DOBLE GRADO EN

DERECHO Y ECONOMÍA

APUNTS DE

MATEMÀTIQUES

CURS 2022-2023

DOBLE GRAU D'ECONOMIA I DRET

CARÀCTER: OBLIGATÒRIA

CURS: PRIMER

QUADRIMESTRE: PRIMER

Autor: Robert Meneu Gaya, professor titular d'universitat del Departament de Matemàtiques per a l'Economia i l'Empresa.

ÍNDEX

TEMA 0. INTRODUCCIÓ 4
0.1. Ús de les matemàtiques en economia 4
0.2. Models matemàtics econòmics 5
TEMA 1. NOCIONS BÀSIQUES D'ÀLGEBRA 7
1.1. Sistemes d'equacions lineals i no lineals 7
Exercici 1 8
1.2. Matrius, determinants, rang i càlcul de la inversa 10
Exercici 2 13
ANNEX 1. Sistemes d'equacions i matrius amb WolframAlpha 16
ANNEX 2. Càlcul matricial amb Excel 17
TEMA 2. LÍMITS I CONTINUÏTAT DE FUNCIONS 19
2.1. Funcions reals d'una i diverses variables reals: funcions implícites, compostes i homogènies 19
Exercici 3 26
2.2. Domini d'una funció i nocions de topologia (situació dels punts) 27
Exercici 4 30
2.3. Conceptes de límit i continuïtat de funcions 30
Exercici 5 32
ANNEX 3. Principals funcions utilitzades en economia 33
TEMA 3. DERIVABILITAT DE FUNCIONS 37
3.1. Derivades parcials en funcions d'una variable real 37
Exercici 6 37
3.2. Concepte, càlcul i interpretació econòmica de la derivada parcial d'una funció de diverses variables 37
3.2.1. Concepte de derivada parcial 38
3.2.2. Càlcul de derivades parcials 39
3.2.3. Interpretació econòmica de les derivades parcials. Elasticitat 39
Exercici 7 41
3.3. Derivades successives. Gradient, jacobiana i hessiana. 44
Exercici 8 47
TEMA 4. DIFERENCIABILITAT DE FUNCIONS 49
4.1. Condició de diferenciabilitat d'una funció i definició de diferencial 49
4.1.1. Diferencial d'una funció i funció diferenciable 49
4.1.2. Relacions entre els conceptes de continuïtat, derivabilitat i diferenciabilitat 51

Exercici 9 51
4.2. Direccions de creixement i altres aplicacions de la diferencial 52
4.2.1. Càlcul de derivades direccionals 52
4.2.2. Direccions de creixement màxim, mínim i nul 52
Exercici 10 54
4.3. Derivades parcials en funcions compostes i implícites 55
4.3.1. Derivades parcials de la funció composta 55
4.3.2. Derivades parcials en funcions implícites 58
Exercici 11 61
TEMA 5. OPTIMITZACIÓ 65
5.1. Conceptes bàsics 65
5.1.1. Introducció 65
5.1.2. Principals conceptes 65
5.1.3. Teoremes fonamentals de l'optimització matemàtica 67
5.1.4. Convexitat de conjunts i concavitat i convexitat de funcions 68
Exercici 12 72
5.2. Optimització sense restriccions amb una o diverses variables de decisió 73
Exercici 13 75
5.3. Optimització amb restriccions d'igualtat: mètode dels multiplicadors de Lagrange 76
5.3.1. Mètode dels multiplicadors de Lagrange 77
5.3.2. Interpretació econòmica dels multiplicadors de Lagrange 80
Exercici 14 80
5.4. Optimització amb restriccions de desigualtat: condicions de Kuhn i Tucker 81
5.4.1. Condicions de Kuhn i Tucker 81
5.4.2. Teorema de suficiència de Kuhn i Tucker o condició suficient d'òptim global 85
5.4.3. Interpretació econòmica dels multiplicadors de Kuhn i Tucker 86
Exercici 15 87
ANNEX 4. Modelització de problemes no lineals, lineals i lineals enters 91
Exercici 16 94

TEMA 0. INTRODUCCIÓ

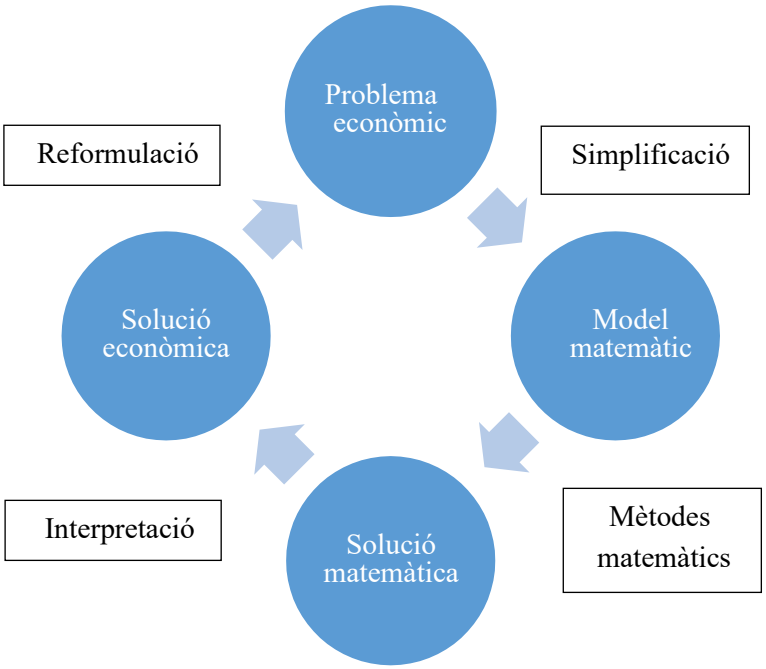
0.1. Ús de les matemàtiques en economia

L'economia, com a ciència social, està subjecta al comportament humà i, per tant, no és una ciència exacta. La matemàtica, en canvi, és el paradigma de ciència exacta. No obstant això, des del segle XIX amb la revolució marginalista, l'economia s'ha anat convertint en un camp en el qual cada vegada s'utilitzen més les matemàtiques fins a arribar a formulacions realment complexes.

El terme *economia matemàtica* fa referència a la representació dels problemes econòmics mitjançant elements matemàtics (equacions, conjunts, funcions, etc.) i el seu posterior tractament aplicant mètodes matemàtics per a arribar a conclusions.

Per a utilitzar les matemàtiques en l'anàlisi econòmica es recorre a models econòmics. Un model econòmic és una simplificació de la realitat i del comportament econòmic mitjançant expressions matemàtiques. Una vegada es disposa del model, s'apliquen els mètodes matemàtics per a arribar a resultats que sí que són exactes. Finalment, els resultats matemàtics s'han d'interpretar en termes econòmics, tenint en compte la seua aplicació pràctica i reformulant el model si cal. En aquest procés, tant la simplificació de la realitat com l'aplicació pràctica dels resultats incorporen judicis de valor, motiu pel qual, encara que l'economia es base en resultats matemàtics, no és una ciència objectiva.

Esquema 1. Matemàtiques en l'economia



El model matemàtic més adequat depèn de la finalitat de l'anàlisi. Cal triar quin problema volem estudiar, quines variables són rellevants i quines no, quines hipòtesis

hem de formular sobre el comportament dels agents econòmics, quines funcions són les més adequades per a representar aquest comportament, etc. En aquesta fase intervé la subjectivitat del decisor.

Posteriorment s'apliquen els mètodes matemàtics més adequats per a resoldre el model matemàtic a fi d'arribar a la solució matemàtica, que és objectiva per al model triat.

La interpretació de la solució matemàtica per a passar a la solució econòmica del problema original torna a tenir elements de subjectivitat, perquè potser no es pot posar en pràctica per les seues conseqüències socials o polítiques que no havíem tingut en compte en el model. Això pot fer que s'aplique una solució aproximada raonable o que s'hi incorporen elements nous que havíem negligit inicialment i donar lloc a una reformulació del model.

A continuació es comenten algunes idees generals per a formular models econòmics. En la resta de temes del curs es tracten els principals elements i mètodes matemàtics que s'utilitzen en l'anàlisi econòmica:

- Matrius, determinants i sistemes d'equacions
- Funcions: continuïtat, derivabilitat i diferenciabilitat
- Mètodes d'optimització matemàtica

0.2. Models matemàtics econòmics

Els models matemàtics en economia recullen les relacions rellevants que volem estudiar entre un conjunt de magnituds econòmiques seleccionades. L'objectiu és trobar la solució o l'equilibri del model, amb la idea que aquesta solució ajude a prendre decisions econòmiques que milloren el benestar de la ciutadania.

Els models poden ser estàtics, si totes les magnituds es refereixen a un mateix període de temps, o dinàmics, si les magnituds estan expressades en diferents moments o períodes de temps. En aquest curs, només estudiarem models estàtics.

En un model intervenen diversos elements:

- Els agents econòmics, que poden ser individus, empreses o el sector públic.
- Les magnituds econòmiques, que s'introdueixen en el model en forma de:
    - Variables endògenes o de decisió: són les que hem de calcular per a resoldre el model, les que hem considerat més importants.
    - Variables exògenes: són conegudes en la versió del model que hem triat, però podria tenir sentit plantejar models més complexos en què aquestes també foren endògenes.
    - Paràmetres: són constants del model que poden prendre diferents valors i sobre el quals es plantegen canvis de valor per a analitzar com afecta el valor d'equilibri de les variables endògenes.
    - Constants: són valors sobre els quals no es plantegen modificacions possibles.

- Les formulacions matemàtiques, que relacionen els comportaments dels agents econòmics i les magnituds econòmiques. Aquestes relacions poden originar dos grans models matemàtics: els models d'equilibri no finalista (amb matrius o sistemes d'equacions) i els models d'optimització matemàtica. En aquest segon cas, algun dels agents econòmics pretén buscar una posició òptima en algun sentit. En qualsevol cas, l'instrument matemàtic més utilitzat és el de funció real d'una o diverses variables, a través de la qual es representen les relacions entre les magnituds econòmiques.

Exemple 1. Model de determinació de la renda nacional:

$$Y = C + I_0 + D_0 \;\; ; \quad I_0 \geq 0\,, D_0 \geq 0$$
$$C = a + bY \quad ; \; a > 0\,, \quad 0 < b < 1$$

La primera equació és la condició d'equilibri que ens diu que la producció total (renda nacional) és igual a la despesa total (despesa en consum per part dels consumidors, en inversió per part de les empreses i despesa pública a càrrec del govern). La segona equació ens diu que el consum és una funció lineal de la renda nacional, amb els paràmetres a (consum autònom) i b (propensió marginal al consum). D'altra banda, la inversió i la despesa pública son variables exògenes, mentre que la renda nacional i el consum són les variables endògenes. El model és estàtic perquè no hi és la variable temps i és no finalista perquè no hi ha l'objectiu d'optimitzar cap funció, sinó que simplement es busca com s'han d'ajustar les variables endògenes perquè les equacions del model es verifiquen (dues variables endògenes i dues equacions).

Exemple 2. Model d'equilibri de mercat d'un bé:

$$Q_d = Q_s$$
$$Q_d = a - bP \quad a, b, c, d > 0$$
$$Q_s = -c + dP$$

La primera equació és la condició d'equilibri de mercat que ens diu que la quantitat oferta i demanada d'un bé ha de ser igual (el mercat es buida). Les altres equacions ens diuen com es comporta l'oferta i la demanda del bé. Suposant un comportament racional d'empreses i consumidors, la demanda haurà de ser una funció decreixent del preu i l'oferta una funció creixent del preu. Els paràmetres positius a, b, c i d precedits del signe adequat donen resposta a aquest supòsit de comportament racional, en aquest cas mitjançant funcions lineals. Les variables endògenes són la quantitat oferta, la quantitat demanada i el preu. Aquest model també és estàtic i d'equilibri no finalista (tres variables endògenes i tres equacions).

En els temes del curs s'estudien els mètodes matemàtics necessaris per a resoldre els models econòmics més bàsics: matrius i sistemes d'equacions en el tema 1, funcions i derivades en els temes 2, 3 i 4, i mètodes d'optimització en el tema 5. Les explicacions dels instruments matemàtics es completaran amb la resolució de problemes genèrics i de models econòmics.

TEMA 1. NOCIONS BÀSIQUES D'ÀLGEBRA

1.1. Sistemes d'equacions lineals i no lineals

Els models econòmics més bàsics queden reduïts a un sistema d'equacions. Els mètodes per a resoldre sistemes d'equacions són els primers mètodes matemàtics importants en economia.

Tot i que les equacions lineals seran les més freqüents, a vegades el model econòmic pot estar expressat amb alguna equació no lineal que responga millor a les hipòtesis de comportament dels agents econòmics; per tant, cal saber resoldre tant equacions lineals com no lineals.

Les equacions lineals són equacions polinòmiques de grau 1, mentre que les no lineals poden ser polinòmiques de grau 2 o superior, equacions racionals (quocients de polinomis), equacions irracionals (arrels de polinomis), equacions exponencials i equacions logarítmiques.

Exemple 1. Principals tipus d'equacions:

Equació lineal: $x = 5 + 0{,}8x$

Equació polinòmica de grau 2: $x^2 + 5x - 6 = 0$

Equació polinòmica de grau 3: $x^3 + 3x^2 - 16x + 12 = 0$

Equació racional: $\frac{x^2}{x-2} + \frac{5}{x+2} = \frac{50}{x^2-4}$

Equació irracional: $\sqrt{2x-4} + 1 = \sqrt{x+1}$

Equació exponencial: $8 \cdot 2^x - 1/4 = 0$

Equació logarítmica: $2\ln(x+2) = \ln(2x-1) + \ln(3x-4)$

Segons la forma de cada equació es disposa d'una estratègia distinta per a resoldre-la: aïllar variables, regla de Ruffini, factoritzar polinomis, aplicar propietats de logaritmes, etc.

Els sistemes d'equacions es plantegen quan tenim més d'una equació i més d'una variable endògena en el model. Els sistemes d'equacions poden ser lineals o no lineals. Els sistemes lineals tenen mètodes específics (Gauss i Cramer), però convé saber utilitzar mètodes més generals (substitució, igualació o reducció) que també són aplicables en el cas no lineal.

Així, el model bàsic de determinació de la renda nacional es resol substituint la funció de consum en la condició d'equilibri:

$$\left.\begin{array}{l} Y = C + I_0 + D_0 \ ; \quad I_0 \geq 0\,, D_0 \geq 0 \\ C = a + bY \quad ; \ a > 0\,, \quad 0 < b < 1 \end{array}\right\} \rightarrow Y = (a + bY) + I_0 + D_0 \rightarrow$$

$$\rightarrow (1-b)Y = a + I_0 + D_0 \rightarrow \begin{cases} Y = \dfrac{a + I_0 + D_0}{1-b} \\ C = a + b\dfrac{a + I_0 + D_0}{1-b} = \dfrac{a + b(I_0 + D_0)}{1-b} \end{cases}$$

Semblantment, el model bàsic d'equilibri de mercat d'un bé es resol substituint en la condició d'equilibri les funcions d'oferta i de demanda:

$$\left.\begin{array}{c} Q_d = Q_s \\ Q_d = a - bP \quad a,b,c,d > 0 \\ Q_s = -c + dP \end{array}\right\} \rightarrow a - bP = -c + dP \rightarrow a + c = (b+d)P \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} P = \dfrac{a+c}{b+d} \\ Q_d = a - b\dfrac{a+c}{b+d} = \dfrac{ad-bc}{b+d} \\ Q_s = -c + d\dfrac{a+c}{b+d} = \dfrac{ad-bc}{b+d} \end{cases}$$

Els exercicis 1 i 2 són un repàs de la resolució d'equacions i de sistemes d'equacions per mètodes generals. Els exercicis 3 i 4 són per a resoldre models econòmics mitjançant equacions o sistemes d'equacions.

Exercici 1

1. Resol les equacions de l'exemple 1.
   a) $x = 5 + 0{,}8x$
   b) $x^2 + 5x - 6 = 0$
   c) $x^3 + 3x^2 - 16x + 12 = 0$
   d) $\frac{x^2}{x-2} + \frac{5}{x+2} = \frac{50}{x^2-4}$
   e) $\sqrt{2x-4} + 1 = \sqrt{x+5}$
   f) $8 \cdot 2^x - 1/4 = 0$
   g) $2\ln(x+2) = \ln(2x-1) + \ln(3x-4)$
2. Resol aquests sistemes d'equacions utilitzant mètodes generals (no Gauss ni Cramer).
   a) $\begin{cases} 2x + 5y + 3z = 5 \\ -x - 2y + 4z = 1 \\ x + 3y - z = -2 \end{cases}$
   b) $\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 12 \\ x + y^2 = 4 \end{cases}$
   c) $\begin{cases} 3x^2 + 2xy = 0 \\ x^2 + 2y = -2 \end{cases}$
   d) $\begin{cases} x^{1/2}y^{1/2} = 12 \\ x + y = 25 \end{cases}$
3. Calcula la solució dels següents models de determinació de la renda nacional.

a) $\left.\begin{array}{ll} Y = C + I_0 + D_0 \ ; & I_0 = 250\,, D_0 = 150 \\ C = a + bY \quad ; & a = 50\,, \quad b = 0{,}8 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{ll} Y = C + I_0 + D_0 \ ; & I_0 = 250\,, D_0 = 180 \\ C = a + b(Y - T) \ ; & a = 50\,, \quad b = 0{,}8 \\ T = d + tY \quad ; & d = 20\,, \quad t = 0{,}25 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{ll} Y = C + I_0 + D \ ; & I_0 = 250 \\ C = a + b(Y - T_0) \ ; & a = 50\,, b = 0{,}8\,, T_0 = 600 \\ D = gY \ ; & g = 0{,}4 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{ll} Y = C + I_0 + D_0 \ ; & I_0 = 350\,, D_0 = 260 \\ C = a + b\sqrt{Y} \quad ; & a = 50\,, \quad b = 8 \end{array}\right\}$

4. Calcula la solució d'aquests models d'equilibri de mercat.

a) $\left.\begin{array}{l} Q_d = Q_s \\ Q_d = a - bP \ ; \ a = 28, b = 2 \\ Q_s = -c + dP \ ; \ c = 8, d = 4 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{c} Q_d = Q_s \\ Q_d = 36 - P^2 \\ Q_s = -9 + 4P \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{c} Q_{d1} = Q_{s1} \\ Q_{d1} = 28 - 2P_1 + P_2 \\ Q_{s1} = -8 + 4P_1 - P_2 \\ Q_{d2} = Q_{s2} \\ Q_{d2} = 36 + 2P_1 - P_2 \\ Q_{s2} = -9 - 4P_1 + 2P_2 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{c} Q_{d1} = Q_{s1} \\ Q_{d1} = 10 - 2P_1 + P_2 \\ Q_{s1} = -2 + 3P_1 \\ Q_{d2} = Q_{s2} \\ Q_{d2} = 5 + P_1 - P_2 \\ Q_{s2} = -1 + 2P_2 \end{array}\right\}$

e) $\left.\begin{array}{c} Q_{d1} = 8 - P_1 + 3P_2 \\ Q_{d2} = 2 + 2P_1 - 2P_3 \\ Q_{d3} = -4 + P_1 + 2P_2 + 3P_3 \\ Q_{s1} = 4 - 2P_1 + P_3 \\ Q_{s2} = -5 + 2P_1 - P_3 \\ Q_{s3} = 4 - P_1 + 2P_3 \end{array}\right\}$ + condicions d'equilibri

5. En un mercat d'un bé, la funció de demanda és $q_d = 11 - p^2$ i la funció d'oferta és $q_s = p^2 - 7$. Calcula'n el preu i la quantitat d'equilibri.

6. En un model de determinació de la renda nacional, la renda (Y) és igual al consum més la inversió més la despesa pública. Si el consum és $C = 35 + 6\sqrt{Y}$, la inversió és exògena i igual a 25 i la despesa pública és un 40% de la renda nacional:

   a) Planteja les equacions del model.
   b) Calcula els valors d'equilibri de la renda nacional, el consum i la despesa pública.

7. En un model d'equilibri de la renda d'una economia, sabem que la renda és igual al consum més 570 €, el consum és igual a 110 € més el 80% de la renda disponible (renda menys impostos) i els impostos són el 25% de la renda.
    a) Planteja les equacions del model.
    b) Calcula la renda, el consum i els impostos d'equilibri.

1.2. Matrius, determinants, rang i càlcul de la inversa

Una matriu és un conjunt rectangular de nombres reals ordenat per files i columnes i entre parèntesis. Per exemple, $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ és una matriu 2x3, és a dir, de dues files i tres columnes. Les operacions amb matrius inclouen la suma o la resta, el producte per un nombre, la transposició, el producte, el determinant, el rang i la inversa.

Les matrius tenen diverses utilitats en matemàtiques i en economia. En primer lloc, en el context de sistemes d'equacions lineals, les matrius permeten escriure el sistema de forma compacta, analitzar si el sistema és compatible (té solució) i determinat (la solució és única) i proporciona diversos mètodes per a resoldre'l: amb la matriu inversa, mètode de Cramer i mètode de Gauss. En segon lloc, també s'utilitzen matrius en l'anàlisi de funcions de més d'una variable que estudiarem en els temes 2, 3 i 4, on veurem la matriu jacobiana i la matriu hessiana. La matriu hessiana també té utilitat en l'anàlisi de la concavitat o convexitat de funcions, que serà important en el tema 5 d'optimització. En tercer lloc, hi ha una aplicació econòmica interessant, el model input-output de Leontief, que es resol mitjançant una equació matricial, és a dir, una equació on la incògnita és una matriu.

Les operacions bàsiques amb matriu són:

- Suma i resta de matrius: les matrius han de tenir la mateixa dimensió (mateix nombre de files, *i*, i columnes, *j*). Si $A = [a_{ij}]$ i $B = [b_{ij}]$, aleshores la matriu suma està formada per la suma dels elements que estan en la mateixa posició, i la matriu resta per la resta dels mateixos elements: $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$ i $A - B = [a_{ij} - b_{ij}]$.
- Producte per un escalar: el resultat s'obté multiplicant cada element de la matriu per aquest escalar: $\alpha \cdot A = [\alpha \cdot a_{ij}]$
- Producte de matrius: cal que el nombre de columnes de la primera matriu (*j*) siga igual al nombre de files de la segona (*j*), $A \cdot B = [a_{ij}] \cdot [b_{jk}]$, i el resultat és una matriu amb tantes files com la primera i tantes columnes com la segona, $C = A \cdot B = [c_{ik}]$. El resultat de la matriu producte s'obté multiplicant dos a dos i sumant els elements de cada fila de la primera matriu pels elements de cada columna de la segona matriu, $c_{ik} = \sum_j a_{ij} b_{jk}$.

El determinant i la inversa d'una matriu requereix que siga quadrada (mateix nombre de files que de columnes), i la inversa, a més, que el determinant no siga zero. El determinant 2x2 es calcula així:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

I els d'ordre superior a 2 es poden calcular amb una suma de productes, multiplicant els elements d'una fila pels seus adjunts:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

La notació A_{ij} o adjunt de l'element a_{ij} és el determinant de la matriu que queda en eliminar la fila i i la columna j (D_{ij}) i amb un canvi de signe o no en funció de la posició de l'element: $A_{ij} = (-1)^{i+j}D_{ij}$.

Els rang d'una matriu, quadrada o no, és l'ordre de la major submatriu quadrada continguda en aquesta matriu i amb determinant diferent de zero.

La inversa d'una matriu A és aquella matriu A^{-1} que compleix $AA^{-1}= I$, on I és la matriu identitat (formada per uns en la diagonal principal i zeros en la resta d'elements). Hi ha diversos mètodes per a calcular-la, un dels quals utilitza la matriu adjunta ($Adj(A)$), és a dir, la matriu formada pels adjunts de cada element:

$$A^{-1} = \frac{(Adj(A))^t}{\det(A)}$$

El superíndex t significa la matriu transposada, aquella que intercanvia files per columnes.

Un sistema d'equacions lineal es pot escriure amb matrius, per exemple:

$$\begin{cases} 2x + 5y + 3z = 5 \\ -x - 2y + 4z = 1 \\ x + 3y - z = -2 \end{cases} \rightarrow \quad AX = b$$

On:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \; X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

El rang de la matriu de coeficients A i el rang de la matriu ampliada (A, b) ens dona una caracterització de l'existència i/o unicitat de la solució del sistema:

- Existeix solució o el sistema és compatible si rang(A)=rang(A, b). En cas contrari és incompatible.
- La solució és única o el sistema és determinat si rang(A)=rang(A, b)=nre. variables. En cas que no es done la segona igualtat és indeterminat.

Utilitzant propietats de matrius a partir de l'equació matricial $AX = b$, es pot arribar a resoldre el sistema d'equacions en el cas compatible determinat amb la **matriu inversa**:

$$X = A^{-1}b$$

A partir d'aquesta expressió, substituint la definició de la inversa i operant, es pot arribar a la **regla de Cramer**, un altre mètode matricial per a resoldre sistemes:

$$x = \frac{|A_1|}{|A|} \quad y = \frac{|A_2|}{|A|} \quad z = \frac{|A_3|}{|A|}$$

on A_i és una matriu com la matriu A, llevat que s'ha canviat la columna i per la columna b.

Un altre mètode matricial per a resoldre sistemes d'equacions és el **mètode de Gauss**. Aquest mètode també detecta si el sistema és incompatible i/o indeterminat. El mètode de Gauss comença amb la matriu ampliada (A, b), matriu que es transforma fent combinacions lineals apropiades de les seues files amb l'objectiu d'arribar a una matriu triangular en la posició que ocupava la matriu A, és a dir, amb zeros per davall de la diagonal principal, per donar lloc a un sistema d'equacions equivalent més fàcil de resoldre. En l'exemple anterior:

$$\begin{pmatrix} \underbrace{\mathbf{2} & \mathbf{5} & \mathbf{3}}_{\boldsymbol{A}} & \underbrace{\mathbf{5}}_{\boldsymbol{b}} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{-2} & \mathbf{4} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{-1} & \mathbf{-2} \end{pmatrix} \overset{\boldsymbol{F2'=F1+2F2}}{\underset{\boldsymbol{F3'=F1-2F3}}{\rightleftarrows}} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 & \mathbf{5} \\ 0 & 1 & 11 & \mathbf{7} \\ 0 & -1 & 5 & \mathbf{9} \end{pmatrix} \overset{\boldsymbol{F3''=F2'+F3'}}{\rightleftarrows} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 & \mathbf{5} \\ 0 & 1 & 11 & \mathbf{7} \\ \underbrace{0 & 0 & 16}_{\text{triangular}} & \mathbf{16} \end{pmatrix}$$

I ara el sistema és més fàcil de resoldre:

$$\begin{cases} 2x + 5y + 3z = 5 \\ y + 11z = 7 \\ 16z = 16 \end{cases}$$

Amb el mètode de Gauss, el sistema és indeterminat si en l'ultima fila tot són zeros; z queda com un paràmetre amb qualsevol valor i les altres variables s'expressen en funció de z. Finalment, el sistema és incompatible si en l'última fila tot són zeros excepte l'últim valor.

Una aplicació econòmica directa del càlcul matricial és el **model input-output de Leontief**. Aquest model relaciona el nivell de producció (output) de cada sector de l'economia amb la necessitat que de cada producte té cada un dels sectors (input) per a dur a terme la seua activitat i amb la demanda final del producte (consum final). Així, per al producte o sector 1, la producció és igual a la demanda dels sectors més la demanda final:

$$\underbrace{x_1}_{\text{producció (output)}} = \underbrace{a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n}_{\text{Utilització en la resta de sectors (input)}} + \underbrace{d_1}_{\text{demanda final}}$$

on cada a_{ij} és la quantitat de producte i que es necessita per a produir una unitat del producte j.

En el conjunt d'una economia amb n sectors, apareix una equació matricial com:

$$X = AX + d$$

I per tant, operant, els nivells de producció han de complir:

$$X = (I - A)^{-1}d$$

Exercici 2

1. Donades les matrius:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   Calcula:

   a) $B + 2C$
   b) $A \cdot D$
   c) $A \cdot A^t$
   d) $(B)^{-1}$
   e) $(A \cdot A^t)^{-1}$
   f) $rang(A)$

2. Estudia si els sistemes són compatibles o no i determinats o no. Resol cada sistema en cas què siguen compatibles (utilitza paràmetres en el cas indeterminat) amb algun dels mètodes matricials:

   a) $\left.\begin{array}{l} 2x + 5y + 3z = 5 \\ -x - 2y + 4z = 1 \\ x + 3y - z = -2 \end{array}\right\}$

   b) $\left.\begin{array}{l} 6x - 2y - 2z = 8 \\ 2x + 2y + z = 3 \\ x + 2y + 2z = -1 \end{array}\right\}$

   c) $\left.\begin{array}{l} x + y + 2z = 2 \\ 2x + y - z = 1 \\ -x + 2y + z = -5 \end{array}\right\}$

   d) $\left.\begin{array}{l} 2x + y - z = 1 \\ x + y + z = 2 \end{array}\right\}$

   e) $\left.\begin{array}{l} 2x + y = 4 \\ x - 2y = 0 \\ 3x + y = 5 \end{array}\right\}$

   f) $\left.\begin{array}{l} 3x + 2y + z = 13 \\ 2x - y + 5z = 6 \\ 5x + y - 2z = 11 \end{array}\right\}$

   g) $\left.\begin{array}{l} 3x + 2y - z = 0 \\ x - y + z = 1 \\ -x + 2z = 1 \end{array}\right\}$

   h) $\left.\begin{array}{l} 5x - 3y + 4z = -7 \\ -3x + 4y - 8z = 3 \\ 7x - 2y + 11z = 0 \end{array}\right\}$

3. Una empresa fabrica tres productes en quantitats x, y, z. Per a elaborar-los, utilitza tres matèries primeres $M1$, $M2$ i $M3$. La quantitat disponible de cada matèria primera és 280, 460 i 220 unitats, respectivament. Per a produir una unitat del primer article s'utilitzen 2 unitats de $M1$, 6 de $M2$ i 8 de $M3$. Per a produir una unitat del segon article s'utilitzen 4 unitats de $M1$, 11 de $M2$ i 1 de $M3$. Per a produir una unitat del tercer article s'utilitzen 8 unitats de $M1$, 6 de $M2$ i 2 de $M3$. Determina la quantitat que cal produir de cada article si s'ha d'usar exactament tota la matèria primera disponible.

4. Una empresa disposa de 77 hores setmanals de treball qualificat, 121 hores setmanals de treball no qualificat i 176 hores setmanals de màquina per a produir tres productes. Per a produir una unitat del primer producte s'utilitza 1 hora de treball qualificat, 3 hores de treball no qualificat i 5 hores de màquina. Per a produir una unitat del segon article s'utilitzen 2 hores de treball qualificat, 2 hores de treball no qualificat i 3 hores de màquina. Per a produir una unitat del tercer article s'utilitza 1 hora de treball qualificat, 4 hores de treball no qualificat i 4 hores de màquina.

    a) Planteja el sistema d'equacions.
    b) Determina la quantitat que cal produir de cada producte si han d'utilitzar-se necessàriament totes les hores disponibles.

5. Una empresa exporta el seu producte a quatre països. Desitja exportar en total 280 tones del producte. A Alemanya vol exportar tant de producte com a França i al Regne Unit junts. A França exactament el doble que al Regne Unit. I a Itàlia i França conjuntament vol exportar 70 tones més que a Alemanya.

    a) Planteja el sistema d'equacions.
    b) Calcula quant de producte ha d'exportar a cada país.

6. Una inversora disposa de 30.000 € per a invertir en tres fons d'inversió. En el primer fons, que és el menys arriscat, vol invertir la mateixa quantitat que en els altres dos junts. Mentre que en el segon, que inverteix en dòlars, vol invertir 5.000 € menys que en la suma dels altres dos.

    a) Planteja el sistema d'equacions.
    b) Calcula com distribuir la inversió entre els tres fons d'inversió.

7. La matriu input-output de l'economia espanyola en 2016, simplificant a tres sectors econòmics (agricultura, indústria i serveis), és:

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}23 & 0{,}05 & 0{,}01 \\ 0{,}14 & 0{,}41 & 0{,}08 \\ 0{,}18 & 0{,}21 & 0{,}3 \end{pmatrix}$$

Suposant que el vector de demanda final és $d = \begin{pmatrix} 150 \\ 300 \\ 500 \end{pmatrix}$ es demana:

    a) La interpretació econòmica del coeficient 0,14 de la matriu input-output.
    b) La interpretació econòmica del valor 500 del vector de demanda final.

c) El plantejament de l'equació matricial del model input-output en aquest cas.
d) Els nivells de producció de cada sector que resolen aquest model input-output (utilitzant Excel o WolframAlpha).

8. En una economia amb dos sectors, la matriu input-output i el vector de demanda final són, respectivament:

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}6 \end{pmatrix} \qquad d = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \end{pmatrix}$$

a) Planteja el sistema d'equacions d'equilibri en l'economia.
b) Calcula la matriu $(I - A)^{-1}$
c) Calcula la producció d'equilibri dels dos sectors.

9. La matriu input-output i el vector de demanda final en una economia de tres sectors són, respectivament:

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}3 & 0{,}5 \end{pmatrix} \qquad d = \begin{pmatrix} 120 \\ 160 \\ 200 \end{pmatrix}$$

a) Interpreta econòmicament l'element de la matriu $a_{23} = 0{,}1$.
b) Planteja el sistema d'equacions d'equilibri en l'economia.
c) Calcula els nivells de producció dels tres sectors.

10. En una economia amb dos sectors, el primer sector utilitza 0,6€ del primer producte i 0,1€ del segon producte per a produir 1€ del primer bé. El sector 2 utilitza 0,2€ del primer producte i 0,7€ del segon producte per a produir 1€ del segon bé. La demanda final és de 120€ del primer producte i 160€ del segon producte.

a) Escriu la matriu input-output.
b) Calcula els nivells de producció d'equilibri dels dos sectors.

11. En una economia amb dos sectors, la demanda del producte del primer sector és de 0,7 unitats per cada unitat produïda en el primer sector, de 0,2 unitats per cada unitat produïda en el segon sector i de 80 unitats per als consumidors finals. La demanda del producte del segon sector és de 0,1 unitats per cada unitat produïda del primer sector, de 0,8 unitats per cada unitat produïda en el segon sector i de 60 unitats per als consumidors finals.

a) Escriu la matriu input-output
b) Calcula els nivells de producció d'equilibri dels dos sectors.

12. La matriu input-output i el vector de demanda final en una economia de dos sectors són, respectivament:

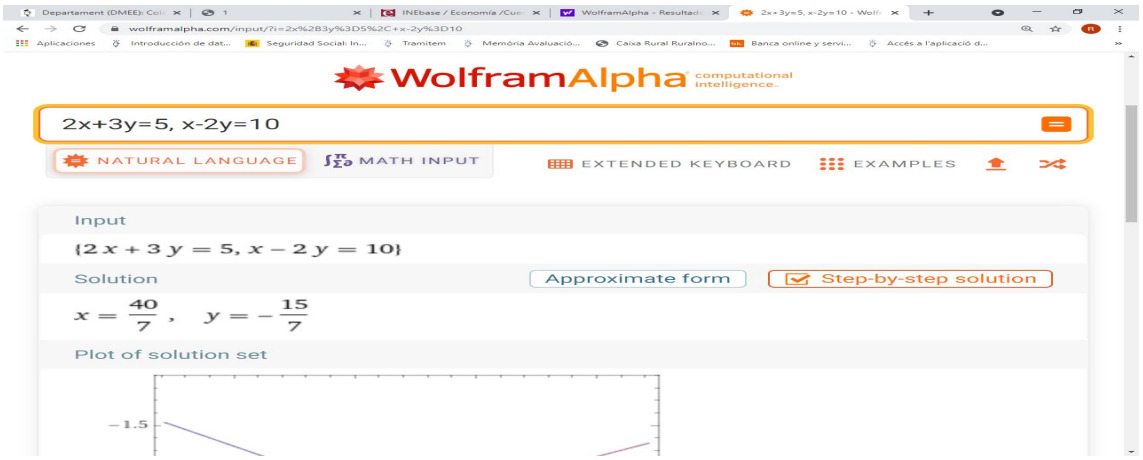
$$A = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix} \qquad d = \begin{pmatrix} 120 \\ 150 \end{pmatrix}$$

a) Interpreta econòmicament l'element de la matriu $a_{12} = 0{,}1$.
b) Interpreta econòmicament el valor $d_1 = 120$.
c) Calcula els nivells de producció de cada sector.

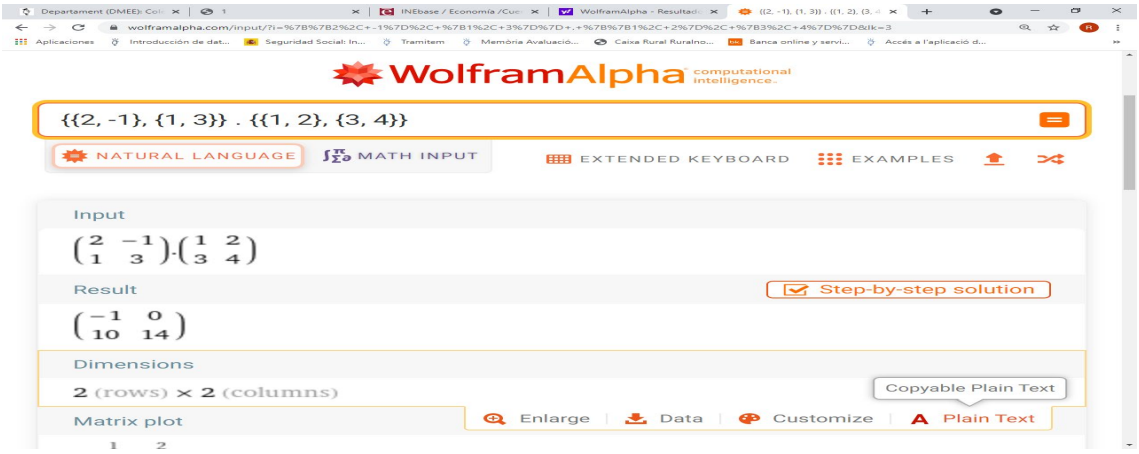
ANNEX 1. Sistemes d'equacions i matrius amb WolframAlpha

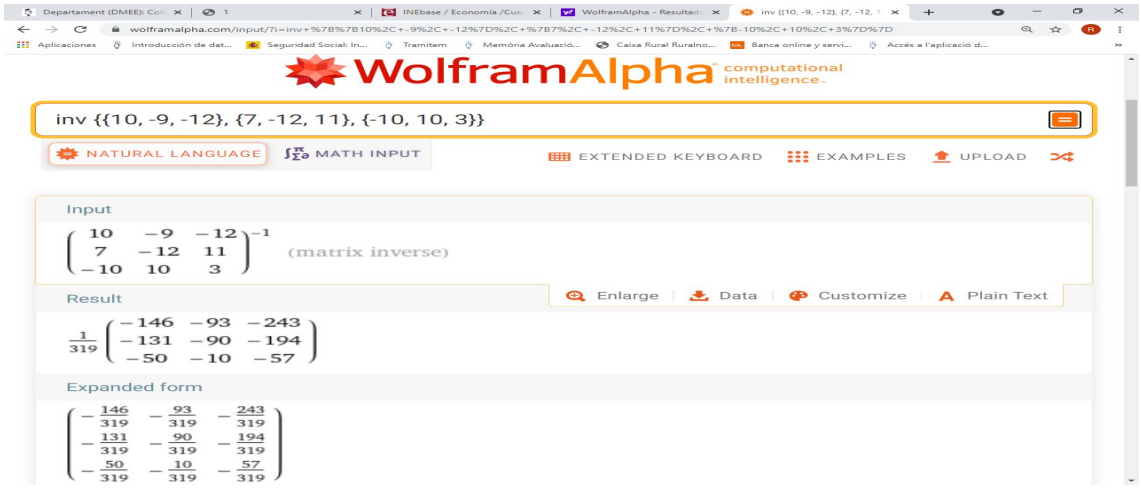
La pàgina web https://www.wolframalpha.com/ proporciona una eina per a fer gran quantitat càlculs matemàtics, incloent-hi resolució de sistemes d'equacions i càlcul matricial. És interessant fer clic sobre l'enllaç *EXAMPLES* per a aprendre a utilitzar WolframAlpha d'una manera més completa.

La resolució de sistemes d'equacions es fa introduint les equacions en la casella d'entrada de text i fent clic sobre el signe =. La solució apareix a continuació. No es necessita cap sintaxi especial, únicament separar amb comes cada equació:



En el cas de càlcul matricial, les matrius s'introdueixen entre claus i cada fila també entre claus separant amb comes cada valor. Les operacions amb matrius utilitzen el signe +, -, ., det, inv o ^-1, rank i transpose. Exemples:





ANNEX 2. Càlcul matricial amb Excel

El full de càlcul Excel pot utilitzar-se per a fer càlcul matricial. Les operacions més simples, com la suma o el producte per un escalar, es poden fer com qualsevol operació matemàtica, fent referència al rang on es troba cada matriu. A més, Excel incorpora algunes funcions dins de la categoria de funcions matemàtiques per tal de facilitar operacions matricials més complexes. Es tracta de les que segueixen:

- MMULT(matriu1; matriu2): multiplica la matriu1 per la matriu2. Lògicament, cal que el producte siga coherent, és a dir, les columnes de la matriu1 han de ser tantes com les files de la matriu2.
- MINVERSA(matriu): calcula la inversa de la matriu especificada.
- TRANSPONER(matriu): calcula la matriu transposada de la matriu especificada. Està en la categoria *Cerca i referència*.
- MDETERM(matriu): calcula el determinant de la matriu especificada.

L'execució correcta de les operacions matricials requereix dues consideracions. En primer lloc, abans d'escriure qualsevol fórmula o funció, el resultat de la qual siga una matriu (això no s'aplica a la quarta funció perquè el resultat d'un determinant és un nombre), s'ha de seleccionar el rang de cel·les que ocuparà la matriu resultat. I, en segon lloc, després d'escriure la funció i els arguments cal confirmar l'entrada amb la combinació de tecles Ctrl+Majus+Intro.

En aquesta imatge està resolt l'exercici 2.1 d'aquest tema. La fórmula cal escriure-la després de seleccionar el rang de la matriu resultat (amb color gris) però sense les claus {}, aquestes s'incorporen automàticament després de confirmar amb Ctrl+Majus+Intro.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1															
2	Exercici 3: dades														
3				A				B			C		D		
4			2	0	-1		4	1		2	5		2		
5			3	1	-2		2	1		-1	-2		1		
6													0		
7	Resultats:							Fórmula:							
8				B+2C											
9				8	11		{=G4:H5+2*J4:K5}								
10				0	-3										
11															
12				A·D											
13				4			{=MMULT(C4:E5;M4:M6)}								
14				7											
15															
16				$A \cdot A^t$											
17				5	8		{=MMULT(C4:E5;TRANSPONER(C4:E5))}								
18				8	14										
19															
20				B^{-1}											
21				0,5	-0,5		{=MINVERSA(G4:H5)}								
22				-1	2										
23															
24				$(A \cdot A^t)^{-1}$											
25				2,333333	-1,33333		{=MINVERSA(MMULT(C4:E5;TRANSPONER(C4:E5)))}								
26				-1,33333	0,833333										
27															

TEMA 2. LÍMITS I CONTINUÏTAT DE FUNCIONS

2.1. Funcions reals d'una i diverses variables reals: funcions implícites, compostes i homogènies

Les funcions són l'instrument matemàtic més important en economia. Amb funcions es representen relacions entre variables econòmiques com la funció de demanda, que relaciona el preu d'un bé i la quantitat demanada; la funció de cost, que relaciona la quantitat produïda d'un producte i el cost; etc. Per què aquestes relacions siguen coherents amb el comportament dels agents econòmics, és important que les funcions complisquen certes característiques matemàtiques com la continuïtat i la derivabilitat. Aquestes característiques i la representació gràfica de la funció (punts de tall, asímptotes, màxims i mínims, etc.) permeten analitzar la funció i ajudar en la presa de decisions dels agents econòmics.

Funcions d'una variable real i algunes representacions gràfiques (corbes de nivell)

Una funció és una relació entre dos conjunts que a cada element del primer conjunt li assigna un únic element del segon conjunt. El primer conjunt s'anomena domini de la funció (*D*). En el cas més habitual, el domini està inclòs en el conjunt de nombres reals (espai inicial), $D \subseteq \mathbb{R}$, i el segon conjunt o espai final és també el de nombres reals. La funció queda definida mitjançant una expressió algebraica. La notació utilitzada és:

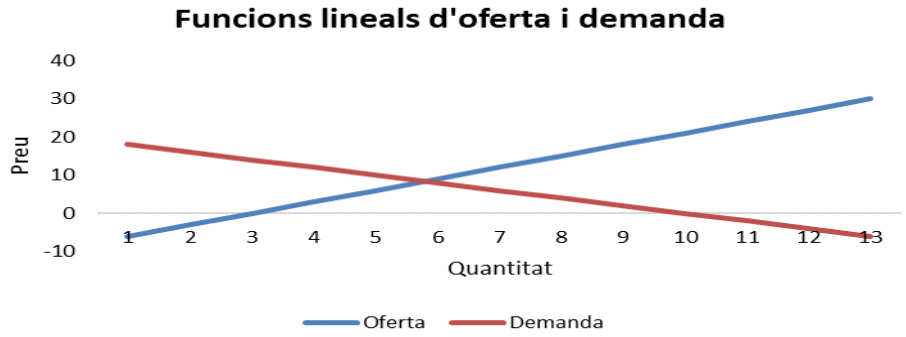
$$\begin{array}{rcl} f: D \subseteq \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \rightarrow & x + \frac{1}{x} \end{array} \quad \text{o també } f(x) = x + \frac{1}{x}$$

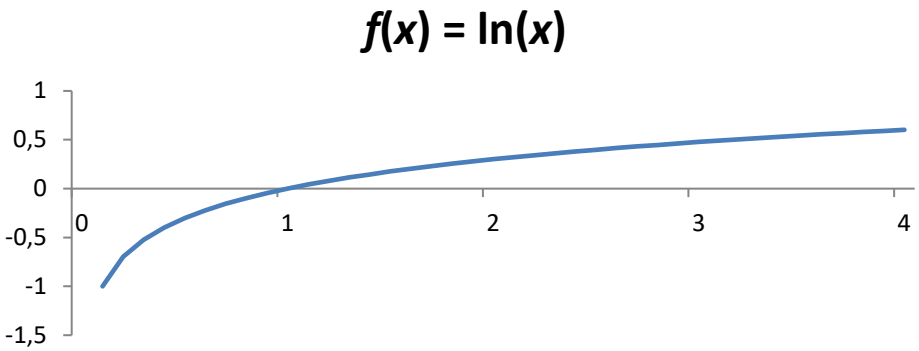
El valor numèric de la funció per a cada valor de la variable *x* és la imatge de la funció. El domini matemàtic és el conjunt de valors de la variable *x* que tenen imatge. En el cas anterior: $D = \{x \epsilon \mathbb{R} / x \neq 0\}$ o també $D =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ o també $D = \mathbb{R} \sim \{0\}$. Si la variable *x* representa una magnitud econòmica pot tenir sentit parlar de domini econòmic, és a dir, el conjunt de valors de la variable *x* que tenen imatge i que són coherents des del punt de vista econòmic (la quantitat produïda d'un bé no pot ser negativa, per exemple).

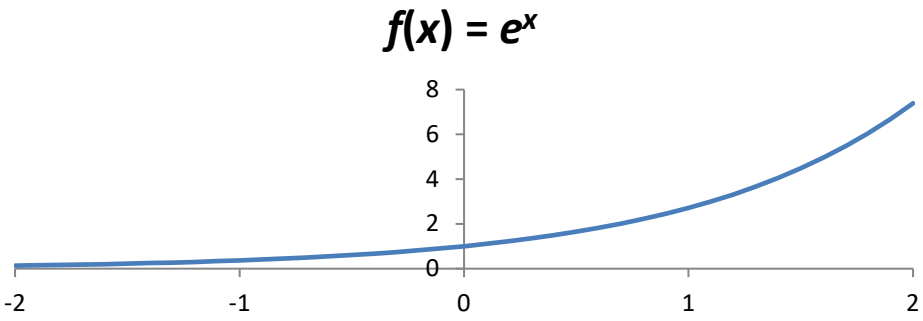
A vegades, a causa de canvis de comportament per motius variats o a fi d'evitar discontinuïtats, les funcions es defineixen a trossos: $f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{x} & x \geq 1 \\ 2 & x < 1 \end{cases}$. El càlcul del valor numèric de la funció en un punt requereix situar correctament aquest punt ($x \geq 1$ o $x < 1$) i agafar el tros corresponent.

Hi ha dues formes d'expressar una funció: la forma explícita i la forma implícita. La forma explícita té aïllada la variable dependent, $y = 2x + 5$, mentre que la forma implícita és una equació que relaciona la variable dependent i la independent, $-2x + y = 5$. Passar de la forma implícita a l'explícita requereix aïllar la variable dependent, però no sempre és possible aquesta transformació.

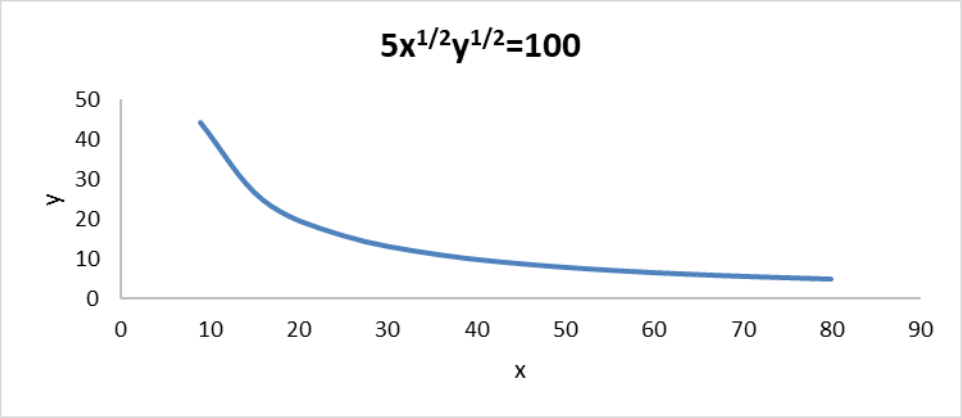
Per a acabar aquest epígraf, convé també estar familiaritzat amb la representació gràfica de funcions d'una variable. La representació de funcions lineals i algunes no lineals és molt útil en economia. A més de funcions polinòmiques o formades a partir de polinomis (racionals), també s'utilitzen amb certa freqüència dues funcions elementals com el logaritme neperià i l'exponencial amb base *e*, i amb menys freqüència el sinus i el cosinus. Alguns exemples de representació gràfica de funcions freqüents en economia són:







Les funcions de més d'una variable no es representaran gràficament, però sí que és interessant saber representar nivells de funcions de dues variables o **corbes de nivell**, per l'ús que se'n fa en economia. En el gràfic següent tenim el nivell 100 d'una hipotètica funció de producció del tipus **Cobb-Douglas** de dues variables.



En tots els punts de la corba de nivell, la producció és la mateixa i igual a 100. Si el nivell de producció fora superior a 100, la corba se situaria per damunt i si fora inferior a 100 se situaria per davall.

Funcions de diverses variables reals

Les **funcions reals d'una variable real** $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ representen les relacions més elementals entre magnituds econòmiques, però no per això són menys importants. Les funcions de demanda, per exemple, relacionen una única variable independent, el preu d'un bé (p), amb una única variable dependent, la quantitat demanada d'aquest bé (q). La forma funcional de la funció ha de ser coherent amb el comportament dels agents econòmics. En el cas d'una funció de demanda i per a un bé normal, la relació entre preu i quantitat demanada ha de ser decreixent i ambdues variables han de ser estrictament positives. Les funcions d'una variable es representen gràficament en $\mathbb{R}^2$, amb l'eix d'abscisses per a la variable independent i l'eix d'ordenades per a la dependent.

Les **funcions reals de diverses variables** $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tenen una única variable dependent, com abans, però diverses variables independents. Permeten establir relacions més complexes entre magnituds econòmiques, tot i que la representació gràfica no és possible en el cas general. En una funció de demanda, per exemple, el preu no és l'única variable que té influència sobre la quantitat demanada, també hi influeixen la renda del consumidor o els preus dels béns substitutius o complementaris. Així, una relació més completa entre variables que determinen la quantitat demanada d'un bé podria ser la que segueix:

$$q = \frac{10\sqrt{Y}}{p}$$

En aquest cas, la funció és de dues variables independents, el preu del bé i la renda del consumidor (Y). La forma funcional triada és coherent amb un comportament racional dels consumidors: com més renda més quantitat demanada (béns normals), encara que el doble de renda no suposa el doble de quantitat demanada perquè la satisfacció de consumir quantitats addicionals és cada vegada menor. Les funcions de dues variables s'haurien de representar en $\mathbb{R}^3$, dos eixos per a les variables independents i un eix per a la variable dependent, però això no s'exigirà.

Finalment, les **funcions vectorials** $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ relacionen diverses variables independents i diverses variables dependents. Per exemple, les quantitats demanades de dos béns substitutius podrien determinar-se conjuntament a partir dels preus dels dos béns i de la renda del consumidor:

$$(q_1, q_2) = \left(\frac{10p_2\sqrt{Y}}{p_1}, \frac{5p_1\sqrt{Y}}{p_2} \right)$$

Les funcions vectorials es poden descompondre en *m* funcions reals de *n* variables, anomenades funcions components. Per exemple, l'anterior funció vectorial té les dues funcions components, de tres variables, següents:

$$q_1 = \frac{10p_2\sqrt{Y}}{p_1} \qquad q_2 = \frac{5p_1\sqrt{Y}}{p_2}$$

Les formes funcionals triades són coherents amb la lògica econòmica: com més alt siga el preu d'un bé menys quantitat demanada d'aquest bé i més quantitat demanada del bé substitutiu, mentre que la renda té un efecte directe sobre les quantitats demanades dels dos béns.

Funcions implícites

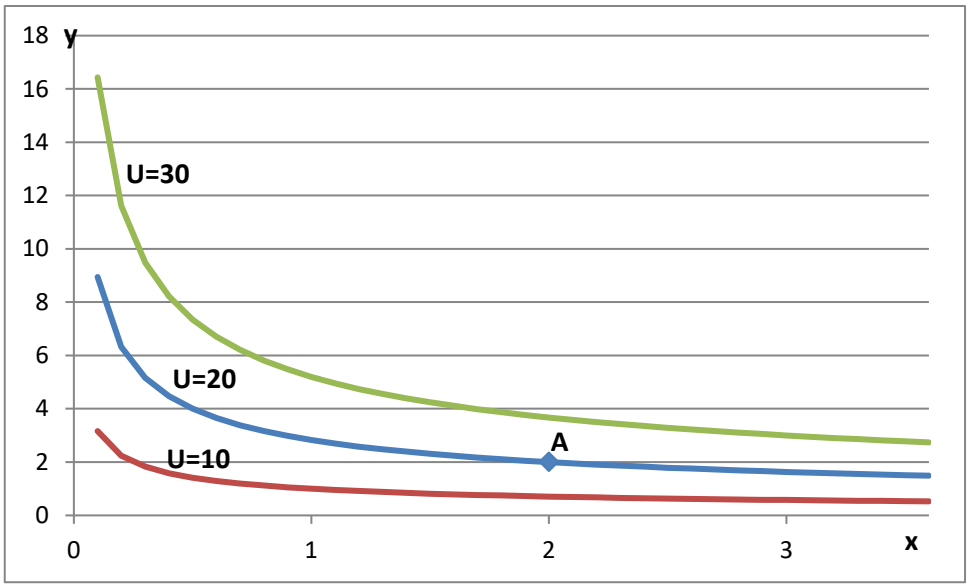
Les funcions implícites són les que estan expressades a partir d'una equació amb dues o més variables $F(y, x_1, \dots, x_n) = 0$, en comptes d'estar expressada de forma explícita, amb la variable dependent aïllada $y = f(x_1, \dots, x_n)$. No totes les equacions de dues o més variables defineixen una equació implícita, ja que la variable dependent ha de quedar determinada de forma única a partir dels valors de les variables independents (veurem en el tema 3 què ha de passar per a assegurar l'existència de la funció implícita).

En economia, les funcions implícites són relativament freqüents a partir de funcions de dues o més variables que mantenen constant el nivell. Exemples:

- Quan fixem el nivell d'utilitat d'un consumidor (corba d'indiferència) queda definida una funció implícita que relaciona la quantitat consumida d'un bé en funció de la quantitat consumida dels altres.
- Si fixem el nivell de cost d'una empresa (corba d'isocost), es defineix una funció implícita que relaciona la quantitat utilitzada d'un factor productiu en funció de la quantitat utilitzada dels altres.
- Si igualem la funció de producció d'una empresa a un nivell de producció constant (isoquanta), queda determinada una funció implícita entre la quantitat utilitzada d'un factor productiu i la quantitat utilitzada dels altres.

Quan la funció que hi ha en el primer membre de l'equació implícita és de dues variables, es pot fer una anàlisi gràfica que és molt útil per a entendre els raonaments econòmics. Per exemple, si la funció d'utilitat depèn del consum de dos béns $U(x, y)$ no la podem representar gràficament en $\mathbb{R}^2$, però sí que podem representar nivells de la funció d'utilitat (**corbes de nivell**) anomenades corbes d'indiferència. Així, a partir de la funció d'utilitat $U(x, y) = 10x^{1/3}y^{2/3}$, es poden representar distintes corbes

d'indiferència igualant-la a un nivell d'utilitat diferent i cada corba d'indiferència és una funció implícita que relaciona la quantitat consumida del segon bé i la del primer bé. Al llarg de cada corba d'indiferència, el nivell d'utilitat és el mateix i en canviar de corba d'indiferència canvia el nivell d'utilitat:



En el punt A es consumeixen dues unitats de cada producte i el nivell d'utilitat és de 20, constant al llarg de tota la corba. Mantenint aquest nivell d'utilitat, un consum addicional d'un bé haurà d'anar acompanyat d'una disminució de l'altre (la corba d'indiferència és decreixent). En canvi, si el consumidor té més renda disponible podrà consumir més dels dos productes i passar a una corba d'indiferència superior U=30, per exemple.

Altres corbes de nivell que ixen en l'anàlisi econòmica són les isoquantes (formades per les combinacions de factors productius que originen el mateix nivell de producció) o les corbes d'isocost (formades per les combinacions de productes amb el mateix cost).

Funcions compostes

Una funció composta apareix quan s'encadenen dues o més funcions, és a dir, quan una funció s'aplica sobre el resultat d'una altra funció. En termes de variables, significa que les variables independents d'una funció són variables dependents en una funció prèvia. És bastant habitual en economia que les variables d'una funció, al mateix temps, depenguen d'altres variables. Per exemple, la funció d'utilitat d'un consumidor depèn de les quantitats consumides de cada bé, però aquestes quantitats no són del tot variables independents, ja que depenen dels preus dels béns, de la renda disponible del consumidor, de les preferències, etc. En última instància, per tant, la utilitat del consumidor depèn d'aquestes darreres variables i les quantitats consumides es poden considerar variables intermèdies.

El plantejament de la funció composta es pot fer teòricament amb els espais inicials i finals de cada funció que intervé o, a un nivell més pràctic, amb un esquema en forma

d'arbre de relacions entre variables. En teoria, l'existència de la funció composta requereix dues condicions:

- Que l'espai final de la primera funció (*f*) siga el mateix que l'espai inicial de la segona (*g*): $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ i $g: D_g \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$.
- Que qualsevol imatge d'un punt del domini de la primera funció es trobe en el domini de la segona funció: $f(D_f) \subseteq D_g$.

D'aquesta manera existirà la funció composta (*gof*), que és aquella que aplica de primer la funció *f* i al resultat li aplica la funció *g*:

$$g \circ f: D_f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p, \qquad \text{tal que} \quad (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

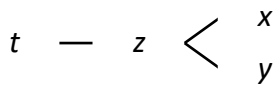
Exemple: la funció $h(x,y) = e^{x^2+y^2}$ és una funció composta de dues funcions. La primera $f(x,y) = x^2 + y^2$ és de la forma $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ i la segona $g(z) = e^z$ és de la forma $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Es compleix que l'espai final de la primera funció és el mateix que l'espai inicial de la segona ($\mathbb{R}$) i, com que els dominis d'ambdues són tot l'espai inicial, també es compleix la segona condició d'existència de la funció composta. Així, anomenant $g \circ f = h$, tenim la següent funció composta $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

$$h(x,y) = (g \circ f)(x,y) = g\big(f(x,y)\big) = g(x^2 + y^2) = e^{x^2+y^2}$$

Mitjançant un esquema que relaciona les variables, en l'exemple anterior partirem de les relacions: $t = e^z$ i $z = x^2 + y^2$. Les variables independents en última instància, les intermèdies i les dependents són:

$$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \to z \to t$$

O també en forma d'arbre:



És a dir, la variable dependent és *t*, que depèn de *z* però aquesta depèn de *x* i de *y*, que són les variables independents en última instància. La variable *z* té un caràcter intermedi: es comporta com a dependent en la primera funció i com a independent en la segona. L'existència de variables intermèdies és la clau per a poder plantejar una funció composta.

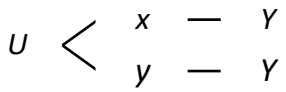
L'obtenció de la funció composta, si no hi ha problemes de dominis de les funcions, és un simple procés de substitució de variables. Per exemple, si la funció d'utilitat d'un consumidor és $U(x,y) = 5\ln(x) + \ln(y)$ i les quantitats consumides depenen de la renda disponible del consumidor, $x = \frac{Y}{10}$, $y = \frac{Y}{25}$, la funció composta és aquella que relaciona la utilitat del consumidor amb el nivell de renda disponible. Per substitució s'obté que:

$$U(Y) = 5\ln\left(\frac{Y}{10}\right) + \ln\left(\frac{Y}{25}\right)$$

Ara, les relacions entre variables són:

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$Y \to (x, y) \to U$$

O també en forma d'arbre:



Funcions homogènies

Les funcions homogènies tenen una característica que resulta interessant des del punt de vista econòmic en certes funcions, sobretot de producció. Quan les variables d'una funció canvien de forma proporcional es tracta de veure si es pot analitzar o no com canvia el valor de la funció, i en cas d'afirmativa, si ho fa en la mateixa proporció, en una proporció major o en una proporció menor. Les funcions homogènies són aquelles on sí que es pot deduir com canvia el valor de la funció. Matemàticament, una funció real de *n* variables és homogènia de grau *r* si:

$$f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda^r f(x_1, \dots, x_n), \qquad \forall \lambda > 0$$

L'homogeneïtat vol dir que si es multipliquen les variables per un escalar positiu el valor de la funció queda multiplicat també per un escalar positiu, que pot ser el mateix si r=1, major si r>1 o menor si r<1.

La característica més convenient en distintes aplicacions econòmiques és que la funció siga homogènia de grau r=1 perquè implicarà que la funció és independent de l'escala en què s'expressen les variables: si en comptes d'expressar-les en unitats les expressem en milers d'unitats, el valor de la funció serà el mateix expressat també en milers d'unitats.

En el context de funcions de producció, és a dir, funcions en què les variables representen les unitats utilitzades de factors productius i en què el resultat indica el valor de la producció, una funció homogènia de grau r=1 s'anomena de rendiments constants a escala perquè si emprem una proporció distinta de factors productius (per exemple, el doble, λ=2), el valor de la producció canvia en aquesta mateixa proporció (també es dobla). En canvi, si és homogènia de grau r>1, és de rendiments creixents a escala i la producció augmentaria en una proporció major, mentre que si ho és de grau r<1, és de rendiments decreixents a escala i la producció augmentaria en una proporció menor.

L'estudi de l'homogeneïtat requereix operar amb expressions algebraiques (traure factor comú, simplificar, etc.), un dels requisits matemàtics previs que s'ha repassat en el tema 1.

Exemples

- Estudi de l'homogeneïtat de $f(x, y, z) = x^2y + 3xy^2 + 4z^3$:

$$f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = (\lambda x)^2 \lambda y + 3\lambda x(\lambda y)^2 + 4(\lambda z)^3 = \lambda^3 x^2 y + 3\lambda^3 xy^2 + 4\lambda^3 z^3 =$$
$$= \lambda^3 (x^2 y + 3xy^2 + 4z^3) = \lambda^3 f(x, y, z)$$

Per tant, és homogènia de grau *r*=3 (de rendiments creixents a escala si fora una funció de producció). Les funcions polinòmiques són homogènies només si tots els monomis que la formen són del mateix grau.

- Estudi de l'homogeneïtat de $f(x,y)=x^2y^2+4xy$:

$$f(\lambda x,\lambda y)=(\lambda x)^2(\lambda y)^2+4\lambda x\lambda y=\lambda^2x^2\lambda^2y^2+4\lambda^2xy=\lambda^4x^2y^2+4\lambda^2xy \neq \lambda^r(x^2y^2+4xy)$$

Per tant, no és homogènia.

- Estudi de l'homogeneïtat de $f(x,y)=\sqrt{x^{2/3}y^{4/3}}$:

$$f(\lambda x,\lambda y)=\sqrt{(\lambda x)^{2/3}(\lambda y)^{4/3}}=\sqrt{\lambda^{2/3}x^{2/3}\lambda^{4/3}y^{4/3}}=\sqrt{\lambda^2x^{2/3}y^{4/3}}=\lambda\sqrt{x^{2/3}y^{4/3}} =\lambda f(x,y)$$

Per tant, és homogènia de grau *r*=1 (de rendiments constants a escala si fora una funció de producció).

- Estudi de l'homogeneïtat de $f(x,y)=\frac{x^{2/3}y^{4/3}}{x^2+y^2}\sin(\frac{x}{y})$:

$$f(\lambda x,\lambda y)=\frac{(\lambda x)^{2/3}(\lambda y)^{4/3}}{(\lambda x)^2+(\lambda y)^2}\sin(\frac{\lambda x}{\lambda y})=\frac{\lambda^{2/3}x^{2/3}\lambda^{4/3}y^{4/3}}{\lambda^2(x^2+y^2)}\sin(\frac{x}{y}) =\frac{\lambda^2x^{2/3}y^{4/3}}{\lambda^2(x^2+y^2)}\sin(\frac{x}{y})=\lambda^0\frac{x^{2/3}y^{4/3}}{x^2+y^2}\sin(\frac{x}{y})=\lambda^0f(x,y)$$

Per tant, és homogènia de grau *r*=0 (de rendiments decreixents a escala si fora una funció de producció).

El grau d'homogeneïtat pot ser també un nombre negatiu o racional, per exemple la funció $f(x,y)=\frac{4}{\sqrt[3]{x^2+y^2}}$ és homogènia de grau *r*=-2/3.

Exercici 3

1. Classifica les funcions següents segons que siguen reals d'una variable, reals de diverses variables o vectorials, i indica'n l'espai inicial i final.

   a) $f(x)=4+x^2-6x$
   b) $f(x,y)=y+(x-4)^2$
   c) $f(x,y,z)=\begin{cases}x+y & x+z=2\\ x+z & x+z>2\\ y+z & x+z<2\end{cases}$
   d) $f(x)=\begin{cases}3x+6 & x\geq -2\\ 0 & x<-2\end{cases}$
   e) $f(x,y)=(x+2y,-x+4y)$
   f) $f(x,y,z)=(xy,x+z,0)$

2. Escriu de forma explícita, si és possible, les funcions definides implícitament per les equacions següents:

   a) $x^2y + yx - 2 + z = 0$ Calcula $y(x,z)$
   b) $\sqrt{x^2yz} = 0$ Calcula $z(x,y)$
   c) $y^2 + \ln xy - 4 = 0$ Calcula $x(y)$

3. Calcula les funcions compostes següents i indica els espais inicials i finals de cada funció original i de la funció composta. Representa també en forma d'arbre les relacions entre les variables.

   a) $f(x,y,z) = y + 3x - z^2, \quad x(u) = 2u, \quad z(u) = -u$
   b) $f(x,y) = 3y - x^2, \quad y(x) = x + 1$
   c) $f(u,v) = u + 2v, \quad u(x,y,z) = xy + z, \quad v(x,z) = z + x^2$

4. Estudia l'homogeneïtat de les funcions següents i, en cas d'afirmativa, calcula'n el grau.

   a) $f(x,y) = x^2 + y^2$
   b) $f(x,y,z) = x^2yz + 3y^3 + x^2$
   c) $f(x,y) = Ax^{\alpha}y^{1-\alpha}$

5. Representa gràficament les corbes de nivell indicades per a valors positius de les variables.

   a) $C(x,y) = 50 + 2x + 5y$, corbes d'isocost de nivell 100 i 150
   b) $U(x,y) = \sqrt{3x} + \sqrt{y}$, corbes d'indiferència de nivells 4 i 6
   c) $R(x,y) = x^2 + 2y^2 - 2xy$, corbes de nivells 9 i 16
   Nota: Utilitza el programa de representació gràfica accessible des de https://www.geogebra.org/calculator

6. La funció de producció d'una empresa és $F(K,L) = \sqrt[5]{KL^2}$, on K és el nombre d'hores de màquina utilitzades en la producció i L el nombre d'hores de mà d'obra.

   a) Estudia l'homogeneïtat de la funció de producció.
   b) Si el nivell de producció es manté constant en 120 unitats, planteja la funció implícita i obtín de forma explícita la funció que determina les hores de màquina en funció de les hores de mà d'obra.
   c) Calcula la funció composta si el nombre d'hores de màquina i de mà d'obra depenen del tipus d'interès (i) i del salari per hora (w), segons les relacions:

$$K = 100/i \qquad L = 300 - w^2$$

2.2. Domini d'una funció i nocions de topologia (situació dels punts)

El domini matemàtic d'una funció D és el subconjunt de l'espai inicial format pels punts que tenen imatge. Per tant, en els punts del domini té sentit substituir el valor de les

variables en la funció perquè el resultat serà matemàticament coherent. Si tenim també en compte la coherència econòmica de les variables, es pot parlar de domini econòmic. Exemples de funcions de demanda i dominis corresponents:

- Funció real d'una variable: $q = 10/p$,
  Domini matemàtic: $D = \{p \in \mathbb{R} \,/\, p \neq 0\}$
  Domini econòmic (preus no negatius): $D_e = \{p \in \mathbb{R}/p > 0\}$.
- Funció real de diverses variables: $q = \frac{10\sqrt{Y}}{p}$,
  $D = \{(p, Y) \in \mathbb{R}^2/p \neq 0, Y \geq 0\}$ i $D_e = \{(p, Y) \in \mathbb{R}^2/p > 0, Y > 0\}$.
- Funció vectorial: $(q_1, q_2) = \left(\frac{10p_2\sqrt{Y}}{p_1}, \frac{5p_1\sqrt{Y}}{p_2}\right)$,
  $D = \{(p_1, p_2, Y) \in \mathbb{R}^3/p_1 \neq 0, p_2 \neq 0, Y \geq 0\}$ i
  $D_e = \{(p_1, p_2, Y) \in \mathbb{R}^3/p_1 > 0, p_2 > 0, Y > 0\}$.

Observeu que el domini és un conjunt dins de l'espai inicial de la funció i es defineix entre claus escrivint les condicions separades per comes. Quan una funció està definida a trossos, és habitual escriure el domini com la unió de tants subdominis com trossos tinga la funció. Per exemple:

$$f(x, y) = \begin{cases} x + \sqrt{y} & x \geq y \\ x^2 + 2y & x < y \end{cases} \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad D = D_1 \cup D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2/x \geq y, y \geq 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2/x < y\}$$

Les condicions que s'han de complir per a ser del domini depenen de la forma funcional. D'una banda, les expressions polinòmiques sempre estan ben definides i el domini és tot l'espai inicial. D'altra banda, les expressions matemàtiques amb possibles problemes i que cal evitar especificant les condiciones adequades en definir el domini són les que segueixen:

- Expressions amb quocients: el denominador ha de ser diferent de zero.
- Expressions amb arrels d'índex parell: la funció de dins de l'arrel ha de ser major o igual que zero.
- Expressions amb logaritmes: l'argument d'un logaritme ha de ser major estrictament que zero.
- Expressions exponencials (amb variables en l'exponent): la base ha de ser estrictament major que zero.

No solament és important saber si els punts de l'espai inicial són o no són del domini. També és interessant saber si, infinitament pròxims, el punt en té altres que són del domini. L'estudi de la situació dels punts en relació amb el domini de la funció s'anomena topologia i ens ajuda a analitzar correctament algunes característiques de les funcions.

En topologia, per al fet d'estar infinitament pròxim s'utilitza el concepte de bola oberta centrada en un punt x_0 i de radi r, que formalment és el conjunt següent:

$$B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n/d(x, x_0) < r\}$$

És a dir, la bola oberta està formada per tots els punts, la distància dels quals a x_0 és menor que *r*. Aleshores, quan parlem de punts infinitament pròxims a x_0 ens referim a punts que són de la bola oberta $B(x_0, r)$, encara que el grau de proximitat *r* siga molt pròxim a zero.

En funcions definides en un sol tros convé diferenciar els punts següents:

- Punts del domini: s'hi pot calcular el valor numèric de la funció.
  - Punts interiors: tots els punts infinitament pròxims també són del domini.
  - Punts frontera: té punts infinitament pròxims que no són del domini.
- Punts no del domini: no s'hi pot calcular el valor numèric de la funció.
  - Punts d'acumulació: tenen infinitament pròxims altres punts que sí que són del domini.
  - Punts exteriors: cap punt infinitament pròxim és del domini.

Exemple: La funció $f(x) = \frac{x^2-3x-4}{x^2-7x+12}$ té com a domini $D = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 3, x \neq 4\}$ i tots els punts del domini són interiors. Encara que tant *x*=3 com *x*=4 no són punts del domini perquè fan zero el denominador, sí que són punts d'acumulació perquè tenen infinitament pròxims altres punts del domini (*x*=2,999... o *x*=3,999... pertanyents al domini).

En funcions definides a trossos convé situar els punts tant en relació amb el domini com amb els subdominis:

- Punts del domini: s'hi pot calcular el valor numèric de la funció.
  - Punts interiors: tots els punts infinitament pròxims també són del domini:
    - Punts interiors d'algun subdomini: tots els punts infinitament pròxims també són del mateix subdomini.
    - Punts frontera de dos o més subdominis: té punts infinitament pròxims que són d'un subdomini i altres que són d'un altre subdomini.
  - Punts frontera: té punts infinitament pròxims que no són del domini.
- Punts no del domini: no s'hi pot calcular el valor numèric de la funció.
  - Punts d'acumulació: tenen infinitament pròxims altres punts que sí que són del domini (d'un o més d'un subdomini).
  - Punts exteriors: cap punt infinitament pròxim és del domini.

Exemple: La funció $f(x,y) = \begin{cases} x + \sqrt{y} & x \geq y \\ x^2 + 2y & x < y \end{cases}$ té com a domini $D = D_1 \cup D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq y, y \geq 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x < y\}$. El punt (2,1) és interior del primer subdomini D_1; el punt (0,1) és interior del segon subdomini D_2; el punt (1,1) és interior del domini i frontera dels dos subdominis; el punt (1,0) és frontera del domini, i el punt (0,-1) és exterior. No hi ha punts que, al mateix temps, no siguen del domini però sí d'acumulació.

La situació correcta dels punts en relació amb el domini ens ajudarà en l'apartat 2.3 i en el tema 3 a estudiar les principals característiques de les funcions (límits, continuïtat, derivabilitat i diferenciabilitat).

Exercici 4

1. Calcula el domini de les funcions següents i expressa'l de forma matemàticament correcta, simplificant al màxim les condicions que s'han de complir. Calcula, quan siga possible, un punt d'acumulació que no siga del domini i calcula, en el cas de funcions a trossos, un punt del domini frontera dels dos subdominis.

   a) $f(x)=\frac{x^2-6x}{x^2-4x}$

   b) $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-6x}{x^2-4x} & x\neq 0\\ \frac{3}{2} & x=0\end{cases}$

   c) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x+y}{x-y} & x\neq y\\ 0 & x=y\end{cases}$

   d) $f(x,y)=\frac{\sqrt{4x+y}}{\sqrt{x+y}}$

   e) $f(x,y)=\left(\sqrt{x+2y},x^{y+1}\right)$

   f) $f(x,y,z)=\left(\ln(xy),\sqrt{x}+z,0\right)$

2. Calcula el domini econòmic i matemàtic d'aquestes funcions.

   a) $q(Y,p,p')=\frac{\sqrt{Yp\prime}}{2p}$, q és la quantitat demanada, Y és la renda, p el preu del producte i p' el preu d'un bé substitutiu.

   b) $C(q)=q^3-9q^2+36q+20$, q és la quantitat produïda i C el cost.

   c) $F(K,L)=AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$, F és la funció de producció, K és el factor capital i L és el factor treball.

2.3. Conceptes de límits i continuïtat de funcions

La característica desitjable més bàsica que ha de tenir una funció és ser contínua. La continuïtat d'una funció en un punt fa referència al fet que el valor numèric de la funció en el punt siga pràcticament igual al valor que té en punts pròxims (i que siguen del domini), per evitar així canvis bruscos en el valor de la funció en passar d'un punt a un altre de pròxim. El valor de la funció en un punt és la imatge de la funció en aquest punt i el valor en punts infinitament pròxims, si existeix i és únic, s'anomena el límit de la funció en aquest punt. La condició de continuïtat en un punt x_0 és, per tant:

$$\underbrace{f(x_0)}_{\substack{\text{Valor de la}\\ \text{funció}\\ \text{en } x_0}} = \underbrace{\lim_{x\to x_0} f(x)}_{\substack{\text{Valor de la funció en}\\ \text{punts } x\in D \text{ infinitament}\\ \text{pròxims a } x_0}}$$

La majoria de les funcions que veurem són contínues perquè, com hem dit en funcions d'una variable, totes les funcions polinòmiques són contínues i també ho són totes les funcions amb arrels, logaritmes, exponencials, trigonomètriques i aquelles obtingudes amb operacions (suma, producte, quocient, composició) entre les anteriors, sempre que el punt siga del domini. Els raonaments que repetirem freqüentment per tal de justificar la continuïtat d'una funció són com els que segueixen:

- La funció $f(x,y) = x^2y + 5xy + 12y$ és contínua en tots els punts de l'espai inicial perquè és un polinomi.
- La funció $f(x,y) = \frac{x^2y+5x}{12y}$ és contínua en tots els punts del domini (quan $y \neq 0$) perquè és un quocient de polinomis.
- La funció $f(x,y) = \sqrt{x+y} + \ln\frac{x}{y}$ és contínua en tots els punts del domini (quan $x > 0$ i $y > 0$) perquè és una suma d'una arrel quadrada d'un polinomi i un logaritme d'un quocient de polinomis.

Una vegada justificada la continuïtat d'una funció, el càlcul del límit és totalment equivalent al càlcul del valor de la funció.

Si un punt no és del domini, la funció no és contínua en aquest punt (no existeix el valor de la funció), però pot existir el límit (si el punt és d'acumulació) i aleshores evitar la discontinuïtat redefinint la funció en el punt conflictiu. Aquest cas no és freqüent en les funcions econòmiques, per això no el tractarem.

En funcions definides a trossos hi ha la possibilitat que el punt siga del domini de dues maneres: ser interior d'algun subdomini o ser frontera de més d'un subdomini. Si el punt és interior d'un subdomini hem d'agafar la funció que s'aplica als punts d'aquest subdomini i raonar com en el cas de funcions d'un tros. Si el punt és frontera de dos o més subdominis, pot ser necessari aplicar límits laterals (en el cas de funcions d'una variable) o límits per dominis en el cas de funcions de més d'una variable. Vegeu-ne els exemples següents:

- Funció a trossos d'una variable (límits laterals):

$$f(x) = \begin{cases} x + \dfrac{1}{x} & x \geq 1 \\ 2x & x < 1 \end{cases}$$

Cal aplicar límits laterals en el punt conflictiu (x=1) perquè la forma de la funció canvia en punts pròxims a x=1, segons que estiguen a l'esquerra o a la dreta:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^+} x + \frac{1}{x} = 2 \\ \\ \lim\limits_{x\to 1^-} 2x = 2 \end{array} \right\} = 2 = f(1) \rightarrow$$ La funció és contínua en x=1. En la resta de punts del domini, $D = \mathbb{R}$, és contínua perquè és una suma d'un polinomi i un quocient de polinomis (quan x>1) i perquè és un polinomi (quan x<1).

- Funció a trossos de més d'una variable (amb límits per dominis):

$$f(x,y) = \begin{cases} x + \sqrt{y} & x \geq y \\ x^2 + y & x < y \end{cases}$$

Cal aplicar límits per dominis (és l'equivalent a límits laterals quan la funció té més d'una variable) en qualsevol punt frontera dels dos subdominis, quan x=y, perquè la funció canvia de forma en els punts pròxims. Vegem dos exemples d'estudi de la continuïtat en punts frontera: en (0,0) i en (2,2).

- Continuïtat en (0,0):

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ x\geq y}} x + \sqrt{y} = 0 \\ \\ \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ x<y}} x^2 + y = 0 \end{array} \right\} = 0 = f(0,0) \rightarrow \begin{array}{c}\text{La funció és} \\ \text{contínua en } (0,0)\end{array}$$

- Continuïtat en (2,2):

$$\lim_{(x,y)\to(2,2)} f(x,y) = \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(2,2) \\ x\geq y}} x + \sqrt{y} = 2 + \sqrt{2} \\ \\ \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(2,2) \\ x<y}} x^2 + y = 6 \end{array} \right\} \nexists \text{límit} \rightarrow \begin{array}{c}\text{La funció no és} \\ \text{contínua en } (2,2)\end{array}$$

En els punts del domini que no són frontera dels dos subdominis, $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x > y, y \geq 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x < y\}$, la funció és contínua perquè tant si són interiors del primer subdomini com si ho són del segon, la forma funcional és una suma d'una funció polinòmica i una arrel d'una funció polinòmica en el primer tros (quan $x > y, y \geq 0$) i una funció polinòmica en el segon tros (quan $x < y$).

En funcions de diverses variables també poden aparèixer casos d'indeterminacions, igual que en funcions d'una variable, però no els tractarem perquè no són habituals en aplicacions econòmiques.

Exercici 5

1. Estudia la continuïtat de les funcions següents en els punts indicats:

   a) $f(x,y) = \frac{\sqrt{4x+y}}{\sqrt{x+y}}$ en (2, 1) i (-1,2)

b) $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-6x}{x^2-4x} & x\neq 0\\ \frac{3}{2} & x=0\end{cases}$ en x=0

c) $f(x,y)=\begin{cases}x+2y & x=y\\ 2x+y & x\neq y\end{cases}$ en (1,1), (1,0) i (2,2)

2. Donada la funció:

$$F(x,y)=\begin{cases}x^2+\sqrt{y} & x\geq y\\ x^2+2y & x<y\end{cases}$$

a) Calcula'n el domini.
b) Obtín raonadament un punt de l'espai inicial on la funció siga contínua i un punt on no siga contínua.
c) Obtín raonadament un punt del domini on la funció no siga contínua.
d) Obtín raonadament un punt frontera dels subdominis on la funció siga contínua.

3. Donada la funció:

$$F(x,y)=\left(\ e^{\left(\frac{y}{x+2}\right)}+2x^3y\ ,\ \ln(x+1)\ ,\ \sqrt[3]{xy+2}\ \right)$$

a) Indica el tipus de funció, l'espai inicial i l'espai final.
b) Calcula'n el domini.
c) Raona en quins punts la primera funció component és contínua.

ANNEX 3. Principals funcions utilitzades en economia

Les principals funcions utilitzades en economia, amb les característiques que són desitjables segons el comportament racional dels agents econòmics, són les que segueixen:

Funcions d'utilitat

S'utilitzen en la teoria de la demanda. Els consumidors demanen productes segons els preus, la renda pressupostària i les preferències, representades mitjançant una funció d'utilitat que s'ha de maximitzar. Aquesta funció ha de ser creixent en cada producte, com més gran siga la quantitat consumida més utilitat, però quantitats consumides addicionals d'un bé han de proporcionar cada vegada menys utilitat addicional, cosa que indica un cert nivell de saturació en el consum. Les funcions d'utilitat també es fan servir en altres àmbits de l'anàlisi econòmica (elecció treball-oci, estalvi-consum, teoria de la inversió, anàlisi de cicle de vida, etc.). Les funcions matemàtiques més habituals són les lineals, les logarítmiques, la d'aversió relativa al risc constant i les de tipus Cobb-Douglas. Exemples:

- Funció d'utilitat lineal en la teoria de la demanda:

$$U(q_1, q_2) = c_1\, q_1 + c_2\, q_2$$

S'utilitza quan els béns són perfectament substitutius (q_1 i q_2 són les quantitats consumides de dos béns): una unitat d'un bé s'intercanvia per una quantitat constant de l'altre bé amb l'objectiu de mantenir el mateix nivell d'utilitat. Les constants c_1 i c_2 són les utilitats proporcionades per cada unitat consumida dels béns respectius.

- Funció d'utilitat logarítmica en la teoria de la demanda:

$$U(q_1, q_2) = \ln q_1 + \alpha \ln q_2$$

Aquesta funció logarítmica representa preferències més racionals dels consumidors: una unitat d'un bé s'intercanvia per quantitats creixents de l'altre bé amb l'objectiu de mantenir el mateix nivell d'utilitat (béns substitutius però no perfectament). El paràmetre α>0 pondera la preferència de cada bé.

- Funció d'utilitat en la teoria del consum de cicle de vida:

$$U(c_1, c_2) = \frac{c_1^{1-\gamma}}{1-\gamma} + \alpha \frac{c_2^{1-\gamma}}{1-\gamma}$$

Aquesta funció és la d'aversió relativa al risc constant (CRRA) i $\gamma \in]0,1[$ és el coeficient d'aversió relativa al risc, amb c_1 i c_2 el consum de l'individu en les dues etapes del cicle de vida, la d'actiu i la de passiu, respectivament. El paràmetre α>0 pondera la preferència del consum en cada etapa.

- Funció d'utilitat en l'elecció oci-treball:

$$U(c, l) = Ac^{\alpha} l^{1-\alpha}$$

Aquesta funció és de tipus **Cobb-Douglas**, amb c el consum i l el temps d'oci. El paràmetre $\alpha \in]0,1[$ pondera la preferència entre consum i oci.

Funcions de producció

S'utilitzen en la teoria de l'oferta. Les empreses utilitzen factors productius de la manera més barata possible, però amb la condició d'obtenir un nivell de producció mínim. A escala macroeconòmica també es fan servir funcions de producció per a representar la producció total del sector productiu d'una economia. Els factors productius més habituals són el treball (L) i el capital (K), i amb aquestes dues variables la funció de producció dona com a resultat la producció d'un determinat bé (en unitats físiques) o també pot obtenir-se el valor de la producció d'aquest bé (en euros). Les característiques matemàtiques que millor representen les tècniques productives són semblants a les de les funcions d'utilitat: les funcions de producció han de ser creixents amb cada variable (més factor productiu implica més producció), però aquest creixement ha de ser cada vegada menor (quantitats addicionals d'un factor impliquen augments cada vegada menors de la producció) i, finalment, és interessant que siguen homogènies de grau 1 (doblar els factors

productius implica doblar la producció), per a evitar problemes d'escala en les variables. Exemples:

- Funció Cobb-Douglas

$$F(K,L) = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$$

És la funció de producció més freqüent en economia perquè compleix les característiques anteriorment esmentades. El paràmetre A representa el nivell tecnològic, quan més gran siga més producció es podrà obtenir amb els mateixos factors productius. En situació de competència perfecta, el paràmetre α representa la part de la producció que es destina a remunerar el factor capital. Una variant que no seria homogènia de grau 1 és la funció $F(K,L) = AK^{\alpha}L^{\beta}$, que és homogènia de grau $\alpha + \beta$.

- Funció d'elasticitat de substitució constant o funció CES

$$F(K,L) = A(\alpha K^{\gamma} + (1-\alpha)L^{\gamma})^{\frac{1}{\gamma}}$$

És una generalització de l'anterior perquè la Cobb-Douglas és una CES quan $\gamma \to 0$. El nom d'aquesta funció es deu al fet que l'elasticitat de substitució és constant i igual a $\frac{1}{1+\gamma}$. El paràmetre A representa la tecnologia i α representa la participació de les rendes del capital en la producció. Aquesta funció també és homogènia de grau 1.

Funcions d'ingrés, cost i benefici

La funció de beneficis s'obté com a diferència entre ingressos i costos. La funció d'ingressos és el resultat de multiplicar el preu de venda de cada bé per les unitats venudes. El preu de venda i la quantitat venuda poden ser independents o estar relacionats entre si perquè l'empresa pot estar disposada a reduir el preu de venda a canvi d'augmentar la quantitat venuda, per exemple. D'altra banda, la funció de cost és la suma del cost fix més el variable i aquest és el resultat de multiplicar el cost unitari i les unitats produïdes. El cost unitari pot ser una constant o una funció creixent de la quantitat produïda. En cas que la quantitat produïda no siga igual a la quantitat venuda pot aparèixer un cost d'emmagatzematge.

- Funció d'ingressos lineal:

$$I(x,y) = p_1\,x + p_2\,y$$

Els preus de venda, p_1 i p_2, són constants i x i y són les quantitats venudes de cada producte.

- Funció d'ingressos no lineal:

$$I(x,y) = p_1(x)\,x + p_2(y)\,y$$

Els preus de venda, $p_1(x)$ i $p_2(y)$, són funcions (decreixents) de les quantitats venudes. Per exemple, si el preu màxim és de 20 euros i baixa en 10 cèntims per cada unitat venuda, la funció d'ingrés d'aquest bé (preu per quantitat) és: $(20 - 0{,}1x)x$.

Un altre cas apareix quan es coneix una situació de partida de preus i quantitats i també una relació de causa-efecte entre la disminució del preu i l'augment de la quantitat. Per exemple, si a un preu de 50 euros es venen 100 unitats i per cada 50 cèntims d'euro que baixa el preu la quantitat venuda augmenta en 8 unitats, la funció d'ingrés d'aquest bé (preu per quantitat) és $(50 - 0{,}5x)(100 + 8x)$, però ara la variable x no és la quantitat venuda, és la disminució del preu del bé (cada unitat representa 0,5 euros de disminució).

- Funció de cost lineal:

$$C(x, y) = C_{fix} + c_1\, x + c_2\, y$$

Els costos variables unitaris, c_1 i c_2, són constants i x i y són les quantitats produïdes de cada producte.

- Funció de cost no lineal:

$$C(x, y) = C_{fix} + c_1(x)\, x + c_2(y)\, y$$

Els costos variables unitaris, $c_1(x)$ i $c_2(y)$, són funcions (creixents) de les quantitats produïdes, això indica que, a partir d'un nivell de producció, les empreses solen tenir dificultats per a mantenir l'eficiència productiva. Per exemple, si el cost de produir una unitat d'un bé és de 10 euros i augmenta en 10 cèntims per unitat produïda, el cost variable (cost unitari per unitats produïdes) és $(10 + 0{,}1x)\, x$.

TEMA 3. DERIVABILITAT DE FUNCIONS

3.1. Derivades parcials en funcions d'una variable real

Com veurem en l'apartat 3.2, les regles i propietats de derivació de funcions d'una variable són la base per a calcular derivades parcials de funcions de diverses variables. Les principals regles de derivació són:

- $y = x^n \rightarrow y' = nx^{n-1}$; $y = f(x)^n \rightarrow y' = nf(x)^{n-1}f'(x)$
- $y = \ln(x) \rightarrow y' = \frac{1}{x}$; $y = \ln f(x) \rightarrow y' = \frac{1}{f(x)}f'(x)$
- $y = a^x \rightarrow y' = a^x \ln(a)$; $y = a^{f(x)} \rightarrow y' = a^{f(x)}\ln(a)f'(x)$
- $y = \sin x \rightarrow y' = \cos x$; $y = \sin f(x) \rightarrow y' = [\cos f(x)\,]f'(x)$
- $y = \cos x \rightarrow y' = -\sin x$; $y = \cos f(x) \rightarrow y' = [-\sin f(x)\,]f'(x)$

I les principals propietats:

- $y = c \rightarrow y' = 0$; $y = f(x) + g(x) \rightarrow y' = f'(x) + g'(x)$
- $y = f(x) \cdot g(x) \rightarrow y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
- $y = \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow y' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$

Exercici 6

1. Calcula les derivades de les funcions següents d'una variable.

   a) $f(x) = 3x^3 + 6$
   b) $f(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{x^2+2x}}$
   c) $f(x) = 3^{x^2+2x+1}$
   d) $f(x) = \ln\frac{3x^3+6}{2x}$
   e) $f(x) = (x^2+1)e^x$
   f) $f(x) = \sin^2(x^2+1)$

3.2. Concepte, càlcul i interpretació econòmica de la derivada parcial d'una funció de diverses variables

Després d'analitzar la característica de la continuïtat d'una funció de diverses variables, la característica següent i tal vegada la més utilitzada en economia és la derivabilitat de la funció. Aquesta propietat permet calcular els canvis en el valor de la funció quan canvia el valor d'alguna de les variables, mantenint constant el valor de les altres. Si una funció no és derivable aquest estudi no es podria fer. En una funció de tipus econòmic, l'estudi dels canvis del valor de la funció davant canvis en el valor de les variables és fonamental per a arribar a regles de comportament òptim dels agents econòmics.

En models econòmics, les derivades parcials permeten analitzar com canvia el valor d'equilibri d'una variable endògena (la renda nacional, per exemple) davant canvis en algun paràmetre (la propensió marginal al consum, per exemple) o en alguna variable exògena (la despesa pública, per exemple). Aquesta anàlisi s'anomena **estàtica comparativa**.

Encara que al final de l'apartat s'establirà una forma pràctica de calcular les derivades parcials de funcions de més d'una variable a partir de les propietats i regles de derivació de funcions d'una variable, convé formalitzar prèviament el concepte de derivada parcial.

3.2.1. Concepte de derivada parcial

Donada una funció real de *n* variables $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, i $\bar{x}$ un punt interior del domini, la derivada parcial de la funció *f* respecte a la variable x_i en el punt $\bar{x}$ és:

$$\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta_{x_i} f(\bar{x})}{\Delta x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_i + \Delta x_i, \dots, \bar{x}_n) - f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)}{\Delta x_i}$$

És a dir, una derivada parcial és un límit del quocient de l'increment parcial de la funció quan només canvia una variable i l'increment de la variable quan aquest increment és infinitesimal. Si aquest límit existeix, la funció és derivable respecte a la variable x_i en el punt $\bar{x}$. Observacions:

- Com que la funció té *n* variables, pot haver-hi també *n* derivades parcials.
- El punt $\bar{x}$ ha de ser interior al domini per tal que els punts infinitament pròxims $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_i + \Delta x_i, \dots, \bar{x}_n)$ amb $\Delta x_i \to 0$ siguen també del domini.
- La notació de derivada parcial, $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, és pròpia de funcions de més d'una variable i substitueix la notació de derivada de funcions d'una variable $\frac{df}{dx}$.
- La notació de derivada parcial en un punt pot ser $\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i}$ ó $\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{x=\bar{x}}$.

Si la derivada parcial existeix, davant increments que no siguen infinitesimals però sí prou petits, podrem operar de la manera següent:

$$\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta_{x_i} f(\bar{x})}{\Delta x_i} \quad \to \quad \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i} \approx \frac{\Delta_{x_i} f(\bar{x})}{\Delta x_i} \quad \to \quad \boxed{\Delta_{x_i} \boldsymbol{f(\bar{x})} \approx \frac{\boldsymbol{\partial f(\bar{x})}}{\boldsymbol{\partial x_i}} \boldsymbol{\Delta x_i}}$$

I aquesta fórmula enquadrada ens diu com aproximar el valor de l'increment parcial: multiplicant la derivada parcial per l'increment de la variable. Aquesta aproximació serà més bona com més petit siga l'increment de la variable.

D'aquesta fórmula també se'n pot extraure una interpretació habitual de la derivada parcial respecte a una variable: és aproximadament l'increment que experimenta la funció quan augmenta aquesta variable en una unitat i es mantenen constants la resta de variables.

Les derivades parcials tenen com a unitat de mesura, per ser un límit d'un quocient, les unitats de mesura del numerador (funció) entre les del denominador (variable). Així,

una derivada parcial de la funció d'utilitat d'un consumidor s'expressarà en unitats d'utilitat per unitat del bé consumit; una derivada d'una funció de benefici tindrà com a unitat de mesura la de la funció de benefici (euros) per unitat venuda del producte, etc.

Quan les derivades parcials es calculen en punts genèrics, tenim la funció derivada parcial, amb les mateixes variables que la funció original, és a dir, la funció derivada parcial respecte a x_i és del tipus $\frac{\partial f}{\partial x_i}: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ i es defineix com a:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + \Delta x_i, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{\Delta x_i}$$

3.2.2. Càlcul de derivades parcials

Encara que la derivada parcial s'ha definit com un límit, el càlcul d'aquest límit és poc operatiu i convé seguir un altre mètode de càlcul.

En la pràctica, el càlcul de la derivada parcial respecte a una variable x_i es fa **aplicant les propietats i regles de la derivació de funcions d'una variable** amb la precaució de **considerar les altres variables com si foren constants.** Si la derivada parcial es calcula en un punt concret s'ha de substituir després de derivar.

Exemple: La funció $f(x, y) = x^2 + 2y$ té les dues següents funcions derivades parcials i els dos valors concrets de les derivades parcials en (2,1):

- Funció derivada parcial respecte a *x*: $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$
- Derivada parcial respecte a *x* en (2,1): $\frac{\partial f(2,1)}{\partial x} = 2 \cdot 2 = 4$
- Funció derivada parcial respecte a *y*: $\frac{\partial f}{\partial y} = 2$
- Derivada parcial respecte a *y* en (2,1): $\frac{\partial f(2,1)}{\partial y} = 2$

La derivada parcial en (2,1) és una bona aproximació a l'increment parcial en (2,1) si l'increment de la variable és petit ($\Delta x = 0{,}3$):

$$\Delta_x f(2,1)(0'3) \approx \frac{\partial f(2,1)}{\partial x} \Delta x \quad \to \quad 1{,}29 \approx 4 \cdot 0{,}3 = 1{,}2$$

Però no és bona si l'increment és gran ($\Delta x = 3$):

$$\Delta_x f(2,1)(3) \approx \frac{\partial f(2,1)}{\partial x} \Delta x \quad \to \quad 21 \approx 4 \cdot 3 = 12$$

3.2.3. Interpretació econòmica de les derivades parcials. Elasticitat

Funcions marginals i interpretació

La derivada parcial d'una funció econòmica és un indicador fonamental per a determinar el comportament òptim dels agents econòmics. Una derivada parcial ens indica com canvia la funció davant petits canvis en una variable. En economia, quan parlem de petits canvis els anomenem canvis marginals, i la funció derivada parcial l'anomenem funció marginal respecte a la variable corresponent.

Així, les derivades parcials de la funció d'utilitat són les utilitats marginals respecte a cada variable, les de la funció de producció són les productivitats marginals respecte a cada factor productiu, les de la funció de benefici són els beneficis marginals respecte a cada bé, etc.

Quan es calcula la derivada parcial en punts concrets es pot interpretar econòmicament tant el signe com el valor de la derivada. En primer lloc, el **signe** d'una derivada parcial determina com és la relació entre canvis en la variable i canvis en la funció:

- Derivada parcial positiva: hi ha una relació directa o del mateix signe entre canvis en la variable i canvis en la funció.
- Derivada parcial negativa: hi ha una relació inversa o de signe contrari entre canvis en la variable i canvis en la funció.
- Derivada parcial nul·la: no hi ha relació entre canvis en la variable i canvis en la funció.

Així, en una funció d'utilitat de dos béns, les derivades parcials respecte a les dues variables (utilitats marginals) han de ser positives en el cas normal, és a dir, com més gran siga la quantitat consumida de cada bé més gran serà la utilitat.

En segon lloc, el valor concret de la derivada parcial és un indicador de la **magnitud** de l'efecte de canvis en la variable sobre la funció. Com més gran siga la derivada més gran serà l'efecte. Així, si la utilitat marginal respecte al primer bé és més gran que respecte al segon bé, vol dir que és preferible augmentar el consum del primer bé perquè augmentarà més la utilitat, encara que els preus també són importants per a prendre aquesta decisió.

Exemple: Funció d'utilitat logarítmica $U(q_1, q_2) = \ln q_1 + 5 \ln q_2$ i consums dels dos béns $(q_1, q_2) = (10,5)$. Les derivades parcials o utilitats marginals són:

$$\frac{\partial U(10,5)}{\partial q_1} = \frac{1}{q_1}\Big|_{(10,5)} = 0{,}1 \ \text{ u.U./u.c.bé 1}$$

$$\frac{\partial U(10,5)}{\partial q_2} = \frac{5}{q_2}\Big|_{(10,5)} = 1 \ \text{ u.U./u.c.bé 2}$$

Com es podia esperar, són positives: com més elevat siga el consum de cada bé la utilitat serà més alta. Les unitats de mesura són unitats d'utilitat per unitats consumides de cada bé. A més, com que la segona és més gran que la primera, vol dir que el consum addicional d'una unitat marginal del segon bé proporciona més utilitat que la del primer bé i seria preferible augmentar el consum d'aquest segon bé si els preus són iguals.

Elasticitat

Un concepte més acurat que relaciona les variacions en una variable amb les variacions en la funció i molt utilitzat en economia és l'elasticitat. L'elasticitat d'una funció f respecte a una variable x_i (E_{x_i}) en un punt $\bar{x}$ es pot interpretar com la derivada parcial ajustada. La fórmula és:

$$E_{x_i}(\bar{x}) = \frac{\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i}}{\frac{f(\bar{x})}{x_i}} = \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i} \cdot \frac{x_i}{f(\bar{x})}$$

És a dir, el valor de la derivada parcial (quocient d'increment de la funció entre increment de la variable) s'ajusta dividint-lo pel quocient del valor de la funció entre el valor de la variable, d'aquesta manera la derivada apareix en termes relatius i es poden comparar de manera més correcta els efectes de variacions en diferents variables i en diferents punts de partida. Una conseqüència de la fórmula és que l'elasticitat no té unitat de mesura: per exemple, un valor de 3 s'interpreta dient que una variació relativa en la variable d'un 1% suposarà una variació relativa en la funció d'un 3%.

Exemple: Funció d'utilitat logarítmica $U(q_1, q_2) = \ln q_1 + 5 \ln q_2$ i consums dels dos béns $(q_1, q_2) = (10,5)$. Les derivades parcials s'han calculat abans. Els valors ajustats o elasticitats, atès que $U(10,5) = \ln 10 + 5 \ln 5 = 10{,}35$, són:

$$E_{q_1}(10,5) = \frac{\partial U}{\partial q_1} \cdot \frac{q_1}{U}\Big|_{(10,5)} = 0{,}1 \ \frac{10}{10{,}35} = 0{,}09662$$

$$E_{q_2}(10,5) = \frac{\partial U}{\partial q_2} \cdot \frac{q_2}{U}\Big|_{(10,5)} = 1 \ \frac{5}{10{,}35} = 0{,}4831$$

Ara podem dir que un augment percentual en el consum del segon bé d'un 1% suposa un augment de la utilitat del 0,4831%, que és superior a l'augment percentual que tindria la utilitat si el consum del primer bé augmentara un 1%. En termes relatius, per tant, també resulta més convenient incrementar el consum del segon bé que del primer bé, suposant que els preus són iguals.

Les elasticitats més habituals en economia són les elasticitats de la demanda, tant respecte al preu del producte com respecte a la renda disponible; la del preu d'un actiu financer respecte al tipus d'interès; les de la utilitat respecte als consums de cada bé i les de la funció de producció respecte als factors productius utilitzats.

Exercici 7

1. Calcula totes les derivades parcials d'aquestes funcions.
   a) $f(x,y) = 3x^3 + 6y$
   b) $f(x,y) = x - \frac{1}{\sqrt{y^2+2x}}$
   c) $f(x,y,z) = 3^{x^2+2y} + 2z$
   d) $f(x,y) = \ln \frac{3y^3+6}{2x}$
   e) $f(x,y,z) = (x^2+y)e^y + xz$
   f) $f(x,y) = sin^2(x^2+y)$
2. Calcula les produccions marginals respecte als dos factors productius de la funció de producció de Cobb-Douglas $F(K,L) = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$ (en euros). Si K=25 € i L=9 hores, com interpretaries econòmicament un valor de la producció marginal respecte

al capital de 3 i un valor de la producció marginal respecte al treball de 8? En quines unitats s'expressarien aquestes funcions marginals?

3. Calcula l'impost marginal respecte a la renda de la funció d'impost de la renda $T(Y) = a(bY + c)^p + kY$. Si la renda és Y=100.000 €, com interpretaries econòmicament un valor de l'impost marginal de 0,5?

4. Donada la funció de demanda $q(Y, p, p') = \frac{\sqrt{Yp'}}{2p}$, on q és la quantitat demanada, Y és la renda, p el preu del producte i p' el preu d'un bé substitutiu i amb valors inicials Y=100, p'=4 i p=2, es demana:
   a) La demanda marginal respecte a la renda per als valors inicials de les variables i la interpretació econòmica.
   b) La demanda marginal respecte al preu per als valors inicials de les variables i la interpretació econòmica.
   c) L'elasticitat demanda-preu per als valors inicials de les variables i la interpretació econòmica.

5. Donat el model d'equilibri de mercat i la seua solució:

$$\left.\begin{array}{c} Q_d = Q_s \\ Q_d = a - bP \\ Q_s = -c + dP \end{array} \quad a, b, c, d > 0 \right\} \rightarrow \begin{cases} P = \dfrac{a + c}{b + d} \\ Q_d = Q_s = \dfrac{ad - bc}{b + d} \end{cases}$$

   analitza com depèn el preu d'equilibri del pendent de la corba de demanda (b) i d'oferta (d), és a dir, quin signe té i quina és la interpretació econòmica (estàtica comparativa).

6. Donada la funció de demanda d'un bé que depèn del preu del propi bé (p) i del preu d'un altre bé (p'):

$$q = \frac{150 + 0{,}5p'}{p}$$

   En la situació inicial (p, p')=(5, 10) euros. Calcula:
   a) La derivada parcial de la quantitat demanada (q) respecte a cada preu en la situació inicial, les unitats de mesura i la interpretació econòmica. Dedueix si l'altre bé és complementari o substitutiu.
   b) L'elasticitat de la quantitat demanada respecte al preu del bé en la situació inicial, les unitats de mesura i la interpretació econòmica.

7. Donat el model d'equilibri de mercat d'un bé amb el pendent de la corba de demanda (b) com a paràmetre:

$$\begin{array}{c} q_d = 120 - b\,p \\ q_s = -60 + 8\,p \\ q_d = q_s \end{array}$$

a) Calcula el preu i la quantitat d'equilibri en funció de b.
b) Calcula les derivades del preu i la quantitat d'equilibri respecte a b, el signe i raona l'efecte que tindria un augment del pendent b sobre el preu i la quantitat.

8. Siga el model simple d'equilibri de la renda nacional en què la propensió marginal al consum (b) és un paràmetre:

$$Y = C + 120$$
$$C = 30 + b\,Y$$

a) Calcula la renda (Y) i el consum (C) en funció de b.
b) Calcula la derivada de les dues variables respecte a b i raona els efectes d'un increment marginal en la propensió marginal al consum.
c) Calcula la renda i el consum d'equilibri si b=0,8.
d) Calcula l'elasticitat de la renda respecte a la propensió marginal al consum si b=0,8 i interpreta-la econòmicament.

9. Siga el model d'equilibri de la renda nacional amb impostos, en el qual el tipus impositiu sobre la renda (r) és un paràmetre:

$$Y = C + 180$$
$$C = 20 + 0{,}8(Y - T)$$
$$T = 25 + r\,Y$$

a) Calcula la renda (Y), el consum (C) i la recaptació impositiva (T) en funció de r.
b) Calcula les derivades de les tres variables respecte a r i dedueix si és convenient apujar o abaixar el tipus impositiu per a augmentar la renda en aquest model.
c) Calcula els valors d'equilibri de les tres variables si r=0,2.
d) Calcula l'elasticitat de la recaptació impositiva respecte al tipus impositiu si r=0,2 i dedueix si augmentar el tipus impositiu augmentaria o no la recaptació impositiva.

10. La funció de producció d'una economia (en €) és:

$$F(K, L) = 12K^{0,5}L^{0,5}$$

En la situació inicial s'utilitzen K=360000 € de capital i L=22500 hores de treball.

a) Calcula les produccions marginals respecte als dos factors productius en la situació actual, les unitats de mesura i la interpretació econòmica.
b) Amb els valors de les produccions marginals, raona què seria més convenient per a l'economia, contractar una hora addicional de treball o injectar 10 € més de capital.
c) Raona què seria més convenient per a l'economia, augmentar un 1% les hores de treball o un 1% el capital.

3.3. Derivades successives. Gradient, jacobiana i hessiana

Vector gradient i matriu jacobiana

Donada una funció real de *n* variables $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, el vector gradient de la funció en un punt interior del domini $\bar{x}$ és el vector format per les derivades parcials en aquest punt:

$$\nabla f(\bar{x}) = \left(\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_n}\right)$$

Exemple: El vector gradient de la funció $f(x,y,z) = 2x^2yz + 4xz^2$ en un punt genèric és:

$$\nabla f(x,y,z) = (4xyz + 4z^2, 2x^2z, 2x^2y + 8xz)$$

I en el punt (1,-2,1) és:

$$\nabla f(1,-2,1) = (-4,2,4)$$

En cas de funcions vectorials, $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, l'equivalent al vector gradient és la matriu jacobiana. Aquesta matriu recull totes les derivades parcials ordenades adequadament: les derivades parcials de la primera funció component en la primera fila de la matriu, les de la segona en la segona, etc. Així, la matriu jacobiana tindrà *m* files (tantes com funcions components) i *n* columnes (tantes com variables):

$$Jf(\bar{x}) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(\bar{x}) \\ \vdots \\ \nabla f_m(\bar{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m(\bar{x})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m(\bar{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Exemple: La matriu jacobiana de la funció $f(x,y,z) = (2xy^2, -3yz^2)$ en un punt genèric és:

$$Jf(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2y^2 & 4xy & 0 \\ 0 & -3z^2 & -6yz \end{pmatrix}$$

I en el punt (2,-1,1): $Jf(2,-1,1) = \begin{pmatrix} 2 & -8 & 0 \\ 0 & -3 & 6 \end{pmatrix}$

Derivades successives i matriu hessiana

Donada una funció real de *n* variables reals, $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, i derivable, cada derivada parcial en un punt genèric és també una funció de les mateixes *n* variables reals, $\frac{\partial f}{\partial x_i}: \dot{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, encara que el domini no ha de ser necessàriament el mateix. Com a tal funció, cada derivada parcial pot tornar a derivar-se respecte a cada variable, en cas de ser derivable, i originar les derivades de segon ordre (les derivades parcials s'anomenen

també derivades de primer ordre). Si les de segon ordre són funcions derivables, en derivar-les apareixen les de tercer ordre i així successivament.

Hem vist que una funció de n variables té n derivades parcials. Com que cada una té n variables, en tornar a derivar-les apareixeran n^2 derivades de segon ordre, n^3 de tercer ordre, etc. La notació que s'utilitza per a representar la derivada de segon ordre respecte a x_i dues vegades és $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$, i la que s'utilitza per a representar la derivada de segon ordre de primer respecte a x_i i després respecte a x_j és $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$. Les derivades d'ordre superior a 2 no se solen utilitzar en economia.

Exemple: Les derivades de segon ordre de la funció $f(x,y) = 2x^2y + 4xy + 2x$ s'obtenen des de les derivades parcials:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4xy + 4y + 2 \;\rightarrow\; \begin{matrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4y \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4x + 4 \end{matrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2 + 4x \;\rightarrow\; \begin{matrix} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 4x + 4 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \end{matrix}$$

I en el punt (1,-1) valen:

$$\frac{\partial^2 f(1,-1)}{\partial x^2} = 4y|_{(1,-1)} = -4 \qquad \frac{\partial^2 f(1,-1)}{\partial x \partial y} = 4x + 4|_{(1,-1)} = 8$$

$$\frac{\partial^2 f(1,-1)}{\partial y \partial x} = 4x + 4|_{(1,-1)} = 8 \qquad \frac{\partial^2 f(1,-1)}{\partial y^2} = 0$$

Si s'ordenen les derivades de segon ordre en forma de matriu s'obté la matriu hessiana. En general, la matriu hessiana d'una funció de n variables reals, $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, i derivable successivament, en un punt $\bar{\mathbf{x}}$ interior del domini és:

$$Hf(\bar{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

La matriu hessiana és sempre quadrada i conté totes les derivades de segon ordre ben ordenades per files i columnes.

Exemple: Les matrius hessianes de l'exemple anterior en un punt genèric i en el punt (1,-1) són:

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 4y & 4x+4 \\ 4x+4 & 0 \end{pmatrix} \text{ i } Hf(1,-1) = \begin{pmatrix} -4 & 8 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$$

Observeu que les matrius hessianes de l'exemple són simètriques. Això no és cap casualitat, ja que les funcions reals de n variables que siguen dues vegades derivables compleixen el teorema de Schwarz, segons el qual l'ordre de derivació no afecta el resultat de la derivada segona o, en altres paraules, les derivades encreuades són iguals:

$$\frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_j \partial x_i} \qquad \forall i,j = 1,\dots,n$$

Les derivades de segon ordre en funcions econòmiques tenen una interpretació interessant. Com que són les derivades de cada derivada parcial i aquestes són les funcions marginals, cada derivada de segon ordre representa com canvia cada funció marginal davant canvis en cada variable. I ara, tenint en compte la interpretació econòmica de la funció marginal, també podem afirmar que cada derivada de segon ordre ens diu si els efectes de canvis en una variable sobre la funció són cada vegada majors o menors. Observeu la interpretació del signe de cada derivada en el cas d'una funció d'utilitat de dos béns:

- $\frac{\partial U}{\partial q_1} > 0$: com més gran siga el consum del primer bé més gran serà la utilitat si mantenim constant el consum de l'altre bé (és el signe habitual).
- $\frac{\partial^2 U}{\partial q_1^2} < 0$: com més gran siga el consum del primer bé les millores de la utilitat són cada vegada menors si mantenim constant el consum de l'altre bé (és el signe habitual).
- $\frac{\partial^2 U}{\partial q_1 \partial q_2} > 0$: com més gran siga el consum del segon bé les millores de la utilitat davant un augment del consum del primer bé són cada vegada més grans. Aquest signe és més discutible i podria perfectament ser el contrari.

Funcions de classe C^k

Una funció real de n variables reals, $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, és de classe C^k o simplement $f \in C^k$ (k=1,2,..,∞), en els punts interiors del domini, si existeixen les derivades parcials fins a l'ordre k i aquestes funcions són contínues.

Encara que en l'anàlisi econòmica n'hi ha prou que les funcions siguen de classe C^2, totes les funcions habituals que utilitzarem seran de classe C^∞: les polinòmiques, arrels, exponencials, logarítmiques i trigonomètriques; com també les que s'obtenen amb sumes, productes, quocients i composicions d'aquestes funcions, sempre que els punts siguen interiors del domini.

La manera de raonar que una funció és derivable és raonant que és de classe C^∞, i això ho farem fixant-nos en la forma funcional.

Exemple: La funció $f(x,y) = \sqrt{x+y}$ és derivable de qualsevol ordre en tots els punts interiors del domini (quan $x + y > 0$) perquè és una arrel quadrada d'un polinomi (observeu que si $x + y = 0$, el punt és del domini però no interior del domini i no seria derivable).

Les funcions a trossos les tractarem igual que les funcions amb una sola forma funcional si el punt és interior d'un subdomini. En aquest cas, s'ha de raonar la derivabilitat segons la forma funcional del tros corresponent i s'ha de calcular cada derivada parcial aplicant les propietats i regles de derivació respecte a cada variable sobre el mateix tros suposant que la resta de variables es mantenen constants. Les derivades en punts frontera de dos o més subdominis s'haurien de calcular aplicant la definició de derivada parcial, però això no s'exigirà.

Exemple: La funció $f(x,y)=\begin{cases} x+\sqrt{y} & x \geq y \\ x^2+y & x<y \end{cases}$ és derivable en els punts interiors del primer subdomini (quan $x>y$ i $y>0$) perquè és una suma d'un polinomi i una arrel quadrada; i és derivable en els punts interiors del segon subdomini (quan $x<y$) perquè és un polinomi. Les derivades parcials en qualsevol punt interior dels subdominis es calculen amb les propietats i regles de derivació suposant que l'altra variable és constant:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\begin{cases} 1 & x>y, y>0 \\ 2x & x<y \end{cases} \quad ; \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=\begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{y}} & x>y, y>0 \\ 1 & x<y \end{cases}$$

En punts interiors de cada subdomini, ens fixarem únicament en el tros corresponent:

$$\frac{\partial f(2,1)}{\partial x}=1 \qquad \frac{\partial f(2,1)}{\partial y}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial f(-2,1)}{\partial x}=-4 \qquad \frac{\partial f(-2,1)}{\partial y}=1$$

En punts interiors del domini, però frontera dels subdominis, per exemple el punt (1,1), les derivades parcials s'haurien de calcular amb la definició, però això complica els càlculs i no és rellevant en funcions econòmiques, motiu pel qual no tractarem aquest cas. Finalment, les derivades parcials en punts del domini no interiors, com el punt (0,0), o en punts que no són del domini, com el punt (0,-1), no existeixen.

Exercici 8

1. Calcula els vectors gradients d'aquestes funcions.
   a) $f_1(x,y)=3x^3y^2+6x^2y+2x+8y+4$
   b) $f_2(x,y)=xe^{x^2y}+\frac{x}{2y+1}$
   c) $f_3(x,y)=\frac{2xy^2}{x+1}+\sqrt{4x^2y+1}$
   d) $f_4(x,y)=y\ln(x^2y^2+y)$
   e) $f_5(x,y,z)=\sin(2x^2+4y+2z)$
2. Calcula la matriu hessiana en el punt indicat.
   a) $f_1(x,y)=3x^3y^2+6x^2y+2x+8y+4$ en (1,-1)
   b) $f_4(x,y)=y\ln(x^2y^2+y)$ en (0,1)

3. Calcula la matriu jacobiana genèrica de la funció $f(x,y) = (\frac{xy}{x+1}, e^x y)$ i la matriu jacobiana en el punt $(x,y) = (0,1)$.
4. Calcula, a partir de les produccions marginals de la funció de producció de Cobb-Douglas $F(K,L) = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$ de l'exercici 7.2, les derivades de segon ordre. Dedueix els signes de cada una sabent que $0 < \alpha < 1$ i interpreta'ls econòmicament.
5. Donada la funció d'utilitat següent, on *x* i *y* són les quantitats consumides de dos béns:

$$U(x,y) = 12\left(\frac{\sqrt{x}}{3} + \frac{2\sqrt{y}}{3} + \frac{1}{3}\right)^2$$

   Si en la situació actual $(x,y) = (16,25)$, calcula la utilitat marginal del primer bé.
6. Siga $U(x)$ la funció d'utilitat d'un consumidor, on x és la quantitat consumida d'un bé:
   a) Explica la diferència d'interpretació econòmica entre $\frac{dU(10)}{dx}$ i $\frac{dU(100)}{dx}$
   b) Quin és el signe que es podria esperar en aquestes dues derivades? Quina de les dues hem d'esperar que siga major?
   c) Quin és el signe que es podria esperar per a $\frac{d^2U(10)}{dx^2}$ i com s'interpretaria econòmicament?
7. Una funció de cost *C* depèn de la producció de dos béns en quantitats *x* i *y*. Raona econòmicament el signe més probable per a les següents derivades i indica les unitats de mesura.
   a) $\frac{\partial C(x,y)}{\partial x}$ i $\frac{\partial C(x,y)}{\partial y}$
   b) $\frac{\partial^2 C(x,y)}{\partial x^2}$ i $\frac{\partial^2 C(x,y)}{\partial y^2}$
8. Un impost progressiu sobre la renda, $T(Y)$, es caracteritza perquè la segona derivada és positiva, un de regressiu perquè és negativa i un de proporcional perquè és zero. Estudia, segons el valor de *p*, com és la funció impositiva $T(Y) = a(Y - \bar{Y})^p$ sabent que $a > 0$ i $\bar{Y}$ és una renda mínima exempta, de manera que $Y - \bar{Y} > 0$.

TEMA 4. DIFERENCIABILITAT DE FUNCIONS

4.1. Condició de diferenciabilitat d'una funció i definició de diferencial

En les funcions de diverses variables es pot plantejar l'anàlisi de canvis en una de les variables, com hem fet en el tema anterior, o en més d'una variable alhora. Aquest és ara l'objectiu: analitzar el comportament de la funció quan canvien simultàniament diverses variables. En funcions d'una única variable, la derivabilitat i la diferenciabilitat són característiques equivalents, però en funcions de diverses variables no ho són; una funció pot ser derivable però no diferenciable, encara que no és el cas més freqüent i encara menys en les funcions que s'utilitzen en economia.

El concepte més important d'aquest tema és el de diferencial d'una funció, que ens servirà per a aproximar l'increment total de la funció. És un concepte molt relacionat amb el de derivada parcial, vist en el tema anterior. Des de la diferencial de la funció s'obtindran altres conceptes com el de derivada direccional o les direccions de màxim, mínim i nul creixement de la funció.

4.1.1. Diferencial d'una funció i funció diferenciable

Definició. La diferencial d'una funció, $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, en un punt $\bar{x}$ interior del domini és la funció:

$$df(\bar{x})(dx) = \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_n} dx_n = \nabla f(\bar{x}) \cdot dx$$

És a dir, és una funció que té n variables: els petits increments de les variables de la funció original $(dx_1, \ldots, dx_n)$. S'ha expressat també la diferencial en notació vectorial: producte del vector gradient pel vector d'increments. Una característica de la diferencial de la funció en un punt és que es tracta d'una funció lineal dels increments de les variables i passa per l'origen, és a dir, si els increments de totes les variables són zero, la diferencial també és zero.

De forma rigorosa, el concepte de diferencial de la funció en un punt $\bar{x}$ tan sols es pot definir si la funció és diferenciable en $\bar{x}$. La diferenciabilitat d'una funció permet assegurar que l'increment total de la funció en $\bar{x}$ per a increments de les variables suficientment petits es pot aproximar per la diferencial de la funció i aquesta aproximació és més bona com més petits siguen els increments de les variables. Matemàticament, aquest concepte equival al fet que un determinat límit siga zero. En concret, la definició rigorosa de diferenciabilitat de f en $\bar{x}$ s'indica a continuació.

Definició. Una funció $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ és diferenciable en un punt $\bar{x}$ interior del domini si:

$$\lim_{\Delta x \to \mathbb{0}} \frac{\Delta f(\bar{x})(\Delta x) - df(\bar{x})(\Delta x)}{\|\Delta x\|} = 0$$

Si aquesta condició es compleix, el numerador no solament tendeix a zero, sinó que ho fa d'una manera més ràpida que el denominador. Per això diem que en una funció diferenciable l'increment total de la funció es pot aproximar per la diferencial de la funció i que aquesta aproximació és més exacta com més petits siguen els canvis en les variables. És a dir, per a increments menuts de les variables es pot escriure:

$$\underbrace{\Delta f(\bar{x})(\Delta x)}_{\text{Increment total}} \approx \underbrace{df(\bar{x})(dx)}_{\text{diferencial}}$$

O, substituint per les definicions d'increment total i de diferencial:

$$f(\bar{x}_1 + \Delta x_1, \dots, \bar{x}_n + \Delta x_n) - f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \approx \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_n} dx_n$$

Ara, recordant del tema 3 que les derivades parcials ens servien per a fer aproximacions als increments quan només canviava una variable, $\Delta_{x_i} f(\bar{x}) \approx \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i} dx_i$, podem dir que, en una funció diferenciable, l'increment total es pot aproximar sumant les aproximacions als increments parcials.

Exemple: La funció $f(x, y) = xy^2$ en el punt (15,10) té com a aproximacions als increments parcials, mitjançant les derivades parcials:

$$\Delta_x f(15{,}10) \approx \frac{\partial f(15{,}10)}{\partial x} dx = y^2|_{(15,10)} dx = 100dx$$

$$\Delta_y f(15{,}10) \approx \frac{\partial f(15{,}10)}{\partial y} dy = 2xy|_{(15,10)} dy = 300dy$$

Mentre que l'aproximació a l'increment total és:

$$\Delta f(15{,}10)(\Delta x, \Delta y) \approx 100dx + 300dy$$

S'observa que si es fa l'aproximació $\Delta f(15{,}10) \approx df(15{,}10)$, s'està cometent un error que és més petit com més petits siguen els increments de les variables. Per exemple, si passem del punt original (15,10) al punt (17,9), el vector d'increments és $(\Delta x, \Delta y) = (2, -1)$ i tindrem:

Increment exacte: $\Delta f(15{,}10)(2, -1) = f(17{,}9) - f(15{,}10) = 1377 - 1500 = -123$

Aproximació amb la diferencial: $df(15{,}10)(2, -1) = 100 \cdot 2 + 300 \cdot (-1) = -100$

S'està cometent un error de 23 unitats: l'aproximació mitjançant la diferencial preveu que la funció disminuirà en 100 unitats, però la disminució exacta és de 123 unitats.

En canvi, si els increments són més pròxims a zero, per exemple $(dx, dy) = (0'2, -0'1)$, l'aproximació és més bona:

$$\Delta f(15{,}10)(0'2, -0'1) = f(15'2{,}9'9) - f(15{,}10) = 1489{,}752 - 1500 = -10{,}248$$

$$df(15{,}10)(0'2, -0'1) = 100 \cdot 0'2 + 300 \cdot (-0'1) = -10$$

L'error ara és tan sols de 0,248 unitats: la diferencial és una bona aproximació a l'increment.

4.1.2. Relacions entre els conceptes de continuïtat, derivabilitat i diferenciabilitat

La definició de diferenciabilitat, $\lim_{\Delta x \to \mathbb{0}} \frac{\Delta f(\bar{x})(\Delta x) - df(\bar{x})(\Delta x)}{\|\Delta x\|} = 0$, requereix que la funció tinga derivades parcials en $\bar{x}$, perquè tinga sentit la diferencial. També requereix que la funció siga contínua en $\bar{x}$ perquè no es podria aproximar l'increment en el valor de la funció si aquest valor canvia bruscament en passar de $\bar{x}$ a un punt pròxim, cosa que passaria si la funció no fora contínua.

D'aquesta manera es diu que **ser contínua i tenir derivades parcials són condicions necessàries** perquè una funció siga diferenciable. Les condicions necessàries es poden utilitzar per a negar la diferenciabilitat: si una funció no és contínua o no té alguna derivada parcial podem dir que no és diferenciable, però no per afirmar la diferenciabilitat: si una funció és contínua i té derivades parcials pot ser o no diferenciable.

D'altra banda, la definició de diferenciabilitat no és operativa en la pràctica i és millor raonar la diferenciabilitat d'una funció en un punt a partir de la següent condició suficient:

Condició suficient de diferenciabilitat: Tota funció de classe C^1 en un punt $\bar{x}$ interior del domini és diferenciable en $\bar{x}$.

Com ja hem vist en el tema anterior, les funcions polinòmiques, arrels, exponencials, logarítmiques i trigonomètriques, com també les que s'obtenen amb sumes, productes, quocients i composicions d'aquestes funcions; sempre que els punts siguen interiors del domini, són de classe C^1 i, per tant, diferenciables. El raonament segons el qual la funció és diferenciable ha de ser previ al càlcul de la diferencial.

La condició suficient s'utilitza per a afirmar la diferenciabilitat: si una funció és de classe C^1 (té derivades parcials i són contínues) és diferenciable. No es pot utilitzar per a negar la diferenciabilitat: si una funció no és de classe C^1 pot ser diferenciable o no.

Exemple: La funció $f(x,y,z) = \frac{x^2 z}{y}$ és de classe C^1 en (1,2,4) perquè és un quocient de polinomis i aquest és un punt interior del domini; per tant, és diferenciable en (1,2,4). La diferencial és:

$$df(1,2,4) = \frac{\partial f(1,2,4)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(1,2,4)}{\partial y}dy + \frac{\partial f(1,2,4)}{\partial z}dz$$
$$= \left.\frac{2xz}{y}\right|_{(1,2,4)} dx + \left.\frac{-x^2 z}{y^2}\right|_{(1,2,4)} dy + \left.\frac{x^2}{y}\right|_{(1,2,4)} dz = 4dx - dy + \frac{1}{2}dz$$

Exercici 9

1. Raona si aquestes funcions són diferenciables i calcula'n la diferencial.
   a) $f_1(x,y) = 3x^3y^2 + 6x^2y + 2x + 8y + 4$
   b) $f_2(x,y) = xe^{x^2y} + \frac{x}{2y+1}$
   c) $f_3(x,y) = \frac{2xy^2}{x+1} + \sqrt{4x^2y + 1}$

d) $f_4(x,y) = y\ln(x^2y^2 + y)$
e) $f_5(x,y,z) = \sin(2x^2 + 4y + 2z)$
f) $F(K,L) = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$

4.2. Direccions de creixement i altres aplicacions de la diferencial

4.2.1. Càlcul de derivades direccionals

A partir de l'expressió de la diferencial d'una funció diferenciable s'arriba a un concepte semblant, derivada direccional, encara que introduint un canvi de notació.

Així, la derivada direccional d'una funció diferenciable representa la variació que experimenta la funció quan des d'un punt de partida $\bar{x}$ ens desplacem infinitesimalment en la direcció d'un vector *u*, anomenat vector direccional. Perquè aquestes derivades direccionals es puguen comparar amb les derivades parcials, el vector direccional ha de tenir norma unitària, és a dir, $\|u\| = \sqrt{u_1^2 + \cdots + u_n^2} = 1$. Amb aquest requisit, la derivada direccional d'una funció diferenciable $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ en un punt $\bar{x}$ interior del domini i en la direcció del vector unitari *u* es calcula amb l'expressió:

$$D_u f(\bar{x}) = \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_1}u_1 + \cdots + \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_n}u_n = \nabla f(\bar{x}) \cdot u$$

Com es veu, la derivada direccional i la diferencial són equivalents només que considerem que els increments de cada variable són cada component del vector direccional unitari.

Exemple: La derivada direccional de la mateixa funció de l'exemple anterior, $f(x,y,z) = \frac{x^2z}{y}$, en el punt (1,2,4) i en la direcció del vector *u*=(-1,1,2), atès que és una funció diferenciable com hem vist adés, es calcula amb la mateixa fórmula que la diferencial però amb el vector d'increments de les variables igual al vector direccional de norma 1. Com que el vector direccional no té norma 1, $\|(-1,1,2)\| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{6}$, cal dividir-lo per la norma perquè tinga norma unitària. Així, el vector direccional per a calcular la derivada direccional és $u = (\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}})$ i la derivada direccional, recordant de l'exemple anterior el valor de les derivades parcials, queda:

$$D_{(\frac{-1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}})} f(1,2,4) = \frac{\partial f(1,2,4)}{\partial x}\frac{-1}{\sqrt{6}} + \frac{\partial f(1,2,4)}{\partial y}\frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{\partial f(1,2,4)}{\partial z}\frac{2}{\sqrt{6}}$$
$$= 4\frac{-1}{\sqrt{6}} - 1\frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{-4}{\sqrt{6}}$$

4.2.2. Direccions de creixement màxim, mínim i nul

Com que les derivades direccionals representen les variacions del valor de la funció en passar d'un punt $\bar{x}$ a un altre infinitament pròxim en una determinada direcció unitària, les podem utilitzar per a raonar en quina direcció la funció augmentarà més de valor

(direcció de màxim creixement), disminuirà més de valor (direcció de mínim creixement) o la funció tendirà a mantenir el valor constant (direcció de creixement nul). Aquestes direccions les raonarem a partir del valor del producte de dos vectors:

$$D_u f(\bar{x}) = \nabla f(\bar{x}) \cdot u = \|\nabla f(\bar{x})\| \cdot \|u\| \cdot \cos\alpha$$

Atès que la norma del vector gradient és constant en cada punt i la norma del vector de desplaçament és 1, el valor de la derivada direccional depèn de α, l'angle que formen el vector gradient i el vector direccional. Com que el cosinus d'un angle està entre -1 i 1, tindrem que:

- La derivada direccional és màxima quan $\cos\alpha = 1 \rightarrow \alpha = 0$, és a dir, quan el vector direccional està en la mateixa direcció i sentit (encara que amb norma 1) que el vector gradient.
- La derivada direccional és mínima quan $\cos\alpha = -1 \rightarrow \alpha = 180^0$ $(\alpha = \pi)$, és a dir, quan el vector direccional està en la mateixa direcció i sentit contrari (encara que amb norma 1) al vector gradient.
- La derivada direccional és nul·la quan $\cos\alpha = 0 \rightarrow \alpha = 90^0$ $\left(\alpha = \frac{\pi}{2}\right)$ ó $\alpha = 270^0$ $\left(\alpha = \frac{3\pi}{2}\right)$, és a dir, quan el vector direccional és perpendicular (encara que amb norma 1) al vector gradient.

Exemple: Les direccions de creixement de la funció, $f(x,y,z) = \frac{x^2 z}{y}$, en el punt (1,2,4) es calculen a partir del vector gradient. Aquest vector està format per les tres derivades parcials, ja calculades més amunt: $\nabla f(1,2,4) = (4,-1,\frac{1}{2})$. Com que no és un vector de norma 1, en calculem la norma $\left\|(4,-1,\frac{1}{2})\right\| = \sqrt{69/4}$. Les direccions són:

- Màxim creixement: $u_{\text{màx}} = \frac{\nabla f(1,2,4)}{\|\nabla f(1,2,4)\|} = \frac{(4,-1,\frac{1}{2})}{\sqrt{69/4}} = (\frac{8}{\sqrt{69}}, \frac{-2}{\sqrt{69}}, \frac{1}{\sqrt{69}})$
- Mínim creixement: $u_{\text{mín}} = -\frac{\nabla f(1,2,4)}{\|\nabla f(1,2,4)\|} = (\frac{-8}{\sqrt{69}}, \frac{2}{\sqrt{69}}, \frac{-1}{\sqrt{69}})$
- Creixement nul: totes aquelles que fan la derivada direccional zero i siguen unitàries:

$$\left.\begin{array}{c} D_u f(1,2,4) = 4u_1 - u_2 + \frac{1}{2}u_3 = 0 \\ \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} = 1 \end{array}\right\}$$

  En funcions de dues variables hi ha dues direccions de creixement nul, però en funcions de més de dues variables hi ha infinites solucions d'aquest sistema d'equacions.

Les distintes direccions ens informen de com han de canviar les variables perquè la funció canvie en la direcció adequada. Així, si volem que la funció augmente el màxim possible ens interessa desplaçar les variables en la direcció de creixement màxim,

$(\frac{8}{\sqrt{69}}, \frac{-2}{\sqrt{69}}, \frac{1}{\sqrt{69}})$, és a dir, per cada unitat marginal que augmentem la tercera variable hem de disminuir-ne dues la segona i augmentar-ne 8 la primera.

Aproximació al valor de la funció

La diferencial és una aproximació a l'increment total de la funció en funcions diferenciables:

$$\underbrace{f(\bar{x}_1 + \Delta x_1, \dots, \bar{x}_n + \Delta x_n) - f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)}_{\text{Increment total}} \approx \underbrace{\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_n} dx_n}_{\text{diferencial}}$$

Amb una transformació simple, es pot arribar a una fórmula per a l'aproximació al valor de la funció en un punt pròxim a un punt de partida $\bar{x}$:

$$\underbrace{f(\bar{x}_1 + dx_1, \dots, \bar{x}_n + dx_n)}_{\substack{\text{valor de la funció en un} \\ \text{punt pròxim a } \bar{x}}} \approx \underbrace{f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)}_{\substack{\text{valor de la} \\ \text{funció en } \bar{x}}} + \underbrace{\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_n} dx_n}_{\text{diferencial}}$$

Exemple: La funció $f(x, y, z) = \frac{x^2 z}{y}$ en un punt pròxim a (1,2,4) es pot aproximar sumant el valor de la funció i la diferencial:

$$f(1 + dx, 2 + dy, 4 + dz) \approx f(1,2,4) + \frac{\partial f(1,2,4)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(1,2,4)}{\partial y} dy + \frac{\partial f(1,2,4)}{\partial z} dz$$
$$= 2 + 4dx - dy + \frac{1}{2} dz$$

Per exemple, la funció en el punt (0'8, 1'5, 4'2) suposa aplicar increments $(dx, dy, dz) = (-0,'2, -0'5, 0'2)$ i el valor aproximat serà:

$$f(0'8,1'5,4'2) \approx 2 + 4(-0,2) - (-0,5) + \frac{1}{2}(0,2) = 1,8$$

El valor exacte, amb una calculadora, és 1,792. L'error és de 0,008 unitats.

Exercici 10

1. Calcula, si és possible, les direccions de creixement màxim, mínim i nul de les funcions de l'exercici 9.1. a, b i c en el punt (1,0).
2. Calcula la direcció de creixement màxim en el punt (0,0) de la funció $f_1(x, y) = 3x^3y^2 + 6x^2y + 2x + 8y + 4$. Calcula el valor de la derivada direccional màxima.
3. Calcula la derivada direccional en el punt (1,0) i en la direcció del vector *u*=(3,4) de la funció $f_2(x, y) = xe^{x^2 y} + \frac{x}{2y+1}$. Calcula el valor de la derivada direccional màxima.
4. Donada la funció $f(x, y) = 2x + \frac{4y}{x}$, calcula les direccions de creixement nul de *f* en el punt (1,-1).

5. Donada la funció $f(x,y)=\frac{2yx^2}{xy+1}$:
   a) Raona si és diferenciable en el punt (1,1) i, si ho és, calcula la diferencial en aquest punt.
   b) Calcula la diferencial si la primera variable augmenta en 0,1 i la segona disminueix en 0,1.
   c) Utilitza la diferencial per a calcular un valor aproximat de *f*(1'1, 0'9).
6. Digues quines de les afirmacions següents són vertaderes i quines són falses.
   a) Tota funció diferenciable en un punt és contínua en aquest punt.
   b) Tota funció contínua en un punt és diferenciable en aquest punt.
   c) Tota funció diferenciable en un punt té derivades parcials en aquest punt.
   d) Tota funció amb derivades parcials en un punt és diferenciable en aquest punt.
   e) Tota funció contínua en un punt té derivades parcials en aquest punt.
   f) Tota funció amb derivades parcials en un punt és contínua en aquest punt.
7. Calcula aproximadament $f_3(1'2,1'9)$ amb la diferencial i a partir del valor en el punt $f_3(1,2)=\frac{2xy^2}{x+1}+\sqrt{4x^2y+1}\Big|_{(1,2)}=7$.
8. La funció de cost d'una empresa és $C(x,y)=3x^3y^2+6x^2y+2x+8y+4$, en €. Si la producció actual és de x=5 i y=4 unitats, es demana:
   a) Calcula la diferencial i interpreta'n el significat econòmic.
   b) Calcula amb la diferencial la variació aproximada en el cost si augmenta en 1 unitat la producció del primer producte i disminueix en una unitat la producció del segon.
   c) Calcula una direcció de creixement nul i interpreta-la econòmicament.
   d) Si s'ha augmentat en una unitat la producció del primer producte i el cost ha augmentat en 500 euros, calcula com ha variat aproximadament la producció del segon producte.

4.3. Derivades parcials en funcions compostes i implícites

4.3.1. Derivades parcials de la funció composta

La funció composta apareix quan s'encadenen dues o més funcions. L'existència de la funció composta (*gof*) requereix dues condicions:

- Que l'espai final de la primera funció (*f*) siga el mateix que l'espai inicial de la segona (*g*): $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ i $g: D_g \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$.
- Que qualsevol imatge d'un punt del domini de la primera funció estiga en el domini de la segona funció: $f(D_f) \subseteq D_g$.

Per tal que, a més a més, la funció composta siga derivable en un punt $\bar{x}$ interior del domini de la primera funció, calen dues condicions addicionals:

- Que la primera funció (f) siga diferenciable en $\bar{x}$.
- Que la segona funció (g) siga diferenciable en $f(\bar{x})$.

En cas d'existència de la funció composta i de ser derivable, les derivades parcials de la funció composta es poden calcular de dues maneres:

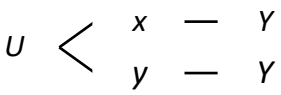
1. Si tenim la informació completa de les funcions que intervenen, es pot calcular la funció composta substituint les variables intermèdies i, a continuació, derivar directament aquesta funció.
2. En cas que ens falte informació sobre la forma de les funcions, però sí que en tinguem sobre les seues derivades, la manera de derivar és aplicant la **regla de la cadena**.

Regla de la cadena: Donades les funcions $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ i $g: D_g \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ i si es donen les condicions per a l'existència i derivabilitat de la funció gof en un punt $\bar{x}$ interior del domini, aleshores la matriu jacobiana de les derivades parcials de la funció composta en $\bar{x}$ és igual al producte de la matriu jacobiana de derivades parcials de la segona funció g en el punt $f(\bar{x})$ per la matriu jacobiana de derivades parcials de la primera funció en $\bar{x}$:

$$\underbrace{J(gof)(\bar{x})}_{pxn} = \underbrace{Jg\big(f(\bar{x})\big)}_{pxm} \cdot \underbrace{Jf(\bar{x})}_{mxn}$$

L'enunciat matricial de la regla de la cadena es podria individualitzar per a cada derivada parcial. En la pràctica, resulta més comprensible plantejar la regla de la cadena a partir de l'esquema de relacions entre les variables que intervenen en la composició de funcions. La idea és que quan una variable (x) depèn d'una variable intermèdia (y) que, al mateix temps, depèn d'una d'independent en última instància (z); la derivada respecte a l'última variable és el producte de derivades: $\frac{dx}{dz} = \frac{dx}{dy}\frac{dy}{dz}$. Si la variable x depèn de més d'una variable intermèdia (y_1, y_2) que depenen de z, s'han de sumar els dos efectes sobre les variables intermèdies per a obtenir l'efecte total: $\frac{dx}{dz} = \frac{\partial x}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dz} + \frac{\partial x}{\partial y_2}\frac{dy_2}{dz}$ (calcular l'efecte total com a suma dels efectes parcials es pot fer quan les funcions són diferenciables, condició que es compleix quan són de classe C^1).

Exemple: Si la funció d'utilitat d'un consumidor és $U(x, y) = 5\ln(x) + \ln(y)$ i les quantitats consumides depenen de la renda disponible del consumidor, $x = \frac{Y}{10}$, $y = \frac{Y}{25}$, les relacions entre variables en forma d'arbre és:



I, aplicant la regla de la cadena, la derivada de la utilitat respecte de la renda disponible és:

$$\frac{dU}{dY} = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{dY} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{dY}$$

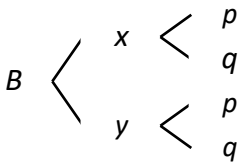
Exemple. Els beneficis d'una empresa depenen de les quantitats produïdes de dos productes segons la relació: $B(x,y) = -x^2 - 2y^2 + 50x + 80y - 5$. Però les quantitats produïdes depenen de les quantitats emprades de dues matèries primeres segons la relació vectorial: $(x,y) = (2p + 3q, 5p + q)$. Lògicament, de primer s'utilitzen les matèries primeres per a obtenir els productes i després es venen per a obtenir beneficis, per tant, les funciones estan encadenades en l'ordre següent:

$$\begin{array}{ccccc} & f & & g & \\ \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (p,q) & \to & (x,y) & \to & B \end{array}$$

L'espai final de la primera funció coincideix amb l'inicial de la segona i les dues funcions estan definides en tot l'espai inicial, així que es compleixen les condicions per a l'existència de la composta. Com que les dues són diferenciables perquè són polinòmiques, la composta $\tilde{B}(p,q)$ també ho és. La diferencial de la composta s'obté amb les derivades parcials de la composta:

$$d\tilde{B}(p,q) = \frac{\partial \tilde{B}(p,q)}{\partial p}dp + \frac{\partial \tilde{B}(p,q)}{\partial q}dq$$

I per a obtenir les derivades parcials de la composta resulta més comprensible plantejar l'esquema de relacions entre les variables en forma d'arbre:



A partir de l'esquema, la derivada parcial respecte de p s'obté sumant els dos efectes parcials que p té sobre els beneficis, un mitjançant x i un altre mitjançant y. Cada un d'aquests efectes es calcula multiplicant derivades parcials (regla de la cadena):

$$\underbrace{\frac{\partial \tilde{B}(p,q)}{\partial p}}_{\substack{\text{Efecte de variacions en } p \\ \text{sobre } B \\ (q \text{ constant})}} = \underbrace{\underbrace{\frac{\partial B(x,y)}{\partial x}}_{\substack{\text{Efecte de variacions} \\ \text{en } x \text{ sobre } B}} \underbrace{\frac{\partial x}{\partial p}}_{\substack{\text{Efecte de variacions} \\ \text{en } p \text{ sobre } x}}}_{\substack{\text{Efecte de variacions en } p \text{ sobre } B \\ \text{mitjançant } x}} + \underbrace{\underbrace{\frac{\partial B(x,y)}{\partial y}}_{\substack{\text{Efecte de variacions} \\ \text{en } y \text{ sobre } B}} \underbrace{\frac{\partial y}{\partial p}}_{\substack{\text{Efecte de variacions} \\ \text{en } p \text{ sobre } y}}}_{\substack{\text{Efecte de variacions en } p \text{ sobre } B \\ \text{mitjançant } y}}$$

I semblantment es podria plantejar el cas de q. Calculant les derivades tenim que:

$$\frac{\partial \tilde{B}(p,q)}{\partial p} = \frac{\partial B(x,y)}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial p} + \frac{\partial B(x,y)}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial p} = (-2x + 50)\cdot 2 + (-4y + 80)\cdot 5 = 500 - 4x - 20y$$

$$\frac{\partial \tilde{B}(p,q)}{\partial q} = \frac{\partial B(x,y)}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial q} + \frac{\partial B(x,y)}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial q} = (-2x + 50)\cdot 3 + (-4y + 80)\cdot 1 = 230 - 6x - 4y$$

En funcions compostes han de desaparèixer les variables intermèdies substituint-les per les independents en última instància:

$$\frac{\partial \tilde{B}(p,q)}{\partial p} = 500 - 4(2p+3q) - 20(5p+q) = 500 - 108p - 32q$$
$$\frac{\partial \tilde{B}(p,q)}{\partial q} = 230 - 6(2p+3q) - 4(5p+q) = 230 - 32p - 22q$$

La diferencial de la composta queda:

$$d\tilde{B}(p,q) = (500 - 108p - 32q)dp + (230 - 32p - 22q)dq$$

Si en la situació de partida s'estan utilitzant, per exemple, p=2 unitats i q=5 unitats de matèries primeres, la diferencial és:

$$d\tilde{B}(2{,}5) = 500 - 108p - 32q|_{(2,5)}dp + 230 - 32p - 22q|_{(2,5)}dq = 124dp + 56dq$$

En aquest exercici, com que coneixem totes les funcions que hi intervenen, també és possible fer tots els càlculs sense aplicar la regla de la cadena. Això requereix calcular la funció composta substituint variables:

$$\tilde{B}(p,q) = -(2p+3q)^2 - 2(5p+q)^2 + 50(2p+3q) + 80(5p+q) - 5$$

I després calcular les derivades parcials i expressar la diferencial.

4.3.2. Derivades parcials en funcions implícites

Les funcions implícites apareixen quan des d'una equació amb dues o més variables $F(y, x_1, \dots, x_n) = 0$, la variable dependent queda determinada de forma única a partir dels valors de les variables independents $y = f(x_1, \dots, x_n)$, sense importar si es pot aïllar o no aquesta variable. No totes les equacions de dues o més variables defineixen una equació implícita en qualsevol punt. El teorema següent ens assegura les condicions d'existència i derivabilitat de la funció implícita:

Teorema de la funció implícita. Donada una equació $F(y, x_1, \dots, x_n) = 0$, i un punt $(\bar{y}, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ interior del domini de F, si:

- $F(\bar{y}, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = 0$
- F és diferenciable en $B((\bar{y}, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n), r)$, és a dir, en punts suficientment pròxims.
- $\frac{\partial F(\bar{y}, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)}{\partial y} \neq 0$

Aleshores, la variable dependent y queda determinada de forma única a partir dels valors de les variables independents $x_1, \dots, x_n$ en punts suficientment pròxims a $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$, és a dir, existeix la funció implícita $y = f(x_1, \dots, x_n)$. A més, aquesta funció també és de classe C^1 en $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$.

Exemple. L'equació $x^2 + y^2 = 1$ sí que satisfà les tres condicions del teorema en el punt $(x, y) = (0{,}1)$:

- $F(0,1) = x^2 + y^2|_{(0,1)} = 1$
- $F(x,y) = x^2 + y^2$ és de classe C^1 i, per tant, diferenciable en tots els punts, també en punts pròxims a (0,1), perquè és un polinomi.
- $\frac{\partial F(0,1)}{\partial y} = 2y|_{(0,1)} = 2 \neq 0$

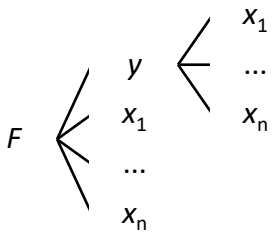
En conseqüència, existeix la funció implícita $y = f(x)$ i és derivable en (0,1).

En canvi, no passa el mateix en el punt $(x,y) = (1,0)$, ja que no se satisfà la tercera condició del teorema: $\frac{\partial F(1,0)}{\partial y} = 2y|_{(1,0)} = 0$.

Una vegada verificat el teorema, el càlcul de la derivada de la funció implícita es pot fer de dues maneres. La primera és aïllant la variable dependent, si és possible, i derivant directament. La segona, que sempre és possible, és a partir de la fórmula següent:

$$\left.\frac{\partial y}{\partial x_i}\right|_{(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n)} = -\frac{\left.\frac{\partial F}{\partial x_i}\right|_{(\bar{y},\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n)}}{\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{(\bar{y},\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n)}}$$

Aquesta fórmula es pot deduir aplicant la regla de la cadena. Com que l'esquema de relacions entre les variables és:



L'efecte de variacions en una única variable x_i sobre la funció composta $\tilde{F}(x_1,\ldots,x_n)$ és:

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial x_i} = \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial x_i}$$

Però com que la funció té un nivell constant, $\tilde{F}(x_1,\ldots,x_n) = 0$, les variacions en la funció han de ser zero i s'arriba a la fórmula abans escrita per a la derivada de la funció implícita:

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial x_i} = \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial x_i} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial y}{\partial x_i} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

Exemple. Un consumidor està sobre la corba d'indiferència de nivell 20 $U(x,y) = 10x^{1/3}y^{2/3} = 20$. La relació marginal de substitució indica a quantes unitats d'un bé s'ha de renunciar per a augmentar en una unitat el consum de l'altre bé, mantenint constant el nivell d'utilitat. El càlcul de la relació marginal de substitució exigeix comprovar el

teorema de la funció implícita i calcular la derivada. Si el consum de partida és $(x, y) = (2,2)$, les tres hipòtesis del teorema són certes:

- $F(2,2) = 10x^{1/3}y^{2/3}\big|_{(2,2)} = 20$
- $F(x, y) = 10x^{1/3}y^{2/3}$ és de classe C^1 en tots els punts interiors del domini (quan $x>0$ i $y>0$), perquè és una combinació de constants i arrels cúbiques.
- $\frac{\partial F(2,2)}{\partial y} = \frac{20}{3}x^{1/3}y^{-1/3}\Big|_{(2,2)} = \frac{20}{3} \neq 0$

Per tant, existeix la funció implícita i la derivada o relació marginal de substitució és:

$$RMS = \frac{dy}{dx}\Big|_{(2)} = -\frac{\frac{\partial U}{\partial x}\Big|_{(2,2)}}{\frac{\partial U}{\partial y}\Big|_{(2,2)}} = -\frac{\frac{10}{3}x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}\Big|_{(2,2)}}{\frac{20}{3}x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{3}}\Big|_{(2,2)}} = -\frac{\frac{10}{3}}{\frac{20}{3}} = -0{,}5$$

La interpretació econòmica és que si volem augmentar una unitat el consum del primer bé haurem de disminuir el consum del segon bé en 0,5 unitats per tal de mantenir constant el nivell d'utilitat.

Exemple. Una empresa empra tres factors productius en quantitats (x, y, z) i obté una producció (en milers d'euros) igual a $F(x, y, z) = 6\left(2\sqrt{x} + 3\sqrt{y} + \sqrt{z}\right)^2$. Actualment utilitza quantitats $(x, y, z) = (15,60,135)$ i obté una producció valorada en 10.890 milers d'euros. L'empresa s'enfronta a una disminució dels dos últims factors productius $(dy, dz) = (-2, -3)$ i vol saber com hauria d'augmentar aproximadament el primer factor productiu i així mantenir la producció al nivell actual.

Verifiquem primer el teorema de la funció implícita:

- $F(15,60,135) = 10.890$
- La funció de producció és diferenciable en qualsevol punt interior del domini perquè és una composta d'una polinòmica i una suma d'arrels.
- $\frac{\partial F(15,60,135)}{\partial x} = 12\left(2\sqrt{x} + 3\sqrt{y} + \sqrt{z}\right)\frac{1}{\sqrt{x}}\Big|_{(15,60,135)} = 132 \neq 0$

Aleshores existeix la funció implícita $x = x(y, z)$ i és diferenciable. La diferencial és:

$$dx(60,135)(-2,-3) = \frac{\partial x(60,135)}{\partial y}dy + \frac{\partial x(60,135)}{\partial z}dz$$

I cada derivada parcial es calcula amb la fórmula del teorema de la funció implícita, de manera que s'obtenen les anomenades relacions marginals de substitució tècnica:

$$\frac{\partial x(60,135)}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}\Big|_{(15,60,135)}}{\frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{(15,60,135)}} = -\frac{12\left(2\sqrt{x} + 3\sqrt{y} + \sqrt{z}\right)\frac{3}{2\sqrt{y}}\Big|_{(15,60,135)}}{12\left(2\sqrt{x} + 3\sqrt{y} + \sqrt{z}\right)\frac{1}{\sqrt{x}}\Big|_{(15,60,135)}} = -\frac{99}{132} = -\frac{3}{4}$$

$$\frac{\partial x(60,135)}{\partial z} = -\frac{\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{(15,60,135)}}{\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{(15,60,135)}} = -\frac{\left.12\left(2\sqrt{x}+3\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)\frac{1}{2\sqrt{z}}\right|_{(15,60,135)}}{\left.12\left(2\sqrt{x}+3\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)\frac{1}{\sqrt{x}}\right|_{(15,60,135)}} = -\frac{22}{132} = -\frac{1}{6}$$

Substituint en la diferencial:

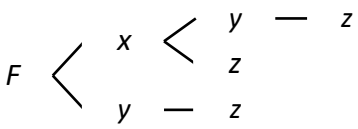
$$dx(60,135)(-2,-3) = -\frac{3}{4}(-2) - \frac{1}{6}(-3) = 2$$

En conseqüència, l'empresa haurà d'augmentar en dues unitats aproximadament l'ús del primer factor productiu per a mantenir la producció al nivell inicial.

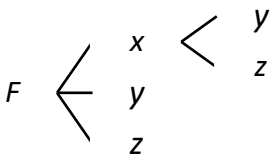
Exercici 11

1. Escriu l'expressió teòrica de la diferencial i de les derivades parcials de la funció composta amb la regla de la cadena a partir dels següents esquemes de relacions entre variables:

   a)



   b)



2. Calcula la funció composta i les seues derivades directament.

   a) $f(x,y) = 20 - 4x^2 - y^2\,,\quad x(t) = 3t,\ \ y(t) = \frac{1}{t}$

   b) $f(u,v) = u^2 + 2v^2\,,\quad u(x,y) = 3x + 4y,\ \ v(x,y) = \frac{x}{y}$

3. Calcula les derivades de la funció composta amb la regla de la cadena en els punts indicats amb la següent informació parcial de les funcions que hi intervenen.

   a) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z,\ \ \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=2} = 3,\ \ \left.\frac{dz}{dx}\right|_{x=2} = 5,\ \ y(2) = 2,$ $z(2) = 3$ en el punt x=2

   b) $f(u,v) = u^2 + 2v^2\,,\quad (u,v) = g(x,y)$ tal que $\nabla u(2,3) = (8,2),\ \ \nabla v(2,3) = \left(\frac{5}{2},4\right),\ \ u(2,3) = 4, v(2,3) = 6$ en el punt $(x,y)=(2,3)$

4. A partir de les equacions següents, comprova el teorema de la funció implícita per a les funcions i els punts indicats i, si es verifica, calcula les derivades d'aquesta funció en aquests punts:

   a) $x^2y + y^2x = 2$ $y(x)$ en $(x, y)=(1, 1)$

b) $x^2 \ln(xy) = 0$ $y(x)$ en $(x, y)=(1/2, 2)$
c) $x^2y + y^2z - yz^2 = 1$ $z(x, y)$ en $(x, y, z)=(1, 1, 1)$
d) $e^x + 2yz - xy = 1$ $x(y, z)$ en $(x, y, z)=(0, 0, 1)$

5. La demanda d'un producte, en unitats, és donada per la funció $D(p_1, p_2) = 3000 - 20p_1^2 + 30p_2$; on p_1 és el preu unitari en euros del producte i p_2 és el preu unitari d'un producte semblant de la competència també en euros. En la situació actual p_1=2 € i p_2=1,5 €.

   a) Calcula i interpreta les derivades parcials de D en la situació actual.
   b) Si el preu del producte augmenta en 0,1 €, calcula la variació aproximada de la demanda si s'ha mantingut constant el preu del producte de la competència.
   c) Si l'empresa no ha canviat el preu i s'ha observat un augment de la demanda de 55 unitats, calcula quina ha sigut la variació aproximada del preu del producte de la competència.
   d) Se sap que els preus es fixen segons les expressions $p_1 = 2m_1$, $p_2 = m_1m_2$, on m_1 i m_2 són els preus de dues matèries primeres amb què s'elaboren els productes. Calcula de les dues maneres (amb la regla de la cadena i derivant directament la funció composta) les derivades parcials de la demanda respecte al preu d'aquestes matèries primeres si m_1=1 € i m_2=1,5 €. Interpreta econòmicament aquestes derivades.

6. Una empresa produeix un nivell de 216 unitats de producte segons la relació $\frac{1}{10}\left(8\sqrt{x} + 2\sqrt{y}\right)^2 = 216$, on les variables són les quantitats utilitzades de dos factors productius:

   a) Verifica les hipòtesis del teorema de la funció implícita en $(x, y) = (15{,}60)$.
   b) Calcula de forma explícita la funció implícita $y(x)$ si volem mantenir la producció al mateix nivell $F(x, y) = 216$.
   c) Calcula la derivada de la funció implícita en $(x, y) = (15{,}60)$ de les dues maneres: directament i amb la fórmula del teorema de la funció implícita.
   d) Raona el significat econòmic d'aquesta derivada.

7. La funció d'ingrés d'una empresa, en euros, és donada per la funció $I(x, y, z) = xy(1 - z)$; on x és el preu unitari del producte, y és la quantitat produïda del producte i z és el tipus impositiu sobre les vendes. En la situació actual x=20 €, y=1500 unitats i z=0,04. Es demana:

   a) Calcula la derivada parcial dels ingressos respecte al tipus impositiu en la situació actual i interpreta econòmicament el seu signe.
   b) Calcula aproximadament com canviarien els ingressos si el tipus impositiu augmenta a z=0,045 des de la situació actual, suposant que la resta de variables es mantenen constants.

c) Calcula aproximadament com canviarien els ingressos si el tipus impositiu augmenta a z=0,045 des de la situació actual, suposant que la resta de variables es veuran afectades per aquest increment de la manera següent:

$$\left.\frac{dx}{dz}\right|_{z=0,04} = 0,5 \qquad \left.\frac{dy}{dz}\right|_{z=0,04} = -2$$

8. El risc d'una inversió és donat per la funció:

$$R(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 4z^2 - 2xz$$

on (x,y,z) són les quantitats invertides en tres actius. En la situació inicial invertim $(x,y,z) = (10,15,5)$ i el risc és 550.

a) Comprova si l'equació $x^2 + 2y^2 + 4z^2 - 2xz = 550$ defineix la funció implícita $x(y,z)$ prop del punt $(10,15,5)$.
b) Si volem augmentar en una unitat la quantitat invertida en el segon actiu i disminuir en una unitat la quantitat invertida en el tercer actiu, calcula com ha de canviar aproximadament la quantitat invertida en el primer actiu per tal de mantenir constant el nivell de risc.

9. La recaptació fiscal depèn del consum (C), de la renda (Y) i dels tipus impositius sobre el consum (i) i sobre la renda (r). La funció és:

$$T(C,Y,i,r) = iC + rY$$

En la situació actual, els tipus impositius sobre el consum i la renda són $(i,r) = (0,21\ ,\ 0,25)$ i el consum i la renda són $(C,Y) = (800\ ,\ 1200)$. S'estima que l'efecte de cada tipus impositiu sobre la variable sobre la qual s'aplica en la situació actual és:

$$\left.\frac{dC}{di}\right|_{i=0,21} = -1200 \qquad \left.\frac{dY}{dr}\right|_{r=0,25} = -5000$$

a) Calcula com afectaria aproximadament a la recaptació fiscal un augment del tipus impositiu sobre el consum fins a 0,22.
b) Calcula com afectaria aproximadament a la recaptació fiscal un augment del tipus impositiu sobre la renda fins a 0,26.
c) Calcula la diferencial de la funció composta en la situació actual i l'efecte conjunt aproximat de les dues mesures anteriors.

10. El cost d'una empresa (en milers de €) que produeix dos productes en quantitats q_1 i q_2 (unitats) és:

$$C(q_1,q_2) = (10 + 2q_1)q_1 + (8 + q_2)q_2 + 2q_1q_2$$

En la situació inicial $q_1 = 3$ i $q_2 = 5$. Es demana:

a) La funció de cost marginal respecte a la producció del primer bé, el cost marginal en la situació inicial, les unitats de mesura i la interpretació econòmica.

b) La direcció de mínim creixement en la situació inicial i la interpretació econòmica.
c) La matriu hessiana.
d) Si es vol mantenir constant el cost en la situació inicial, calcula la relació marginal de substitució tècnica o $\frac{dq_1}{dq_2}$ en la situació actual, suposant que existeix la funció implícita $q_1(q_2)$, i interpreta el resultat econòmicament.

TEMA 5. OPTIMITZACIÓ

5.1. Conceptes bàsics

5.1.1. Introducció

El problema d'optimització matemàtica apareix quan tenim una funció que volem optimitzar en algun sentit (determinar-ne el valor màxim o mínim) mitjançant l'assignació de valors per a les variables d'aquesta funció que, addicionalment, complisquen una sèrie de condicions. Per a abordar d'una manera operativa la resolució d'aquest problema, cal delimitar en algun sentit les característiques matemàtiques que han de tenir tant la funció que es vol optimitzar com les condicions addicionals que han de complir les variables d'aquesta funció. En concret, el problema que és el nostre objecte d'estudi es caracteritza perquè la funció que es vol optimitzar és diferenciable i perquè les condicions addicionals que han de complir les variables, conegudes com a restriccions, són igualtats o desigualtats formades amb funcions també diferenciables. En conseqüència, l'enunciat general del problema d'optimització és el que segueix:

$$\begin{array}{ll} Optimitzar & f(x) \\ s.a: & x \in S \end{array}$$

Amb:

$$f: D_f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \text{ diferenciable en tot el domini } D_f$$

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n / g(x) \leq b, h(x) = d, x \epsilon D\}$$

$$g: D_g \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \text{ diferenciable en tot el domini } D_g$$

$$h: D_h \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p, \text{ diferenciable en tot el domini } D_h$$

$$x \in \mathbb{R}^n, \ \ b \in \mathbb{R}^m, \ \ d \in \mathbb{R}^p$$

Els problemes de programació matemàtica són especialment útils en la ciència econòmica i de l'empresa, tant des d'un vessant purament teòric com des de l'aplicació pràctica. De fet, la teoria econòmica té com a principi bàsic el comportament racional dels agents econòmics, que no és més que un comportament òptim d'individus, empreses i governs, tenint en compte les limitacions de recursos. Així, la teoria del consumidor arranca del plantejament d'un problema de maximització de la utilitat que proporciona el consum d'un conjunt de béns subjecte a una limitació pressupostària en la compra d'aquests béns. O la teoria de l'empresa comença amb el problema de minimitzar els costos per l'ús dels *inputs* que intervenen en el procés productiu subjecte a l'obtenció d'un nivell de producció mínima.

5.1.2. Principals conceptes

Parts del problema

El problema de programació matemàtica té les parts següents:

1. Variables principals, x: són les que representen una decisió directa del subjecte decisor. L'objectiu és assignar valor a aquestes variables. En general, s'anomenaran $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ o x, y, z.
2. Funció objectiu, $f(x)$: és la funció que es vol optimitzar, és a dir, maximitzar o minimitzar. Representa alguna magnitud que és un indicador de les preferències del subjecte decisor: utilitat, beneficis, costos, etc. Aquesta funció s'encarrega de quantificar amb un valor numèric cada decisió sobre les variables principals i així determinar si una decisió és millor que una altra segons el valor que assolisca la funció objectiu.
3. Conjunt d'oportunitats, S: és el conjunt de valors que poden tenir les variables principals. Apareix com a conseqüència de les limitacions de diferent origen a les quals s'enfronta el subjecte decisor: pressupost limitat, capacitat productiva, demanda mínima, requisits legals, etc. La manera de definir el conjunt d'oportunitats és mitjançant dos tipus de condicions: restriccions i condicions de domini (normalment de no negativitat).

Tipus d'òptims

L'optimització es pot produir de vuit maneres diferents segons combinem tres característiques que poden tenir les solucions òptimes:

- Màxim - mínim: segons que la funció objectiu siga màxima o mínima en aquesta solució òptima.
- Local – global (relatiu – absolut): segons que siga òptima respecte a altres solucions factibles infinitament pròximes (local o relatiu) o respecte a qualsevol altra solució factible (global o absolut).
- Estricte - no estricte: segons que siga l'únic òptim o n'hi haja altres.

Així, tenim les definicions de màxim següents (les de mínim serien equivalents canviant el sentit de la desigualtat).

Definicions de màxim

x^* és màxim local estricte del problema general si $\exists \epsilon > 0$ tal que:

$$f(x^*) > f(x), \qquad \forall x \in S \cap B(x^*, \epsilon)$$

x^* és màxim local no estricte del problema general si $\exists \epsilon > 0$ tal que:

$$f(x^*) \geq f(x), \qquad \forall x \in S \cap B(x^*, \epsilon)$$

x^* és màxim global estricte del problema general si:

$$f(x^*) > f(x), \qquad \forall x \in S$$

x^* és màxim global no estricte del problema general si:

$$f(x^*) \geq f(x), \qquad \forall x \in S$$

En les dues definicions de màxim local, el conjunt $B(x^*, \epsilon)$ s'anomena *bola oberta* centrada en x^* i de radi ε, i representa els punts suficientment pròxims a x^*, és a dir, punts tals que $d(x, x^*) < \epsilon$ o punts tals que $\|x - x^*\| < \epsilon$.

L'objectiu de la programació matemàtica és trobar òptims globals, encara que, a vegades, un pas previ és l'obtenció d'òptims locals o d'altres punts que siguen candidats a òptims globals.

Classes de problemes i mètodes de resolució

Segons la forma de les restriccions i el tipus de funcions es pot parlar de distintes classes de problemes que es van anar resolent en diferents moments històrics:

- Problemes d'optimització sense restriccions: és el problema clàssic de càlcul d'extrems. La condició necessària i suficient de funcions d'una variable (càlcul de punts crítics i classificació) s'amplia al cas de diverses variables.
- Problemes d'optimització amb restriccions d'igualtat: és un problema més realista en aplicacions econòmiques, on és habitual l'existència de recursos limitats. Es resol aplicant el mètode analític dels multiplicadors de Lagrange, utilitzant condicions semblants a les del cas sense restriccions.
- Problemes d'optimització amb restriccions de desigualtat: programació lineal i no lineal. És el cas més general possible, ja que els casos anteriors es podrien resoldre com a cas particular d'aquest cas. El mètode analític de resolució s'anomena el de les condicions de Kuhn i Tucker.

Els mètodes analítics de resolució esmentats per a cada cas són els més apropiats en el marc d'uns estudis d'economia, encara que n'hi ha d'altres. Per exemple, el mètode gràfic en programació lineal és un bon punt de partida, però està limitat al cas de dues variables de decisió. I també hi ha mètodes numèrics de resolució que s'utilitzen per a posar-los en pràctica en el disseny de programes informàtics de resolució de problemes d'optimització.

5.1.3. Teoremes fonamentals de l'optimització matemàtica

El primer teorema garanteix l'existència de solució òptima global en el problema general donades determinades hipòtesis.

Teorema de Weierstrass

Si la funció objectiu, $f(x)$, és contínua i el conjunt d'oportunitats, S, és no buit i compacte (tancat i fitat), aleshores el problema general tindrà màxim i mínim global.

Per a verificar les hipòtesis d'aquest teorema hem de tenir en compte les observacions següents:

- En el problema d'optimització, les funcions són diferenciables i, per tant, contínues sempre.
- Que el conjunt no siga buit es verifica trobant un punt que satisfaça totes les restriccions i condicions de domini.

- Com que les restriccions del problema, si n'hi ha, sempre són igualtats o desigualtats no estrictes, els punts frontera formen part del conjunt d'oportunitats i això implica que el conjunt sempre és tancat.
- Que el conjunt siga fitat es verifica trobant fites inferiors i superiors per a totes les variables principals. Si només hi ha dues variables, també es pot verificar gràficament.

Si no es compleix alguna de les condicions del teorema, la conclusió adequada és que no està garantida l'existència de solució global, ja que encara n'hi podria haver.

El segon teorema dona les condicions per a arribar a l'òptim global si prèviament hem pogut arribar a un òptim local.

Teorema local-global (cas de maximitzar)

Si la funció objectiu, $f(x)$, és (estrictament) còncava i el conjunt d'oportunitats, S, és convex, aleshores si x^* és un màxim local del problema general, també és un màxim global (estricte).

Teorema local-global (cas de minimitzar)

Si la funció objectiu, $f(x)$, és (estrictament) convexa i el conjunt d'oportunitats, S, és convex, aleshores si x^* és un mínim local del problema general, també és un mínim global (estricte).

Les hipòtesis de concavitat o convexitat de la funció objectiu i la de convexitat del conjunt d'oportunitats que s'inclouen en el teorema local-global es verifiquen aplicant les propietats que es veuen en l'epígraf següent.

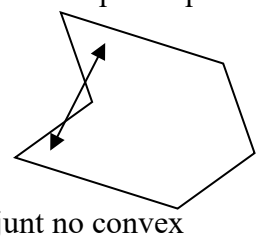
5.1.4. Convexitat de conjunts i concavitat i convexitat de funcions

Definició

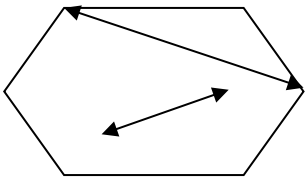
Un conjunt, $S \subseteq \mathbb{R}^n$, és **convex** si:

$$\forall x^1, x^2 \in S\,, \qquad \forall \lambda \in [0,1] \quad \rightarrow \quad (1-\lambda)x^1 + \lambda x^2 \in S$$

De manera més intuïtiva es pot dir que un conjunt és convex si el segment lineal format quan unim dos punts qualssevol del conjunt S es troba també en el conjunt S.



Conjunt no convex



Conjunt convex

Definició

Una funció, $f(x)$, és **convexa** sobre un conjunt convex S del seu domini si:

$$\forall x^1, x^2 \in S\,, \qquad \forall \lambda \in [0,1] \quad \rightarrow \quad f[(1-\lambda)x^1 + \lambda x^2] \leq (1-\lambda)f(x^1) + \lambda f(x^2)$$

Una funció, $f(x)$, és **còncava** sobre un conjunt convex S del seu domini si:

$$\forall x^1, x^2 \in S\,, \qquad \forall \lambda \in [0,1] \quad \rightarrow \quad f[(1-\lambda)x^1 + \lambda x^2] \geq (1-\lambda)f(x^1) + \lambda f(x^2)$$

Una funció, $f(x)$, és **estrictament convexa** sobre un conjunt convex S del seu domini si:

$$\forall x^1, x^2 \in S\,, x^1 \neq x^2, \forall \lambda \in]0,1[\quad \rightarrow \quad f[(1-\lambda)x^1 + \lambda x^2] < (1-\lambda)f(x^1) + \lambda f(x^2)$$

Una funció, $f(x)$, és **estrictament còncava** sobre un conjunt convex S del seu domini si:

$$\forall x^1, x^2 \in S\,, x^1 \neq x^2, \forall \lambda \in]0,1[\quad \rightarrow \quad f[(1-\lambda)x^1 + \lambda x^2] > (1-\lambda)f(x^1) + \lambda f(x^2)$$

Per a verificar si un conjunt d'oportunitats és convex o no, o si una funció objectiu és còncava o convexa, per tal d'avaluar el compliment del teorema local-global, les definicions anteriors no solen ser operatives. En canvi, és habitualment més pràctic fer ús d'una sèrie de propietats i caracteritzacions.

En primer lloc, l'estudi de la concavitat i/o convexitat de funcions objectiu d'un problema de programació matemàtica depèn de la seua forma funcional. En les funcions lineals és immediat, mentre que en les funcions no lineals s'utilitza una caracterització mitjançant la hessiana (per al cas de funcions de classe C^2, que seran les que ací utilitzem). Els enunciats que hem d'aplicar són aquests:

Propietat per a funcions lineals

Tota funció lineal és còncava i convexa al mateix temps, però no ho és estrictament.

Caracterització per a funcions no lineals de classe C^2

Si la hessiana de la funció és semidefinida positiva (SDP), la funció és convexa.

Si la hessiana de la funció és semidefinida negativa (SDN), la funció és còncava.

Si la hessiana de la funció és definida positiva (DP), la funció és estrictament convexa.

Si la hessiana de la funció és definida negativa (DN), la funció és estrictament còncava.

Evidentment, cal saber com es fa l'estudi del signe de la matriu hessiana. Amb aquesta finalitat, distingirem tres casos per ordre creixent de dificultat d'anàlisi:

1. Si la hessiana és una matriu diagonal (tot zeros excepte en la diagonal principal):

   - Si els elements de la diagonal principal són majors o iguals que zero, $d_i \geq 0, \forall i$, la hessiana és SDP.
   - Si els elements de la diagonal principal són menors o iguals que zero, $d_i \leq 0, \forall i$, la hessiana és SDN.
   - Si els elements de la diagonal principal són majors estrictament que zero, $d_i > 0, \forall i$, la hessiana és DP.
   - Si els elements de la diagonal principal són menors estrictament que zero, $d_i < 0, \forall i$, la hessiana és DN.

- En qualsevol altre cas, la hessiana és indefinida i la funció no és ni còncava ni convexa.

Exemple 1. La funció $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z^2$ té com a hessiana $H = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, que és una matriu diagonal i com que els elements de la diagonal principal són $d_1 = 2 > 0, d_2 = 2 > 0, d_3 = 4 > 0$, la matriu és DP i la funció és estrictament convexa. ■

2. Si la hessiana té un determinant diferent de zero, $|H| \neq 0$:

- Si tots els menors principals conduents són majors estrictament que zero, $H_1, H_{12}, H_{123}, \ldots > 0$, la hessiana és definida positiva.
- Si tots els menors principals conduents tenen un signe estricte que s'alterna començant per negatiu, $H_1 < 0, H_{12} > 0, H_{123} < 0, \ldots$, la hessiana és definida negativa.
- En altres casos, la hessiana és indefinida i la funció no és ni còncava ni convexa.

Exemple 2. La funció $f(x,y,z) = -x^2 - 2y^2 - 4z^2 + 2xy$ té com a hessiana $H = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$, que té un determinant $|H| = -32 \neq 0$ i els seus menors conduents són: $H_1 = -2 < 0, H_{12} = 4 > 0$ *i* $H_{123} = -32 < 0$, motiu pel qual és definida negativa i la funció és estrictament còncava. ■

3. Si la hessiana té un determinant igual a zero, $|H| = 0$:

- Si tots els menors principals de tots els ordres són majors o iguals que zero, $H^1, H^2, H^3, \ldots \geq 0$, la hessiana és semidefinida positiva.
- Si tots els menors principals dins de cada ordre tenen un signe no estricte que s'alterna començant per negatiu, $H^1 \leq 0, H^2 \geq 0, H^3 \leq 0, \ldots$, la hessiana és semidefinida negativa.
- En altres casos, la hessiana és indefinida i la funció no és ni còncava ni convexa.

Exemple 3. La funció $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2xy + 2z^2$ té la hessiana $H = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, amb $|H| = 0$. Els menors principals són:

Ordre 1: $H_1 = 2 \geq 0, H_2 = 2 \geq 0,\ H_3 = 4 \geq 0 \rightarrow\ H^1 \geq 0,$

Ordre 2: $H_{12} = 0\ \geq 0, H_{13} = 8\ \geq 0, H_{23} = 8\ \geq 0 \rightarrow\ H^2 \geq 0$

Ordre 3: $H_{123} = 0 \rightarrow\ H^3 \geq 0$

En conseqüència, és SDP i la funció és convexa. ■

En segon lloc, l'estudi de la convexitat d'un conjunt d'oportunitats d'un problema de programació matemàtica requereix l'anàlisi de cada restricció i condició de domini que defineix aquest conjunt. Això es fa aplicant les propietats de conjunts convexos que apareixen a continuació, en què la forma funcional del primer membre de la restricció i l'operador de comparació ($\leq$, $\geq$ o $=$) tenen un paper clau.

Propietat en el cas d'hiperplans (restriccions lineals d'igualtat)

Una restricció d'igualtat amb una funció lineal en el primer membre és un hiperplà, $S = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n / c_1x_1 + \cdots + c_nx_n = \alpha\}$, i és sempre un conjunt convex.

Propietat en el cas de semiespais (restriccions lineals de desigualtat)

Una restricció de desigualtat amb una funció lineal en el primer membre és un semiespai, $S = \left\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n / c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \begin{Bmatrix} \leq \\ \geq \end{Bmatrix} \alpha\right\}$, i és sempre un conjunt convex.

Propietat en el cas de conjunts de nivell inferiors (restriccions no lineals de $\leq$)

Una restricció de desigualtat menor o igual és un conjunt de nivell inferior, $S = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n / g(x_1 \dots x_n) \leq \alpha\}$, i si la funció del primer membre és convexa, és un conjunt convex.

Propietat en el cas de conjunts de nivell superiors (restriccions no lineals de $\geq$)

Una restricció de desigualtat major o igual és un conjunt de nivell superior, $S = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n / g(x_1 \dots x_n) \geq \alpha\}$, i si la funció del primer membre és còncava, és un conjunt convex.

Propietat de la intersecció

La intersecció de conjunts convexos és un altre conjunt convex.

Resumint aquestes propietats, es pot dir que les restriccions lineals sempre determinen un conjunt convex, independentment del sentit de la restricció. En el cas no lineal s'ha de complir una relació entre la forma de la funció del primer membre i el sentit de la desigualtat, convexa amb $\leq$ o còncava amb $\geq$, per a poder afirmar que la restricció determina un conjunt convex. Finalment, només si totes les restriccions determinen un conjunt convex es pot garantir que el conjunt d'oportunitats, que és la intersecció de totes les restriccions, és un conjunt convex.

En els casos en què no es puguen aplicar aquestes propietats (igualtats no lineals o desigualtats no lineals sense la condició apropiada de concavitat o convexitat del primer membre), la restricció determina un conjunt no necessàriament convex i, per tant, el conjunt d'oportunitats, com a intersecció de conjunts algun dels quals pot no ser convex, no es pot garantir que siga un conjunt convex, però tampoc que no ho siga.

Exemple 4. El conjunt $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 2x - 3y = 4\}$ està definit per una igualtat lineal, per tant és un hiperplà i és un conjunt convex.

El conjunt $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 2x - 3y \leq 4\}$ està definit per una desigualtat lineal, per tant és un semiespai i és un conjunt convex.

El conjunt $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 4\}$ està definit per una desigualtat no lineal amb funció convexa en el primer membre (hessiana DP) i sentit $\leq$, per tant és un conjunt de nivell inferior que és convex.

El conjunt $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / -x^2 - y^2 \geq -9\}$ està definit per una desigualtat no lineal amb funció còncava en el primer membre (hessiana DN) i sentit $\geq$, per tant és un conjunt de nivell superior que és convex.

El conjunt $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 4\}$ està definit per una igualtat no lineal, per tant és un conjunt no convex.

El conjunt $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 2x - 3y = 4, x^2 + y^2 \leq 4\}$ és la intersecció de dos conjunts, cadascun dels quals definit per una restricció. Com que cada restricció, defineix un conjunt convex, com hem vist més amunt, i la intersecció de convexos és convex, el conjunt *S* és convex. ■

Exercici 12

1. Estudia si els conjunts següents són fitats i si són convexos.

   a) $S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 2x + 4y \leq 8\}$
   b) $S_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 2x + 4y \leq 8, x \geq 0, y \geq 0\}$
   c) $S_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + 4y^2 \leq 16\}$
   d) $S_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x + 4y - 3z \leq 12, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$
   e) $S_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x + 4y + 3z \leq 12, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$
   f) $S_6 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x + 4y^2 + 3z \leq 16, x \geq 0, z \geq 0\}$
   g) $S_7 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + 4y^2 + 3z = 16, z \geq 0\}$
   h) $S_8 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 4x^2 + y^2 \geq 16, y \geq 0\}$

2. Estudia si els problemes següents compleixen les hipòtesis del teorema de Weierstrass i les hipòtesis del teorema local-global.

   a)
   $$\begin{array}{ll} Max. & 2x + 3y \\ s.a: & 4x + y \geq 15 \\ & x + 3y \leq 60 \\ & x, y \geq 0 \end{array}$$

   b)
   $$\begin{array}{ll} Max. & y \\ s.a: & x^2 + y^2 \geq 9 \\ & x + 4y \leq 12 \\ & x \geq 0 \end{array}$$

   c)
   $$\begin{array}{ll} Max. & x + y \\ s.a: & 2x - y \geq 0 \\ & x + 2y \leq 6 \\ & x \geq 0 \end{array}$$

3. Donat el problema general de programació matemàtica amb 3 variables:

$$\begin{array}{ll} Max. & F(x,y,z) \\ s.a: & (x,y,z) \in S \end{array}$$

a) Si $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / 2x + y^2 \leq 10, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$, estudia si satisfà les condicions adequades del teorema de Weierstrass. Com a conseqüència d'aquest estudi i suposant que $F(x, y, z)$ és contínua, quina conclusió s'extrau sobre l'existència de màxim global?
b) Enuncia el teorema local-global per a aquest problema. Verifica si el conjunt S de l'apartat anterior compleix la condició adequada del teorema local-global.
c) Escriu la definició matemàtica de màxim global no estricte per a aquest problema. Si $F(x,y,z) = 2x + 3y + 4z$ i S és el conjunt de l'apartat $a)$, demostra que el punt $(x,y,z) = (5,0,10)$ no és el màxim global no estricte del problema.

5.2. Optimització sense restriccions amb una o diverses variables de decisió

La derivada primera d'una funció diferenciable **d'una variable** té un paper fonamental en el càlcul dels màxims i mínims locals. La diferenciabilitat és una condició habitual en funcions econòmiques i això implica l'existència de derivades. Una derivada diferent de zero en punts interiors del domini d'una funció que es vol optimitzar implicaria que la funció pot augmentar o disminuir en punts pròxims a ell, per això tenim la següent **condició necessària** d'òptim local.

Condició necessària d'òptim local en funcions d'una variable

Si x^* és un punt interior del domini d'una funció $f(x): D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciable i x^* és màxim o mínim local, aleshores es compleix que $\boldsymbol{f'(x^*) = 0}$.

Els punts que satisfan l'anterior condició necessària s'anomenen punts crítics o punts estacionaris. Però la condició anterior no és suficient perquè pot haver-hi punts crítics que no siguen màxims ni mínims relatius, anomenats **punts d'inflexió**.

L'anterior condició es pot generalitzar al cas de funcions diferenciables de **més d'una variable**. Atès que la diferencial és una aproximació a l'increment de la funció, si en punts interiors la funció tinguera alguna derivada parcial diferent de zero podríem passar a punts pròxims on la funció assolira un millor valor que en el punt de partida i impediria que fora un òptim, per això tenim la següent condició necessària d'òptim local.

Condició necessària d'òptim local en funcions de diverses variables

Si x^* és un punt interior del domini d'una funció $f(x): D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable i x^* és màxim o mínim local, aleshores es compleix que $\boldsymbol{\nabla f(x^*) = 0}$.

Els punts que satisfan la condició necessària s'anomenen també punts crítics o punts estacionaris i són els candidats a màxim o mínim local. La condició no és suficient i pot haver-hi punts crítics que no siguen òptims, que s'anomenen **punts de sella**.

En el cas de diverses variables, la condició necessària implicarà la resolució d'un sistema de *n* equacions, on cada equació és una derivada parcial igualada a zero.

La **condició suficient** aplicada als punts crítics ens permet deduir si el punt crític és màxim local, mínim local o punt d'inflexió o de sella. En el cas d'una variable, aquesta condició es pot enunciar de dues maneres alternatives.

Condició suficient d'òptim local en funcions d'una variable

Si x^* és un punt interior del domini d'una funció $f(x): D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciable i x^* compleix la condició de punt crític, $f'(x^*) = 0$, aleshores:

Si la primera derivada canvia de signe positiu a negatiu en passar d'un punt a l'esquerra de x^* a un punt a la dreta, x^* és màxim local. Alternativament, si $f''(x^*) < 0$ també es pot afirmar que x^* és màxim local.

Si la primera derivada canvia de signe negatiu a positiu en passar d'un punt a l'esquerra de x^* a un punt a la dreta, x^* és mínim local. Alternativament, si $f''(x^*) > 0$ també es pot afirmar que x^* és mínim local.

Si la primera derivada té el mateix signe a l'esquerra i a la dreta de x^*, x^* és un punt d'inflexió. Amb el criteri de la segona derivada no podem caracteritzar aquest cas.

En funcions de diverses variables no podem parlar de la primera o de la segona derivada perquè hi ha tantes derivades de primer ordre com variables (vector gradient) i tantes derivades de segon ordre com variables elevades al quadrat (matriu hessiana). La condició suficient de segon ordre per a determinar si un punt crític és màxim local, mínim local o punt de sella és donada per la matriu hessiana.

Condició suficient d'òptim local en funcions de diverses variables

Si x^* és un punt interior del domini d'una funció $f(x): D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable i x^* compleix la condició de punt crític, $\nabla f(x^*) = 0$, aleshores:

Si $Hf(x^*)$ és definida negativa, es pot afirmar que x^* és màxim local.

Si $Hf(x^*)$ és definida positiva, es pot afirmar que x^* és mínim local.

Si $Hf(x^*)$ és indefinida, es pot afirmar que x^* és un punt de sella.

La determinació del signe de la matriu hessiana es fa amb algun dels tres mètodes que s'han explicat en la caracterització de funcions còncaves i convexes (apartat 5.1.4.). L'única diferència és que per a determinar si és màxim o mínim local, la matriu hessiana cal avaluar-la en el punt crític x^*, mentre que per a saber si una funció és còncava o convexa, la condició per a la matriu hessiana ha de complir-se en qualsevol punt del domini.

El pas de màxim o mínim local a màxim o mínim global es fa aplicant el teorema local-global de l'apartat 5.1.3. Aquest teorema exigeix que el conjunt d'oportunitats siga convex, però aquesta condició sempre es compleix en problemes sense restriccions. Per tant, només la segona condició del teorema local-global és important: que la funció siga còncava (per a màxim global) o convexa (per a mínim global). Però aquesta condició també es basa en la matriu hessiana avaluada en qualsevol punt del domini.

En conclusió, si una matriu hessiana és, per exemple, definida negativa en qualsevol punt del domini (i, per tant, còncava), també ho serà en tots els seus punts crítics i aleshores seran mínims globals. Podem enunciar la condició següent:

Condició suficient d'òptim global en funcions de diverses variables

Si x^* és un punt interior del domini d'una funció $f(x): D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable i x^* compleix la condició de punt crític, $\nabla f(x^*) = 0$, aleshores:

Si $f(x)$ és còncava, es pot afirmar que x^* és màxim global.

Si $f(x)$ és convexa, es pot afirmar que x^* és mínim global.

Exercici 13

1. Calcula i classifica els punts crítics d'aquestes funcions.

   a) $f(x) = (250 - 2x)(x + 10)$
   b) $f(x, y) = 2x^2 + y^2 + xy - 6y$
   c) $f(x, y) = 8x^3 - 4x^2 + 2xy + y^2 + 1$
   d) $f(x, y) = x^2 e^{3x-y}$
   e) $f(x, y) = 100x + 150y - 20 \ln x - 10 \ln y$
   f) $f(x, y, z) = x^2 + 6y^2 + xy + 3z^2 + 4zx + 2yz$
   g) $f(x, y, z) = x^3 + y^2 + 12xy + z^2 + 2z$

2. Una Economia té una funció d'impost sobre la renda proporcional:

   $$T = t\,Y$$

   Sap que si el tipus impositiu és *t*=0,25 (25%) la renda assolirà un valor de *Y*=500 i estima que per cada punt percentual addicional que augmente (disminuïsca) el tipus impositiu, la renda baixarà (augmentarà) en 10 unitats. Calcula el tipus impositiu i la renda que maximitzen la recaptació impositiva i el valor d'aquesta.

3. Una empresa té dues plantes on produeix un únic producte. A la planta més eficient, el cost total de producció és C_1 i a la menys eficient és C_2:

   $$C_1 = 1500 + 44q_1 + {q_1}^2$$
   $$C_2 = 1800 + 52q_2 + 2{q_2}^2$$

   La funció de demanda depèn de la producció conjunta en ambdues plantes $q_1 + q_2$ i és:

   $$p = 340 - 3(q_1 + q_2)$$

Calcula la producció en cada planta per a maximitzar els beneficis i el valor dels beneficis màxims.

4. La funció de cost total d'una empresa que té capacitat per a influir sobre els preus de mercat de dos béns és:

$$C(q_1, q_2) = 3q_1 + 8q_2 + 10$$

Les funcions de demanda són:

$$q_1 = 125 - 4p_1 - 2p_2$$
$$q_2 = 110 - p_1 - 2p_2$$

   a) Planteja la funció de beneficis en funció dels preus substituint les funcions de demanda.
   b) Resol el problema de maximitzar la funció de beneficis calculant els preus òptims i els beneficis màxims. Calcula també les produccions òptimes dels dos béns.

5. Una empresa que no té poder per a influir sobre els preus produeix dos béns amb preus de venda $(p_1, p_2) = (60, 72)$. La funció de cost total és:

$$C(q_1, q_2) = 3{q_1}^2 + 5{q_2}^2 + 6q_1q_2 + 100$$

   a) Planteja la funció de beneficis.
   b) Calcula els nivells de producció que proporcionen el màxim benefici i el valor d'aquest benefici màxim.

5.3. Optimització amb restriccions d'igualtat: mètode dels multiplicadors de Lagrange

El problema general d'optimització amb restriccions d'igualtat és:

$$\begin{aligned} Opt. \quad & f(x_1, \dots, x_n) \\ s.a: \quad & h_1(x_1, \dots, x_n) = b_1 \\ & \vdots \\ & h_m(x_1, \dots, x_n) = b_m \end{aligned}$$

Amb $m<n$ i totes les funcions diferenciables.

Aquest problema, encara que les restriccions d'igualtat poden semblar molt fortes, és prou utilitzat en economia, perquè el comportament racional d'empreses i individus garanteix el compliment amb igualtat de les restriccions: un individu racional gastarà tota la seua renda disponible si vol maximitzar la utilitat del consum, una empresa no produirà en excés si vol minimitzar el cost de producció, etc.

Un mètode prou natural per a resoldre el problema és utilitzar les restriccions per a aïllar m variables i substituir-les en la funció objectiu, de manera que passa a ser un problema amb n-m variables i sense restriccions que es pot resoldre com en l'apartat 5.2.

No obstant això, no sempre podem aïllar les variables, motiu pel qual necessitem un mètode més general, que s'anomena el mètode dels multiplicadors de Lagrange.

5.3.1. Mètode dels multiplicadors de Lagrange

Aquest mètode es basa a definir la funció lagrangiana del problema d'optimització, que depèn de les variables principals del problema $(x_1, \dots, x_n)$, i d'unes noves variables anomenades multiplicadors de Lagrange $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$, una per cada restricció. La funció lagrangiana és:

$$L(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f(x_1, \dots, x_n) + \lambda_1(b_1 - h_1) + \cdots + \lambda_m(b_m - h_m)$$

Condició necessària d'òptim local en problemes amb restriccions d'igualtat

Si x^* és un òptim local del problema d'optimització amb restriccions d'igualtat i el rang de la matriu jacobiana de les restriccions en x^* és igual al nombre de restriccions (m), aleshores existeixen m multiplicadors $\boldsymbol{\lambda}^*$ tals que es compleix que $\boldsymbol{\nabla L(x^*, \lambda^*) = 0}$

És a dir, l'òptim local ha de satisfer necessàriament ser punt estacionari de la funció lagrangiana, i això vol dir igualar totes les derivades parcials a zero. Separant les derivades respecte a les variables principals i respecte als multiplicadors, tenim que el segon bloc equival al compliment de les restriccions, és a dir, el punt crític ha de ser factible:

$$\nabla_x L(x^*, \lambda^*) = 0 \quad \leftrightarrow \quad \left.\begin{array}{c} \dfrac{\partial f(x^*)}{\partial x_1} - \lambda_1^* \dfrac{\partial h_1(x^*)}{\partial x_1} - \cdots - \lambda_m^* \dfrac{\partial h_m(x^*)}{\partial x_1} = 0 \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f(x^*)}{\partial x_n} - \lambda_1^* \dfrac{\partial h_1(x^*)}{\partial x_n} - \cdots - \lambda_m^* \dfrac{\partial h_m(x^*)}{\partial x_n} = 0 \end{array}\right\}$$

$$\nabla_\lambda L(x^*, \lambda^*) = 0 \quad \leftrightarrow \quad \left.\begin{array}{c} h_1(x^*) = b_1 \\ \vdots \\ h_m(x^*) = b_m \end{array}\right\}$$

La condició del rang de la matriu jacobiana de les restriccions s'anomena també qualificació de restriccions o condició de regularitat, i és necessària perquè siguen vàlides les condicions de Lagrange. En cas de no complir-se la condició del rang, l'òptim local del problema no hauria de complir necessàriament la condició de ser punt crític de la lagrangiana.

Exemple 1. El problema

$$\begin{array}{ll} Opt. & 5x^2 + y^2 + 2z^2 \\ s.a: & x + 3y = 24 \\ & 2x + y + z = 12 \end{array}$$

té com a funció lagrangiana:

$$L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = 5x^2 + y^2 + 2z^2 + \lambda_1(24 - x - 3y) + \lambda_2(12 - 2x - y - z)$$

i com a condicions de Lagrange:

$$\left.\begin{array}{c} \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \leftrightarrow 10x - \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \leftrightarrow 2y - 3\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z} = 0 \leftrightarrow 4z - \lambda_2 = 0 \\ x + 3y = 24 \\ 2x + y + z = 12 \end{array}\right\}$$

La solució del sistema de 5 equacions amb 5 incògnites ens proporciona l'únic punt crític, que és $(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = \left(\frac{3}{2}, \frac{15}{2}, \frac{3}{2}, 3, 6\right)$. ■

En les aplicacions econòmiques més habituals amb dues variables i una restricció, és possible una interpretació gràfica de les condicions de Lagrange, ja que el primer bloc de les condicions de Lagrange en forma vectorial és:

$$\nabla_x L(x^*, \lambda^*) = 0 \quad \leftrightarrow \quad \nabla f(x*) = \lambda \nabla h(x^*)$$

I això significa que el gradient de la funció objectiu i el gradient de la restricció són proporcionals, cosa que geomètricament implica que la solució òptima es troba en el punt de tangència de la corba de nivell de la funció que defineix la restricció i la corba de nivell òptim de la funció objectiu, com es veu en el següent exemple.

Exemple 2. En el problema següent de maximitzar la utilitat del consumidor amb dos béns:

$$\begin{array}{ll} Max. & 5x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} \\ s.a: & 2x + 8y = 240 \end{array}$$

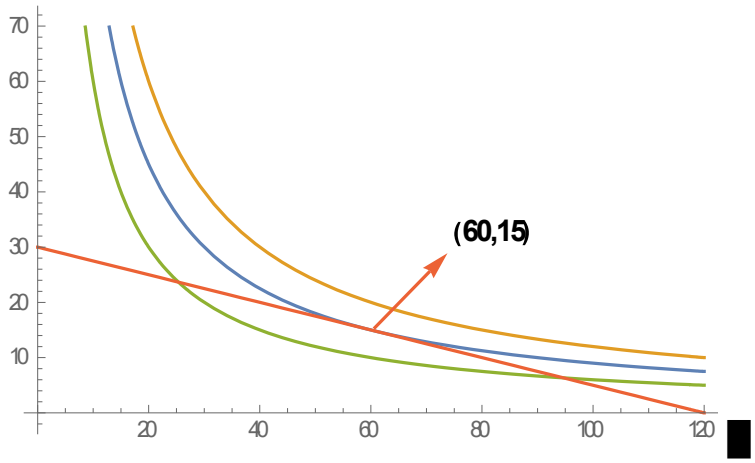
La funció lagrangiana és:

$$L(x, y, \lambda) = 5x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} + \lambda(240 - 2x - 8y)$$

I les condicions de Lagrange són:

$$\left.\begin{array}{c} \frac{5}{2}x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} - 2\lambda = 0 \\ \frac{5}{2}x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}} - 8\lambda = 0 \\ 2x + 8y = 240 \end{array}\right\}$$

La solució del sistema és $(x, y, \lambda) = (60, 15, 5/8)$. Gràficament s'obté en el punt de tangència de la recta pressupostària i la corba d'indiferència de nivell màxim (igual a 150):



La condició necessària d'òptim local no és suficient en general i, per tant, els punts crítics de la lagrangiana poden ser màxims locals, mínims locals o punts de sella. Si un problema té darrere una interpretació econòmica que es basa en el comportament racional d'empreses i individus, cal esperar que el punt crític siga finalment màxim o mínim local i també global, segons s'estiga maximitzant o minimitzant.

Matemàticament, la condició suficient d'òptim local és difícil de verificar, per això passarem directament a la condició suficient d'òptim global, que és més fàcil de comprovar, encara que deixa fora el cas de restriccions no lineals.

Condició suficient d'òptim global en problemes amb restriccions d'igualtat

En el problema d'optimització amb restriccions d'igualtat:

Si $f(x)$ és còncava i les restriccions són lineals, es pot afirmar que tots els punts crítics o estacionaris de la lagrangiana són màxims globals.

Si $f(x)$ és convexa i les restriccions són lineals, es pot afirmar que tots els punts crítics o estacionaris de la lagrangiana són mínims globals.

L'estudi de la concavitat o convexitat de la funció objectiu s'ha analitzat en l'apartat 5.1.4 i és una condició que ha de complir-se en tot punt factible, no únicament en el punt crític o estacionari.

Exemple 3. El punt crític de l'exemple 1 és un mínim global perquè les restriccions són lineals i la funció objectiu és convexa, ja que té una matriu hessiana definida positiva, conclusió que s'obté aplicant el primer mètode vist en l'apartat 5.1.4, vàlid per a matrius diagonals:

$$H = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Com que és una matriu diagonal, n'hi ha prou d'analitzar el signe dels elements de la diagonal principal:

$$d_1 = 10 > 0, \qquad d_2 = 2 > 0, \qquad d_3 = 4 > 0$$

Atès que tots són positius, la matriu és definida positiva i la funció convexa. ■

5.3.2. Interpretació econòmica dels multiplicadors de Lagrange

La interpretació econòmica dels multiplicadors de Lagrange és molt interessant. Matemàticament s'interpreten com la taxa de canvi marginal del valor òptim de la funció objectiu davant de canvis en el terme independent de la restricció associada, és a dir:

$$\frac{\partial f(x^*)}{\partial b_j} = \lambda_j \ , \quad j = 1, \dots, m$$

D'aquesta manera, en cada problema econòmic es pot fer una interpretació econòmica més concreta. Per exemple, en el problema de maximitzar la utilitat del consumidor (exemple 2), com que la funció objectiu és la utilitat i el terme independent és la renda disponible del consumidor, el multiplicador s'interpreta com la utilitat marginal que proporciona un euro addicional de renda disponible. En l'exemple 2, es pot dir que si el consumidor disposara d'un euro més de renda, la utilitat augmentaria en 5/8 unitats, aproximadament.

En el problema de minimitzar el cost de producció d'un bé amb una restricció de producció mínima, el multiplicador s'interpreta com l'augment marginal de cost associat a un increment marginal de la producció mínima. És a dir, ens informa de quin és el cost addicional aproximat d'augmentar la producció mínima en una unitat.

Exercici 14

1. Calcula els punts crítics dels següents problemes d'optimització i classifica'ls com a màxims o mínims locals, si és possible.

   a) $Opt.\ 3x^2 + xy + 4y^2 \qquad s.a:\ 3x + y = 6$
   b) $Opt.\ 2x + y \qquad s.a:\ x + 2y^2 = 3$
   c) $Opt.\ x^2 + y^2 \qquad s.a:\ x^2 + y = 1$
   d) $Opt.\ x^2 - 3xy + y^2 + z^2 \qquad s.a:\ x + y + z = 6$
   e) $Opt.\ x^2 + 2y \qquad s.a:\ x + y = 1$
   f) $Opt.\ 2x^2 + (y-1)^2 + 4z^2 \qquad s.a:\ x + y + 2z = 18,\ x + z = 4$
   g) $Opt.\ 2x^2 + y^2 + 4x - 2y + (z-2)^2 \qquad s.a:\ 4x + 2y + z = 0$

2. Calcula quant de capital i treball ha d'utilitzar aquesta empresa per a minimitzar el cost de producció amb una restricció que assegura l'obtenció d'un determinat nivell de producció i interpreta econòmicament el multiplicador de Lagrange.

$$\begin{array}{ll} Min. & 12K + 3L \\ s.a: & 10K^{1/2}L^{1/2} = 1000 \end{array}$$

3. Un monopolista ven dos productes amb funcions de demanda $p_1 = 20 - 2q_1$ i $p_2 = 32 - 4q_2$. La quantitat venuda conjunta ha de ser de 15 unitats. Amb aquestes condicions, el problema simplificat de maximitzar els ingressos és:

$$\begin{array}{ll} Max. & (20 - 2q_1)q_1 + (32 - 4q_2)q_2 \\ s.a: & q_1 + q_2 = 15 \end{array}$$

Calcula quina ha de ser la quantitat venuda de cada producte per a maximitzar ingressos, i també els preus de cada producte i els ingressos màxims. Interpreta econòmicament el multiplicador de Lagrange.

4. Calcula les quantitats consumides de dos béns (x, y) si el consumidor disposa de 120 unitats monetàries, els preus són 2 i 4 unitats monetàries, respectivament; i la funció d'utilitat és $U(x, y) = x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{2}}$:

$$\begin{aligned} Max. \quad & x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{2}} \\ s.a: \quad & 2x + 4y = 120 \end{aligned}$$

5. Resol el problema de maximitzar la utilitat del consumidor si la funció d'utilitat és $U(x, y) = 5\ln(x) + \ln(y)$, els preus dels productes i la renda disponible són $p_x = 4, p_y = 2$ i $M = 120$ i es vol gastar tota la renda. Interpreta econòmicament el multiplicador de Lagrange.

6. Resol el problema de minimitzar el cost de l'empresa si la funció de producció del bé és $F(K, L) = 10K^{1/2}L^{1/2}$, els preus dels factors són $p_K = 8, p_L = 20$, i es volen produir exactament 160 unitats del bé. Interpreta econòmicament el multiplicador de Lagrange.

7. Una empresa té un cost fix de 200 €, un cost variable per unitat produïda del primer bé (x) de x+2 € i un cost variable per unitat produïda del segon bé (y) de y+4 €.
   a) Planteja la funció de cost total.
   b) Calcula, si és possible, les quantitats produïdes per a minimitzar el cost total si ha de produir 21 unitats entre els dos productes.
   c) Interpreta econòmicament el multiplicador de Lagrange.

5.4. Optimització amb restriccions de desigualtat: condicions de Kuhn i Tucker

El problema amb restriccions de desigualtat és més general que amb restriccions d'igualtat i es va resoldre històricament més tard. De fet, el problema amb restriccions d'igualtat és un cas particular d'aquest. Ara, a més de les restriccions de desigualtat, també tenim en compte la condició de signe de les variables com si fora una restricció més, una cosa que abans no apareixia en enunciar el problema, tot i que si el problema tenia interpretació econòmica confiàvem que la solució fora coherent econòmicament, en la majoria dels casos amb signe major o igual a zero.

5.4.1. Condicions de Kuhn i Tucker

Les condicions de Kuhn i Tucker són el punt de partida per a arribar a l'òptim global d'un problema d'optimització amb restriccions de desigualtat, anomenat també problema de programació no lineal perquè treballarem sempre amb funcions diferenciables. Els punts que satisfan aquestes condicions, o punts de Kuhn i Tucker, són els candidats a

òptims globals, però per a ser-ho efectivament es requerirà una anàlisi posterior amb algun teorema de suficiència dels que apareixeran posteriorment.

Donat el problema d'optimització matemàtica en **forma canònica** següent:

$$\begin{array}{ll} Max. & f(x_1, \dots, x_n) \\ s.a: & g_1(x_1, \dots, x_n) \leq b_1 \\ & \vdots \\ & g_m(x_1, \dots, x_n) \leq b_m \end{array}$$

Es planteja la funció lagrangiana del problema, que és la funció següent de les variables principals i dels multiplicadors $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ associats a les restriccions:

$$L(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f(x_1, \dots, x_n) + \lambda_1(b_1 - g_1) + \cdots + \lambda_m(b_m - g_m)$$

I, a partir d'aquesta funció, es plantegen les condicions de Kuhn i Tucker que, dividides en quatre blocs, són les que apareixen a continuació.

Condicions de Kuhn i Tucker

I. Condicions de factibilitat:

$$g_1(x_1, \dots, x_n) \leq b_1, \dots\dots\dots, g_m(x_1, \dots, x_n) \leq b_m$$

II. Condicions de punt crític:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0, \dots\dots\dots, \frac{\partial L}{\partial x_n} = 0$$

III. Condicions de signe dels multiplicadors de Kuhn i Tucker:

$$\lambda_1 \geq 0, \dots\dots\dots, \lambda_m \geq 0$$

IV. Condicions de marge complementari:

$$\lambda_1(b_1 - g_1) = 0, \dots\dots\dots, \lambda_m(b_m - g_m) = 0$$

Observacions:

- Un problema està en forma canònica si és de maximitzar amb restriccions menor o igual o és de minimitzar amb restriccions de major o igual. Les anteriors condicions de Kuhn i Tucker s'han d'adaptar si l'enunciat del problema no està en forma canònica tenint en compte les observacions següents:
  - El primer bloc o les condicions de factibilitat està format per les restriccions, independentment de com estiguen expressades (forma canònica o no).
  - El tercer bloc o condicions de signe dels multiplicadors és $\lambda \geq 0$ si la restricció està en forma canònica, però canvia a $\lambda \leq 0$ si la restricció està en forma contrària a la canònica, mentre que no té condició de signe (λ és lliure) si la restricció és d'igualtat.
  - El quart bloc o les condicions de marge complementari només es posen en el cas de desigualtats, però no calen en el cas d'igualtats.

- Les anteriors condicions de Kuhn i Tucker equivalen a les de Lagrange en el cas de problemes amb restriccions d'igualtat i equivalen a les condicions necessàries d'òptim local en el cas de problemes sense restriccions
- Les condicions de no-negativitat de les variables principals, si n'hi ha, s'han de considerar restriccions amb els multiplicadors corresponents.
- El bloc II s'anomena de punt crític o punt estacionari, però afecta únicament les derivades respecte a les variables principals.
- El bloc IV implica que la restricció se satisfà amb igualtat o bé el multiplicador de Kuhn i Tucker val zero.

Com podem veure, les condicions de Kuhn i Tucker són, en el cas general, un sistema d'equacions i d'inequacions. La manera d'extraure els punts que les satisfan totes, anomenats *punts de Kuhn i Tucker*, és mitjançant la resolució del sistema d'equacions i la comprovació posterior de les inequacions. En aquest procés, el tractament de les condicions de marge complementari és clau: cada condició significa que s'anul·la el multiplicador o bé que s'anul·len els parèntesis (se satura la restricció). Això dona lloc a un parell de possibilitats per a cada condició de marge complementari que cal investigar, però amb l'avantatge que, dins de cada possibilitat, el sistema que cal resoldre és més fàcil.

La resolució de les condicions de Kuhn i Tucker, en el cas general si hi ha diverses desigualtats, és una tasca molt laboriosa. En la pràctica, per raons d'operativitat, limitarem la resolució de les condicions de Kuhn i Tucker a algun d'aquests casos:

- Es dona un possible punt de Kuhn i Tucker i tan sols cal verificar si ho és o no. Si coneixem el valor de les variables principals, per a comprovar si és o no punt de Kuhn i Tucker i calcular els multiplicadors associats, és convenient seguir l'ordre de blocs següent: I – IV – II – III.
- Ens diuen que el punt de Kuhn i Tucker satura o no satura una determinada restricció de desigualtat. Si la satura, la podem utilitzar amb igualtat i si no la satura, el multiplicador de Kuhn i Tucker associat a aquesta restricció és zero (condició de marge complementari). Això és freqüent en aplicacions econòmiques, en què la forma de les funcions i el comportament racional dels consumidors i les empreses es poden utilitzar per a deduir si se satura o no alguna restricció o condició de domini.
- Problemes amb una única restricció de desigualtat. Haurem de desdoblar la corresponent condició de marge complementari en dues equacions més simples i resoldre la resta de condicions de Kuhn i Tucker afegint cada una d'aquestes per separat.

Exemple 1. En el problema d'optimització següent:

$$\begin{array}{ll} Max. & 4x + y \\ s.a: & x + 2y \geq 8 \\ & 3x + 2y = 18 \\ & x \geq 0, \quad y \geq 0 \end{array}$$

La funció lagrangiana és:

$$L(x,y,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4) = 4x + y +$$
$$+\lambda_1(8-x-2y) + \lambda_2(18-3x-2y) + \lambda_3(-x) + \lambda_4(-y)$$

I les condicions de Kuhn i Tucker són:

I. Factibilitat: $x + 2y \geq 8, 3x + 2y = 18,\ x \geq 0,\ y \geq 0$

II. Punt crític:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 4 - \lambda_1 - 3\lambda_2 - \lambda_3 = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial y} = 1 - 2\lambda_1 - 2\lambda_2 - \lambda_4 = 0$$

III. Signe dels multiplicadors: $\lambda_1 \leq 0,\ \lambda_2\ lliure,\ \lambda_3 \leq 0, \lambda_4 \leq 0$

IV. Marge complementari:

$$\lambda_1(8-x-2y) = 0, \qquad \lambda_3(-x) = 0, \qquad \lambda_4(-y) = 0$$

Ací tenim 12 condicions de Kuhn i Tucker, 6 igualtats i 6 desigualtats. Per a poder resoldre-les més fàcilment necessitem informació addicional i aplicar una metodologia concreta. En primer lloc, si per motius econòmics ens diuen que no és racional que les variables principals siguen zero, les dues últimes condicions de marge complementari impliquen que els multiplicadors són zero:

$$\lambda_3 \underbrace{(-x)}_{\neq 0} = 0 \rightarrow \lambda_3 = 0$$
$$\lambda_4 \underbrace{(-y)}_{\neq 0} = 0 \rightarrow \lambda_4 = 0$$

Substituint aquests valors iguals a zero en les condicions de punt crític, les condicions de Kuhn i Tucker queden un poc més fàcils:

I. Factibilitat: $x + 2y \geq 8, 3x + 2y = 18,\ x \geq 0,\ y \geq 0$

II. Punt crític:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 4 - \lambda_1 - 3\lambda_2 ~~- \lambda_3~~ = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial y} = 1 - 2\lambda_1 - 2\lambda_2 ~~- \lambda_4~~ = 0$$

III. Signe dels multiplicadors: $\lambda_1 \leq 0,\ \lambda_2\ lliure,$ ~~$\lambda_3 \leq 0, \lambda_4 \leq 0$~~

IV. Marge complementari:

$$\lambda_1(8-x-2y) = 0, \quad ~~\lambda_3(-x) = 0, \qquad \lambda_4(-y) = 0~~$$

En aquest sistema encara tenim una condició de marge complementari difícil de tractar. La metodologia consisteix en desdoblar-la en dues equacions alternatives (no simultànies) més fàcils:

$$\lambda_1(8-x-2y) = 0 \rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = 0 \\ 8-x-2y = 0 \end{matrix}$$

I plantejar dos sistemes d'equacions, un amb cada una d'aquestes equacions i amb la resta d'equacions:

Cas 1: $\lambda_1 = 0,\ \ 3x + 2y = 18,\ \ 4 - \lambda_1 - 3\lambda_2 = 0,\ \ 1 - 2\lambda_1 - 2\lambda_2 = 0$

Cas 2: $8 - x - 2y = 0,\ \ 3x + 2y = 18,\ \ 4 - \lambda_1 - 3\lambda_2 = 0,\ \ 1 - 2\lambda_1 - 2\lambda_2 = 0$

Cada cas té 4 equacions amb 4 incògnites, a més de les inequacions que són comunes als dos casos. Les solucions són:

- Cas 1: incompatible
- Cas 2: $(x, y, \lambda_1, \lambda_2) = (5, {}^{3}/_{2}, {}^{-5}/_{4}, {}^{7}/_{4})$

Finalment, verifiquem que la solució del cas 2 també satisfà les desigualtats que han quedat pendents: la primera restricció, les condicions de signe i $\lambda_1 \leq 0$. Per tant, l'únic punt de Kuhn i Tucker és:

$(x, y, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = (5, {}^{3}/_{2}, {}^{-5}/_{4}, {}^{7}/_{4}, 0, 0)$ ■

5.4.2. Teorema de suficiència de Kuhn i Tucker o condició suficient d'òptim global

Les condicions que permeten fer el pas definitiu des d'un punt de Kuhn i Tucker fins a un òptim global s'enuncien en forma de teorema de suficiència. Encara que n'hi ha més, nosaltres només en veurem un, el que té condicions més fàcils de verificar, que es basen en condicions apropiades de concavitat i/o convexitat ja conegudes.

Teorema de suficiència: cas de maximitzar

Si la funció objectiu és còncava i el conjunt d'oportunitats és convex, aleshores si x^* és un punt de Kuhn i Tucker, és també un màxim global.

Teorema de suficiència: cas de minimitzar

Si la funció objectiu és convexa i el conjunt d'oportunitats és convex, aleshores si x^* és un punt de Kuhn i Tucker, és també un mínim global.

Les hipòtesis d'aquest teorema són les mateixes que les del teorema local-global de l'apartat 5.1.3, però aquell s'aplicava a òptims locals i aquest a punts de Kuhn i Tucker. Igual que aquell teorema, si el problema és de programació lineal, es podrà aplicar aquest teorema de suficiència sempre que disposem d'un punt de Kuhn i Tucker. En casos no lineals, pot passar que no es complisca alguna de les hipòtesis del teorema. Si és així, no es podrà concloure res, ni que siga òptim global ni que no ho siga, ja que existeixen altres teoremes de suficiència que no hem estudiat.

Exemple 2. En el problema de l'exemple 1:

$$\begin{array}{rc} Max. & 4x + y \\ s.a: & x + 2y \geq 8 \\ & 3x + 2y = 18 \\ & x \geq 0, \quad y \geq 0 \end{array}$$

Com que tant la funció objectiu com les restriccions són lineals, es verifica el teorema de suficiència i, per tant, el punt $(x, y) = (5, {}^{3}/_{2},)$ és el màxim global, amb multiplicadors $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = ({}^{-5}/_{4}, {}^{7}/_{4}, 0, 0)$. ■

Exemple 3. Suposem que $(x, y, z) = (0, 3, 0)$ és un punt de Kuhn i Tucker del problema:

$$\begin{array}{ll} Min. & x - 4y \\ s.a: & 2x^2 + y^2 + z^2 \leq 9 \\ & -4x + 6z = 0 \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Passem a comprovar el teorema de suficiència:

- Funció objectiu convexa (estem minimitzant): ho és perquè és lineal.
- Conjunt d'oportunitats convex:
  - La primera restricció és un conjunt de nivell inferior. Cal comprovar que el primer membre és una funció convexa. La seua hessiana és $H = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, que és DP i, per tant, convexa. Aleshores, és un conjunt convex.
  - La segona i tercera restricció són lineals (hiperplà i semiespai, respectivament): són un conjunt convex.
  - La intersecció de tres conjunts convexos és un altre conjunt convex.

Aleshores, com que es compleix el teorema de suficiència, el punt $(x, y, z) = (0, 3, 0)$ és mínim global. ■

5.4.3. Interpretació econòmica dels multiplicadors de Kuhn i Tucker

La interpretació econòmica dels multiplicadors de Kuhn i Tucker és la mateixa que la dels multiplicadors de Lagrange: s'interpreten com la taxa de canvi marginal del valor òptim de la funció objectiu davant de canvis en el terme independent de la restricció associada, és a dir:

$$\frac{\partial f(x^*)}{\partial b_j} = \lambda_j \ , \quad j = 1, \dots, m$$

Tenint en compte les condicions de marge complementari (bloc IV de les condicions de Kuhn i Tucker), en cas que la restricció se satisfaça amb desigualtat estricta, el multiplicador valdrà zero i, per tant, el valor òptim de la funció objectiu no canviaria en cas d'augmentar el terme independent de la restricció, cosa que és totalment lògica, ja que no té sentit augmentar el terme independent (la disponibilitat d'un recurs productiu, per exemple) si la restricció no s'està saturant (si no s'està utilitzant tot el recurs disponible).

D'altra banda, si la restricció s'està saturant, el multiplicador pot prendre un valor diferent de zero, que serà positiu o negatiu en funció de les condicions de signe dels multiplicadors (bloc III de les condicions de Kuhn i Tucker). Aquest signe serà el coherent des d'un punt de vista econòmic. Exemples:

- En el problema de maximitzar la utilitat del consumidor amb limitació de renda (maximitzar amb restricció $\leq$), el multiplicador de Kuhn i Tucker és major o igual que zero. Un consumidor racional gastarà tota la renda (restricció saturada) i, per tant, el multiplicador serà estrictament positiu, és a dir, si disposarem d'un euro més de renda la utilitat augmentarà en la quantia que indique el valor del multiplicador.
- En el problema de minimitzar el cost de producció d'un bé amb una restricció de producció mínima (minimitzar amb restricció $\geq$), el multiplicador és major o igual que zero i s'interpreta com l'augment marginal de cost associat a un increment marginal de la producció mínima. És a dir, ens informa de quin és el cost addicional aproximat d'augmentar la producció mínima en una unitat.

Exercici 15

1. Escriu les condicions de Kuhn i Tucker d'aquests problemes.

a)
$$\begin{array}{ll} Max. & x-y \\ s.a: & x+2y \leq 10 \\ & x^2-8x+y \geq -12 \\ & y \geq 0 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{ll} Min. & 2(x-2)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2 \\ s.a: & 2x-5y \leq 0 \\ & x \geq 0 \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{ll} Min. & 6x+4y+z \\ s.a: & x+y+z^{1/2} \geq 92 \\ & x+2y \leq 100 \end{array}$$

d)
$$\begin{array}{ll} Max. & x^{1/2}+y^{1/2} \\ s.a: & 2x+y \leq 12 \\ & x \geq 1 \\ & y \geq 1 \end{array}$$

e)
$$\begin{array}{ll} Max. & -x+8y \\ s.a: & 3x+y \leq 12 \\ & x+y^2-6y \geq -5 \\ & x \geq 0 \end{array}$$

f)
$$\begin{array}{ll} Min. & -x+y \\ s.a: & x+2y \leq 16 \\ & y+(x-4)^2 \geq 9 \\ & y \geq 0 \end{array}$$

2. Estudia el teorema de suficiència de Kuhn i Tucker en els enunciats de l'exercici 15.1. Si disposàrem d'un punt de Kuhn i Tucker de cada problema, raona si seria òptim global.

3. Resol, si és possible, els següents problemes d'optimització amb restriccions de desigualtat amb el mètode de les condicions de Kuhn i Tucker.

a) $Min.\ x^2 + y^2 \quad s.a:\ x + y \geq -1$
b) $Max.\ x^{1/2} + y^{1/2} \quad s.a:\ x^2 + y^2 \leq 1$
c) $Min.\ x + 2y + 4z \quad s.a:\ xy^2z^2 = 120\ ,\ x \geq 0$

4. Donat el problema de programació no lineal següent:

$$\begin{aligned} Min. \quad & 2x^2 - 2xy + y^2 \\ s.a: \quad & 2x + y \geq 4 \\ & x - 5y \leq 5 \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

a) Analitza el teorema de Weierstrass en el problema i trau la conseqüència que es deriva d'aquest estudi.
b) Escriu les condicions de Kuhn i Tucker.
c) Estudia si el punt $(x, y) = (\frac{6}{5}, \frac{8}{5})$ compleix les condicions de Kuhn i Tucker.
d) Estudia si aquest punt és el mínim global.

5. Donat el problema de PNL:

$$\begin{aligned} Min. \quad & 2x + y \\ s.a: \quad & xy \leq 4 \\ & x - y \geq -2 \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

a) Escriu les condicions de punt de Kuhn i Tucker.
b) Demostra que el punt (-2, 0) és un punt de Kuhn i Tucker.
c) Estudia si (-2, 0) és mínim global.

6. Considera el problema:

$$\begin{aligned} Min. \quad & x^2 + 3y \\ s.a: \quad & -x + y \geq 0 \\ & x^2 + y^2 \leq 2 \\ & x \leq 0 \end{aligned}$$

a) Escriu les condicions de punt de Kuhn i Tucker.
b) Calcula el punt de Kuhn i Tucker sabent que satura (verifica amb igualtat) les dues primeres restriccions i no la tercera.
c) Utilitza la condició suficient de Kuhn i Tucker per comprovar que el punt anterior és un mínim global.

7. Donat aquest problema del consumidor:

$$\begin{aligned} Max. \quad & U(x, y) = x^{1/2} + y^{1/2} \\ s.a: \quad & 2x + y \leq 12 \\ & x \geq 0\ , y \geq 0 \end{aligned}$$

a) Escriu les condicions de punt de Kuhn i Tucker.
b) Escriu de nou les condicions de punt de Kuhn i Tucker si a causa del comportament racional del consumidor se sap que la restricció

pressupostària (la primera) se satura i hi ha diversificació en el consum (no se saturen les condicions de no negativitat).

c) Comprova si (2, 8) és punt de Kuhn i Tucker.

d) Estudia si (2, 8) és el màxim global del problema del consumidor.

8. Donat aquest problema de minimitzar els costos d'una empresa:

$$\begin{array}{ll} Min. & C(x,y,z) = 6x + 4y + z \\ s.a: & x + y + z^{1/2} = 92 \\ & x + 2y \leq 100 \\ & x \geq 0,\ \ y \geq 0,\ \ z \geq 0 \end{array}$$

a) Escriu les condicions de punt de Kuhn i Tucker.

b) Calcula l'únic punt de Kuhn i Tucker del problema sabent que z=16 i que les condicions de no negativitat no se saturen.

c) Estudia si aquest punt és el mínim global del problema.

d) Si la producció mínima que s'exigeix en la primera restricció passa de 92 a 90, calcula aproximadament la variació que es produiria en els costos òptims.

9. Considera el problema següent:

$$\begin{array}{ll} Max. & B = 300x + 200y - x^2 \\ s.a: & 2x + y \leq 20 \\ & x + 2y \leq 5 \\ & x\,, y \geq 0 \end{array}$$

on B és la funció de beneficis d'una empresa i les variables (x, y) representen les quantitats produïdes de dos articles A i B.

a) Estudia si la solució $(x, y) = (5{,}0)$ és punt de Kuhn i Tucker.

b) Enuncia la condició suficient de Kuhn i Tucker per a problemes de maximització i utilitza-la per a demostrar que el punt anterior és un màxim global del problema.

10. Donat el problema bàsic del consumidor:

$$\begin{array}{ll} Max. & U(x,y) \\ s.a: & p_1x + p_2y \leq M \\ & x, y \geq 0 \end{array}$$

a) Escriu les condicions de punt de Kuhn i Tucker.

b) Demostra que, si el consumidor és racional, és a dir, prefereix més a menys (utilitats marginals estrictament positives), la solució de les condicions de punt de Kuhn i Tucker suposarà que els consums òptims esgoten totalment la renda.

c) Resol el problema si $U(x,y) = 10\ln(x) + 5\ln(y)$, M=180 i preus p_1=5 i p_2=3.

11. La utilitat de Marta és donada per la funció $U(x,y) = 5x^{0,7}y^{0,3}$, on x és el nombre de dies que passa de viatge cada any i y el nombre de dies que ix a sopar fora de

casa. Cada dia que passa de viatge li costa 150 € i cada dia que ix a sopar 30 €. L'objectiu és maximitzar la utilitat sense excedir el pressupost màxim de 3.000 € anuals per aquestes dues activitats (pots suposar que les variables òptimes són major estrictament que zero).

12. Una empresa d'informàtica utilitza hores d'ordinador (K) i hores de treball qualificat (L) en la producció d'aplicacions informàtiques (valorades en €). La funció de producció té una forma Cobb-Douglas: $F = 80K^{0,25}L^{0,75}$. El cost de cada hora d'ordinador és de 16 euros i el cost de cada hora de treball qualificat és de 60€. Calcula l'ús que ha de fer de cada factor productiu si es vol minimitzar el cost de l'empresa i s'exigeix una producció mínima d'aplicacions informàtiques valorades en 2.000 euros (pots suposar que les variables òptimes són major estrictament que zero).

13. Una empresa d'espectacles ven entrades a tres preus distints per a un musical i vol decidir quantes entrades de cada tipus ha de posar a la venda per a maximitzar l'ingrés. La capacitat total del teatre és de 225 localitats. Estima que la demanda de les entrades cares és $x = 320 - 2p_x$, la demanda de les entrades mitjanes és $y = 150 - p_y$ i la demanda de les entrades barates és $z = 100 - p_z$. Tots els preus estan en €:

    a) Calcula el preu i el nombre de cada tipus d'entrada per a maximitzar ingressos (pots triar treballar amb preus o quantitats).
    b) Interpreta el multiplicador de Kuhn i Tucker.

14. Un inversor vol minimitzar la funció de risc (funció objectiu) però obtenint uns guanys mínims de 600 € (la restricció està en cèntims de €). El plantejament del problema, amb x i y els euros invertits en dos actius, és:

$$\begin{array}{ll} Min. & 25x^2 + 5y^2 + 10xy \\ s.a: & 12x + 6y \geq 60000 \\ & x \geq 0, \quad y \geq 0 \end{array}$$

    a) Calcula les quantitats que ha d'invertir en cada actiu (pots suposar que la solució és interior al primer quadrant, $x > 0, y > 0$).
    b) Verifica que es tracta del mínim global.
    c) Interpreta econòmicament el multiplicador de Kuhn i Tucker de la primera restricció.

15. En el problema lineal següent es vol maximitzar beneficis amb la producció de tres productes (x, y, z), una primera restricció de limitació d'hores de treball i una segona restricció de demanda conjunta màxima:

$$\begin{array}{ll} Max. & 4x + 5y + 7z \\ s.a: & 2x + 3y + 4z \leq 150 \\ & x + y + z \leq 55 \\ & x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0 \end{array}$$

a) Planteja les condicions de Kuhn i Tucker.
b) Comprova si $(x, y, z) = (35, 0, 20)$ és un punt de Kuhn i Tucker.
c) Interpreta econòmicament els multiplicadors. Què seria més convenient, disposar de 5 hores addicionals de treball o de 2 unitats més de demanda màxima?
d) Raona que efectivament es tracta d'un màxim global.

ANNEX 4. Modelització de problemes no lineals, lineals i lineals enters

Modelització

En aplicacions econòmiques, les variables representen magnituds econòmiques diverses com preus, quantitats (produïdes, consumides, invertides, etc.) o instruments de política econòmica (tipus d'interès, tipus impositiu, dèficit públic, etc.), entre altres possibilitats. En cas que tinguem un enunciat econòmic darrere, cal saber identificar correctament quines són les variables de decisió (aquelles que volem calcular) i plantejar la funció objectiu i les restriccions, tot això utilitzant els coneixements i la lògica econòmica.

Els passos per a plantejar matemàticament el problema a partir de l'enunciat econòmic són:

Identificar les variables principals o de decisió

Les variables principals del problema són aquelles sobre les quals el subjecte decisor pot influir de manera directa: quantes unitats produir de cada producte, quantes unitats s'han de consumir de cada bé, quants diners s'han d'invertir en cada actiu, prendre o no prendre una decisió determinada (construir una autovia, comprar una casa...), etc.

Cal distingir les variables principals d'altres variables de tipus endogen, que són les que s'obtenen com a conseqüència de les primeres: nivell d'utilitat d'un consumidor, renda que es gasta en consumir, nivell de risc d'una inversió, quantitat de cada recurs utilitzat en la producció, etc. El subjecte no pot prendre una decisió directa sobre aquestes variables.

Les variables de decisió s'han d'identificar al començament de la modelització assignant un nom de variable amb lletres i, si és el cas, subíndexs numèrics. Per exemple, $x, y, z, x_1, x_2, x_{13}$...; però també es poden utilitzar noms associats al significat econòmic de la variable. A continuació, cal afegir què representa cada variable en el context econòmic del problema i en quines unitats de mesura estarà expressada. Per exemple, en un problema d'inversió una identificació correcta i una altra d'incorrecta d'una variable és:

x_1: quantitat invertida en l'actiu de renda fixa (en milers d'euros) → correcta

x_1: renda fixa → incorrecta

Identificar i plantejar la funció objectiu

La magnitud que el problema indique que s'ha de maximitzar o minimitzar és la funció objectiu. És una expressió matemàtica que combina nombres, variables de decisió i operadors matemàtics. Aquesta magnitud cal identificar-la, dir si es maximitza o minimitza, indicar-ne les unitats de mesura i, sobretot, plantejar l'expressió matemàtica o forma funcional. De vegades es construirà a partir d'altres funcions intermèdies. Per exemple, benefici és ingrés menys cost, ingrés total és preu de venda per quantitat venuda, cost total és cost fix més variable, cost variable és el cost unitari per la quantitat produïda, etc.

Identificar i plantejar les restriccions

Tot allò que implique una limitació per al valor de les variables principals s'ha d'expressar en forma de restricció o de condició de domini. Si la limitació afecta més d'una variable de decisió, tindrà forma de restricció i si afecta una única variable, serà normalment una condició de domini (de no negativitat o fites).

Les restriccions poden estar originades per multitud de situacions: limitacions de recursos, limitacions pressupostàries, motius tecnològics, condicions de demanda, etc.

Les restriccions estan formades per dos membres i per un operador de comparació ($\geq$, $\leq$ ó $=$) que els relaciona. Habitualment, el primer membre d'una restricció és una funció matemàtica que depèn de les variables de decisió, mentre que el segon membre és un nombre. Per exemple, la restricció pressupostària del problema del consumidor indica que el pressupost gastat en el consum dels béns (primer membre: depèn de les variables principals, ja que és igual als preus de cada bé per les quantitats consumides) ha de ser menor o igual (operador de comparació) que el pressupost disponible (segon membre: és un valor numèric conegut).

Els dos membres d'una restricció han d'estar expressats en la mateixa unitat de mesura. Per tant, cal fer les transformacions adequades si les dades del problema no estan referides a unitats homogènies.

Condicions de domini

Ací s'especificaran, si n'hi ha, les condicions de no negativitat, les variables fitades i les variables que, per la interpretació econòmica que tenen, siguen enteres o binàries. Exemples de les condicions de domini principals són:

$$\begin{array}{ccc} x \geq 0 & \rightarrow & \text{variable no negativa} \\ 5 \leq x \leq 20 & \rightarrow & \text{variable fitada} \\ x \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{N} & \rightarrow & \text{variable entera} \\ x \in \{0,1\} & \rightarrow & \text{variable binària} \end{array}$$

Encara que moltes vegades les variables del problema hagen de ser enteres pel significat econòmic que tenen, com que la resolució d'un problema amb variables enteres és més complexa i no l'hem estudiada, no ho tindrem en compte. D'altra banda, les variables binàries són un tipus especial de variables que solament poden prendre valor 0

o 1 i que van lligades a decisions: executar o no executar un projecte, assignar un treballador a un lloc de treball o no assignar-l'hi, etc.

Si bé es poden plantejar infinits tipus de problemes d'optimització, en economia és habitual que un problema tinga una estructura semblant a la d'algun dels problemes considerats com a bàsics. Per tant, convé estudiar les aplicacions econòmiques més habituals, ja que molts problemes responen al mateix esquema o són variants d'algun d'aquests models més típics.

Principals aplicacions econòmiques

Problema de maximitzar la utilitat del consumidor

Aquest problema és el que origina tota la teoria de la demanda. Es tracta de determinar la combinació de consums de cada bé que fa màxima la utilitat del consumidor (funció *U*) tenint en compte la limitació pressupostària imposada per la renda disponible del consumidor (*M*). En el cas més bàsic de dos únics béns, el problema és el que segueix:

$$\begin{aligned} Max. \quad & U(x,y) \\ s.a: \quad & p_x x + p_y y \leq M \\ & x \geq 0, \qquad y \geq 0 \end{aligned}$$

La funció d'utilitat pot ser diversa, però per a ser compatible amb el supòsit habitual de comportament racional del consumidor ha de tenir derivades parcials estrictament positives (es prefereix més consum a menys) i ser còncava (es prefereix una mescla de béns que especialitzar-se en el consum d'un d'aquests). Amb aquests supòsits, el problema compleix el teorema de suficiència de Kuhn i Tucker, i el punt de Kuhn i Tucker és també el màxim global.

El problema pot tenir variants en cas d'exigències de consums mínims de subsistència, consums màxims de saturació, proporcions fixes en el consum dels béns, etc.

Problema de minimitzar els costos de l'empresa

Aquest problema és el que origina tota la teoria de l'oferta. Es tracta de determinar en quines quantitats s'han d'utilitzar els factors productius per a minimitzar els costos de l'empresa tenint en compte l'obtenció d'un nivell mínim de producció (*Q*). En el cas més bàsic de dos únics factors productius, capital (*K*) i treball (*L*), i si anomenem *F* la funció de producció, el problema és:

$$\begin{aligned} Min. \quad & p_K K + p_L L \\ s.a: \quad & F(K,L) \geq Q \\ & K \geq 0, \qquad L \geq 0 \end{aligned}$$

La funció de producció *F* ha de complir certes condicions de coherència econòmica, com ara tenir derivades de primer ordre positives (més factor productiu implica més producció) i de segon ordre negatives (quantitats addicionals de factor productiu fan augmentar cada vegada menys la producció). Les funcions còncaves compleixen aquesta segona condició, motiu pel qual les funcions de producció habituals són còncaves. Això

provoca que el problema de l'empresa satisfaça el teorema de suficiència i, en conseqüència, el punt de Kuhn i Tucker serà també mínim global.

Les principals variants d'aquest problema apareixen en cas que hi haja limitacions en els factors productius.

Problema no lineal de producció amb recursos limitats

Encara que aquest problema és el més típic de la programació lineal, a vegades la funció de beneficis que s'ha de maximitzar és no lineal. L'enunciat és:

$$\begin{array}{ll} Max. & B(x_1, \dots, x_m) = I - C \\ & a_{11}x_1 + \ \dots \ + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ s.a: & \vdots \\ & a_{m1}x_1 + \ \dots \ + a_{mn}x_n \leq b_m \\ & x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0 \end{array}$$

La no-linealitat pot ocórrer per dos motius principalment: en primer lloc, si en la funció d'ingressos els preus dels productes són funció decreixent de les quantitats venudes (per exemple, una empresa de vins haurà d'abaixar el preu per botella si la producció és molt elevada) i, en segon lloc, si en la funció de cost els costos unitaris són creixents amb les unitats produïdes (per exemple, augmentar la quantitat de marbre extret d'una pedrera implicarà treballs cada vegada més dificultosos i de cost més elevat). En els dos casos, la funció de beneficis que s'obté és no lineal i còncava, i així es compleix el teorema de suficiència (perquè les restriccions que indiquen les limitacions de recursos són lineals) i el punt de Kuhn i Tucker serà també màxim global.

Les restriccions del problema indiquen la limitació de cada recurs productiu. Els coeficients a_{ij} s'anomenen també coeficients tècnics perquè ens indiquen en última instància el nivell tecnològic de l'empresa. Cada coeficient informa de la quantitat de recurs *i* necessari per a produir una unitat de producte *j*. Així, com menor siga aquest coeficient més eficient (utilitza menys recursos) és l'empresa.

Les variants del problema apareixen segons que maximitzem beneficis (si tenim informació de costos) o ingressos (si no hi ha informació de costos). També poden aparèixer restriccions addicionals de capacitat productiva o de demanda. Finalment, podrien aparèixer condicions de domini en forma de nivells màxims o mínims de producció per a algun producte.

Exercici 16

1. Un consumidor pot triar entre dos béns que tenen un preu de 5 i de 9 euros, respectivament. Disposa d'una renda de 450 euros que no pot excedir per a gastar entre els dos béns. La funció d'utilitat és $U(x, y) = 20x^{0,4}y^{0,6}$, on *x* són les unitats consumides del primer bé i *y* les del segon. S'han de calcular les quantitats consumides a fi de maximitzar la utilitat, assumint que són estrictament positives. Interpreta econòmicament el multiplicador de Kuhn i Tucker.

2. Una empresa en competència es planteja minimitzar els costos de producció. Els costos unitaris dels dos factors que utilitza (capital -*K*- i treball -*L*-) són de 20 i 45 unitats monetàries, respectivament. La producció mínima que ha de cobrir l'empresa és de 3000 unitats. L'empresa té la següent funció de producció $F(K,L) = 10K^{0,5}L^{0,5}$. S'ha de calcular la quantitat de factors productius que ha de contractar l'empresa per a minimitzar els costos, assumint que són estrictament positives. Interpreta econòmicament el multiplicador de Kuhn i Tucker.

3. La funció de costos d'una empresa que dissenya *x* i manté *y* pàgines web és donada per:

$$C(x,y) = 4x^2 + 3y^2 - 6xy + 32x + 12y$$

L'ingrés de l'empresa per cada pàgina web dissenyada és de 68 euros i per cada pàgina web mantinguda és de 32 euros. L'empresa disposa d'un màxim de 100 hores setmanals de treball i consumeix 6 hores setmanals per pàgina web dissenyada i 2 hores setmanals pel manteniment d'una pàgina web.

   a) Modelitza el problema si l'empresa vol maximitzar beneficis.
   b) Resol el problema sabent que el valor òptim de les variables és positiu.
   c) Raona si l'empresa estaria interessada a contractar més hores de treball.

4. Suposem que una empresa ven el seu producte a un preu de 2 euros per unitat i adquireix els seus inputs a uns preus de 4 cèntims per cada euro de capital que pren prestat i a 5 euros l'hora de treball. La quantitat venuda de producte no ha de sobrepassar la producció, que és donada per la funció: $F(K,L) = K^{0,5}L^{0,4}$. En aquest cas, l'objectiu és maximitzar el benefici i ha de calcular la quantitat de capital i treball que ha d'utilitzar i la quantitat de producte que ha de produir:

   a) Modelitza el problema.
   b) Resol el problema assumint que les variables són estrictament positives.
   c) Calcula el benefici màxim.
   d) Interpreta econòmicament el multiplicador de Kuhn i Tucker.

5. Una empresa produeix tres tipus de productes en quantitats (x,y,z). El benefici unitari de cada producte és:

   Benefici unitari del producte 1: 24 – *x*.

   Benefici unitari del producte 2: 20 – *y*.

   Benefici unitari del producte 3: 20 – *z*.

   Sabem que per a produir una unitat del producte 1 són necessàries quatre hores de treball; que per a produir una unitat del producte 2 fan falta dues hores de treball, i que per a produir una unitat del producte 3 s'inverteixen dues hores de treball. A més, l'empresa disposa de 16 treballadors que treballen 8 hores cadascun. L'objectiu és maximitzar el benefici.

6. Una empresa de venda de material d'oficina ha de subministrar tres tipus de fulls de paper a la Universitat de València: fulls d'examen (amb encapçalament), fulls de paper reciclat i fulls de paper normal. El preu de venda de cada paquet de 500 fulls és decreixent amb la quantitat venuda:

   - Fulls d'examen: el preu per paquet és $2{,}8-0{,}001x$ € (x: nombre de paquets venuts per setmana)
   - Fulls de paper reciclat: el preu per paquet és $2{,}05-0{,}0005y$ € (y: nombre de paquets venuts per setmana).
   - Fulls de paper normal: el preu per paquet és $2{,}35-0{,}0008z$ € (z: nombre de paquets venuts per setmana).

   D'altra banda, el cost és de 2,1 € per paquet de fulls d'examen, 1,95 € per paquet de fulls reciclats i 2,05 € per paquet de fulls normals. A més, l'empresa suporta un cost fix setmanal de 250 €.

   L'empresa té una restricció de mà d'obra de producció perquè disposa de 200 hores de plantilla setmanals i la producció de cada paquet de paper d'examen suposa 5 minuts de plantilla i la de cada paquet de paper reciclat o normal li suposa 3 minuts de plantilla.

   El contracte amb la Universitat exigeix que la relació entre paper reciclat i normal siga almenys de 2 a 1 a favor del paper reciclat. Finalment, ha de subministrar com a mínim 300 paquets de fulls d'examen cada setmana.

   Modelitza (sense resoldre) el problema per tal de decidir quants paquets ha de subministrar de cada tipus setmanalment per a maximitzar els beneficis.

7. Una empresa produeix 4 tipus de productes de neteja (per files en la taula següent), utilitzant tres recursos (per columnes en la taula següent). Les dades de quant de recurs (grams) s'utilitza per cada litre de producte, la disponibilitat de cada recurs i el preu de venta de cada producte són:

	Recursos (grams per litre)			**Preu venda**
Productes	**Àcid cítric**	**Àcid fòrmic**	**Polietilenglicol**	**(€ per litre)**
Anticalç	50	30	22	5
Antigreix	60	40	10	3
Fregaterres	30	20	5	2
Universal	10	15	25	4
Disponibilitat (quilos)	25	11	12	

   A més, la demanda indica que el producte universal es ven tant o més que la suma dels altres tres; i que la demanda mínima de cada producte per part dels clients és de 50 litres.

   Modelitza (sense resoldre) el problema amb l'objectiu de maximitzar ingressos.

8. Una inversora disposa de mig milió d'euros per a invertir. Ha seleccionat set actius per distribuir entre ells la inversió, amb les característiques que podem veure en la taula següent. El seu objectiu és maximitzar el rendiment en la situació més

probable, però limitant les pèrdues al 5% del capital disponible en la situació menys probable. A més, per a prevenir situacions encara més inesperades exigeix no invertir més del doble en renda variable que en renda fixa i mantenir una proporció d'almenys 4 a 3 a favor de la inversió en euros respecte a la inversió en altres divises.

Actiu	Tipus rendiment	Divisa	Rendibilitat més probable	Rendibilitat menys probable
Bons del tresor dels EUA	Fix	Dòlar	3%	1%
Accions Microsoft	Variable	Dòlar	12%	-5%
Bons Alemanya	Fix	Euro	2%	2%
Accions France Telecom	Variable	Euro	15%	-10%
Bons del tresor espanyol	Fix	Euro	5%	1%
Accions Telefònica	Variable	Euro	20%	-12%
Accions Sony	Variable	Ien	10%	-2%

Modelitza (sense resoldre) el problema que té plantejat aquesta inversora.

9. Un ajuntament de la costa nord de València vol millorar la platja per optar a una bandera blava el pròxim any. Ha pressupostat 6 actuacions amb el cost i la puntuació addicional que obtindrà en l'avaluació:

Actuacions	Cost (€)	Puntuació addicional
Accés minusvàlids	5.000	120
Informació turística	600	40
Camps de vòlei platja	1.400	50
Biblioteca de la mar	1.500	50
Zona wifi gratuïta	2.500	80
Augment de socorristes	4.000	100

Ha d'elegir quines actuacions són les més convenients sense excedir el pressupost de 9.000 €, tenint en compte que el lloc d'informació turística i la biblioteca de la mar compartirien un mateix edifici, és a dir, s'han de triar les dues o cap.

Modelitza (sense resoldre) el problema per a maximitzar la puntuació addicional.

Nota: les variables són decisions de triar Sí o No