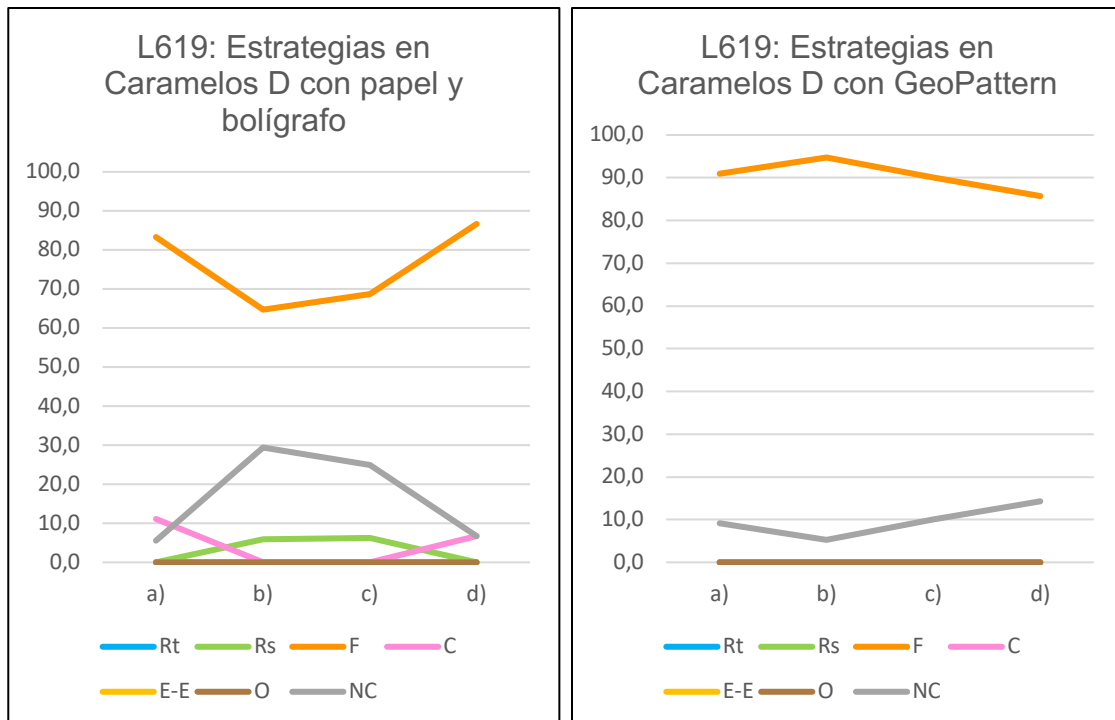


Figura 5.70. Frecuencia (%) de las estrategias de resolución para Caramelos D (L619).

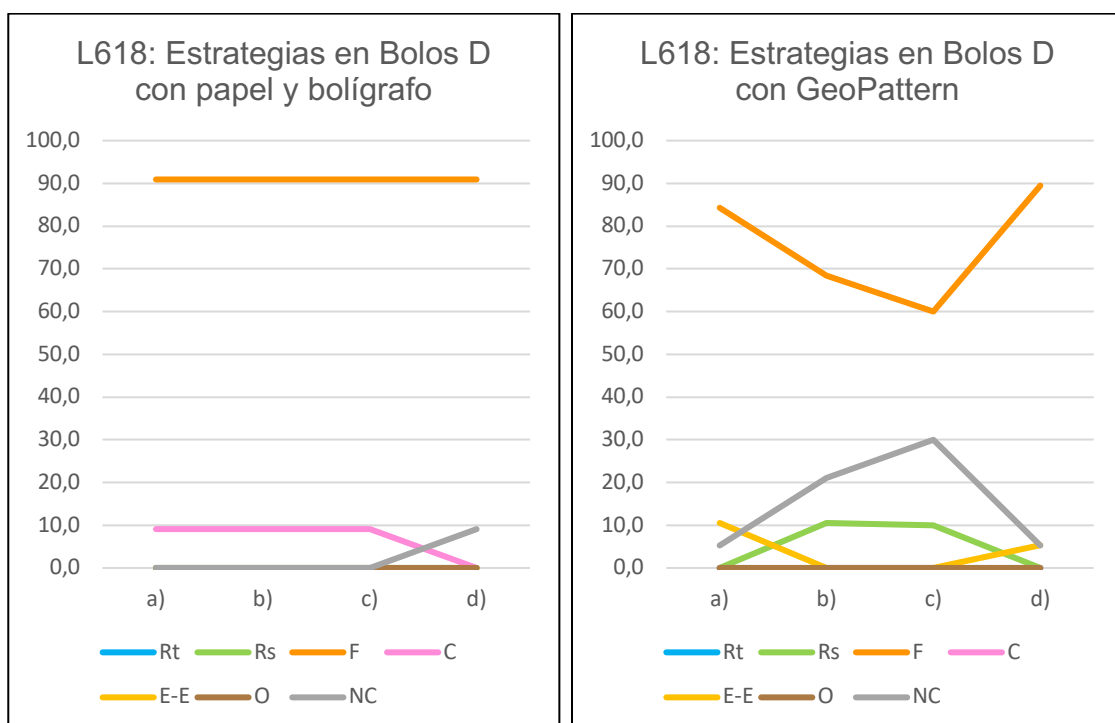


Figura 5.71. Frecuencia (%) de las estrategias de resolución para Bolos D (L618).

Podemos observar cómo el entorno de resolución empleado (papel y bolígrafo o GeoPattern) afectó de un modo distinto a cada grupo. Por una parte, en L619,

GeoPattern fomentó el uso de estrategias funcionales (F) de un modo más constante a través de las cuestiones directas, siendo esta estrategia la única estrategia empleada, además de las respuestas no clasificables (NC). En cambio, el uso de F en papel y bolígrafo tuvo dos momentos álgidos de uso, ambos en cuestiones de cálculo de términos (a y d), y fue combinado con otras estrategias, como recursiva (Rs) y construcción (C), así como con un gran porcentaje de NC, sobre todo en las cuestiones de expresión de la generalización (b y c).

Por otra parte, en L618, ocurre lo contrario, pues el uso de papel y bolígrafo fomentó el uso de la estrategia F de un modo más constante en aproximadamente el 90% de los estudiantes, combinado con C y la aparición de NC, en la cuestión d) para aquellos estudiantes que emplearon C. En cambio, con GeoPattern se observa un uso irregular de F con dos momentos destacables, correspondientes a las cuestiones de cálculo de términos (a y d). Además, aparece una cantidad importante de estudiantes que emplearon NC, sobre todo en las cuestiones de expresión de la generalización (b y c), así como el uso de Rs y E-E (ensayo y error) en menor porcentaje.

Estos datos son bastante sorprendentes, ya que cabría esperar unos resultados similares, donde el entorno de resolución afectara de forma parecida en ambos estudios.

Subcategorías de las estrategias funcional y construcción

Para el análisis de las subcategorías de las estrategias funcional y construcción en la resolución de ppg, hemos extraído los datos en forma de porcentaje de estudiantes que emplearon cada una de ellas en el problema Carmelos D (L619), Bolos D (L618) y Jardín D (A3419 y A5619).

Estrategias de tipo funcional

La Figura 5.72 presenta la evolución de las estrategias de tipo funcional para las cuestiones directas. En ella, podemos observar que las estrategias de tipo funcional empleadas fueron aquellas clasificadas como descomposición (FD), auxiliar (FMAx), primero (FMP) y funcional (F).

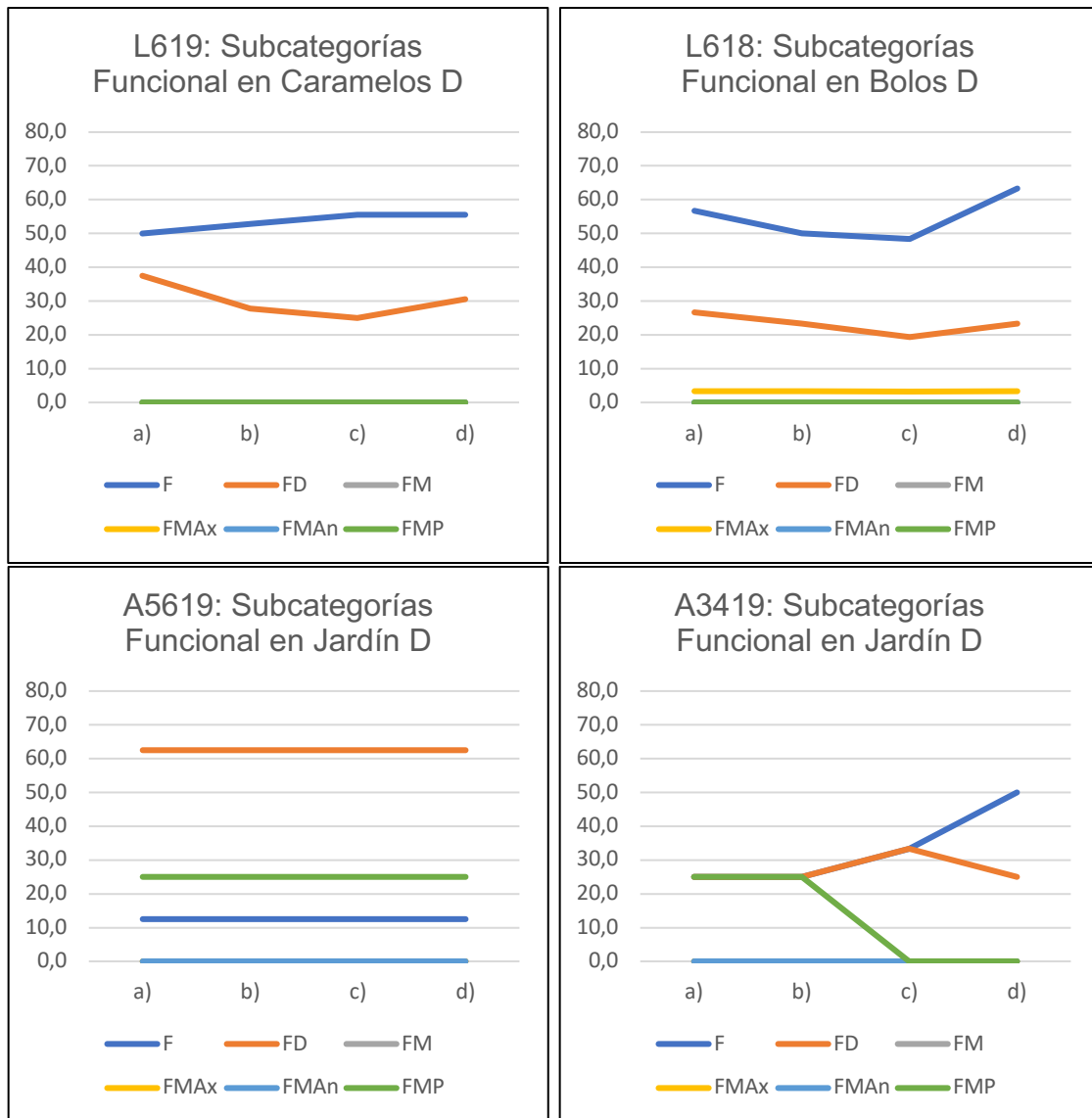


Figura 5.72. Frecuencia (%) de las subcategorías de la estrategia funcional.

Si analizamos la evolución de las estrategias funcionales registradas, podemos apreciar una clara diferencia entre los estudiantes ordinarios (L619 y L618) y los estudiantes con aaccmm (A5619 y A3419). Mientras que los estudiantes ordinarios se centraron principalmente en el uso de F y FD, los estudiantes con aaccmm también hicieron uso de FMP, desarrollando una estrategia funcional numérica a partir del primer término del patrón. Además, la estrategia más utilizada por los estudiantes ordinarios fue F, mientras que en A5619 esta estrategia fue la menos utilizada y en A3419 únicamente destaca F como estrategia mayoritaria en la cuestión de aplicación de la generalización (d). Estas diferencias probablemente se deban a la capacidad de los estudiantes con aaccmm para desarrollar estrategias eficientes y llegar a formular

generalizaciones a través de la identificación de las relaciones entre las piezas que conforman las figuras del patrón. De este modo, gracias a la secuencia de enseñanza-aprendizaje, esta descomposición del patrón en partes y la búsqueda de regularidades la mayoría de estudiantes fueron capaces de emplear FD, seguida por FMP, donde se buscan estas regularidades a nivel numérico.

Si nos centramos en las diferencias entre los dos estudios longitudinales, podemos ver que L618 (L56) y L619 (L456) presentan datos bastante similares, aunque también se observan algunas ligeras diferencias. Por una parte, aunque en ambos estudios F fue la estrategia más utilizada seguida por FD, en L619 hay un mayor porcentaje de estudiantes que hizo uso de ellas. Por otra parte, este uso de las estrategias parece ser más constante a través de las cuestiones en L619, mientras que en L618 podemos ver dos momentos clave en el uso de estas estrategias, coincidiendo con las cuestiones de cálculo de términos (a y d). Estos hechos pueden deberse a la duración de los estudios, dando lugar a que los estudiantes de L456 estén más preparados para la aplicación de este tipo de estrategias gracias a su exposición a este contexto de aprendizaje.

Estrategias de tipo construcción

La Figura 5.73 presenta la evolución de las estrategias de tipo construcción para las cuestiones directas. En ella, podemos observar que los estudiantes utilizaron únicamente la estrategia proporcional (CP), siendo las estrategias aditiva (CA), combinada (CC) y construcción (C).

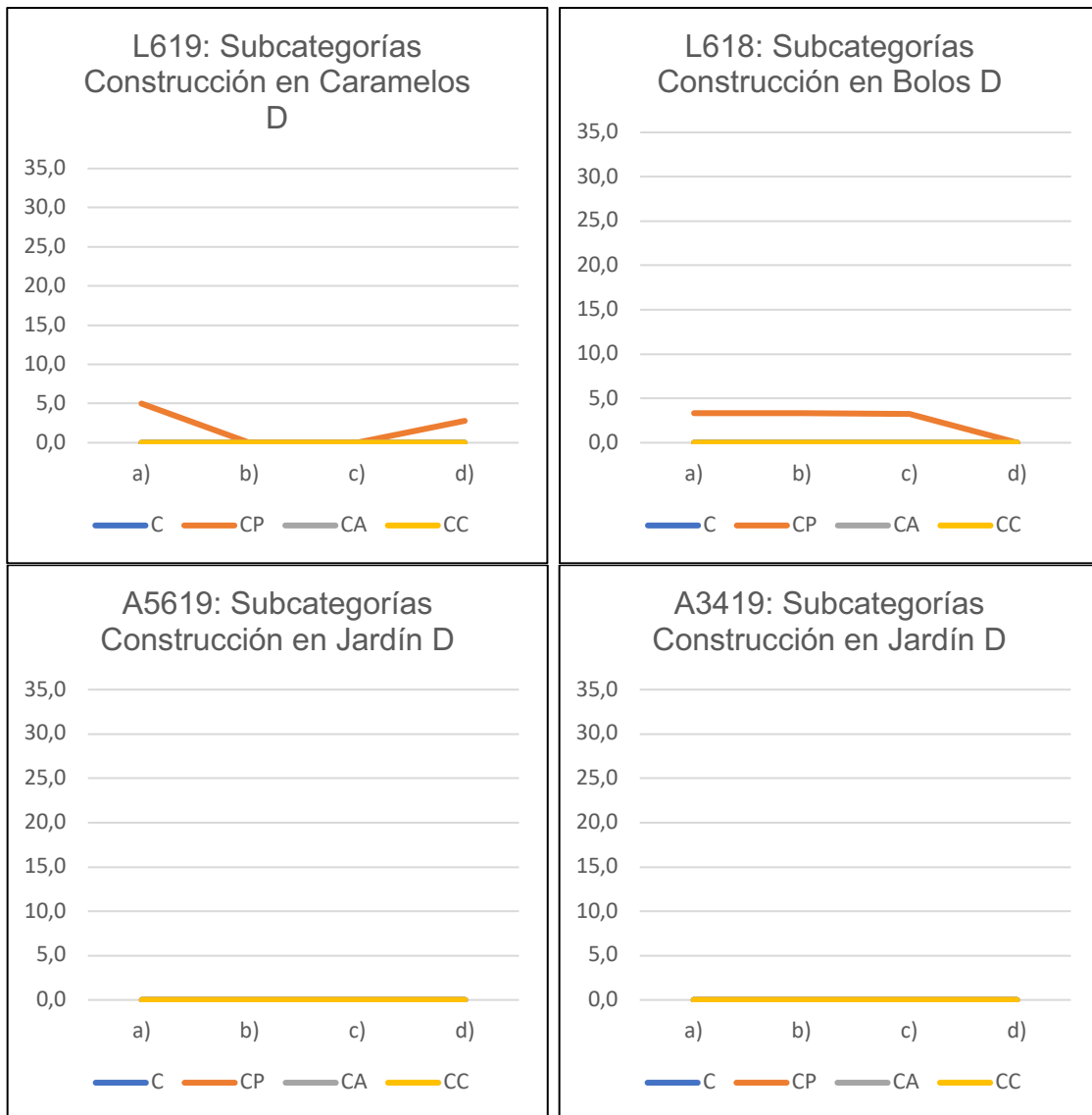


Figura 5.73. Frecuencia (%) de las subcategorías de la estrategia construcción.

Si analizamos la evolución de estas estrategias, podemos apreciar una clara diferencia entre los estudiantes ordinarios (L619 y L618) y los estudiantes con aaccmm (A3419 y A5619): la presencia de las estrategias de tipo construcción entre sus respuestas. Mientras que los estudiantes ordinarios emplearon la estrategia proporcional en un porcentaje bastante bajo (alrededor del 5%), los estudiantes con aaccmm no utilizaron ninguna estrategia de estas categorías. Este hecho se debe a que, gracias a la práctica y a su capacidad de generalización, los estudiantes con aaccmm han adquirido las competencias necesarias para deducir cuándo este tipo de estrategias son erróneas para la resolución de ppg. En este caso concreto, debido a la configuración del patrón, el uso de CP conduce siempre a una generalización y resolución errónea.

En cuanto a las diferencias entre L618 y L619, podemos observar cómo los estudiantes de L618 hacen un uso constante de CP y, posteriormente, cae en desuso en la cuestión de aplicación (d). En cambio, en L619, únicamente aparece esta estrategia en la resolución de las cuestiones de cálculo de términos (a y d). Estas diferencias pueden deberse a que los estudiantes de L619 que han empleado esta estrategia no son capaces de expresarla y, como consecuencia, deciden expresar la generalización empleando otra estrategia distinta en las cuestiones b y c.

Tipos de generalización

Para el análisis de los tipos de generalización empleados por los estudiantes en la resolución de ppg, hemos extraído los datos en forma de porcentaje de la cantidad de estudiantes que emplearon cada una de estas generalizaciones en las cuestiones directas de los problemas Carmelos D (L619), Bolos D (L618) y Jardín D (A3419 y A5619). La Figura 5.74 presenta la evolución de los distintos tipos de generalización para las cuestiones directas.

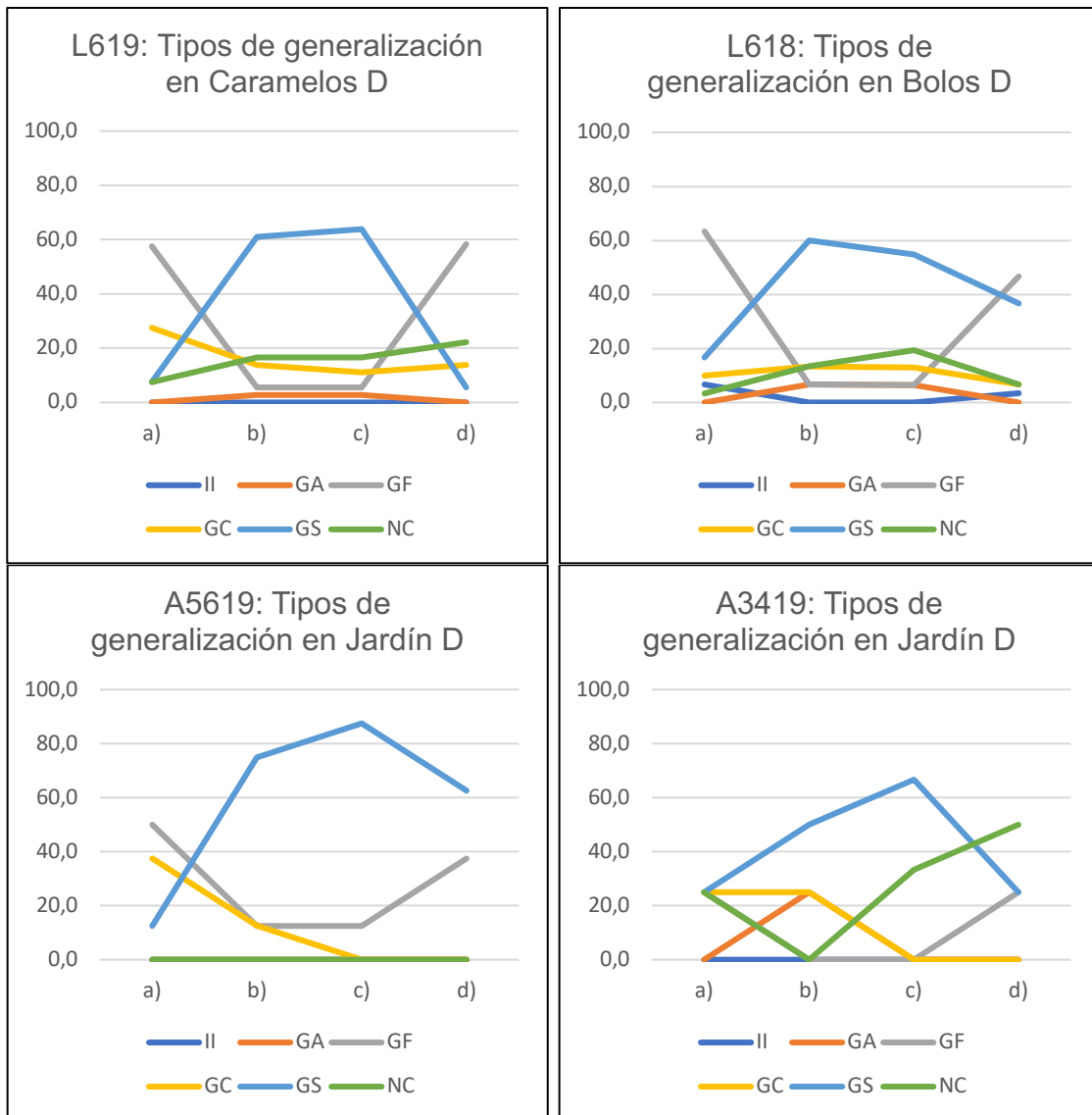


Figura 5.74. Frecuencia (%) de los tipos de generalización.

Podemos observar la presencia en las respuestas proporcionadas de todos los tipos de generalización: inducción ingenua (II), generalización aritmética (GA), generalización factual (GF), generalización contextual (GC), generalización simbólica (GS) y generalizaciones no clasificables (NC).

Si nos centramos en el análisis de las generalizaciones, podemos observar cómo destaca el uso de GF y GS en todos los grupos. Sin embargo, también podemos ver algunas diferencias claras entre los estudiantes ordinarios (L619 y L618) y los estudiantes con aaccmm (A5619 y A3419). Mientras los estudiantes ordinarios hicieron uso de todos los tipos de generalización, los estudiantes con aaccmm se centraron principalmente en los tres tipos que implican un mayor

nivel de abstracción: GF, GC y GS. Para ello, también es necesario tener en cuenta que la presencia de GA y NC en A3419 seguramente se debió a la diferencia de edad entre este grupo y los demás. Además, destaca la desaparición de GC para las cuestiones de simplificación (c) y aplicación (d) de la generalización en los estudiantes con aaccmm, mientras en L619 y L618 su presencia se mantiene bastante estable. Este hecho junto con el aumento de los casos de GF en la cuestión de aplicación (d), propició una fuerte caída en el uso de GS, mientras que en A5619 y A3419 esta disminución de GS fue menor. Estas diferencias entre ambos tipos de estudiantes pueden deberse a las habilidades para generalizar y realizar procesos de abstracción que presentaron los estudiantes con aaccmm, que les permitieron, en más de un 60% para estudiantes de la misma edad (A5619), formular una generalización y expresarla en el mayor grado de abstracción posible, es decir mediante una expresión algebraica alfanumérica (GS).

Si nos centramos en las diferencias entre los dos estudios longitudinales, podemos ver que L618 (L56) presenta un menor uso de tipos de generalización diferentes a GF y GS que L619 (L456). Además, aunque el porcentaje de estudiantes que emplean estos dos tipos de generalización es bastante parecido, en L618 hay una menor cantidad de estudiantes que abandonan GS para volver a expresar su generalización mediante GF. Sin embargo, hay más estudiantes en L619 que han sido capaces de proporcionar una respuesta simbólica (GS) a la cuestión de simplificación de la generalización (c) que en L618. Estos hechos pueden deberse a que, aunque los estudiantes de L619 son capaces de emplear GS, se sienten más cómodos aplicando GF en las cuestiones de cálculo de términos, que, además, viene determinada en parte por el enunciado de las cuestiones. Por su parte, puede que los estudiantes de L618 se sientan más cómodos al aplicar la expresión simbólica que han formulado, pero aún no presentan el nivel de abstracción necesario para poder realizar operaciones y manipulaciones con estas expresiones alfanuméricas.

Perfiles de Inversión

La Tabla 5.60 presenta las cantidades (absolutas y porcentuales) de estudiantes que utilizaron cada perfil de inversión y la Figura 5.75 presenta de gráficamente las frecuencias de dichos perfiles en cada curso.

Tabla 5.60. Perfiles de Inversión en para Caramelos D (L619), Bolos D (L618) y Jardín D (A3419 y A5619).

Perfil	L619		L618		A3419		A5619	
	Total	%	Total	%	Total	%	Total	%
I1	2	4,5	4	11,8	-	-	-	-
I2	4	9,1	3	8,8	-	-	-	-
I3	20	45,5	6	17,6	1	9,1	2	20,0
I4	1	2,3	6	17,6	1	9,1	3	30,0
I5	1	2,3	7	20,6	1	9,1	-	-
I6	-	-	-	-	-	-	-	-
Sin perfil	16	36,4	8	23,5	8	72,7	5	50,0
Total	44	100,0	34	100,0	11	100,0	10	100,0

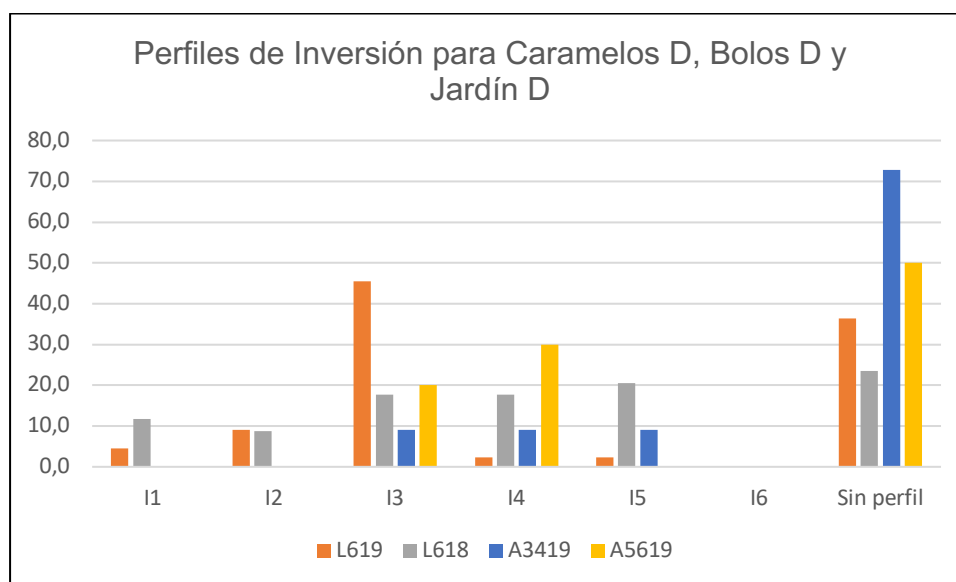


Figura 5.75. Frecuencia (%) de los perfiles de Inversión para Caramelos D (L619), Bolos D (L618) y Jardín D (A3419 y A5619).

Podemos observar que los únicos perfiles con presencia en los cuatro grupos son I3 e I4, referidos a la aplicación de una inversión aritmética o algebraica respectivamente. También destaca la gran cantidad de estudiantes sin perfil en los cuatro grupos, especialmente en A3419, probablemente debido a la diferencia de edad con el resto de grupos.

También observamos cómo los estudiantes ordinarios (L619 y L618) presentaron una mayor diversidad de perfiles que los estudiantes con aaccmm (A3419 y A5619). Mientras que los estudiantes con aaccmm centraron sus esfuerzos en el uso de inversiones (I3 e I4) y ecuaciones (I5), algunos estudiantes ordinarios se decantaron por el uso de estrategias menos eficientes como el ensayo y error (I1) y el uso de operaciones directas (I2). Este hecho puede deberse, por una parte, a la capacidad para invertir procesos mentales de los estudiantes con aaccmm, que les permitía aplicar los pasos necesarios para invertir aritmética o algebraicamente la expresión simbólica formulada, y, por otra parte, a la falta de comprensión de este tipo de cuestión en algunos estudiantes ordinarios, pues dentro de una misma clase podemos encontrar distintos ritmos de aprendizaje.

Si nos centramos en las diferencias entre los dos estudios longitudinales, podemos ver que L618 (L56) presentó una distribución más uniforme entre I3, I4 e I5, siendo la resolución mediante ecuaciones (I5) la estrategia más destacada. En cambio, los estudiantes de L619 (L456) concentraron sus esfuerzos en el uso de la inversión aritmética (I3), con alrededor de un 45% de los estudiantes, con un porcentaje prácticamente insignificante en los otros perfiles presentes. Estos datos son bastante sorprendentes, pues cabría esperar que los estudiantes de L456 tuviesen una mayor predisposición a aplicar perfiles de índole algebraico, como I4 e I5, debido a su mayor exposición a este tipo de aprendizaje durante el estudio.

De este modo, podemos concluir que los estudiantes con aaccmm presentaron una mayor capacidad de inversión de procesos mentales frente a los estudiantes ordinarios de su misma edad con experiencia previa en ppg (estudios longitudinales). Además, los resultados de los dos estudios longitudinales difieren bastante, dando lugar a una sorprendente mayor aplicación de estrategias de índole algebraico por parte de L56 frente a L456.

Uso de GeoPattern y de papel y bolígrafo

Dentro de este análisis de perfiles de inversión, creemos importante ampliar la información de estos perfiles y centrar el foco en el uso de la app GeoPattern en comparación con el uso de papel y bolígrafo para la resolución de ppg. Para ello, nos hemos centrado en las estrategias empleadas en la cuestión de relación inversa por los estudiantes de L619 y L618, descartando las respuestas de A3419 y A5619, ya que fueron proporcionadas únicamente con GeoPattern. Para realizar esta parte del análisis, centraremos el foco en la frecuencia (%) de estrategias empleadas por los estudiantes, descartando las respuestas en blanco. La Tabla 5.59 indica la cantidad de respuestas proporcionadas por los estudiantes de cada curso para las distintas cuestiones de los ppg incluidos en esta comparación y la Figura 5.76 presenta la evolución de las estrategias para la cuestión de relación inversa en ambos entornos de resolución de ppg.

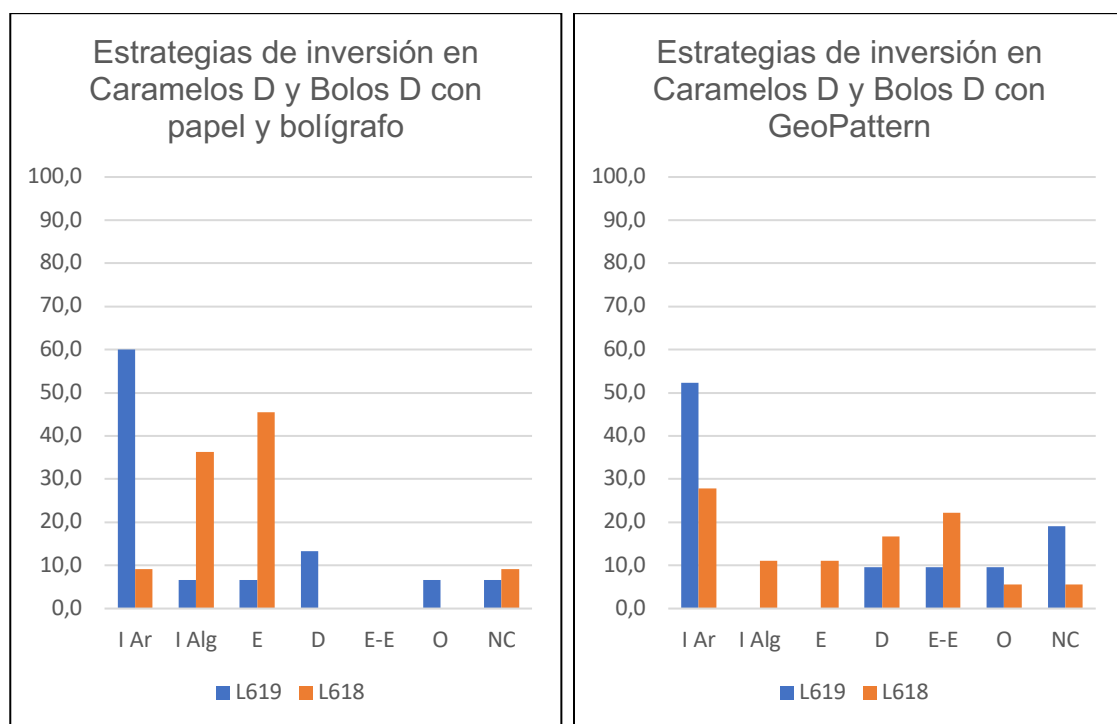


Figura 5.76. Frecuencia (%) de las estrategias de resolución.

Podemos ver cómo el uso de papel y bolígrafo fomentó la utilización de estrategias más eficientes de resolución en cuestiones de inversión (e). Así pues, se observa una mayor cantidad de estudiantes que resolvieron esta cuestión con una inversión algebraica (I Alg) o una ecuación (E). Sin embargo, aunque la

mayoría de estudiantes que emplearon GeoPattern resolvieron esta cuestión haciendo uso de una inversión aritmética (I Ar) así como de I Alg y E en menor cantidad, se observa que hubo un aumento de estrategias de menor calidad, como el uso de operaciones directas (D) y ensayo y error (E-E). Este hecho puede deberse a las características de GeoPattern, principalmente diseñada para el fomento de la generalización a través de la resolución de cuestiones directas. En esta ocasión, el uso de papel y bolígrafo ofreció una mayor versatilidad para la aplicación de distintas estrategias en cuestiones de inversión.

COMPARACIÓN 4: Pared E

Hemos comparado las respuestas al problema Pared E, resuelto por los estudiantes en 6.º (L619 y L618) de L456 y L56, respectivamente, y en 5.º y 6.º (A5619) de aaccmm. Para ello, analizaremos por separado los perfiles de aplicación e inversión obtenidos.

Perfiles de Aplicación

La Tabla 5.61 presenta las cantidades (absolutas y porcentuales) de estudiantes que utilizaron cada perfil de aplicación y la Figura 5.77 presenta de manera gráfica las frecuencias de estos perfiles en cada curso.

Tabla 5.61. Perfiles de Aplicación para Pared E (L619, L618 y A5619).

Perfil		L619		L618		A5619	
		Total	%	Total	%	Total	%
A1	A1.1	-	-	-	-	-	-
	A1.2	1	2,3	-	-	-	-
	A1.3	-	-	-	-	-	-
	A1.4	23	52,3	15	44,1	3	30,0
	Total	24	54,5	15	44,1	3	30,0
A2	A2.1	-	-	-	-	-	-
	A2.2	1	2,3	-	-	1	10,0
	A2.3	-	-	-	-	-	-
	Total	1	2,3	0	0,0	1	10,0
A3	A3.1	-	-	-	-	-	-
	A3.2	-	-	-	-	-	-
	Total	0	0,0	0	0,0	0	0,0
A4		0	0,0	0	0,0	0	0,0
A5		2	4,5	1	2,9	0	0,0

Perfil	L619		L618		A5619	
	Total	%	Total	%	Total	%
A6	3	6,8	5	14,7	0	0,0
Sin perfil	14	31,8	13	38,2	6	60,0
Total	44	100,0	34	100,0	10	100,0

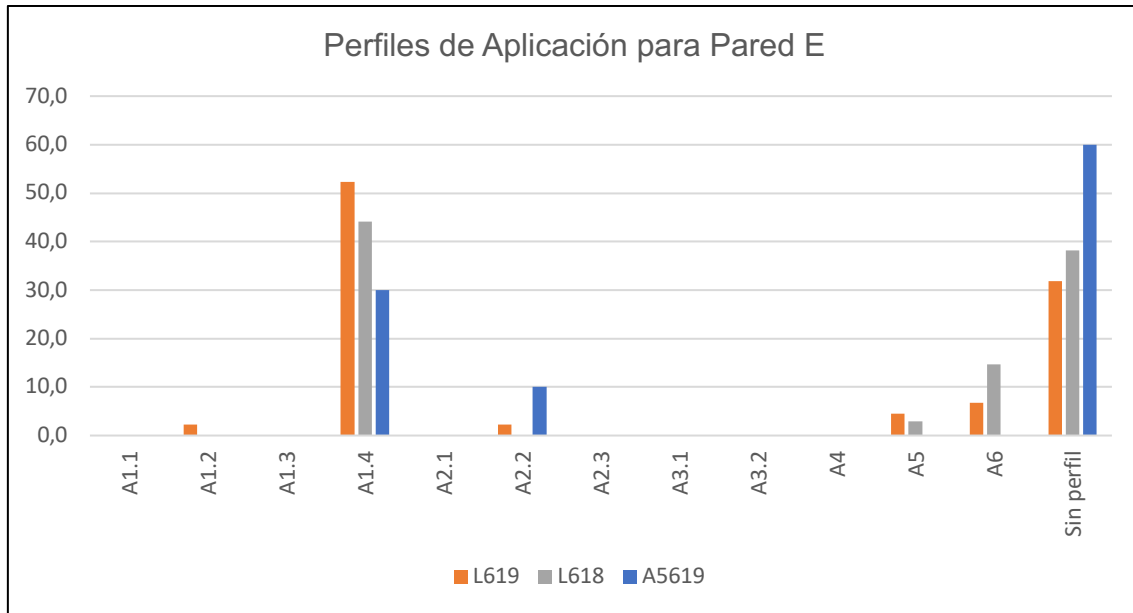


Figura 5.77. Frecuencia (%) de los perfiles de Aplicación para Pared E (L619, L618 y A5619).

Podemos observar que el principal subperfil en todos los grupos fue el A1.4, referido al uso de una estrategia constante de tipo funcional, seguido por la cantidad de estudiantes a los que no se les pudo asignar un perfil, que destaca, sobre todo, en A5619, probablemente por la diferencia en la cantidad de estudiantes con los otros grupos.

También observamos cómo los estudiantes ordinarios (L619 y L618) presentaron una mayor diversidad de perfiles que los estudiantes con aaccmm (A5619). Entre los perfiles que diferencian a ambos grupos, destaca un porcentaje de estudiantes ordinarios que optó por el uso de perfiles con alguna respuesta no clasificable (A5 y A6), mientras que los estudiantes con aaccmm centraron sus esfuerzos únicamente en el uso de una estrategia funcional constante (A1.4) o en un aumento progresivo de calidad en las estrategias (A2.2). Esta diferencia en la diversidad de perfiles puede deberse a las distintas capacidades de estos

grupos de estudiantes, pues los estudiantes con aaccmm presentaron una mayor habilidad para generalizar y desarrollar estrategias eficientes. Además, la dificultad de este ppg es mucho mayor que la de ppg anteriores, ya que la primera cuestión (a) implica la formulación de una expresión algebraica a partir de la generalización del patrón sin la resolución previa de cuestiones de cálculo de términos concretos. Esto propició la aparición de una mayor diversidad de perfiles en ambos grupos de estudiantes. No obstante, la distribución de los estudiantes entre estos perfiles muestra cómo los estudiantes con aaccmm han sido más eficientes y capaces de resolver este ppg en comparación con los estudiantes ordinarios.

Si nos centramos en las diferencias entre los dos estudios longitudinales, podemos ver que L618 (L56) presentó un mayor porcentaje de estudiantes que optaron por subperfiles distintos de A1.4, entre los que destacan sobre todo los estudiantes que no fueron capaces de aplicar su generalización para el cálculo de un término cercano (A6). Sin embargo, L619 (L456) presentó una mayor diversidad de perfiles que L618, aunque el porcentaje de estudiantes que usaron estos otros perfiles fue menor, ya que L619 presenta casi un 10% más de estudiantes que emplearon A1.4 que L618. Así pues, aunque los resultados de ambos estudios son similares, vemos que L456 mostró un mayor porcentaje de estudiantes capaces de resolver este ppg y de hacer uso de perfiles que implican estrategias más eficientes que L56. Este hecho puede ser consecuencia de la duración de la secuencia implementada, que ha proporcionado una mayor experiencia y oportunidad de aprendizaje a L456.

De este modo, podemos concluir que los estudiantes con aaccmm presentaron una mayor habilidad para generalizar y desarrollar estrategias eficientes que los estudiantes ordinarios de su misma edad con experiencia previa en ppg (estudios longitudinales). Además, aunque los resultados de los dos estudios longitudinales son parecidos, L456 mostró una ligera mejora en la distribución de los estudiantes entre los perfiles que L56, seguramente consecuencia de una mayor experiencia y oportunidad de aprendizaje.

En este análisis, creemos importante ampliar la información que nos proporcionan estos perfiles en tres aspectos a destacar: las estrategias

seleccionadas en el uso de la app GeoPattern en comparación con el uso de papel y bolígrafo, la distribución del uso de subcategorías de las estrategias funcional y construcción y los tipos de generalización empleados por los estudiantes. Para realizar esta parte del análisis, centraremos el foco en la frecuencia (%) de estrategias y tipos de generalizaciones empleadas por los estudiantes, descartando las respuestas en blanco. La Tabla 5.62 indica la cantidad de respuestas proporcionadas por los estudiantes de cada curso para las distintas cuestiones de los ppg incluidos en esta comparación.

Tabla 5.62. Cantidad de respuestas para Pared E (L619, L618 y A5619).

Cuestiones	L619			L618			A5619
	App	Papel	Total	App	Papel	Total	App
a)	20	14	34	14	9	23	4
b)	18	14	32	14	9	23	4
c)	20	14	34	13	9	22	4
d)	17	12	29	9	8	17	4
e)	12	11	23	5	8	13	3

Uso de GeoPattern y de papel y bolígrafo

Para el análisis de las diferencias existentes entre el uso de la app GeoPattern y la resolución de los problemas con papel y bolígrafo, nos hemos centrado en las estrategias empleadas en cuestiones directas por los estudiantes de L619 y L618. En ambos casos los estudiantes fueron divididos en dos grupos, de modo que aproximadamente la mitad de ellos resolvieron los problemas con GeoPattern y la otra mitad con papel y bolígrafo. Hemos descartado las respuestas de A5619 porque todos los estudiantes resolvieron los problemas con GeoPattern sin una posible comparativa de respuestas. Las Figuras 5.78 y 5.79 presentan la evolución de las estrategias a lo largo de los cursos para las cuestiones directas en ambos entornos de resolución.

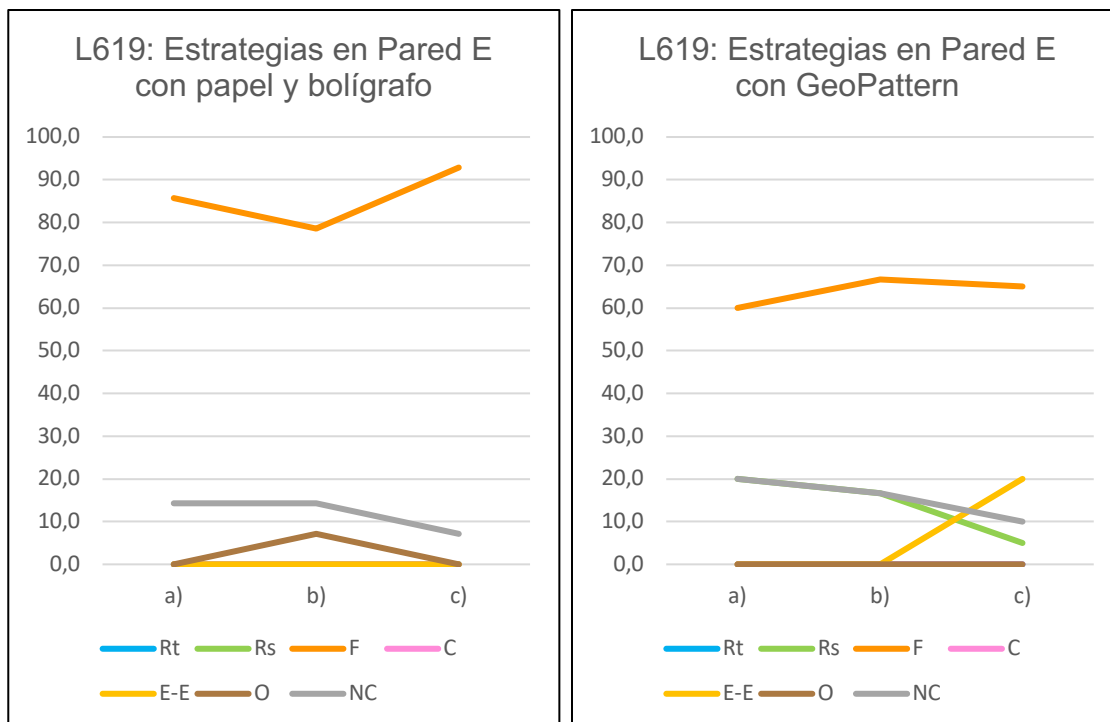


Figura 5.78. Frecuencia (%) de las estrategias de resolución para Pared E (L619).

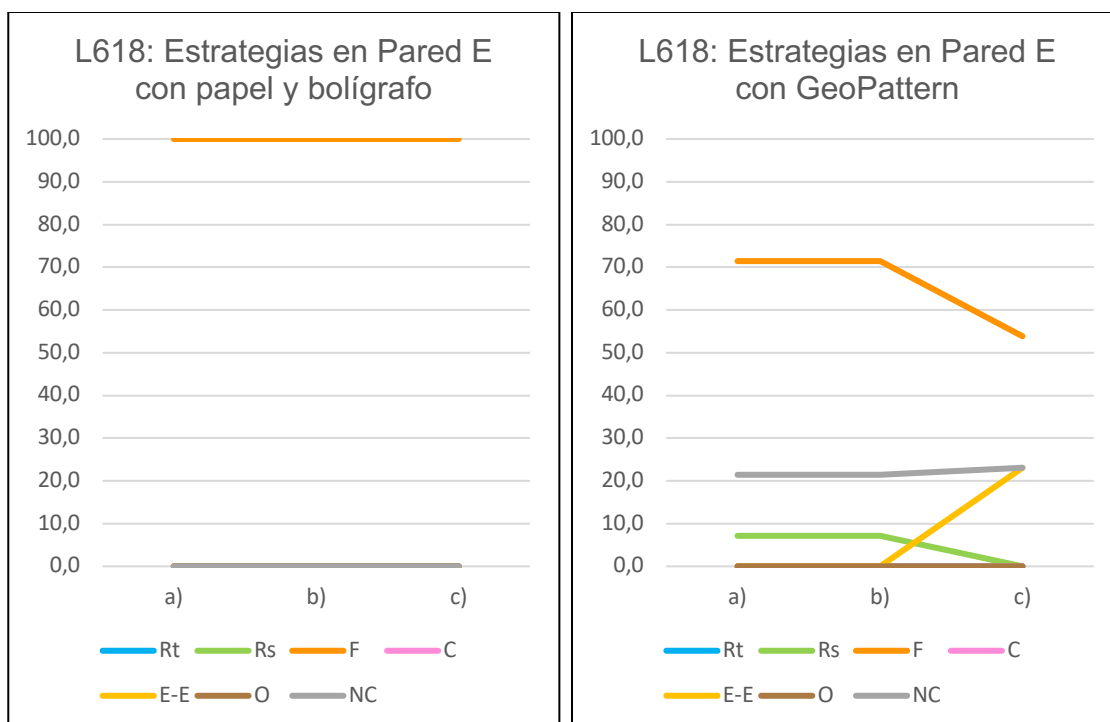


Figura 5.79. Frecuencia (%) de las estrategias de resolución para Pared E (L618).

Podemos observar cómo los estudiantes que emplearon papel y bolígrafo optaron por el uso de estrategias funcionales casi exclusivamente en ambos cursos, ya que solo podemos observar un pequeño porcentaje de estrategias

alternativas (O) y no clasificables (NC) en L619. Sin embargo, los estudiantes que utilizaron GeoPattern presentaron tres estrategias principales: funcional (F), recursiva (Rs) y ensayo y error (E-E), además de NC en un mayor porcentaje. Como hemos comentado, los ppg de tipo E son aquellos que implican una mayor dificultad a los estudiantes y, en esta ocasión, el uso de papel y bolígrafo parece que propició el uso de estrategias funcionales (más eficientes). Sin embargo, el uso de GeoPattern parece delimitar las opciones de los estudiantes a las posibilidades que ofrece la app. En esta misma línea, la presencia del botón *Comprobar* para las cuestiones de cálculo de términos condicionó la aparición de E-E en la cuestión de aplicación (c).

En cuanto a las diferencias entre L618 y L619, podemos observar cómo los estudiantes de usaron papel y bolígrafo de L618 (L56) mostraron un mayor desempeño en la resolución de ppg, haciendo uso de una única estrategia (F) y ello de manera constante. En cambio, con GeoPattern, los estudiantes de L619 (L456) parecieron tener un mayor desempeño, pues, aunque el porcentaje de estrategias funcionales fue similar, en L619 realizaron un uso más constante de ellas, siendo capaces de aplicar las expresiones algebraicas planteadas al cálculo de términos concretos (c).

Subcategorías de las estrategias funcional y construcción

Para el análisis de las subcategorías de las estrategias funcional y construcción en la resolución de ppg, hemos extraído los datos en forma de porcentaje de estudiantes que emplearon cada una de ellas en el problema Pared E (L619, L618 y A5619).

Estrategias de tipo funcional

La Figura 5.80 presenta la evolución de las estrategias de tipo funcional para las cuestiones directas. En ella, podemos observar que las únicas estrategias de tipo funcional empleadas fueron aquellas clasificadas como descomposición (FD), primero (FMP) y funcional (F).

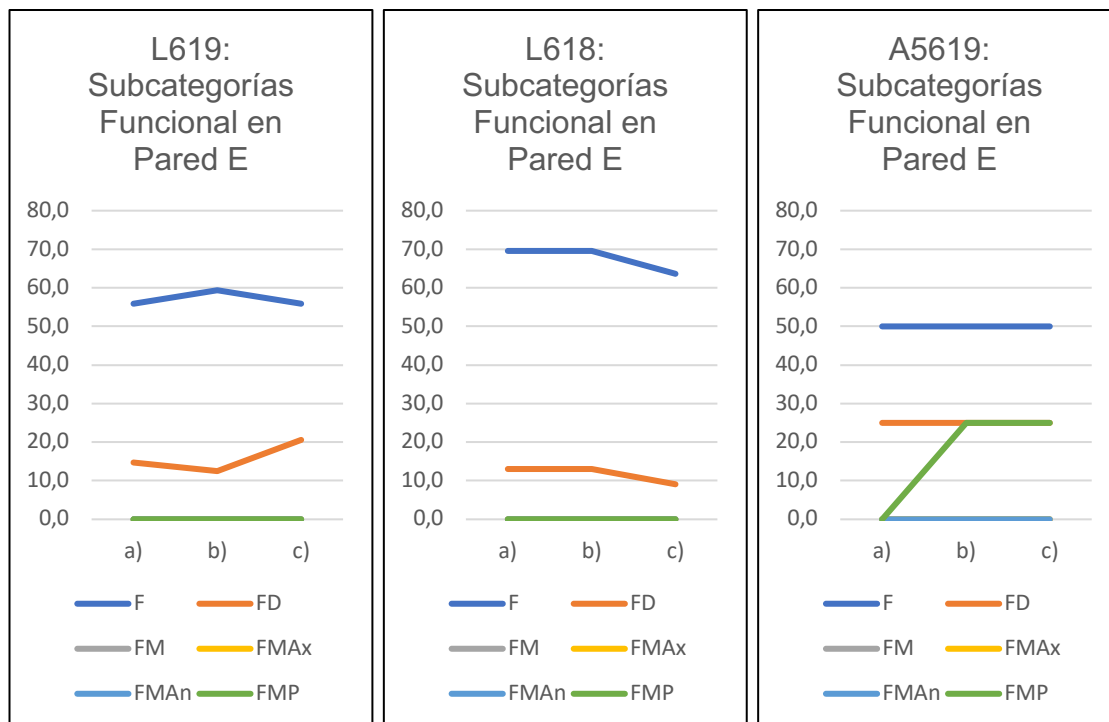


Figura 5.80. Frecuencia (%) de las subcategorías de la estrategia funcional.

Si analizamos la evolución de las estrategias funcionales registradas, podemos apreciar una clara diferencia entre los estudiantes ordinarios (L619 y L618) y los estudiantes con aaccmm (A5619). Mientras que los estudiantes ordinarios se centraron principalmente en el uso de F y FD, los estudiantes con aaccmm también hicieron uso de FMP, desarrollando una estrategia funcional numérica a partir del primer término del patrón. Además, aunque ambos tipos de estudiantes hicieron uso de FD, el porcentaje de uso en A5619 fue casi el doble que en L619 y L618, propiciando una menor distancia entre el uso de F y FD en los estudiantes con aaccmm que en los ordinarios. Estas diferencias probablemente se deban a la capacidad de los estudiantes con aaccmm para formular generalizaciones a través de la identificación de las relaciones entre las piezas que conforman las figuras del patrón, ya sea a nivel visual (FD) o numérico (FMP).

Si nos centramos en las diferencias entre los dos estudios longitudinales, podemos ver que los resultados son muy parecidos, aunque se observa una tendencia diferenciada en la cuestión de aplicación (c). Mientras que en L619 (L456) aumentó el uso de estrategias funcionales, en concreto, FD, L618 (L56) sufrió una disminución. Este hecho nos muestra que en L456 hubo un mayor

porcentaje de estudiantes capaces de aplicar la expresión algebraica funcional formulada para el cálculo de términos concretos que en L56, probablemente consecuencia de la duración del estudio.

Estrategias de tipo construcción

La Figura 5.81 presenta la evolución de las estrategias de tipo construcción para las cuestiones directas. En ella, podemos observar que los estudiantes no utilizaron ninguna estrategia de estas categorías. Este hecho se debe a que, gracias a la práctica, los estudiantes han adquirido las competencias necesarias para generalizar y deducir cuándo las estrategias de tipo construcción son erróneas para la resolución de ppg.

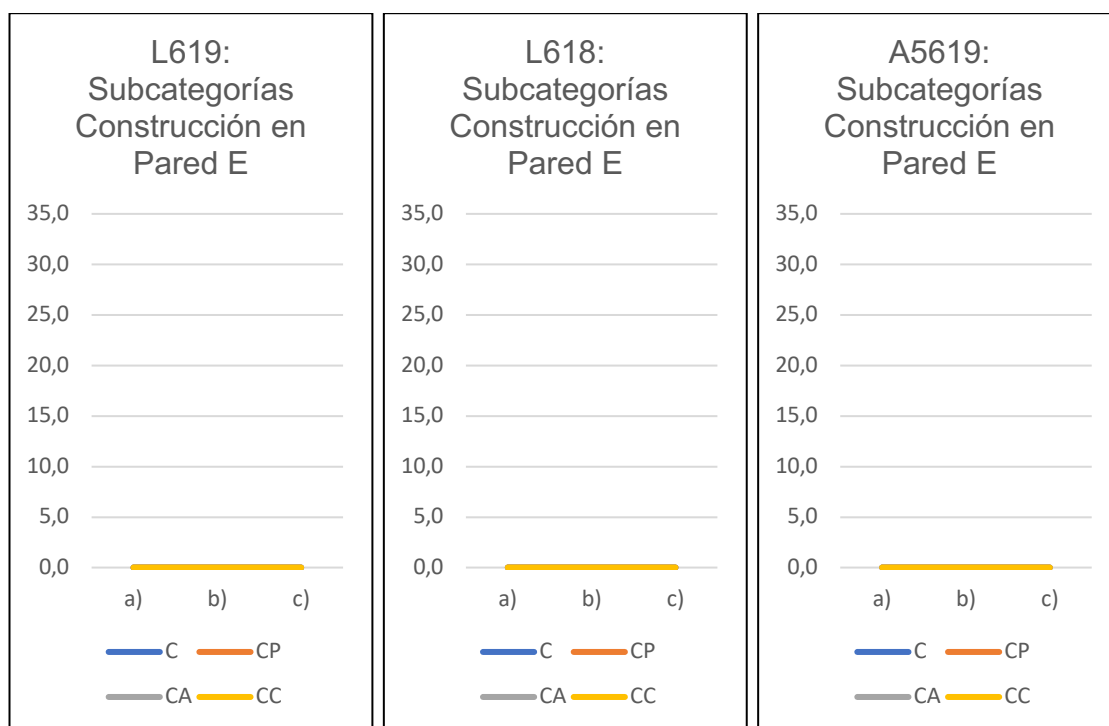


Figura 5.81. Frecuencia (%) de las subcategorías de la estrategia construcción.

Tipos de generalización

Para el análisis de los tipos de generalización empleados por los estudiantes en la resolución de ppg, hemos extraído los datos en forma de porcentaje de la cantidad de estudiantes que emplearon cada una de estas generalizaciones en las cuestiones directas del problema Pared E (L619, L618 y A5619). La Figura

5.82 presenta la evolución de los distintos tipos de generalización para las cuestiones directas.

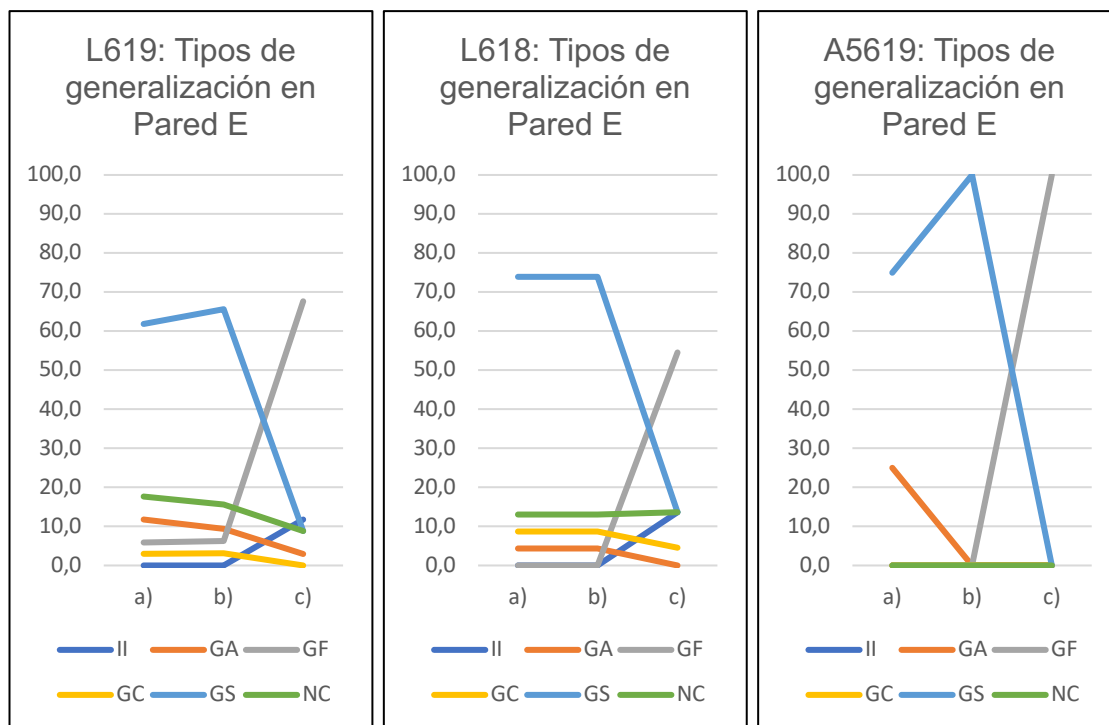


Figura 5.82. Frecuencia (%) de los tipos de generalización.

Podemos observar la presencia en las respuestas de todos los tipos de generalización: inducción ingenua (II), generalización aritmética (GA), generalización factual (GF), generalización contextual (GC), generalización simbólica (GS) y generalizaciones no clasificables (NC).

Si nos centramos en el análisis de las generalizaciones, podemos observar cómo destaca el uso de GF y GS en todos los grupos. Sin embargo, también podemos ver algunas diferencias claras entre los estudiantes ordinarios (L619 y L618) y los estudiantes con aacmm (A5619). En A5619 únicamente hicieron uso de tres tipos de generalizaciones: GA, GF y GS. Además, estos tipos de generalizaciones fueron usados de manera acorde con la demanda de las cuestiones, haciendo uso de GS para la expresión de fórmulas algebraicas en a) y b) (usada por el 100%) y GF para la aplicación de dichas fórmulas en el cálculo de términos concretos en c) (usada por el 100%). En cambio, los estudiantes ordinarios hicieron uso de todos los tipos de generalización, incluidos aquellos de menor calidad (GA) o no considerados generalización (II y NC) en todas las

cuestiones (a, b y c). Además, aunque también hicieron un uso adecuado de GF y GS en relación con la demanda de las cuestiones, estas estrategias fueron utilizadas por un menor porcentaje de estudiantes. Estas diferencias entre ambos tipos de estudiantes pueden deberse a las habilidades para generalizar y realizar procesos de abstracción que presentaron los estudiantes con aaccmm, que les permitieron expresar la generalización obtenida del patrón del modo más adecuado según las exigencias de la cuestión y sin importar el nivel de abstracción implicado en el proceso.

En cuanto a los dos estudios longitudinales, podemos ver resultados muy parecidos: el uso de todos los tipos de generalización en un porcentaje similar y la aparición de II en la cuestión de aplicación de la generalización (c). Aun así, podemos observar algunas ligeras diferencias, entre las que destaca un mayor porcentaje de uso de GS para L618 en a) y b), pero también un mayor uso de GF en c) para L619. Estos hechos pueden deberse a que los estudiantes de L619 (L456), al haber sido expuestos a más oportunidades de práctica, tenían una mayor capacidad de expresión en términos concretos (GF). Sin embargo, parece que los estudiantes de L618 (L56), en general, habían obtenido un mayor nivel de abstracción que les permitió expresar su generalización de un modo simbólico (GS), es decir, a través de expresiones algebraicas alfanuméricas.

Perfiles de Inversión

La Tabla 5.63 presenta las cantidades (absolutas y porcentuales) de estudiantes que utilizaron cada perfil de inversión y la Figura 5.83 presenta de gráficamente las frecuencias de dichos perfiles en cada curso.

Tabla 5.63. Perfiles de Inversión para Pared E (L619, L618 y A5619).

Perfil	L619		L618		A5619	
	Total	%	Total	%	Total	%
I1	3	6,8	1	2,9	-	-
I2	3	6,8	3	8,8	-	-
I3	16	36,4	8	23,5	2	20,0
I4	3	6,8	2	5,9	2	20,0
I5	1	2,3	2	5,9	-	-
I6	-	-	1	2,9	-	-

Perfil	L619		L618		A5619	
	Total	%	Total	%	Total	%
Sin perfil	18	40,9	17	50,0	6	60,0
Total	44	100,0	34	100,0	10	100,0

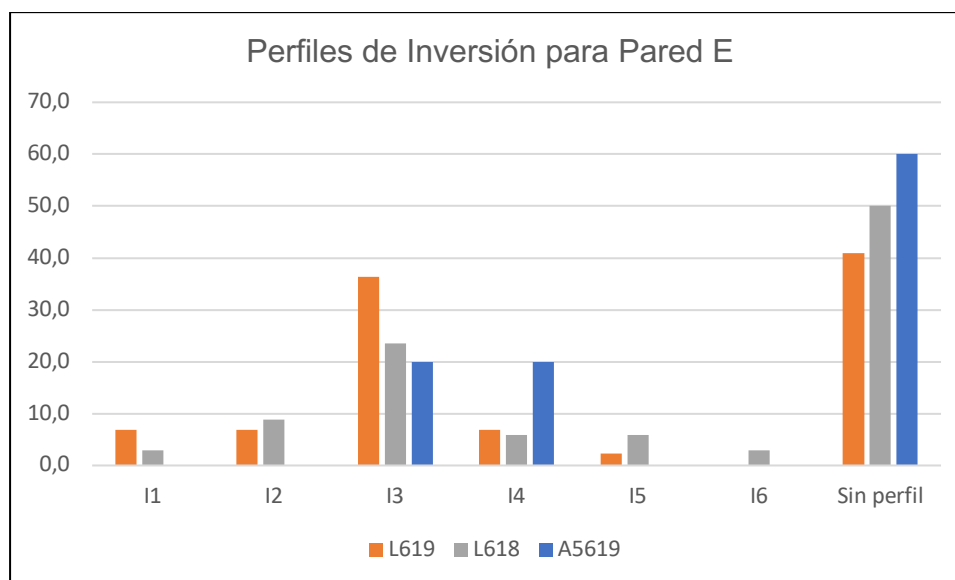


Figura 5.83. Frecuencia (%) de los perfiles de Inversión para Pared E (L619, L618 y A5619).

Podemos observar que los únicos perfiles con presencia en los tres cursos son I3 e I4, referidos a la aplicación de una inversión aritmética o algebraica respectivamente. También destaca la gran cantidad de estudiantes sin perfil en los tres grupos, especialmente en A5619, probablemente debido a la diferencia en la cantidad de estudiantes con los otros grupos.

Además, observamos que los estudiantes ordinarios (L619 y L618) presentaron una mayor diversidad de perfiles que los estudiantes con aaccmm (A5619). Así pues, aunque el perfil I3 tuvo una gran presencia entre los estudiantes ordinarios, estos hicieron uso de prácticamente todos los perfiles, mientras que los estudiantes con aaccmm centraron sus esfuerzos únicamente en el uso de inversiones (I3 e I4). Esta diferencia en la cantidad de perfiles presente puede deberse a la capacidad para invertir procesos mentales de los estudiantes con aaccmm, que les permite aplicar los pasos necesarios para invertir aritmética o algebraicamente la expresión simbólica formulada. No obstante, la ausencia de perfiles de ecuaciones entre los estudiantes con aaccmm probablemente sea

consecuencia del uso de GeoPattern como entorno de resolución, pues, aunque la realización de ecuaciones es posible, su uso puede dificultar el planteamiento y la resolución de ecuaciones de un modo visual.

Si nos centramos en las diferencias entre los dos estudios longitudinales, podemos ver que en L619 (L456) hay más estudiantes que se decantaron por el uso de I3 y casi un 10% menos de estudiantes sin perfil que en L618 (L56). Sin embargo, y aunque los datos son similares, en L618 más estudiantes fueron capaces de implementar perfiles de tipo I4 e I5, referidos a la inversión algebraica y la resolución de ecuaciones, mientras que en L619 se observa un mayor porcentaje de estudiantes que decidieron hacer uso de los perfiles I1 e I2, que hacen referencia al uso del ensayo y error y de estrategias propias de operaciones directas. Además, en L618 se puede ver la presencia del perfil I6, donde este estudiante empleó una combinación de dos estrategias para la resolución de las cuestiones de inversión (d y e), en este caso una inversión algebraica y otra aritmética, en lugar de usar la misma estrategia de resolución en ambas. Así pues, aunque L619 muestra una mayor predisposición al uso de estrategias eficientes (I3, I4 e I5), L618 presenta un ligero mayor uso de estrategias de tipo algebraico (I4 e I5). Estos hechos sorprenden un poco, ya que cabría esperar que aquellos estudiantes que han estado más expuestos a situaciones de aprendizaje relacionadas con ppg tuviesen una mayor capacidad de aplicación de estrategias algebraicas.

De este modo, podemos concluir que los estudiantes con aaccmm mostraron una mayor capacidad de elección de estrategias eficientes, probablemente debido a su capacidad para invertir procesos mentales, a pesar de la ausencia del uso de ecuaciones (I5), seguramente consecuencia del uso de GeoPattern como entorno de resolución. Además, los resultados de los dos estudios longitudinales son bastante similares, aunque L56 presente una ligera mayor predisposición hacia el uso de estrategias de índole algebraico (I4 e I5) frente a L456.

Uso de GeoPattern y de papel y bolígrafo

Dentro de este análisis de perfiles de inversión, creemos importante ampliar la información de estos perfiles y centrar el foco en el uso de la app GeoPattern en comparación con el uso de papel y bolígrafo para la resolución de ppg. Para ello, nos hemos centrado en las estrategias empleadas en la cuestión de relación inversa por los estudiantes de L619 y L618, descartando las respuestas de A5619, que fueron proporcionadas únicamente con GeoPattern. Para realizar esta parte del análisis, centraremos el foco en la frecuencia (%) de estrategias empleadas por los estudiantes, descartando las respuestas en blanco. La Tabla 5.62 indica la cantidad de respuestas proporcionadas por los estudiantes de cada curso para las distintas cuestiones de los ppg incluidos en esta comparación Y Las Figuras 5.84 y 5.85 presentan la evolución de las estrategias para las cuestiones de relación inversa en ambos entornos de resolución de ppg.

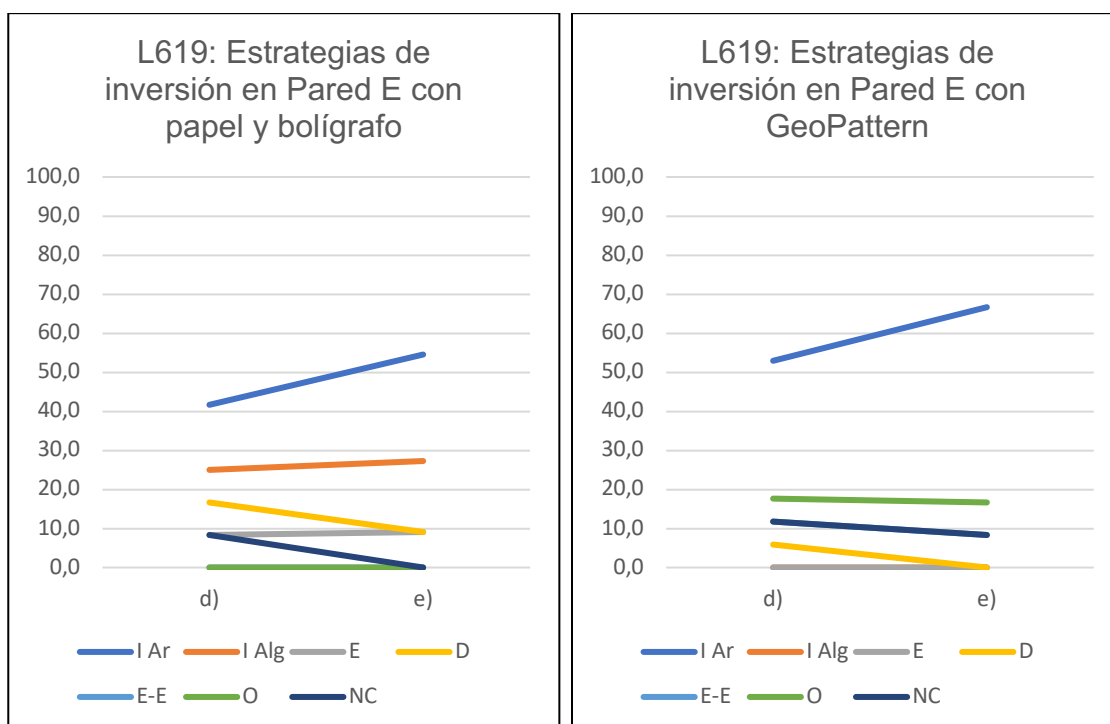


Figura 5.84. Frecuencia (%) de las estrategias de resolución para Pared E (L619).

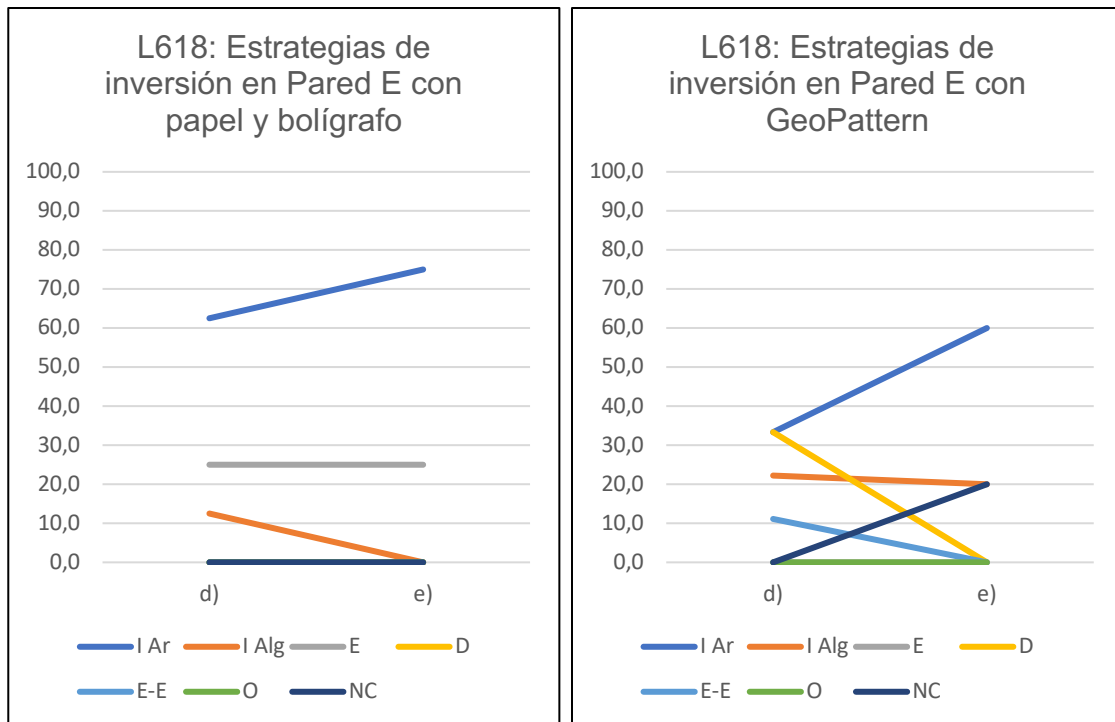


Figura 5.85. Frecuencia (%) de las estrategias de resolución para Pared E (L618).

Podemos observar cómo el uso de papel y bolígrafo fomentó el desarrollo de estrategias de índole algebraico, como inversiones algebraicas (I Alg) o ecuaciones (E). En GeoPattern, sin embargo, destaca la ausencia de E. Este hecho puede deberse a las limitaciones que presenta GeoPattern para la resolución de ecuaciones, ya que la app está más pensada para la resolución de cuestiones de reacción directa. GeoPattern también parece fomentar la presencia de estrategias menos eficientes como ensayo y error (E-E) y operaciones directas (D), probablemente consecuencia del botón *Comprobar*, que permitía a los estudiantes verificar la corrección de sus respuestas numéricas. No obstante, en ambos entornos de resolución, aparece como estrategia mayoritaria la inversión aritmética (I Ar).

Resultados de la comparativa de estudios

Tras analizar los perfiles y las respuestas de los estudiantes en estos cuatro grupos de ppg comparables (Magdalenas A y Cumpleaños 1A; Cumpleaños 1A; Jardín D, Bolos D y Caramelos D; Pared E), presentamos los resultados en relación con los objetivos de aprendizaje (ver Tabla 4.1). Para ello, agruparemos los resultados en tres bloques, correspondientes a diferentes aprendizajes: i)

identificar y generalizar relaciones funcionales en problemas de patrones geométricos, ii) expresar generalizaciones e iii) invertir operaciones y resolver ecuaciones.

i) Identificar y generalizar relaciones funcionales en ppg

Una de las capacidades básicas que se deben desarrollar mediante el aprendizaje del álgebra es la identificación y generalización de relaciones funcionales. Teniendo en cuenta el contexto de los ppg y el análisis de las respuestas de los estudiantes que hemos realizado, consideramos que los perfiles de generalización y aplicación obtenidos, así como la distribución del uso de subcategorías de las estrategias funcional y construcción nos pueden aportar información sobre la capacidad desarrollada por los estudiantes de nuestra muestra en este aspecto.

Por una parte, la comparación de las respuestas de los estudiantes con aaccmm y los estudiantes ordinarios nos aportará la información necesaria para identificar las características propias de los estudiantes con aaccmm en el contexto de los ppg.

Al inicio de la secuencia de enseñanza-aprendizaje (ppg tipo A), los estudiantes ordinarios de los cursos inferiores (L417 y L517) presentaban una mayor variedad de perfiles que los estudiantes con aaccmm (A3419). Mientras que A3419 optó por subperfiles eficientes como el uso constante de una estrategia funcional (G1.4) y el aumento progresivo de calidad pasando de estrategias de tipo construcción a funcional (G4.9), los estudiantes ordinarios hicieron uso de todos los perfiles de generalización, incluidos aquellos que implicaban una disminución en la calidad de las estrategias al expresar la generalización (G3, G5 y G7). Y, aunque en todos los grupos el subperfil mayoritario fue el G1.4, los porcentajes de uso difieren bastante con una diferencia aproximada del 50% entre estudiantes ordinarios y con aaccmm. Estas diferencias entre ambos tipos de estudiantes nos muestran que ya existían diferencias bastante marcadas al inicio de la secuencia de enseñanza-aprendizaje, pues los estudiantes de A3419 presentaban una mayor capacidad de identificación y generalización de relaciones funcionales en ppg, así como para el desarrollo de estrategias eficientes.

Si realizamos esta misma comparación con los estudiantes del último curso (L619, L618 y A5619), las diferencias entre ambos tipos de estudiantes parecen disminuir; los estudiantes ordinarios abandonaron el uso de ciertos perfiles (G2, G3 y G5) y centraron sus esfuerzos en G1.4 (con más de un 50% de uso) y subperfiles con un aumento progresivo de calidad (G4), mientras que, los estudiantes con aaccmm optaron por utilizar únicamente las estrategias de tipo construcción (G1.3) o funcional (G1.4) de modo constante.

Más adelante, en la resolución de ppg tipo D, todos los estudiantes con aaccmm (A3419 y A5619) a los que se les pudo asignar un perfil hicieron uso constante de una estrategia funcional (A1.4), no habiendo en sus respuestas presencia de cualquier otra estrategia y subperfil. Sin embargo, aunque este también fue el subperfil principal de los estudiantes ordinarios (L619 y L618), hubo un pequeño porcentaje de ellos que logró un aumento progresivo de calidad con el uso de la estrategia recursiva (A2.2) y perfiles con alguna respuesta no clasificable (A5 y A6).

Al final de la secuencia de enseñanza-aprendizaje (ppg tipo E), los estudiantes con aaccmm (A5619) siguieron empleando el subperfil A1.4, aunque un pequeño porcentaje también optó por el uso de A2.2, probablemente consecuencia del aumento de dificultad del ppg resuelto. Entre los estudiantes ordinarios (L619 y L618) también destaca el subperfil A1.4 (con más de un 40% de uso). No obstante, presentaron una mayor variedad de perfiles, ya que también emplearon los subperfiles A1.2 (de estrategia recursiva constante), A2.2, A5 y A6. Estos hechos evidencian que la secuencia de enseñanza-aprendizaje implementada ayudó a desarrollar las capacidades de identificación y generalización de relaciones funcionales en ppg de los estudiantes ordinarios y a disminuir las diferencias existentes con los estudiantes con aaccmm. Aun así, sigue existiendo una clara diferencia de capacidades entre ambos tipos de estudiantes, con una mayor habilidad para identificar patrones y relaciones matemáticas, generalizar y desarrollar estrategias eficientes por parte de los estudiantes con aaccmm.

Estos hechos se ven reflejados también en las subcategorías de estrategias de tipo funcional, donde los estudiantes con aaccmm destacaron por un uso

constante de las estrategias funcionales, siendo, en general, descomposición (FD) la estrategia mayoritaria. Además, para los ppg tipo D y E también utilizan la estrategia primero (FMP), demostrando así su capacidad para identificar relaciones entre las partes visuales del patrón geométrico, pero también a nivel numérico, utilizando la primera figura del patrón como base para su estrategia funcional. En cambio, los estudiantes ordinarios hicieron un uso más irregular de las estrategias funcionales, con diferentes rangos de uso según la cuestión, y explicaciones más amplias que dan lugar a que funcional (F), entendida como aquellas estrategias de tipo funcional no clasificables dentro de las otras subcategorías, fuera su principal estrategia. En cuanto a las estrategias de tipo construcción, los estudiantes con aaccmm únicamente utilizaron la estrategia proporcional (CP) en los ppg cuyo uso es correcto, mientras que los estudiantes ordinarios solamente abandonan el uso de este tipo de estrategias al final de la secuencia de enseñanza-aprendizaje (ppg tipo E). Este hecho se debe a que los estudiantes con aaccmm habían adquirido las capacidades necesarias para deducir que este tipo de estrategias pueden resultar erróneas con mayor rapidez que los estudiantes ordinarios.

Por otra parte, la comparación de las respuestas de los dos estudios longitudinales nos deja entrever las diferencias derivadas de la duración de los estudios y las secuencias de enseñanza-aprendizaje implementadas.

Al inicio de la secuencia de enseñanza-aprendizaje (ppg tipo A), los estudiantes de los cursos inferiores (L417 y L517) presentaron una gran variedad de perfiles, siendo el G1.4 el más destacado en ambos grupos. Sin embargo, mientras que los estudiantes de L417 se distribuyeron de un modo similar entre todos los perfiles (excepto G1), los perfiles G1 y G4 fueron los más usados por los estudiantes de L517, siendo estos perfiles también los más eficientes. Además, en L417 hubo una mayor proporción de estudiantes que no fueron capaces de expresar la generalización (G7) y a los que no se les pudo asignar un perfil. Estas diferencias entre ambos estudios al inicio de la secuencia de enseñanza-aprendizaje pueden ser consecuencia de la diferencia de edad y conocimientos existentes al tratarse de cursos distintos.

Si realizamos esta misma comparación con esos estudiantes del último curso (L619 y L618), los resultados de ambos grupos son bastante similares, aunque todavía muestran pequeñas diferencias. En esta ocasión, abandonaron el uso de los perfiles G2, G3 y G5 y el subperfil principal para ambos grupos siguió siendo el G1.4. No obstante, en L618 hubo un mayor porcentaje de uso que en L619, ya que más estudiantes de L619 optaron por subperfiles de G4.

Más adelante, en la resolución de ppg tipo D, en ambos estudios los estudiantes centraron sus esfuerzos en el subperfil A1.4 con porcentajes muy similares. Además, unos pocos estudiantes optaron por el uso de otros perfiles como A2.2, A5 y A6. La principal diferencia que podemos encontrar en este ppg es que los porcentajes de uso de dichos perfiles fue mayor en L618, mientras que en L619 hubo una mayor cantidad de estudiantes a los que no se les pudo asignar un perfil.

Al final de la secuencia de enseñanza-aprendizaje (ppg tipo E), destacó el uso del perfil A1.4 en ambos grupos, con un 52,3% de uso para L619 y un 44,1% para L618. Aunque L619 presentó una mayor variedad de perfiles, sus porcentajes de uso fueron bastante menores que L618. Asimismo, L618 mostró más estudiantes que fueron incapaces de aplicar su generalización para la resolución de una cuestión de cálculo de términos (A6). Estos hechos evidencian un aprendizaje muy similar en ambos estudios a pesar de la diferencia de duración entre ambos. No obstante, aparentemente hubo un mayor porcentaje de estudiantes en L456 que fue capaz de desarrollar y aplicar estrategias eficientes que en L56. Sin embargo, estas diferencias son tan pequeñas que no podemos considerarlas significativas.

Estos hechos se ven reflejados también en las subcategorías de estrategias de tipo funcional, donde ambos estudios optaron en porcentajes similares por el uso de funcional (F) como estrategia principal, seguida por descomposición (FD). Por su parte, las estrategias de tipo construcción experimentaron un abandono gradual por parte de ambos estudios a través de los distintos tipos de ppg, probablemente debido a que el aprendizaje obtenido les permitió ser conscientes de que este tipo de estrategias pueden resultar erróneas en algunos ppg y optaron por utilizar estrategias más eficientes y con mayor probabilidad de éxito.

En cuanto al uso de GeoPattern, los datos señalan que fomentó el uso de estrategias de tipo funcional (F), así como de ensayo y error (E-E) en ambos grupos. No obstante, parece que el desempeño de ambos grupos con GeoPattern fue diferente. Mientras que los estudiantes de L619 que utilizaron GeoPattern mostraron un mayor porcentaje de uso de F y, además, de un modo más constante a través de las cuestiones, en L618 los estudiantes que tuvieron un mejor desempeño usando F fueron los que emplearon papel y bolígrafo como entorno de resolución. Estos datos son bastante sorprendentes, ya que cabría esperar que ambos estudios obtuviesen resultados similares también en este aspecto.

ii) Expresar generalizaciones

Ser capaz de expresar las generalizaciones obtenidas es un aspecto fundamental para seguir trabajando y aprendiendo conceptos de índole algebraico. Además, la forma en que los estudiantes expresan sus generalizaciones aporta mucha información sobre los procesos mentales llevados a cabo. Por este motivo, consideramos que los tipos de generalización desarrollados por los estudiantes nos pueden ayudar en este aspecto.

Por una parte, la comparación de las respuestas de los estudiantes con altas capacidades matemáticas y los estudiantes ordinarios nos aportará la información necesaria para identificar las características propias de los estudiantes con aaccmm en el contexto de los ppg.

Una de las principales diferencias que podemos encontrar entre ambos grupos de estudiantes es la diversidad de generalizaciones que produjeron en sus respuestas. Los estudiantes ordinarios emplearon todos los tipos de generalizaciones, incluidos aquellos menos eficientes y no algebraicos como la inducción ingenua (II) y la generalización aritmética (GA). En cambio, los estudiantes con aaccmm, en general, solo utilizaron los tres tipos de generalización algebraica: factual (GF), contextual (GC) simbólica (GS). Este aspecto ocurrió en todos los grupos de ppg comparados, a excepción del inicio de la secuencia de enseñanza-aprendizaje (ppg tipo A) en los cursos inferiores, donde ninguno de los estudiantes (L417, L517 y A3419) hizo uso de GS, porque todavía no se había introducido la explicación correspondiente.

En los ppg tipo A, los estudiantes con aaccmm hicieron uso de GF para las cuestiones de cálculo de términos (a, b y c) y de GC para la cuestión de expresión de la generalización (d) y la cuestión inicial (a) en A5619. Por su parte, los estudiantes ordinarios del último curso (L619 y L618) también utilizaron, en su mayoría, GF y GC en las mismas cuestiones, mientras que los estudiantes ordinarios de los cursos inferiores (L417 y L517) mostraron una gran presencia de GA en la cuestión inicial (a) y un uso similar de GA y GC en la cuestión de expresión de la generalización (d). En los ppg tipo D y E, los estudiantes hicieron uso de GF para las cuestiones de cálculo de términos (a y d para D y c para E) y de GS para las cuestiones de expresión de la generalización (b y c para D y a y b para E). No obstante, los porcentajes de uso de GS fueron mayores en los estudiantes con aaccmm. Estos hechos evidencian una mayor capacidad de abstracción por parte de los estudiantes con aaccmm que les permitió expresar la generalización empleando generalizaciones de tipo algebraico más eficientes en cada ppg y tipo de cuestión.

Por otra parte, la comparación de las respuestas de los dos estudios longitudinales nos dejará entrever las diferencias derivadas de las distintas duraciones de los estudios y cantidades de problemas resueltos en las dos secuencias de enseñanza-aprendizaje.

Las comparaciones de ambos estudios muestran resultados bastante similares en relación con la expresión de la generalización, si bien podemos encontrar alguna ligera diferencia. Al inicio de la secuencia de enseñanza-aprendizaje (ppg tipo A), más estudiantes de L417 fueron capaces de utilizar GF que en L517, cuyos estudiantes prefirieron el uso de GA. Más adelante, en la resolución del ppg tipo D, un mayor porcentaje de estudiantes en L618 decidió utilizar GS en la cuestión de aplicación de la generalización (d), mientras que la mayoría de estudiantes en L619 se decantó por GF. Al final de la secuencia de enseñanza-aprendizaje (ppg tipo E), hubo una mayor cantidad de estudiantes que empleó GS para la expresión de la generalización. Estos hechos nos muestran que, aunque ambos estudios han obtenido resultados muy similares, los estudiantes de L56 (L517 y L618) parecen mostrar una mayor predisposición al uso de GS en la resolución de ppg.

iii) Invertir operaciones y resolver ecuaciones

Aprender a invertir operaciones y resolver ecuaciones no es tarea fácil, tal y como han demostrado diversas investigaciones (Banerjee y Subramaniam, 2012; Jupri et al., 2015). No obstante, la destreza manipulativa de las expresiones algebraicas es una capacidad fundamental del álgebra que nos puede aportar información sobre el entendimiento y la comprensión de las expresiones formuladas. Por este motivo, consideramos que los perfiles de inversión obtenidos nos pueden ayudar a vislumbrar la capacidad desarrollada por nuestros estudiantes en este aspecto.

Por una parte, la comparación de las respuestas de los estudiantes con altas capacidades matemáticas y los estudiantes ordinarios nos aportará la información necesaria para identificar las características propias de los estudiantes con aaccmm en el contexto de los ppg.

Al inicio de la secuencia de enseñanza-aprendizaje (ppg tipo A), los estudiantes ordinarios de los cursos inferiores (L417 y L517) utilizaron estrategias propias de operaciones directas (I2) como perfil principal, seguido por el uso de inversiones aritméticas (I3). En cambio, los estudiantes con aaccmm (A3419) se enfocaron en I3, con más de un 70% de uso, y, además, un pequeño porcentaje fue capaz de implementar una inversión algebraica (I4). Esta elección diferenciada de perfiles de inversión nos muestra que A3419 presentó una mayor capacidad para invertir procesos mentales desde el inicio de la secuencia de enseñanza-aprendizaje.

Si realizamos esta misma comparación con los estudiantes del último curso (L619, L618 y A5619), observamos resultados bastante similares, mientras que los estudiantes ordinarios (L619 y L618) usaron los perfiles I2 (entorno al 20%) e I3 (alrededor del 50%), el 90% de los estudiantes con aaccmm se centraron en el perfil I3. Además, en cada grupo hubo un caso aislado de uso del perfil I4.

Más adelante, en la resolución del ppg tipo D, los estudiantes ordinarios presentaron una mayor variedad de perfiles, utilizando casi todos los perfiles de inversión descritos. Los estudiantes de L619 se centraron en I3 (45,5%) y en L618 se distribuyeron de forma similar, alrededor del 20%, entre las inversiones

aritméticas (I3), algebraicas (I4) y la resolución de ecuaciones (I5). Además, ambos grupos de estudiantes ordinarios también optaron por estrategias de ensayo y error (I1) y operaciones directas (I2), aunque en un menor porcentaje. En cambio, los estudiantes con aaccmm escogieron las estrategias más eficientes. En A5619 optaron por el uso de I3 e I4, siendo este último el perfil mayoritario, y en A3419 se distribuyeron de un modo uniforme entre I3, I4 e I5.

Al final de la secuencia de enseñanza-aprendizaje (ppg tipo E), los estudiantes ordinarios utilizaron todos los perfiles de inversión, siendo I3 el perfil principal tanto para L619 como para L618. Sin embargo, los estudiantes con aaccmm únicamente utilizaron los perfiles I3 e I4 con el mismo porcentaje. Estos hechos evidencian que, aunque la secuencia de enseñanza-aprendizaje implementada ayudó a desarrollar las capacidades de inversión y resolución de ecuaciones de los estudiantes ordinarios, los estudiantes con aaccmm siguen mostrando una mayor habilidad para desarrollar estrategias eficientes e invertir procesos mentales. No obstante, los estudiantes ordinarios mostraron una mayor predisposición al uso de ecuaciones (I5). Este aspecto probablemente sea consecuencia del entorno de resolución utilizado, ya que los estudiantes con aaccmm resolvieron los ppg con GeoPattern y, aunque la resolución de ecuaciones es posible, esta app no está pensada para hacerlo mediante esquemas visuales, tal y como se introdujo en esta secuencia de enseñanza-aprendizaje.

Por otra parte, la comparación de las respuestas de los dos estudios longitudinales nos dejará entrever diferencias derivadas de la duración de los estudios y las secuencias de enseñanza-aprendizaje implementadas.

Al inicio de la secuencia de enseñanza-aprendizaje (ppg tipo A), los estudiantes de los cursos inferiores (L417 y L517) utilizaron los perfiles I2 e I3 en proporciones similares. Sin embargo, los estudiantes de L417 mostraron una mayor predisposición a la resolución de cuestiones de inversión (e), ya que en L517 hubo un mayor porcentaje de estudiantes a los que no se le pudo asignar un perfil (50%).

Si realizamos esta misma comparación con los estudiantes del último curso (L619 y L618), observamos que las frecuencias de uso de I2 e I3 siguieron siendo

parecidas. No obstante, L618 presentó una mayor diversidad de perfiles, con una pequeña cantidad de estudiantes que optó por el uso de estrategias de ensayo y error (I1), así como de inversiones algebraicas (I4).

Más adelante, en la resolución del ppg tipo D, los estudiantes de L618 presentaron una mayor predisposición al uso de estrategias de índole algebraicas, como los perfiles I4 e I5, mientras que los de L619 se decantaron por el uso de I3 como perfil principal, con una presencia menor al 3% en I4 e I5.

Al final de la secuencia de enseñanza-aprendizaje (ppg tipo E), aunque ambos grupos utilizaron I3 como perfil principal, en L618 hubo un mayor porcentaje de estudiantes que optó por perfiles algebraicos como I4 e I5. En cambio, L619 presentó un mayor uso de estrategias de ensayo y error (I1). Estos hechos nos muestran que, aunque ambos estudios han obtenido resultados similares, los estudiantes de L56 (L517 y L618) parecen mostrar una mayor predisposición al uso de perfiles de tipo algebraico (I4 e I5) y, por tanto, más eficientes.

En referencia al uso de GeoPattern es importante señalar que el uso de papel y bolígrafo como entorno de resolución parece que ofreció una mayor versatilidad a los estudiantes para la resolución de las cuestiones de inversión (e), fomentando así la aparición de inversiones algebraicas (I Alg) y ecuaciones (E). En cambio, GeoPattern fomentó el uso de inversiones aritméticas (I Ar) y propició la utilización de otras estrategias de menor calidad, como el uso de operaciones directas (D) y ensayo y error (E-E). Esta ausencia de I Alg y E entre los estudiantes que emplearon GeoPattern pudo deberse a que esta app está ideada y diseñada para el desarrollo de la generalización a través de cuestiones directas y no presenta un entorno preparado para la resolución de ecuaciones a partir de esquemas visuales, tal y como se introdujo a los estudiantes.

6. CONCLUSIONS

In this chapter, we present the results and conclusions of this research. It has been organized into six different sections. In sections 6.1, 6.2, 6.3, and 6.4, we will discuss and summarize the results presented regarding the specific objectives of this research. In sections 6.5 and 6.6, we present contributions, limitations and future lines of work related to this research.

6.1. Design and implementation of a teaching-learning sequence of geometric pattern problems

The first specific objective of this research is *to design and experiment a teaching-learning sequence, based on solving geometric pattern problems, that allows the introduction of students to algebra.*

We have designed a set of geometric pattern problems (gpp), showed in Annex 1. The gpp were organized into several teaching-learning sequence, created to introduce early algebra to ordinary and mathematically gifted students in primary school grades 4, 5 and 6. These teaching-learning sequences of gpp are one of the original contributions of this work, since most research are developed using only a few gpp instead of presenting a complete sequence aimed to introduce and develop algebraic thinking in classroom students.

These sequences are the outcome of a process of design, revision, and redesign, when necessary, after each implementation with students. The teaching-learning sequences of gpp designed were (see 4.2.2.1): a set of two/three sequences

(with three class sessions per sequence), implemented as a longitudinal study (a sequence per year along two/three academic years) in ordinary classes of a primary school; and another set of three sequences (with one class session per sequence), implemented in an out-of-school workshop for mathematically gifted students.

We established five learning goals for the teaching-learning sequences: i) to identify and generalize functional relationships in gpp and to verbally express generalizations; ii) to express generalizations through algebraic expressions using words or letters as unknown; iii) to simplify algebraic expressions; iv) to reverse calculations in generalizations; and v) to solve equations. In section 4.2.2.1, we present a summary of the introductory explanations used to teach each learning goal. Also, as not all the learning goals apply to every sequence of gpp, we have included in this document some tables (4.2, 4.4, 4.6, and 4.8) matching sequences with goals.

Finally, provided the diversity of gpp used in our teaching-learning experiments, we have selected several criteria that allow us to compare different gpp and decide which one can be considered equivalent in terms of their mathematical content, structure and complexity. After applying these criteria, we have elaborated some groups of comparable gpp with similar characteristics. These groups have helped us analyze students' performance, even though they solve different geometric pattern problems. In section 4.2.3.1, we present our criteria to identify comparable geometric patterns and some patterns classified in comparable groups. This set of criteria is an original contribution of this research, since not only have we classified gpp using them, but we have also combined and organized those gpp establishing comparative groups.

6.2. Identification of strategies and description of students' profiles

The second specific objective of this research is *to identify and analyze strategies of resolution used by ordinary and mathematically gifted students throughout the*

implementation of the teaching-learning sequence designed, with the purpose of describing different profiles of reasoning used by the students.

In the process of reviewing and analyzing the students' responses to the gpp posed, we came across several solution strategies that were not described in the previous literature we have read. This led us to the need to create a theoretical framework that incorporates known students' solution of strategies as well as these emergent strategies observed in our experiments, as independent strategies or substrategies of the strategies described in the literature. So, as part of the research, we began an iterative process of analyzing samples of students' responses and revisioning the categories of strategies trying to find common ground between researchers and establish a definition for each strategy. In section 3.3, we present our theoretical framework as an outcome of this process and, in Annex 2, we include the templates used during the analysis. This theoretical framework is an original contribution of this work, since it includes new types of solution strategies that were not described in the literature read.

When we analyzed the ordinary students' outcomes along the teaching-learning sequences of gpp, we found that they rarely managed to use the same strategy for all the questions of a gpp. This fact linked with the large amount of data collected through our experiments, led us to create several profiles that allowed us to identify ways of students' behaviour when generalizing, applying their generalizations and reversing the calculations in their generalizations.

Consequently, we elaborated three groups of profiles, that are organized into several categories and subcategories of profiles. These groups included the profiles related to generalization of calculations of values for specific positions in the pattern, application of generalizations, and inversion of generalizations. In sections 5.1.1, 5.1.2 and 5.1.3, we describe all groups of profiles and include, as an example, a compilation of profiles and strategies used by our students in each type of gpp (A to E).

6.3. Assessment of students' performance along the longitudinal studies

The third specific objective of this research is *to compare ordinary students' profiles used along two or three academic years in the context of a longitudinal study.*

As a matter of organization, we divided the results obtained in our analysis into three groups related to the learning goals set for the teaching-learning sequences: i) to identify and generalize functional relationships in gpp; ii) to express the generalizations found; and iii) to invert operations and solve equations.

At the three-years longitudinal study (L456), students showed a great improvement in their generalization abilities, going from initially using a broad number of profiles, even low-quality profiles (G3 and G5), to focusing on the most efficient generalization and application profiles (G1.4, G4.9, and A1.4).

Regarding the expression of generalizations, students in the L456 sample used all types of ways to express their generalizations identified by Radford (2010), although we have found an improvement along the years in students' productions: they mainly expressed their generalizations with an appropriate type of generalization in each question, namely factual generalizations (GF) in direct questions of calculus and contextual (GC) and symbolic (GS) generalizations in questions that ask to express the generalization, depending on the learning goals of its session.

As for the inversion of the generalization, students in the L456 sample showed some learning along the teaching sequence, even though they still had a long way to go to gain confidence in producing symbolic algebraic expressions. First-year students preferred to use direct operations strategies (I2), whereas last-year students leant towards arithmetical inversions (I3). In addition, at the end of the experiments, a few students were able to apply algebraic inversions (I4) and solve equations (I5), although low-quality profiles (I1 and I2) were still a significant part of students' answers.

At the two-years longitudinal study (L56), students in 6th grade showed a limited improvement in their generalization abilities focusing on more efficient profiles, like constant use of functional strategies (G1.4) and an increase in the quality of the strategies used (G4 profiles), and they withdrew from low-quality profiles (G3 and G5). On the other hand, the increased difficulty of the gpp (type B) forced some students in 6th grade to go backwards and use G4 profiles instead of G1 profiles.

The students in the L56 sample used all types of generalizations, being GF, GC and GS the most frequent ones. Differences between students' percentages of use in each year demonstrate their learning and improvement. In the first session in grade 5, some students still needed to use arithmetic generalizations (GA) to express their generalization (question d), whereas, in the first session in grade 6, 80% of 6th students focused on GC. On the second session, both groups approached GS, but 6th graders performed better than 5th graders using it.

As for the inversion of the generalizations, students in the L56 sample demonstrated improvement and learning. Although 5th grade students tended to use I2 at the beginning of the teaching sequence, later profiles trend changed and both 5th and 6th grade students showed preferences for I3. Furthermore, some 6th grade students even applied I4 during the second session. Nevertheless, I1 profile was still a part of students' answers.

Finally, if we compare those two longitudinal studies, we observe similar performances in both samples, with only slight differences. On one hand, L456 appeared to develop and apply more efficient strategies on direct questions (generalization and application) than L56. On the other hand, L56 showed a higher tendency to express themselves by means of symbolic generalizations (GS) and use algebraic inversion profiles (I4 and I5). Also, the app GeoPattern encouraged different performances on both studies for direct questions, fostering a better and higher use of functional strategies on L456, but not on L56. However, on inversion questions, GeoPattern had a similar impact, encouraging arithmetic inversions (I3) and slightly pushing aside algebraic profiles.

6.4. Characteristics of mathematically gifted students

The fourth specific objective of this research is *to provide information that enable the identification of distinctive traits of mathematically gifted students respect to ordinary students in our research context.*

We have divided the results obtained in our analysis into three groups, related to the learning goals of the teaching-learning sequences: i) to identify and generalize functional relationships in gpp; ii) to express the generalizations found; and iii) to invert operations and solve equations.

Mathematically gifted students showed a huge capability to identify and generalize relationships from the very beginning of the teaching sequence, even on 3rd and 4th grades. Since the first gpp solved, they used only efficient profiles (gpp type A), such as using constant functional strategies (G1.4) and strategies of increasing quality (G4). Only some of the students in the A5617 sample in the pen and paper environment used low-quality strategies to express their generalizations (G3 and G5 profiles). This fact was probably a consequence of the different environments, since GeoPattern has demonstrated a promotion of geometric pattern understanding. However, even though their less efficient performance comparing with mathematically gifted students using GeoPattern, their results were better than those from ordinary students. At the end of the teaching-learning sequence, to solve the gpp of type D, all students used A1.4 profiles, which were focused on constant use of functional strategies. Only in the gpp type E, a few students needed to use another profile (A2.2) due to the increased difficulty of the gpp.

Thus, mathematically gifted students presented less variety of generalization and application profiles than ordinary students, focusing always on those more efficient and avoiding profiles with answers in blank or random. Also, their use of functional strategies was consistent through the questions, being functional decomposition (FD) the most frequent functional strategy, whereas ordinary students had a more irregular use of functional strategies with changes along the questions and functional (F) as the most frequent functional strategy.

Regarding the expression of generalizations, mathematically gifted students focused on algebraic expressions from the beginning of the experiment, even on grades as low as 3rd and 4th. Only some of the students using the pen and paper environment (A5617) made low-quality expressions of generalizations, such as arithmetic generalizations (GA). This fact was probably a consequence of the environment, since GeoPattern has demonstrated a promotion of geometric pattern understanding that helps to acquire a deep level of abstraction. At the beginning of the teaching-learning sequence, these algebraic generalizations were factual generalizations (GF) for direct calculation questions and contextual generalizations (GC) for questions of expression of generalizations. But, as the teaching progressed and the difficulty of the gpp increased, the students chose symbolic generalizations (GS) as their main form of expression. In contrast, ordinary students used all types of generalizations, even at the end of the teaching-learning sequence, and had lower percentages of use of algebraic generalizations, especially of GS.

As for the inversion of operations, mathematically gifted students showed preference for arithmetic inversions (I3) from the beginning of the teaching-learning sequence, even in grades 3rd and 4th. Furthermore, as the teaching progressed, more mathematically gifted students used algebraic inversions (I4) in each problem, even though some of them did it from the beginning of the experiment. On the contrary, ordinary students used almost all the inversion profiles, including the low-quality ones, to solve inversion questions, choosing direct operations strategies (I2) as the main profile at the beginning of the teaching sequence and I3 at the end. Despite mathematically gifted students' better performance, ordinary students exhibited a higher tendency to solve equations (I5). This difference was probably determined by the use of GeoPattern by mathematically gifted students to solve the gpp, since the app was not designed to solve equations through a visual and manipulative way.

As a final summary, we can state that mathematically gifted students presented higher capabilities to identify patterns and functional relationships than ordinary students, especially in a visual way, to develop efficient strategies, such as functional strategies and use them consistently along different questions of the gpp, to reach a deeper level of understanding and abstraction in their

generalization from the very beginning and to invert processes. These results point out that gpp are an adequate context to identify mathematically gifted students in the primary school grades previous to the beginning of the teaching algebra in the standard curriculum. They are also a useful tool to teach algebraic thinking to mathematically gifted students even in the early grades of primary school. These results and conclusions are aligned with findings from other researchers (Amit and Neria, 2008; Fritzlar and Karpinski-Siebold, 2012; Yildiz and Durmaz, 2021; Eraky et al., 2022).

6.5. Contributions of the study

The development of this research has led to elaborate some contributions to the early algebra and geometric pattern problems fields.

Firstly, we have presented a set of two/three sequences (with three class sessions per sequence), implemented as a longitudinal study (a sequence per year along two/three academic years) in ordinary classes of a primary school; and another set of three sequences (with one class session per sequence), implemented in an out-of-school workshop for mathematically gifted student. These sequences have been graded in complexity and difficulty in a way that would help introduce key knowledges to develop algebraic thinking.

In addition, we have designed an app thought exclusively to solve gpp, meanwhile keeping track of all the students' movements in order to follow students' reasoning.

Also, we have gathered criteria of complexity that would help group and compare geometric patterns, broadening the set of problems that have similar characteristics, and then, that can be used to compare students' behaviour.

Secondly, we have presented a new theoretical framework to classify the strategies used when solving gpp. It contains new categories and subcategories identified in our students' answers that we did not find in the previous literature. They can help teachers and researchers to have a better understanding of the process of reasoning used by students.

Furthermore, as most students were not consistent in the strategies they used throughout the different questions of the problems, we have created several profiles to describe their performance. There are three major groups profiles (of generalization, application, and inversion) and each of them is divided into categories and subcategories.

Finally, we have analyzed and compared results from our students' performances and reasonings in the longitudinal studies, and in the mathematically gifted students' studies. In addition, we have presented a list of capabilities shown by mathematically gifted students compared with ordinary students in the context of introduction of early algebra throughout gpp.

6.6. Limitations of the study and future lines of work

In the circumstances of this research, we can identify some limitations: the sample's size of mathematically gifted students, the immense amount of data collected and the available time to develop it.

Firstly, our sample of mathematically gifted students was relatively small compared to our sample of ordinary students. In general, mathematically gifted students are difficult to find as they represent only a 2% of the population. However, a larger number of participants would have helped us to do more accurate comparisons. Nevertheless, the mathematically gifted students included in this research are certified gifted and talented students, as they participate in some workshops organized by an association devoted to these students.

Secondly, all the geometric pattern problems solved by a considerable number of students through several sessions produced a tremendous amount of data that was complex and difficult to process, analyze, compile and revise. Even though some of our contributions are a consequence of our effort to transform all these data in a more manageable form, all the process was long and time consuming.

Finally, PhD students must develop and present their research within a stipulated amount of time. The fact that the time allowed is so similar with the duration of our longitudinal studies limits us in other parts of the research process. For this

reason, we had to leave apart some analysis that we would have liked to include in this memory but that we will address as a future line of work. For example, the analysis of the individual students' progress throughout the longitudinal study, problem by problem, to complement the analysis of the general progress in terms of percentages, or the analysis of the errors made by the students when solving the geometric pattern problems of the teaching-learning sequences.

Some other features related to our research can also be expanded. On one hand, it will be interesting to improve GeoPattern and open access to its use to the world market. This fact will help other teachers and researchers to introduce algebraic concepts through technology. Also, the teaching-learning sequences included in this memory could be improved from the analysis of the data collected through their implementation. On the other hand, there has been some analysis that we had to leave out of this memory. For instance, to keep track of students' development in algebra once they have started formal learning.

7. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Amit, M. y Neria, D. (2008). «Rising to the challenge»: using generalization in pattern problems to unearth the algebraic skills of talented pre-algebra students. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, 40(1), 111-129. <https://doi.org/10.1007/s11858-007-0069-5>
- Arbona, E. (2016). *Introducción al álgebra mediante problemas de patrones geométricos a un estudiante de Educación Primaria con altas capacidades matemáticas* (Trabajo Fin de Máster). Universitat de València. <http://hdl.handle.net/10550/56731>
- Arbona, E., Beltrán-Meneu, M. J. y Gutiérrez, Á. (2021). Estrategias empleadas por estudiantes de primaria en la resolución de problemas de patrones geométricos. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 133-140). SEIEM.
- Arbona, E., García-Costa, D., Beltrán-Meneu, M. J. y Gutiérrez, Á. (2018). GeoPattern, una app para resolver problemas de patrones geométricos en Primaria. *Edma 0-6*, 7(2), 1-23.
- Arcavi, A., Drijvers, P. y Stacey, K. (2017). *The learning and teaching of algebra*. Routledge.

- Aretxaga, L. (coord). (2013). *Orientaciones educativas. Alumnado con altas capacidades intelectuales*. Departamento de Educación, Universidades e Investigación del Gobierno Vasco.
- Arocas, E., Martínez, P. y Martínez, M. D. (2006). ¿Qué necesidades educativas tienen los alumnos más capaces? *Quaders digitals: Revista de Nuevas Tecnologías y Sociedad*, 42.
- Arocas, E., Martínez, P. y Martínez, M. D. (2009). *Intervención con el alumnado de altas capacidades en Educación Secundaria Obligatoria*. Conselleria de Educación, Generalitat Valenciana.
http://www.ceice.gva.es/documents/161862987/162822463/intervencion_al_tas.pdf
- Assmus, D. y Fritzlar, T. (2018). Mathematical giftedness and creativity in primary grades. En F. M. Singer (Ed.), *Mathematical creativity and mathematical giftedness* (pp. 55-81). Springer International Publishing.
https://doi.org/10.1007/978-3-319-73156-8_3
- Assmus, D. y Fritzlar, T. (2022). Mathematical creativity and mathematical giftedness in the primary school age range: an interview study on creating figural patterns. *ZDM Mathematics Education*, 54, 113-131.
<https://doi.org/10.1007/s11858-022-01328-8>
- Banerjee, R. y Subramaniam, K. (2012). Evolution of a teaching approach for beginning algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 80, 351-367.
- Benavides, M. (2008). *Caracterización de sujetos con talento en resolución de problemas de estructura multiplicativa* (Tesis doctoral). Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.
<http://hera.ugr.es/tesisugr/17349515.pdf>
- Benedicto, C. (2018). *Diseño y aplicación de un instrumento para valorar la demanda cognitiva de problemas de matemáticas resueltos por estudiantes de enseñanza obligatoria. El caso de las altas capacidades matemáticas* (Tesis doctoral). Universitat de València.

- Billings, E. M. H., Tiedt, T. L. y Slater, L. H. (2008). Algebraic thinking and pictorial growth patterns. *Teaching Children Mathematics*, 14(5), 302-308.
- Blanton, M., Isler-Baykal, I., Stroud, R., Stephens, A., Knuth, E. y Gardiner, A. M. (2019). Growth in children's understanding of generalizing and representing mathematical structure and relationships. *Educational Studies in Mathematics*, 102(2), 193-219. <https://doi.org/10.1007/s10649-019-09894-7>
- Blanton, M. y Kaput, J. J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(5), 412-446.
- Burjan, V. (1991). Mathematical giftedness - some questions to be answered. En F. J. Mönks, M. W. Katzko y H. W. Van Boxtel (Eds.), *Education of the gifted in Europe: theoretical and research issues* (pp. 165-170). Swetz y Zeitlingen.
- Byrd, C. E., McNeil, N. M., Chesney, D. L. y Matthews, P. G. (2015). A specific misconception of the equal sign acts as a barrier to children's learning of early algebra. *Learning and Individual Differences*, 38, 61-67. <https://doi.org/10.1016/j.lindif.2015.01.001>
- Cai, J. y Knuth, E. (2011). *Early Algebraization*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4>
- Callejo, M. L., García-Reche, A. y Fernández, C. (2016). Pensamiento algebraico de estudiantes de Educación Primaria (6-12 años) en problemas de generalización de patrones lineales. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 10, 5-25.
- Cañadas, M. C. y Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruiz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en educación matemática: Homenaje a Luis Rico* (pp. 209-218). Comares.
- Carraher, D. W. y Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. En F. K. Lester Jr (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 669-705). NCTM.

- Carraher, D. W. y Schliemann, A. D. (2018). Cultivating early algebraic thinking. En C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds: The global evolution of an emerging field of research and practice* (pp. 107-138). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5>
- Carraher, D. W., Schliemann, A. D. y Brizuela, B. (2001). Can young students operate on unknowns? En M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 130-140). Freudenthal Institute y Utrecht University.
- Castro, E. (2008). Resolución de problemas. Ideas, tendencias e influencias en España. En R. Luengo González, B. Gómez Alfonso, M. Camacho Machín y L. J. Blanco Nieto (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XII*. SEIEM.
- Castro, E., Benavides, M. y Segovia, I. (2006). Cuestionario para caracterizar a niños con talento en resolución de problemas de estructura multiplicativa. *Faísca*, 11(13), 4-22. https://doi.org/10.5209/rev_FAIS.2006.v11.n13.8620
- Chimoni, M., Pitta-Pantazi, D. y Christou, C. (2020). The impact of two different types of instructional tasks on students' development of early algebraic thinking. *Journal for the Study of Education and Development*, 1-50. <https://doi.org/10.1080/02103702.2020.1778280>
- Chua, B. L. (2009). Features of generalising tasks: Help or hurdle to expressing generality? *Australian Mathematics Teacher*, 65(2), 18-24. <http://eric.ed.gov/ERICWebPortal/recordDetail?accno=EJ853829>
- Clements, D. H. y Sarama, J. (2009). *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach*. Erlbaum.
- Cobb, P., Confrey, J., DiSessa, A., Lehrer, R. y Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher*, 32(1), 9-13. <https://doi.org/10.3102/0013189X032001009>
- Cobb, P. y Gravemeijer, K. (2008). Experimenting to support and understand learning processes. En A. E. Kelly, R. A. Lesh y J. Y. Baek (Eds.), *Handbook*

- of design research methods in education. Innovations in science, technology, engineering, and mathematics learning and teaching* (pp. 68-95). Routledge.
- Cobb, P., Jackson, K. y Dunlap, C. (2015). Design research: An analysis and critique. En L. D. English y D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 481-503). Routledge.
<https://doi.org/10.4324/9780203448946>
- Conselleria de Educació, Investigació, C. y D. (2019). Orden 20/2019, de 30 de abril, de la Conselleria de Educació, Investigació, Cultura y Deporte, por la cual se regula la organización de la respuesta educativa para la inclusión del alumnado en los centros docentes sostenidos con fondos públicos del sistema educativo valenciano. *DOGV*, 8540, 20853-20897.
- Cooper, T. y Warren, E. (2011). Years 2 to 6 students' ability to generalize: Models, representations and theory for teaching and learning. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization* (pp. 187-214). Springer.
- De Corte, E., Verschaffel, L. y Op't Eynde, P. (2000). Self-regulation. A characteristic and a goal of mathematics education. En M. Boekaerts, P. R. Pintrich y M. Zeidner (Eds.), *Handbook of self-regulation* (pp. 687-726). Academic Press.
- Díaz, O., Sánchez, T., Pomar, C. y Fernández, M. (2008). Talentos matemáticos: análisis de una muestra. *Faísca*, 13(15), 1-11.
- Ellis, A. B. (2007). A taxonomy for categorizing generalizations: Generalizing actions and reflection generalizations. *Journal of the Learning Sciences*, 16(2), 221-262.
- English, L. y Warren, E. (1998). Introducing the variable through pattern exploration. *The Mathematics Teacher*, 91(2), 166-170.
- Eraky, A., Leikin, R. y Hadad, B. S. (2022). Relationships between general giftedness, expertise in mathematics, and mathematical creativity that associated with pattern generalization tasks in different representations. *Asian Journal for Mathematics Education*, 1(1), 36-51.

- Erdogan, F. y Gul, N. (2022). Reflections from the generalization strategies used by gifted students in the growing geometric pattern task. *Journal of Gifted Education and Creativity*, 9(4), 369-386.
- Escrivà, M. T. (2016). *Habilitats de visualització manifestades pels alumnes de primària quan resolen activitats de geometria 3D i la relació d'aquestes amb el talent matemàtic* (Trabajo Fin de Máster). Universitat de València.
- Filloy, E., Puig, L. y Rojano, T. (2008). *Educational algebra: A theoretical and empirical approach*. Springer.
- Filloy, E. y Rojano, T. (1989). Solving equations: The transition from arithmetic to algebra. *For the Learning of Mathematics*, 9(2), 19-25.
- Freiman, V. (2006). Problems to discover and to boost mathematical talent in early grades: A challenging situations approach. *The Montana Mathematics Enthusiast*, 3(1), 51-75.
- Friel, S. N. y Markworth, K. A. (2009). A framework for analyzing geometric pattern tasks. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 15(1), 24-33.
- Fritzlar, T. y Karpinski-Siebold, N. (2012). Continuing patterns as a component of algebraic thinking - An interview study with primary school students. Artículo presentado en el *12th International Congress on Mathematical Education (ICME12)*.
- Gagné, F. (2000). *A differentiated model of giftedness and talent (DMGT)*. *Manuscrito no publicado*.
<http://www.curriculumsupport.education.nsw.gov.au/policies/gats/assets/pdf/poldmgt2000rtcl.pdf>
- García-Cruz, J. A. (1998). *El proceso de generalización desarrollado por alumnos de secundaria en problemas de generalización lineal* (Tesis doctoral). Universidad de la Laguna.
- García-Cruz, J. A. y Martinón, A. (1997). Actions and invariant schemata in linear generalising problems. En E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21st*

- Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 289-296). PME.
- García-Reche, A., Callejo, M. L. y Fernández, C. (2015). La aprehensión cognitiva en problemas de generalización de patrones lineales. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en educación matemática XIX* (pp. 279-288). SEIEM.
- Gardner, H. (1995). *Inteligencias múltiples. La teoría en la práctica*. Paidós.
- Gardner, H. (2006). *Multiple intelligences: New horizons in theory & practice*. Perseus Books.
- González, M. J. (2007). *Detección y estímulo de talento matemático. Un proyecto para Cantabria*.
https://www.estalmat.unican.es/documentos/Curso_Verano_2007/Presentacion_Estalmat_MJ.pdf
- González-Calero, J. A., Arnau, D., Puig, L. y Arevalillo-Herráez, M. (2015). Intensive scaffolding in an intelligent tutoring system for the learning of algebraic word problem solving. *British Journal of Educational Technology*, 46(6), 1189-1200.
- Greenes, C. (1981). Identifying the gifted student in mathematics. *The Arithmetic Teacher*, 28(6), 14-17.
- Gutiérrez, Á. y Jaime, A. (2013). Exploración de los estilos de razonamiento de estudiantes con altas capacidades matemáticas. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 319-326). SEIEM.
- Hidalgo-Moncada, D. y Cañadas, M. C. (2020). Intervenciones en el trabajo con una tarea de generalización que involucra las formas directa e inversa de una función en sexto de primaria. *PNA*, 14(3), 204-225.
- Huntzinger, E. M. (2008). Exploring generalization through pictorial growth patterns. En C. E. Greenes y R. Rubenstein (Eds.), *Algebra and algebraic thinking in school mathematics* (pp. 279-293). NCTM.

- Jaime, A. y Gutiérrez, Á. (2014). La resolución de problemas para la enseñanza a alumnos de educación primaria con altas capacidades matemáticas. En B. Gómez y L. Puig (Eds.), *Resolver problemas. Estudios en memoria de Fernando Cerdán* (pp. 147-190). Publicaciones de la Universidad de Valencia (PUV).
- Jefatura del Estado. (2006). Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. *BOE*, 106, 17158-17207.
- Jefatura del Estado. (2020). Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. *BOE*, 340, 122868-122953.
- Johnson, D. T. (2000). *Teaching mathematics to gifted students in a mixed-ability classroom*. Council for Exceptional Children.
- Jupri, A., Drijvers, P. y Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2015). Improving grade 7 atudents' achievement in initial algebra through a technology-based intervention. *Digital Experiences in Mathematics Education*, 1(1), 28-58. <https://doi.org/10.1007/s40751-015-0004-2>
- Jurdak, M. E. y El Mouhayar, R. R. (2014). Trends in the development of student level of reasoning in pattern generalization tasks across grade level. *Educational Studies in Mathematics*, 85(1), 75-92. <https://doi.org/10.1007/s10649-013-9494-2>
- Kaput, J. J. (1998). Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by “algebrafying” the K-12 curriculum. En N. R. Council, N. C. of T. of M. and M. S. E. Board, M. and E. E. Center for Science y N. A. of Science (Eds.), *The nature and role of algebra in the K-14 curriculum: Proceedings of a national symposium* (pp. 25-26). National Academies Press.
- Kaput, J. J. (1999). Teaching and learning a new algebra. En E. Fennema y T. A. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133-155). Erlbaum.

- Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? En J. J. Kaput, D. W. Carraher y M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). Taylor y Francis Group.
- Kattou, M., Christou, C. y Pitta-Pantazi, D. (2015). Mathematical creativity or general creativity? En K. Krainer y N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1016-1023). Charles University y ERME.
- Kattou, M., Kontoyianni, K. y Pitta-Pantazi, D. (2011). Does mathematical creativity differentiate mathematical ability? En M. Pytlak, T. Rowland y E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the seventh Conference of the European Research in Mathematics Education* (pp. 1056-1065). University of Rzeszów y ERME.
- Kattou, M., Kontoyianni, K., Pitta-Pantazi, D. y Christou, C. (2013). Connecting mathematical creativity to mathematical ability. *ZDM*, 45(2), 167-181. <https://doi.org/10.1007/s11858-012-0467-1>
- Kennard, R. (2001). *Teaching mathematically able children*. David Fulton.
- Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it. *The Mathematics Educator*, 8(1), 139-151.
- Kieran, C. (2018). *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5>
- Kieran, C. (2022). The multi-dimensionality of early algebraic thinking: background, overarching dimensions, and new directions. *ZDM Mathematics Education*, 54, 1131-1150. <https://doi.org/10.1007/s11858-022-01435-6>
- Knuth, E. J., Alibali, M. W., Hattikudur, S., McNeil, N. M. y Stephens, A. C. (2008). The importance of equal sign understanding in the middle grades. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 13(9), 514-519. <https://doi.org/10.5951/mtms.13.9.0514>

- Krebs, A. S. (2003). Middle grades students' algebraic understanding in a reform curriculum. *School Science and Mathematics*, 103(5), 233-245.
<https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2003.tb18204.x>
- Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in school children*. University of Chicago Press.
- Lannin, J. (2005). Generalization and justification: The challenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities. *Mathematical Thinking and Learning*, 7(3), 231-258. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0703_3
- Lannin, J., Barker, D. y Townsend, B. (2006). Algebraic generalisation strategies: Factors influencing student strategy selection. *Mathematics Education Research Journal*, 18(3), 3-28. <https://doi.org/10.1007/BF03217440>
- Lee, L. y Freiman, V. (2006). Developing algebraic thinking through pattern exploration. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 11(9), 428-433.
- Leikin, R. (2009). Exploring mathematical creativity using multiple solution tasks. En R. Leikin, A. Berman y B. Koichu (Eds.), *Creativity in mathematics and the education of gifted students* (pp. 129-145). Sense Publishers.
- Leikin, R. (2010). Teaching the mathematically gifted. *Gifted Education International*, 27(2), 161-175.
- Leikin, R. y Lev, M. (2013). Mathematical creativity in generally gifted and mathematically excelling adolescents: What makes the difference? *ZDM - Mathematics Education*, 45(2), 183-197.
- Lenz, D. (2019). Relational thinking and operating on unknown quantities. A study with 5 to 10 years old children. En U. T. Jankvist, M. van den Heuvel-Panhuizen y M. Veldhuis (Eds.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 590-597). Freudenthal Group y Freudenthal Institute, Utrecht University, Netherlands y ERME.
- Markworth, K. A. (2010). *Growing and growing: promoting functional thinking with geometric growing patterns* (Tesis doctoral). Univeristy of North Carolina.

- Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. En N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (pp. 65-86). Kluwer.
- Merino, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2013). Estrategias utilizadas por alumnos de primaria en una tarea de generalización basada en un ejemplo genérico. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 383-392). SEIEM.
- Miller, R. C. (1990). *Discovering mathematical talent*. ERIC.
- Ministerio de Educación y Formación Profesional. (2022). Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. *BOE*, 52, 24386-24504.
- Molina, M., Castro, E. y Castro, E. (2009). Elementary students' understanding of the equal sign in number sentences. *Electronic Journal of Research in Education Psychology*, 7(17), 341-368.
<https://doi.org/10.25115/ejrep.v7i17.1345>
- Molina, M., Castro, E., Molina, J. L. y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, 29(1), 75-88.
- Mulligan, J., Oslington, G. y English, L. (2020). Supporting early mathematical development through a 'pattern and structure' intervention program. *ZDM - Mathematics Education*, 52, 663-676. <https://doi.org/10.1007/s11858-020-01147-9>
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. NCTM.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2008). NCTM position statement on algebra: What, when, and for whom. *NCTM News Bulletin*, 45(5), 2.
- National Library of Virtual Manipulatives (NLVM) (2023). <http://nlvm.usu.edu/es/nav/vlibrary.html>. Utah State University.

- Ndlovu, W. C. (2011). *Learners' mathematical reasoning when generalizing from number patterns in the general education and training phase* (Tesis doctoral). University of the Witwatersrand.
- Nolte, M. (2011). Ein hoher IQ garantiert eine hohe mathematische Begabung! Stimmt das? - Ergebnisse aus neun Jahren Talentsuche in PriMa-Projekt Hamburg [A high IQ guarantees high mathematical talent! Is this true? - Results from nine years of talent search in the PriMa project. En R. Haug y L. Holzäpfel (Eds.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2011* (pp. 611-614). WTM.
- Nolte, M. (2013). Fragen zur Kiagnostik besonderer mathematischer Begabung [Questions for diagnosing special mathematical talent]. En T. Fritzlar y F. Käpnick (Eds.), *Mathematische Begabungen. Denkansätze zu einem komplexen Themenfeld aus verschiedenen Perspektiven*. WTM.
- Pasarín, M. J., Feijoo, M., Díaz, O. y Rodríguez, L. (2004). Evaluación del talento matemático en Educación Secundaria. *Faísca*, 11, 83-102.
- PhET Interactive Simulations (2023). <https://phet.colorado.edu/es/>. University of Colorado.
- Piggott, J. (2008). *Rich tasks and contexts*. NRICH. <https://nrich.maths.org/5662>
- Pitta-Pantazi, D. (2017). What have we learned about giftedness and creativity? An overview of a five years journey. En R. Leikin y B. Sriraman (Eds.), *Creativity and giftedness* (pp. 201-223). Springer.
https://doi.org/10.1007/978-3-319-38840-3_13
- Pitta-Pantazi, D. y Christou, C. (2009). Psychological aspect: identification of giftedness in earlier ages. En M. Tzekaki, M. Kaldrimidou y H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 191-194). PME.
- Polya, G. (1966). *Matemáticas y razonamiento plausible*. Tecno.
- Prediger, S. (2010). How to develop mathematics-for-teaching and for understanding: The case of meanings of the equal sign. *Journal of*

- Mathematics Teacher Education*, 13, 73-93. <https://doi.org/10.1007/s10857-009-9119-y>
- Radford, L. (2001). Factual, contextual and symbolic generalizations in algebra. En M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 81-88). Freudenthal Institute y Utrecht University.
- Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning*, 5(1), 37-70. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0501_02
- Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: A semiotic perspective. En S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Sáiz y A. Méndez (Eds.), *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 2-21). Universidad Pedagógica Nacional.
- Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA*, 4(2), 37-62.
- Radford, L. (2011a). Embodiment, perception and symbols in the development of early algebraic thinking. En B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 17-24). PME.
- Radford, L. (2011b). Grade 2 students' non-symbolic algebraic thinking. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization* (pp. 303-322). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4>
- Radford, L. (2012). On the development of early algebraic thinking. *PNA*, 6(4), 117-133. <http://hdl.handle.net/10481/20052>
- Radford, L. (2013). En torno a tres problemas de generalización. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina y I. Segovia (Eds.), *Investigación en didáctica de la matemática. Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 3-12). Editorial Comares.

- Radford, L. (2014). The progressive development of early embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Journal*, 26(2), 257-277. <https://doi.org/10.1007/s13394-013-0087-2>
- Radford, L. (2018). The emergence of symbolic algebraic thinking in primary school. En C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds: The global evolution of an emerging field of research and practice* (pp. 3-25). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5>
- Ramírez, R. (2012). *Habilidades de visualización de los alumnos con talento matemático* (Tesis doctoral). Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada. <https://digibug.ugr.es/bitstream/10481/23889/1/21400763.pdf>
- Renzulli, J. S. (1998). Three-ring conception of giftedness. En S. M. Baum, S. M. Reis y L. R. Maxfield (Eds.), *Nurturing the gifts and talents of primary grade students*. Creative Learning Press.
- Reyes-Santander, P. y Karg, A. (2009). Una aproximación al trabajo con niños especialmente dotados en matemáticas. En M. J. González, M. T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 403-414). SEIEM.
- Rivera, F. (2007). Visualizing as a mathematical way of knowing: Understanding figural generalization. *The Mathematics Teacher*, 101(1), 69-75. <https://www.jstor.org/stable/20876033>
- Rivera, F. (2010a). Second grade students' preinstructional competence in patterning activity. En M. Pinto & T. Kawasaki (Eds.), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 81-88). PME.
- Rivera, F. (2010b). Visual templates in pattern generalization activity. *Educational Studies in Mathematics*, 73(3), 297-328. <https://doi.org/10.1007/s10649-009-9222-0>
- Rivera, F. (2013). *Teaching and learning patterns in school mathematics*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-94-007-2712-0>

- Rivera, F. y Becker, J. R. (2005). Figural and numerical modes of generalizing in algebra. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 11(4), 198-203. <http://www.jstor.org/stable/41182215>
- Rivera, F. y Becker, J. R. (2011). Formation of pattern generalization involving linear figural patterns among middle school students: Results of a three-year study. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization* (pp. 323-366). Springer.
- Rojas, S., Jiménez, W. y Mora, L. (2009). El uso de la resolución de problemas como instrumento para la caracterización de talento en matemáticas. En 10º *Encuentro Colombiano de Matemática Educativa*. ASOCOLME.
- Sasman, M. C., Olivier, A y Linchevski, L. (1999). Factors influencing students' generalisation thinking processes. Comunicación presentada en la 23rd *Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME)*.
- Singer, F. M., Sheffield, L. J., Freiman, V. y Brandl, M. (2016). *Research on and activities for mathematically gifted students*. Springer.
- Skemp, R. R. (1986). *The psychology of learning mathematics*. Penguin Books.
- Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. En J. J. Kaput, D. W. Carraher y M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 133-160). Taylor & Francis.
- Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational Studies in Mathematics*, 20(2), 147-164. <https://doi.org/10.1007/BF00579460>
- Stephens, A., Ellis, A. B., Blanton, M. y Brizuela, B. (2017). Algebraic thinking in the elementary and middle grades. En J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 386-420). NCTM.
- Sternberg, R. J. (1997). A triarchic view of giftedness: Theory and practice. En N. Coleangelo y G. A. Davis (Eds.), *Handbook of gifted education* (pp. 43-53). Allyn and Bacon.

- Terman, L. M. (1925). *Genetic studies of genius: Mental and physical traits of a thousand gifted children*. Stanford University Press.
- Torrance, E. P. (1974). *Torrance tests of creative thinking*. Scholastic Testing Service.
- Torrego, J. C. (coord). (2011). *Alumnos con altas capacidades y aprendizaje cooperativo. Un modelo de respuesta educativa*. Fundación SM. https://www.fundacionpryconsa.es/media/Altas_capacidades_y_aprendizaje_cooperativo.pdf
- Tourón, J., Repáraz, C., Peralta, F., Gaviria, J. L., Fernández, R., Ramos, J. M. y Reyero, M. (1998). Identificación del talento verbal y matemático: descripción de un proyecto de validación. En A. Sipán (Ed.), *Respuestas educativas para alumnos superdotados y talentosos: Actas del congreso internacional*. Mira.
- Ureña, J., Ramírez-Uclés, R., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2022). Generalization strategies and representations used by final-year elementary school students. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2022.2058429>
- Ureña, J., Ramírez-Uclés, R., Molina, M. y Cañadas, M. C. (2023). Generalization: strategies and representations used by sixth to eighth graders in a functional context. *Mathematics Education Research Journal*.
- Warren, E. (2005). Young children's ability to generalise the pattern rule for growing patterns. En H. L. Chick y J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 305-312). PME.
- Warren, E. y Cooper, T. (2008). Generalising the pattern rule for visual growth patterns: Actions that support 8 year olds' thinking. *Educational Studies in Mathematics*, 67(2), 171-185. <https://doi.org/10.1007/s10649-007-9092-2>
- Warren, E., Trigueros, M. y Ursini, S. (2016). Research on the learning and teaching of algebra. En Á. Gutiérrez, G. C. Leder y P. Boero (Eds.), *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics*

Education (pp. 73-108). Sense Publishers. <https://doi.org/10.1007/978-94-6300-561-6>

WeWantToKnow AS. (2023). *DragonBox*. WeWantToKnow AS. <https://dragonbox.com>

Wilkie, K. J. (2014). Learning to like algebra through looking: Developing upper primary students' functional thinking with visualisations of growing patterns. *Australian Primary Mathematics Classroom*, 19(4), 24-33.

Yildiz, D. G. y Durmaz, B. (2021). A gifted high school student's generalization strategies of linear and nonlinear patterns via Gauss's approach. *Journal for the Education of the Gifted*, 44(1), 56-80.

Zapatera, A. y Callejo, M. L. (2011). Nivel de éxito y flexibilidad en el uso de estrategias resolviendo problemas de generalización de pautas lineales. En M. Marín, G. Fernández, L. J. Blanco y M. Palarea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 599-610). SEIEM.

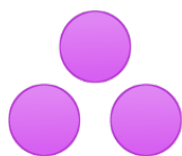
Zapatera, A. y Callejo, M. L. (2013). Cómo interpretan los estudiantes para maestro el pensamiento matemático de los alumnos sobre el proceso de generalización. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 535-544). SEIEM.

ANEXOS

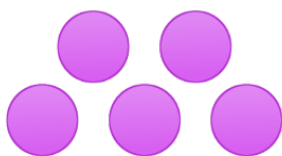
ANEXO 1

Bolos

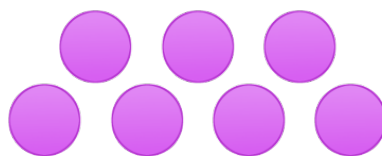
Un grupo de amigos hemos decidido jugar a los bolos. Pero como nos cuesta tirar al suelo varios bolos de una sola tirada, queremos que estos vayan aumentando poco a poco. Hemos decidido que aumenten del siguiente modo:



Tirada 1



Tirada 2

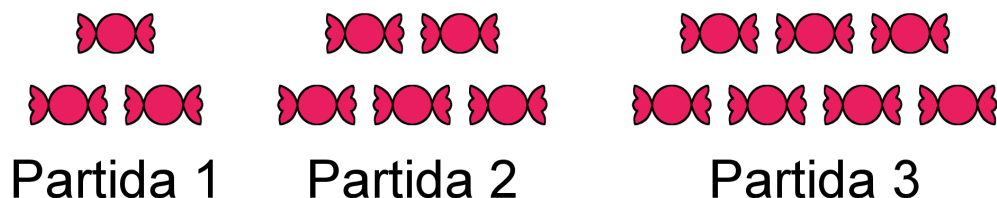


Tirada 3

B	a) ¿Cuántos bolos tendremos colocados cuando hagamos la tirada 5? ¿Cómo lo sabes? b) ¿Cuántos bolos tendremos colocados cuando hagamos la tirada 12? ¿Cómo lo sabes? c) ¿Cuántos bolos tendremos colocados cuando hagamos la tirada 65? ¿Cómo lo sabes? d) ¿Cómo le explicarías a un amigo cómo puede calcular el número de bolos que tendremos colocados en cada tirada? ¿Puedes escribirle alguna fórmula? e) Si hay 95 bolos colocados, ¿qué número de tirada es? ¿Cómo lo sabes?
D	a) ¿Cuántos bolos tendremos colocados cuando hagamos la tirada 65? ¿Cómo lo sabes? b) Escribe la fórmula que utilizarías para calcular el número de bolos que tendremos colocados en cada tirada. c) ¿Crees que podríamos escribir la fórmula del apartado b) de un modo más simple? Escríbela. d) Utiliza la fórmula que has escrito en el apartado c) para averiguar cuántos bolos tendremos colocados cuando hagamos la tirada 12. e) Si hay 87 bolos colocados, ¿qué número de tirada es? ¿Cómo lo sabes?

Caramelos

Paula está jugando a cartas con sus amigos. El ganador de cada partida consigue caramelos. En cada partida ganan una cantidad distinta de caramelos:



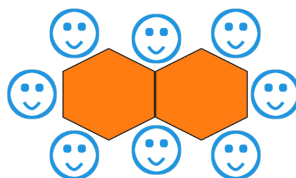
B	a) ¿Cuántos caramelos conseguirá quien gane la partida 5? ¿Cómo lo sabes? b) ¿Cuántos caramelos conseguirá quien gane la partida 12? ¿Cómo lo sabes? c) ¿Cuántos caramelos conseguirá quien gane la partida 65? ¿Cómo lo sabes? d) ¿Cómo le explicarías a un amigo cómo puede calcular el número de caramelos que conseguirá quien gane cada partida? ¿Puedes escribirle alguna fórmula? e) Si consigue 95 caramelos, ¿qué número de partida es? ¿Cómo lo sabes?
D	a) ¿Cuántos caramelos conseguirá quien gane la partida 65? ¿Cómo lo sabes? b) Escribe la fórmula que utilizarías para calcular el número de caramelos que conseguirá quien gane cada partida. c) ¿Crees que podríamos escribir la fórmula del apartado b) de un modo más simple? Escríbela. d) Utiliza la fórmula que has escrito en el apartado c) para averiguar cuántos caramelos conseguirá quien gane la partida 12. e) Si consigue 87 caramelos, ¿qué número de partida es? ¿Cómo lo sabes?

Clase

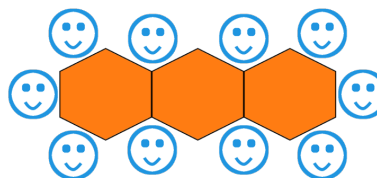
Una maestra quiere sentar a sus alumnos del siguiente modo:



1 mesa



2 mesas

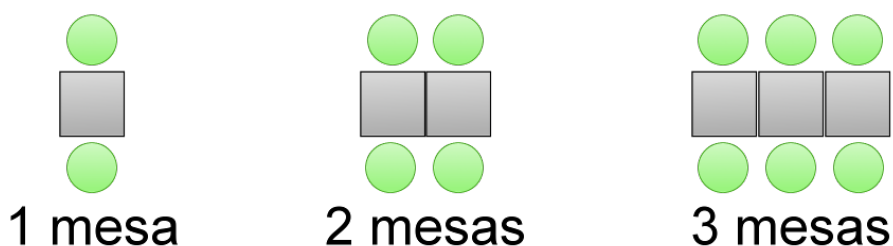


3 mesas

A	a) ¿Cuántos alumnos cabrán en 5 mesas? ¿Cómo lo sabes? b) ¿Cuántos alumnos cabrán en 13 mesas? ¿Cómo lo sabes? c) ¿Cuántos alumnos cabrán en 38 mesas? ¿Cómo lo sabes? d) ¿Cómo le explicarías a un amigo cómo puede calcular el número de alumnos que podrán sentarse según el número de mesas disponibles? e) Si ha conseguido sentar a 64 alumnos, ¿cuántas mesas ha necesitado? ¿Cómo lo sabes?
D	a) ¿Cuántos alumnos cabrán en 5 mesas? ¿Cómo lo sabes? b) Escribe la fórmula que utilizarías para calcular los alumnos que cabrán dependiendo del número de mesas. c) ¿Crees que podríamos escribir la fórmula del apartado b) de un modo más simple? Escríbela. d) Utiliza la fórmula que has escrito en el apartado c) para averiguar cuántos alumnos cabrán en 13 mesas. e) Si ha conseguido sentar a 64 alumnos, ¿cuántas mesas ha necesitado? ¿Cómo lo sabes?

Cumpleaños 1

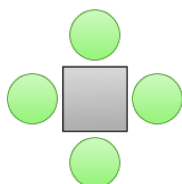
Este sábado, María va a realizar una comida con sus amigos y familiares para celebrar que ha cumplido 12 años. Para ello, quiere calcular cuántas mesas y sillas le harán falta. Quiere sentarlos del siguiente modo:



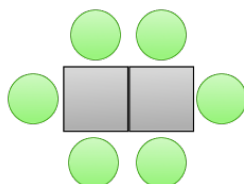
A	a) ¿Cuántos invitados cabrán en 6 mesas? ¿Cómo lo sabes? b) ¿Cuántos invitados cabrán en 15 mesas? ¿Cómo lo sabes? c) ¿Cuántos invitados cabrán en 50 mesas? ¿Cómo lo sabes? d) ¿Cómo le explicarías a un amigo cómo puede calcular el número de invitados que cabrán dependiendo del número de mesas? e) Si hay 22 invitados, ¿cuántas mesas habrá? ¿Cómo lo sabes?
C	a) ¿Cuántos invitados cabrán con 6 mesas? ¿Cómo lo sabes? b) ¿Cuántos invitados cabrán con 50 mesas? ¿Cómo lo sabes? c) ¿Cómo le explicarías a un amigo cómo puede calcular el número de invitados que cabrán en función del número de mesas? ¿Puedes escribirle alguna fórmula? d) Utiliza la fórmula que has escrito en el apartado c) para averiguar cuántos invitados cabrán con 15 mesas. e) Si hay 22 invitados, ¿cuántas mesas habrá? ¿Cómo lo sabes?

Cumpleaños 2

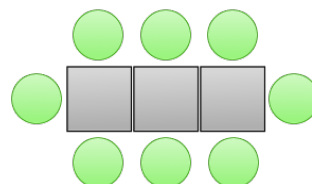
Este sábado, María va a realizar una comida con sus amigos y familiares para celebrar que ha cumplido 12 años. Para ello, quiere calcular cuántas mesas y sillas le harán falta. Quiere sentarlos del siguiente modo:



1 mesa



2 mesas



3 mesas

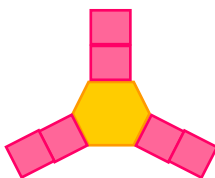
A	a) ¿Cuántos invitados cabrán en 6 mesas? ¿Cómo lo sabes? b) ¿Cuántos invitados cabrán en 15 mesas? ¿Cómo lo sabes? c) ¿Cuántos invitados cabrán en 50 mesas? ¿Cómo lo sabes? d) ¿Cómo le explicarías a un amigo cómo puede calcular el número de invitados que cabrán dependiendo del número de mesas? e) Si hay 22 invitados, ¿cuántas mesas habrá? ¿Cómo lo sabes?
B	a) ¿Cuántos invitados cabrán con 6 mesas? ¿Cómo lo sabes? b) ¿Cuántos invitados cabrán con 15 mesas? ¿Cómo lo sabes? c) ¿Cuántos invitados cabrán con 50 mesas? ¿Cómo lo sabes? d) ¿Cómo le explicarías a un amigo cómo puede calcular el número de invitados que cabrán en función del número de mesas? ¿Puedes escribirle alguna fórmula? e) Si hay 22 invitados, ¿cuántas mesas habrá? ¿Cómo lo sabes?
C	a) ¿Cuántos invitados cabrán con 6 mesas? ¿Cómo lo sabes? b) ¿Cuántos invitados cabrán con 50 mesas? ¿Cómo lo sabes? c) ¿Cómo le explicarías a un amigo cómo puede calcular el número de invitados que cabrán en función del número de mesas? ¿Puedes escribirle alguna fórmula? d) Utiliza la fórmula que has escrito en el apartado c) para averiguar cuántos invitados cabrán con 15 mesas. e) Si hay 22 invitados, ¿cuántas mesas habrá? ¿Cómo lo sabes?

Dibujo

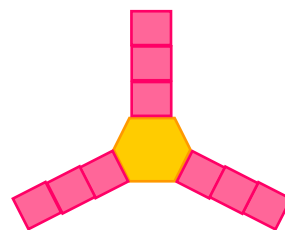
En el patio, los niños del colegio están haciendo un dibujo y cada día dibujan nuevos cuadrados del siguiente modo:



Día 1



Día 2



Día 3

B

- a) ¿Cuántos cuadrados tendrá el día 6? ¿Cómo lo sabes?
- b) ¿Cuántos cuadrados tendrá el día 14? ¿Cómo lo sabes?
- c) ¿Cuántos cuadrados tendrá el día 35? ¿Cómo lo sabes?
- d) ¿Cómo le explicarías a un amigo cómo puede calcular el número de cuadrados que tendrá cada día? ¿Puedes escribirle alguna fórmula?
- e) Si tienen 66 cuadrados, ¿qué día será? ¿Cómo lo sabes?

Edificios

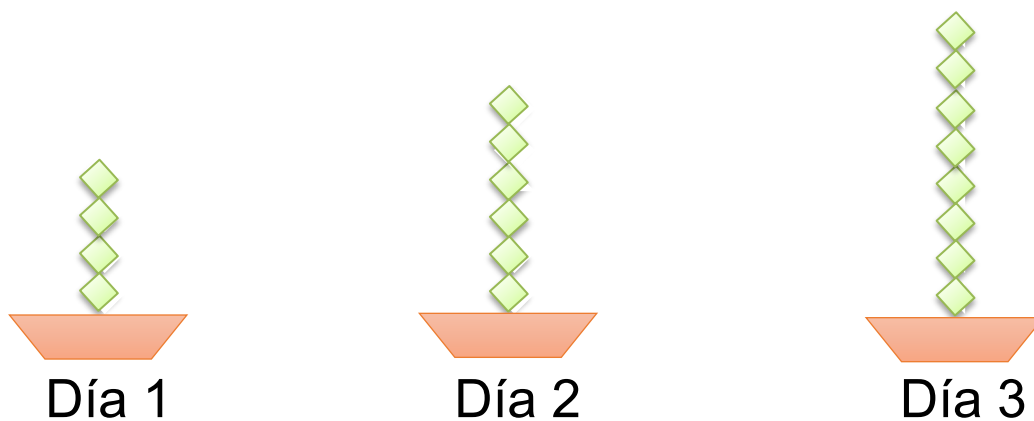
Dos amigas están tratando de hacer edificios con palillos sobre un folio.



B1	a) ¿Cuántos palillos necesitarán para hacer un edificio de 6 plantas? ¿Cómo lo sabes? b) ¿Cuántos palillos necesitarán para hacer un edificio de 12 plantas? ¿Cómo lo sabes? c) ¿Cuántos palillos necesitarán para hacer un edificio de 46 plantas? ¿Cómo lo sabes? d) ¿Cómo le explicarías a un amigo cómo puede calcular el número de palillos que necesitará para construir un edificio de un número concreto de plantas? ¿Puedes escribirle alguna fórmula? e) Si el edificio está formado por 27 palillos, ¿cuántas plantas tendrá? ¿Cómo lo sabes?
B2	a) ¿Cuántos palillos necesitarán para hacer un edificio de 6 plantas? ¿Cómo lo sabes? b) ¿Cuántos palillos necesitarán para hacer un edificio de 12 plantas? ¿Cómo lo sabes? c) ¿Cuántos palillos necesitarán para hacer un edificio de 46 plantas? ¿Cómo lo sabes? d) ¿Cómo le explicarías a un amigo como puede calcular el número de palillos que necesitará para construir un edificio de cualquier cantidad de plantas? ¿Puedes escribirle alguna fórmula? e) Si el edificio está formado por 75 palillos, ¿cuántas plantas tendrá? ¿Cómo lo sabes?

Enredadera

Juan y Ana han plantado una enredadera en su casa, que crece del siguiente modo:



B	a) ¿Cuántas hojas tendrá la enredadera en el día 5? ¿Cómo lo sabes? b) ¿Cuántas hojas tendrá la enredadera en el día 12? ¿Cómo lo sabes? c) ¿Cuántas hojas tendrá la enredadera en el día 42? ¿Cómo lo sabes? d) ¿Cómo le explicarías a un amigo cómo puede calcular el número de hojas que tendrá la enredadera cada día? ¿Puedes escribirle alguna fórmula? e) Si la enredadera tiene 60 hojas, ¿cuántos días habrán pasado? ¿Cómo lo sabes?

Escalera

Un grupo de amigos estaba jugando al baloncesto, cuando, sin querer, han lanzado el balón demasiado alto y ha ido a parar al tejado. Para bajarlo, van a construir una escalera con madera, pero desconocen cuántos escalones necesitarán.



1 escalón



2 escalones

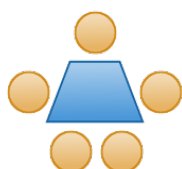


3 escalones

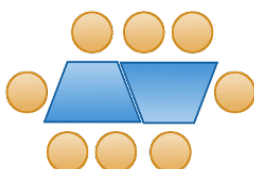
B	a) ¿Cuántos trozos de madera necesitarán para 4 escalones? ¿Cómo lo sabes? b) ¿Cuántos trozos de madera necesitarán para 10 escalones? ¿Cómo lo sabes? c) ¿Cuántos trozos de madera necesitarán para 45 escalones? ¿Cómo lo sabes? d) ¿Cómo le explicarías a un amigo cómo puede calcular el número de trozos de madera que necesita para construir una escalera con un número concreto de escalones? ¿Puedes escribirle alguna fórmula? e) Si hay 26 trozos de madera, ¿cuántos escalones tendrá? ¿Cómo lo sabes?

Familia

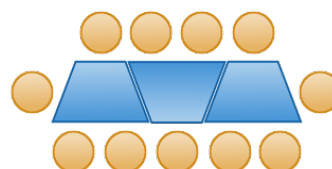
Nuestro primo Nacho quiere organizar una comida familiar. El problema es que somos muchos primos y no sabe si acudirán todos. Además, hay primos de todas las edades y, por tanto, algunos acudirán con su pareja e hijos. Quiere distribuir las mesas del siguiente modo:



1 mesa



2 mesas



3 mesas

A	a) ¿Cuántos invitados cabrán en 6 mesas? ¿Cómo lo sabes? b) ¿Cuántos invitados cabrán en 12 mesas? ¿Cómo lo sabes? c) ¿Cuántos invitados cabrán en 53 mesas? ¿Cómo lo sabes? d) ¿Cómo le explicarías a un amigo cómo puede calcular el número de invitados que cabrán en función del número de mesas? e) Si hay 50 invitados, ¿cuántas mesas necesitará? ¿Cómo lo sabes?
D	a) ¿Cuántos invitados cabrán en 53 mesas? ¿Cómo lo sabes? b) Escribe la fórmula que utilizarías para calcular los invitados que cabrán dependiendo del número de mesas. c) ¿Crees que podríamos escribir la fórmula del apartado b) de un modo más simple? Escríbela. d) Utiliza la fórmula que has escrito en el apartado c) para averiguar cuántos invitados cabrán en 12 mesas. e) Si hay 83 invitados, ¿cuántas mesas necesitará? ¿Cómo lo sabes?

Gusano

Mira cómo crece cada minuto el siguiente gusano:



Minuto 1



Minuto 2



Minuto 3

A	a) ¿Cuántas bolitas tendrá el gusano en el minuto 4? ¿Cómo lo sabes? b) ¿Cuántas bolitas tendrá el gusano en el minuto 16? ¿Cómo lo sabes? c) ¿Cuántas bolitas tendrá el gusano en el minuto 37? ¿Cómo lo sabes? d) ¿Cómo le explicarías a un amigo cómo puede calcular el número de bolitas que tendrá el gusano en cada minuto? e) Si el gusano tiene 125 bolitas, ¿qué minuto será? ¿Cómo lo sabes?
B	a) ¿Cuántas bolitas tendrá el gusano en el minuto 4? ¿Cómo lo sabes? b) ¿Cuántas bolitas tendrá el gusano en el minuto 16? ¿Cómo lo sabes? c) ¿Cuántas bolitas tendrá el gusano en el minuto 37? ¿Cómo lo sabes? d) ¿Cómo le explicarías a un amigo cómo puede calcular el número de bolitas que tendrá el gusano en cada minuto? ¿Puedes escribirle alguna fórmula? e) Si el gusano tiene 125 bolitas, ¿qué minuto será? ¿Cómo lo sabes?

Jardín

En una clase quieren hacer un jardín juntando macetas de flores. Mira cómo crece el jardín cada día.



Día 1



Día 2



Día 3

A	a) ¿Cuántas macetas tendrá el jardín el día 5? ¿Cómo lo sabes? b) ¿Cuántas macetas tendrá el jardín el día 13? ¿Cómo lo sabes? c) ¿Cuántas macetas tendrá el jardín el día 28? ¿Cómo lo sabes? d) ¿Cómo le explicarías a un amigo cómo puede calcular el número de macetas que tendrá el jardín cada día? e) Luis ha contado 39 macetas, ¿sabrías decir qué día es? ¿Cómo lo sabes?
B	a) ¿Cuántas macetas tendrá el jardín el día 5? ¿Cómo lo sabes? b) ¿Cuántas macetas tendrá el jardín el día 13? ¿Cómo lo sabes? c) ¿Cuántas macetas tendrá el jardín el día 28? ¿Cómo lo sabes? d) ¿Cómo le explicarías a un amigo cómo puede calcular el número de macetas que tendrá el jardín cada día? ¿Puedes escribirle alguna fórmula? e) Luis ha contado 39 macetas, ¿sabrías decir qué día es? ¿Cómo lo sabes?
D	a) ¿Cuántas macetas tendrá el jardín el día 28? ¿Cómo lo sabes? b) Escribe la fórmula que utilizarías para calcular el número de macetas que tendrá el jardín cada día. c) ¿Crees que podríamos escribir la fórmula del apartado b) de un modo más simple? Escríbela. d) Utiliza la fórmula que has escrito en el apartado c) para averiguar cuántas macetas tendrá el jardín el día 13. e) Luis ha contado 85 macetas, ¿sabrías decir qué día es? ¿Cómo lo sabes?

Magdalenas

Nos han invitado a una fiesta de los sabores y cada invitado debe llevar una comida. Nosotros hemos decidido llevar magdalenas. Vamos sacándolos poco a poco del horno y colocándolas de la siguiente forma:



A	a) ¿Cuántas habrá la cuarta vez que saquemos magdalenas del horno? b) ¿Cuántas habrá la décima vez que saquemos magdalenas del horno? ¿Cómo lo sabes? c) ¿Cuántas tendremos cuando saquemos magdalenas del horno por 50 vez? ¿Cómo lo sabes? d) ¿Cómo le explicarías a un amigo cómo puede calcular el número de magdalenas que salen en cada horneada? e) Voy de nuevo a la cocina más tarde y veo que están sacando 104 magdalenas del horno. ¿Cuántas veces se han cocinado magdalenas?

Olimpiada 1

La semana pasada, en Silla, se ha realizado una olimpiada matemática a la que se presentaron diversos participantes. Pero, hubo un pequeño problema: ¡los correctores perdieron las notas! Ayúdales a recuperarlas a partir de la información que recuerdan.

	Expresión algebraica	Puntuación
Maite sacó x puntos.		
Luis tenía 45 puntos más que Maite.		
Silvia obtuvo el triple que Maite.		
Valerià tenía 100 puntos menos que Silvia.		
La puntuación de Silvia menos la de Maite es la que obtuvo Ana.		
El doble de la puntuación de Ana es 500.		

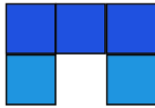
Olimpiada 2

La semana pasada, en Silla, se ha realizado una olimpiada matemática a la que se presentaron diversos participantes. Pero, hubo un pequeño problema: ¡los correctores perdieron las notas! Ayúdales a recuperarlas a partir de la información que recuerdan.

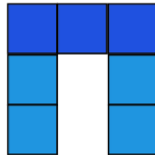
	Expresión algebraica	Puntuación
Maite sacó x puntos.		
Luis tenía 45 puntos más que Maite.		
Silvia obtuvo el triple que Maite.		
Valerià tenía 100 puntos menos que Silvia.		
La puntuación de Silvia menos la de Maite es la que obtuvo Ana.		
Andrea sacó un tercio de la puntuación de Maite.		
El doble de la puntuación de Ana es 500.		

Pantalón

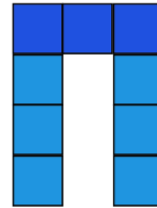
Han abierto una tienda nueva muy curiosa en Silla. En esta tienda solo venden pantalones vaqueros. Pero no son pantalones cualesquiera, ¡pueden ser tan largos como quieras! Cada día la tienda saca un nuevo modelo un poco más largo.



Día 1



Día 2



Día 3

B	a) ¿Cuántos cuadrados tiene el pantalón del día 6? ¿Cómo lo sabes? b) ¿Cuántos cuadrados tiene el pantalón del día 12? ¿Cómo lo sabes? c) ¿Cuántos cuadrados tiene el pantalón del día 39? ¿Cómo lo sabes? d) ¿Cómo le explicarías a un amigo cómo puede calcular el número de cuadrados que tendrá el pantalón cada día? ¿Puedes escribirle alguna fórmula? e) Si el pantalón tiene 57 cuadrados, ¿en qué día estamos? ¿Cómo lo sabes?

Pared

María y Marta están construyendo una pequeña pared alrededor de su jardín:



Tamaño 1



Tamaño 2



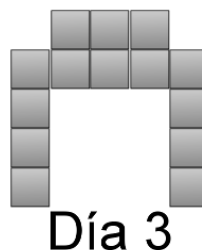
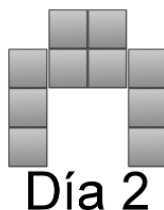
Tamaño 3

A	a) ¿Cuántos ladrillos necesitarán para construir una pared de tamaño 5? ¿Cómo lo sabes? b) ¿Cuántos ladrillos necesitarán para construir una pared de tamaño 11? ¿Cómo lo sabes? c) ¿Cuántos ladrillos necesitarán para construir una pared de tamaño 50? ¿Cómo lo sabes? d) ¿Cómo le explicarías a un amigo cómo puede calcular el número de ladrillos que necesitará para construir un tamaño concreto de pared? e) Si hay 38 ladrillos, ¿qué tamaño habrán construido? ¿Cómo lo sabes?
D	a) ¿Cuántos ladrillos necesitarán para construir una pared de tamaño 50? ¿Cómo lo sabes? b) Escribe la fórmula que utilizarías para calcular el número de ladrillos que necesitarán para construir cada tamaño de pared. c) ¿Crees que podríamos escribir la fórmula del apartado b) de un modo más simple? Escríbela. d) Utiliza la fórmula que has escrito en el apartado c) para averiguar cuántos ladrillos necesitarán para construir una pared de tamaño 11. e) Si hay 92 ladrillos, ¿qué tamaño habrán construido? ¿Cómo lo sabes?

E	a) Escribe la fórmula que utilizarías para calcular el número de ladrillos que necesitarán para construir cada tamaño de pared. b) ¿Crees que podríamos escribir la fórmula del apartado b) de un modo más simple? Escríbela. c) Utiliza la fórmula que has escrito en el apartado c) para averiguar cuántos ladrillos necesitarán para construir una pared de tamaño 11. d) Si hay 101 ladrillos, ¿qué tamaño habrán construido? ¿Cómo lo sabes? e) Si hay 182 ladrillos, ¿qué tamaño habrán construido? ¿Cómo lo sabes?

Puerta

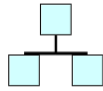
Mi hermana Ana y yo queremos construir una puerta para que nuestro perro pueda entrar y salir solo al jardín. Como no sabes cuántos bloques de construcción vamos a necesitar, cada día hacemos una y la probamos. ¿Nos ayudas?



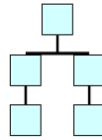
A	a) ¿Cuántos bloques necesitaremos el día 6? ¿Cómo lo sabes? b) ¿Cuántos bloques necesitaremos el día 12? ¿Cómo lo sabes? c) ¿Cuántos bloques necesitaremos el día 40? ¿Cómo lo sabes? d) ¿Cómo le explicarías a un amigo cómo puede calcular el número de bloques que necesitará en función del día que sea? e) Si hemos utilizado 62 bloques, ¿en qué día estamos? ¿Cómo lo sabes?
D	a) ¿Cuántos bloques necesitaremos el día 40? ¿Cómo lo sabes? b) Escribe la fórmula que utilizarías para calcular los bloques que necesitaremos cada día. c) ¿Crees que podríamos escribir la fórmula del apartado b) de un modo más simple? Escríbela. d) Utiliza la fórmula que has escrito en el apartado c) para averiguar cuántos bloques necesitaremos el día 12. e) Si hemos utilizado 62 bloques, ¿cuántos días han pasado? ¿Cómo lo sabes?

Robots

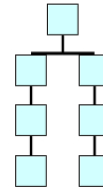
En el taller de creatividad, hoy están construyendo robots con piezas cuadradas. Mario sigue los pasos siguientes:



Paso 1



Paso 2



Paso 3

A	a) ¿Cuántos cuadrados tendrá el robot en el paso 5? ¿Cómo lo sabes? b) ¿Cuántos cuadrados tendrá el robot en el paso 20? ¿Cómo lo sabes? c) ¿Cuántos cuadrados tendrá el robot en el paso 35? ¿Cómo lo sabes? d) ¿Cómo le explicarías a un amigo cómo puede calcular el número de cuadrados que tendrá el robot en cada paso? e) Si el robot tiene 83 cuadrados, ¿en cuántos pasos ha sido construido? ¿Cómo lo sabes?

Supermercado

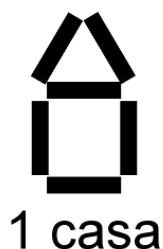
En el supermercado sólo hay dos cajas abiertas para pagar, pero no funcionan bien y se está formando una gran cola mientras acuden los técnicos. Cada minuto llega alguien a caja y se coloca del siguiente modo para esperar su turno:



A	a) ¿Cuántas personas estarán esperando su turno en el minuto 7? ¿Cómo lo sabes? b) ¿Cuántas personas estarán esperando su turno en el minuto 12? ¿Cómo lo sabes? c) ¿Cuántas personas estarán esperando su turno en el minuto 45? ¿Cómo lo sabes? d) ¿Cómo le explicarías a un amigo cómo puede calcular el número de personas que estarán esperando su turno en cada minuto? e) Si hay 49 personas esperando su turno, ¿en qué minuto estaremos? ¿Cómo lo sabes?

Urbanización

Marc y su amigo quieren dibujar una urbanización con palillos. La dibujan del siguiente modo:



A	a) ¿Cuántos palillos necesitarán para dibujar 6 casas? ¿Cómo lo sabes? b) ¿Cuántos palillos necesitarán para dibujar 11 casas? ¿Cómo lo sabes? c) ¿Cuántos palillos necesitarán para dibujar 44 casas? ¿Cómo lo sabes? d) ¿Cómo le explicarías a un amigo cómo puede calcular el número de palillos que necesitará para construir una urbanización con un número concreto de casas? e) Si hay 51 palillos, ¿cuántas casas dibujarán? ¿Cómo lo sabes?
B	a) ¿Cuántos palillos necesitarán para dibujar 6 casas? ¿Cómo lo sabes? b) ¿Cuántos palillos necesitarán para dibujar 11 casas? ¿Cómo lo sabes? c) ¿Cuántos palillos necesitarán para dibujar 44 casas? ¿Cómo lo sabes? d) ¿Cómo le explicarías a un amigo cómo puede calcular el número de palillos que necesitará para construir una urbanización con un número concreto de casas? ¿Puedes escribirle alguna fórmula? e) Si hay 51 palillos, ¿cuántas casas dibujarán? ¿Cómo lo sabes?

D	a) ¿Cuántos palillos necesitarán para dibujar 44 casas? ¿Cómo lo sabes? b) Escribe la fórmula que utilizarías para calcular el número de palillos que necesitarán para construir una urbanización según su número de casas. c) ¿Crees que podríamos escribir la fórmula del apartado b) de un modo más simple? Escríbela. d) Utiliza la fórmula que has escrito en el apartado c) para averiguar cuántos palillos necesitarán para dibujar 11 casas. e) Si hay 126 palillos, ¿cuántas casas dibujarán? ¿Cómo lo sabes?

ANEXO 2

SECUENCIA:

ESTUDIANTE:

ACTIVIDAD:

VERSIÓN: A

a) Generalización inmediata

	N		V		NC		Ct		EA		EAg		EE		NC		O		NC						
	Rt		Rs		F		FD		FM		FMAx		FMAñ		FMP		C		CP		CA		CC		E-E
		II		GA		GF		GC		GS		O		NC											

b) Generalización cercana

	N		V		NC		Ct		EA		EAg		EE		NC		O		NC						
	Rt		Rs		F		FD		FM		FMAx		FMAñ		FMP		C		CP		CA		CC		E-E
		II		GA		GF		GC		GS		O		NC											

c) Generalización lejana

	N		V		NC		Ct		EA		EAg		EE		NC		O		NC						
	Rt		Rs		F		FD		FM		FMAx		FMAñ		FMP		C		CP		CA		CC		E-E
		II		GA		GF		GC		GS		O		NC											

d) Verbalización

	N		V		NC		Ct		EA		EAg		EE		NC		O		NC						
	Rt		Rs		F		FD		FM		FMAx		FMAñ		FMP		C		CP		CA		CC		E-E
		II		GA		GF		GC		GS		O		NC											

e) Inversión

	I Ar		I Alg		E		D		E-E		O		NC		Ct		EA		EAg		EO		EE		NC

SECUENCIA:

ESTUDIANTE:

ACTIVIDAD:

VERSIÓN: B

a) Generalización inmediata

	N		V		NC		Ct		EA		EAg		EE		NC		O		NC						
	Rt		Rs		F		FD		FM		FMAx		FMAñ		FMP		C		CP		CA		CC		E-E
			II		GA		GF		GC		GS		O		NC										

b) Generalización cercana

	N		V		NC		Ct		EA		EAg		EE		NC		O		NC						
	Rt		Rs		F		FD		FM		FMAx		FMAñ		FMP		C		CP		CA		CC		E-E
			II		GA		GF		GC		GS		O		NC										

c) Generalización lejana

	N		V		NC		Ct		EA		EAg		EE		NC		O		NC						
	Rt		Rs		F		FD		FM		FMAx		FMAñ		FMP		C		CP		CA		CC		E-E
			II		GA		GF		GC		GS		O		NC										

d) Verbalización / Fórmula

	N		V		NC		Ct		EA		EAg		EE		NC		O		NC						
	Rt		Rs		F		FD		FM		FMAx		FMAñ		FMP		C		CP		CA		CC		E-E
			II		GA		GF		GC		GS		O		NC										

e) Inversión

	I Ar		I Alg		E		D		E-E		O		NC		Ct		EA		EAg		EO		EE		NC

SECUENCIA:

ESTUDIANTE:

ACTIVIDAD:

VERSIÓN: C

a) Generalización inmediata

	N		V		NC		Ct		EA		EAg		EE		NC		O		NC						
	Rt		Rs		F		FD		FM		FMAx		FMAñ		FMP		C		CP		CA		CC		E-E
		II		GA		GF		GC		GS		O		NC											

b) Generalización lejana

	N		V		NC		Ct		EA		EAg		EE		NC		O		NC						
	Rt		Rs		F		FD		FM		FMAx		FMAñ		FMP		C		CP		CA		CC		E-E
		II		GA		GF		GC		GS		O		NC											

c) Verbalización / Fórmula

	N		V		NC		Ct		EA		EAg		EE		NC		O		NC						
	Rt		Rs		F		FD		FM		FMAx		FMAñ		FMP		C		CP		CA		CC		E-E
		II		GA		GF		GC		GS		O		NC											

d) Aplicación (Gen. cercana)

	N		V		NC		Ct		EA		EAg		EE		NC		O		NC						
	Rt		Rs		F		FD		FM		FMAx		FMAñ		FMP		C		CP		CA		CC		E-E
		II		GA		GF		GC		GS		O		NC											

e) Inversión

	I Ar		I Alg		E		D		E-E		O		NC		Ct		EA		EAg		EO		EE		NC

SECUENCIA:

ESTUDIANTE:

ACTIVIDAD:

VERSIÓN: D

a) Generalización lejana

☐	☐	N	☐	☐	V	☐	☐	NC	☐	☐	Ct	☐	☐	EA	☐	☐	EAg	☐	☐	EE	☐	☐	NC	☐	☐	O	☐	☐	NC								
☐	☐	Rt	☐	☐	Rs	☐	☐	F	☐	☐	FD	☐	☐	FM	☐	☐	FMAx	☐	☐	FMAñ	☐	☐	FMP	☐	☐	C	☐	☐	CP	☐	CA	☐	☐	CC	☐	☐	E-E
☐	☐	☐	☐	II	☐	☐	☐	GA	☐	☐	GF	☐	☐	GC	☐	☐	GS	☐	☐	O	☐	☐	☐	NC													

b) Fórmula

☐	☐	N	☐	☐	V	☐	☐	NC	☐	☐	Ct	☐	☐	EA	☐	☐	EAg	☐	☐	EE	☐	☐	NC	☐	☐	O	☐	☐	NC								
☐	☐	Rt	☐	☐	Rs	☐	☐	F	☐	☐	FD	☐	☐	FM	☐	☐	FMAx	☐	☐	FMAñ	☐	☐	FMP	☐	☐	C	☐	☐	CP	☐	CA	☐	☐	CC	☐	☐	E-E
☐	☐	☐	☐	II	☐	☐	☐	GA	☐	☐	GF	☐	☐	GC	☐	☐	GS	☐	☐	O	☐	☐	☐	NC													

c) Simplificación

☐	☐	N	☐	☐	V	☐	☐	NC	☐	☐	Ct	☐	☐	EA	☐	☐	EAg	☐	☐	EE	☐	☐	NC	☐	☐	O	☐	☐	NC								
☐	☐	Rt	☐	☐	Rs	☐	☐	F	☐	☐	FD	☐	☐	FM	☐	☐	FMAx	☐	☐	FMAñ	☐	☐	FMP	☐	☐	C	☐	☐	CP	☐	CA	☐	☐	CC	☐	☐	E-E
☐	☐	☐	☐	II	☐	☐	☐	GA	☐	☐	GF	☐	☐	GC	☐	☐	GS	☐	☐	O	☐	☐	☐	NC													

d) Aplicación (Gen. cercana)

☐	☐	N	☐	☐	V	☐	☐	NC	☐	☐	Ct	☐	☐	EA	☐	☐	EAg	☐	☐	EE	☐	☐	NC	☐	☐	O	☐	☐	NC								
☐	☐	Rt	☐	☐	Rs	☐	☐	F	☐	☐	FD	☐	☐	FM	☐	☐	FMAx	☐	☐	FMAñ	☐	☐	FMP	☐	☐	C	☐	☐	CP	☐	CA	☐	☐	CC	☐	☐	E-E
☐	☐	☐	☐	II	☐	☐	☐	GA	☐	☐	GF	☐	☐	GC	☐	☐	GS	☐	☐	O	☐	☐	☐	NC													

e) Inversión

☐	☐	I Ar	☐	☐	I Alg	☐	☐	E	☐	☐	D	☐	☐	E-E	☐	☐	O	☐	☐	NC	☐	☐	Ct	☐	☐	EA	☐	☐	EAg	☐	EO	☐	☐	EE	☐	☐	NC

SECUENCIA:

ESTUDIANTE:

ACTIVIDAD:

VERSIÓN: E

a) Fórmula

	N		V		NC		Ct		EA		EAg		EE		NC		O		NC						
	Rt		Rs		F		FD		FM		FMAx		FMAñ		FMP		C		CP		CA		CC		E-E
	II		GA		GF		GC		GS		O		NC												

b) Simplificación

	N		V		NC		Ct		EA		EAg		EE		NC		O		NC						
	Rt		Rs		F		FD		FM		FMAx		FMAñ		FMP		C		CP		CA		CC		E-E
	II		GA		GF		GC		GS		O		NC												

c) Aplicación (Gen. cercana)

	N		V		NC		Ct		EA		EAg		EE		NC		O		NC						
	Rt		Rs		F		FD		FM		FMAx		FMAñ		FMP		C		CP		CA		CC		E-E
	II		GA		GF		GC		GS		O		NC												

d) Inversión

	I Ar		I Alg		E		D		E-E		O		NC		Ct		EA		EAg		EO		EE		NC

e) Inversión

	I Ar		I Alg		E		D		E-E		O		NC		Ct		EA		EAg		EO		EE		NC

