

Gestión integral de la Seguridad, la Calidad y la Innovación II

Programación asignatura



Resumen

Asignatura obligatoria de 3,0 ECTS del tercer semestre del Máster en Ingeniería Química que se imparte en **Castellano**.

Esta asignatura forma parte de la materia **Gestión integral de la calidad, de la seguridad y de la innovación (7,0 ECTS)**, que se encuentra dentro del Módulo de Gestión y optimización de la producción y la sostenibilidad.

Consta de **2 bloques temáticos diferenciados** en los cuales se estructura la asignatura:

- **Gestión de la seguridad.** Profesora responsable: María José Picazo
- **Gestión de la innovación.** Profesor responsable: José Badia

Profesor responsable de asignatura

José Badia, ETSE, despacho 4.3.5, jose.badia@uv.es

María José Picazo, ETSE, despacho 4.0.2B, maria.jose.picazo@uv.es

RESULTADOS DE APRENDIZAJE

GESTIÓN DE LA SEGURIDAD

- Conocer los principios legales y técnicas a emplear en el desarrollo de las auditorías reglamentarias de los sistemas de **prevención**.
- Conocer los aspectos básicos de **seguridad** en los procesos industriales e instalaciones complementarias que dan servicio a dichos procesos y sus fuentes de derecho.
- Conocer y saber aplicar la **reglamentación** legal en materia de seguridad industrial y de prevención de riesgos laborales, y en particular, conocer y saber gestionar toda la documentación legal exigible a las empresas y organizaciones.
- Saber aplicar **técnicas de control de la seguridad** en los lugares de trabajo.
- Saber aplicar los **principios de la acción preventiva**. Conocer y saber aplicar técnicas de identificación y análisis de riesgos.
- Conocer los **organismos e instituciones** relacionados con la seguridad industrial, prevención de riesgos laborales, calidad e I+D+i.

GESTIÓN DE LA INNOVACIÓN

- Saber aplicar **herramientas estadísticas** en el diseño de experimentos.

CONTENIDOS ASIGNATURA

GESTIÓN DE LA SEGURIDAD

1. **Principios básicos de la seguridad industrial y laboral.** Normativa básica y aspectos clave reglamentarios. El Plan de Prevención de Riesgos Laborales.
2. **Técnicas de control.** Inspecciones de seguridad. Observaciones planeadas. Gestión de accidentes de trabajo. Documentación. Seguridad en plantas químicas.
3. **Auditorías reglamentarias del Sistema de Prevención.** Bases legales. Técnicas auditoras. El control administrativo. Evaluación y Análisis de riesgos

GESTIÓN DE LA INNOVACIÓN

1. **Pruebas de hipótesis.**
2. **Tratamiento estadístico de experimentos de un factor.**
3. **Diseño factorial de experimentos**

CONTENIDOS SECCIÓN GESTIÓN DE LA INNOVACIÓN

GESTIÓN DE LA INNOVACIÓN

CONTENIDOS

1. Pruebas de hipótesis.
2. Tratamiento estadístico de experimentos de un factor.
3. Diseño factorial de experimentos



UNIDADES

1. Intervalos de confianza.
2. Pruebas de hipótesis.
3. Análisis de la varianza.
4. Diseño factorial de experimentos.

CONTENIDOS SECCIÓN GESTIÓN DE LA INNOVACIÓN

GESTIÓN DE LA SEGURIDAD

CONTENIDOS Y UNIDADES

1. Principios básicos de la seguridad industrial y laboral. Normativa básica y aspectos clave reglamentarios. El Plan de Prevención de Riesgos Laborales.
2. Técnicas de control. Inspecciones de seguridad. Observaciones planeadas. Gestión de accidentes de trabajo. Documentación. Seguridad en plantas químicas.
3. Auditorías reglamentarias del Sistema de Prevención. Bases legales. Técnicas auditoras. El control administrativo. Evaluación y Análisis de riesgos

VOLUMEN DE TRABAJO

SESIONES PRESENCIALES

- 5 T + 17 P + 8 L = 29 h (14 h de G. Seguridad + 15 h de G. Innovación) + Examen.
- Todas se realizarán en el aula, y se combinarán T-P-L, según sea necesario.
- Traer PC portátil, con programas específicos.
- GESTIÓN DE LA INNOVACIÓN: Instalar software libre JAMOVİ.

SESIONES NO PRESENCIALES

- 45 h de trabajo autónomo según se describe en Guía docente, con especial foco en la realización de trabajos (Aproximadamente: 16-18 h por sección + 9-13 h de preparación examen).

VOLUMEN DE TRABAJO

ASISTENCIA [Gestión de la Innovación]

- No es obligatoria, no se penaliza la no asistencia. **SIN EMBARGO:**
- Las Unidades se impartirán como **seminarios monotemáticos**, y cada una llevará su **trabajo** asociado.
- Las Unidades n+1 dependen de los contenidos impartidos en las Unidades n, por lo que la **asistencia** es muy recomendable.
- Se **premia** la asistencia a todas las sesiones con la **oportunidad** de realizar un ejercicio **BOOST/sesión**.

ASISTENCIA [Gestión de la Seguridad]

- No es obligatoria, no se penaliza la no asistencia. **SIN EMBARGO:**
- Las Unidades se impartirán como **seminarios monotemáticos**, y cada una llevará su **trabajo o ejercicios asociados**.
- Se **premia** la asistencia a todas las sesiones con la **oportunidad** de realizar ejercicios entregables por sesión.

EVALUACIÓN

ASIGNATURA

CALIFICACIÓN

- **NOTA= 75% TR + 25 % EX** , siendo TR: trabajos y EX: examen.
- Válido para primera y segunda convocatoria.
- Cada sección [Seguridad e Innovación] pondera un 50% en ambas pruebas (TR y EX).

REQUISITOS MÍNIMOS

- Nota mínima promedio TR: 5.0 [Asignatura]
- Nota mínima promedio EX: 5.0 [Asignatura]
- En caso de no superar alguno de los requisitos, la calificación final será la mínima de las 2.
- Si no se supera la asignatura en primera convocatoria, se conserva la calificación de la prueba (TR o EX) aprobada para la segunda convocatoria.

NORMATIVA ANTI-PLAGIO

La copia o plagio manifiesto de cualquier actividad que forma parte de la evaluación supondrá la imposibilidad de superar la asignatura, sometiéndose seguidamente a los procedimientos disciplinarios oportunos indicados en el PROTOCOLO DE ACTUACIÓN ANTE PRÁCTICAS FRAUDULENTAS EN LA UNIVERSITAT DE VALÈNCIA (ACGUV 123/2020).

EVALUACIÓN

GESTIÓN DE LA INNOVACIÓN

EXAMEN

- Se realizará un examen en fecha oficial de convocatoria, en las condiciones que se indiquen por el profesorado.
- El examen dará respuesta a lo impartido en todos los tipos de sesiones (T, P, L).
- No tiene calificación mínima, pero pondera un 50% en la calificación final del Examen de la asignatura.

TRABAJS

- Se propondrá un entregable por cada unidad impartida, según la siguiente distribución de temáticas y ponderaciones asociadas
 - U1. Intervalos de confianza (30%)
 - U2. Pruebas de hipótesis (20%).
 - U3. Análisis de la varianza (40%).
 - U4. Diseño factorial de experimentos. (10%)

BOOST [Aplica a Gestión de la Innovación]

- Al finalizar cada sesión, se realizará un ejercicio resumen de lo visto en la misma, que se resolverá **individualmente**.
- Si se resuelve **favorablemente** (calificación $\geq 7/10$), se obtendrá un BOOST de 5%, para mejorar calificaciones de EX o TR, de la siguiente manera: Si $\Sigma\text{BOOST}=5-10\%$, se aplica a EX. Si $\Sigma\text{BOOST}=15-20\%$, 10% se aplica a EX y resto a TR. Ejemplo cálculo. EX= 7, TR=8, $\Sigma\text{BOOST}=15\% \rightarrow$ Calificación final: EX= 7.7, TR= 8,45.
- Si, además de resolverlo de forma excelente (calificación =9 o 10), lo realiza entre las 3 primeras personas (de toda la sesión), se optará a una ruleta con calificación extra (2-4-7-9%) a incorporar al ΣBOOST .

EVALUACIÓN

GESTIÓN DE LA SEGURIDAD

EXAMEN

- Se realizará un examen en fecha oficial de convocatoria, en las condiciones que se indiquen por el profesorado.
- El examen dará respuesta a lo impartido en todos los tipos de sesiones (T, P, L).
- No tiene calificación mínima, pero pondera un 50% en la calificación final del Examen de la asignatura.

TRABAJOS

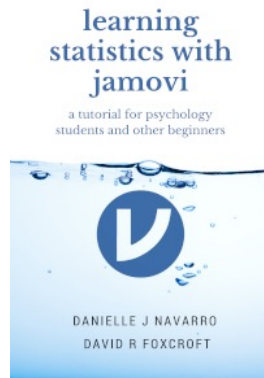
- Se propondrá un trabajo entregable final que consistirá en la elaboración de un informe de una auditoría realizada en una empresa.
- Se realizarán trabajos en cada sesión entregables para premiar la asistencia y durante algunas sesiones se corregirán ejemplos de tipo test para afianzar los contenidos de la parte teórica y normativa.

BIBLIOGRAFIA

GESTIÓN DE LA INNOVACIÓN



Estadística para ingenieros y científicos
5ª edición
William Navidi
McGraw-Hill Interamericana de España
S.L.- 9781456293147



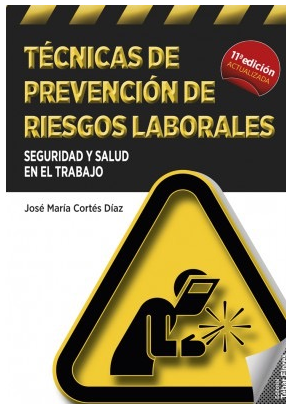
Navarro DJ and Foxcroft DR
(2022). learning statistics with
jamovi: a tutorial for psychology
students and other beginners.
(Version 0.75). DOI:
10.24384/hgc3-7p15



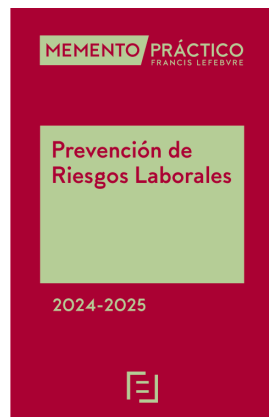
Análisis y Diseño de
Experimentos
Humberto Gutiérrez, Román
de la Vara
McGraw-Hill Interamericana
de España SL
970-10-6526-3

BIBLIOGRAFIA

GESTIÓN DE LA SEGURIDAD



Técnicas de Prevención de Riesgos Laborales. J. M. Cortés Díaz, Tebar, 2003



Prevención de riesgos laborales E. Lefebvre
2024. Agiló Crespí P. y otros

Gestión integral de la Seguridad, la Calidad y la Innovación II

Programación asignatura



GUIA DE CONTENIDOS

1. Objetivos
2. Conceptos de partida
3. Distribución normal y distribución normal tipificada
4. Intervalos confianza medias
5. Intervalos confianza probabilidades
6. Intervalos confianza de varianzas
7. Intervalos de confianza de diferencias de parámetros
8. Resumen y ejercicio entregable

7. Intervalos confianza para diferencia de parámetros

7.1. Diferencia de medias, muestras pareadas

Si los datos están pareados, es decir, dos especímenes de la misma naturaleza sufren el mismo proceso, pero con condiciones "parecidas", y se conocen los datos individualizados, calcular la diferencia, aplicar z o t, según tamaño de n.
Ejemplo: pastillas freno coche (delantero-izq/der, o delantero-izquierdo)

$$\left. \begin{array}{l} X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2) \\ Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2) \end{array} \right\} \text{DIF} = X - Y \sim N(\mu_X - \mu_Y, \sigma_X^2 + \sigma_Y^2)$$

DIFERENCIA DE MEDIAS (muestras n>30)

IC-diferencias de parámetro

$$IC_{DIF} = \overline{DIF} \pm z_{\alpha/2} \cdot \frac{S_D}{\sqrt{n}}$$

DIFERENCIA DE MEDIAS (muestras n<30)

$$IC_{DIF} = \overline{DIF} \pm t_{n-1, \alpha/2} \cdot \frac{S_D}{\sqrt{n}}$$

IC-parámetro (para comparación)

$$IC = \bar{X} \pm z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$IC = \bar{X} \pm t_{n-1, \alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

7. Intervalos confianza para diferencia de parámetros

7.2. Diferencia de medias, muestras independientes

Si las muestras son independientes, pero se conocen los parámetros de cada población:

DIFERENCIA DE MEDIAS (muestras $n > 30$)

$$\left. \begin{array}{l} X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2) \\ Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2) \end{array} \right\} \text{DIF} = X - Y \sim N(\mu_X - \mu_Y, \sigma_X^2 + \sigma_Y^2)$$

IC-diferencias de parámetro

$$IC_{DIF} = \bar{X} - \bar{Y} \pm z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\left(\frac{\sigma_X^2}{n_X} + \frac{\sigma_Y^2}{n_Y}\right)}$$

IC-parámetro (para comparación)

$$IC = \bar{X} \pm z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

DIFERENCIA DE MEDIAS (muestras $n < 30$)

Grados de libertad
(redondeado hacia el
entero hacia abajo)

$$v = \frac{\left(\frac{s_X^2}{n_X} + \frac{s_Y^2}{n_Y}\right)^2}{\frac{\left(\frac{s_X^2}{n_X}\right)^2}{n_X - 1} + \frac{\left(\frac{s_Y^2}{n_Y}\right)^2}{n_Y - 1}}$$

$$IC_{DIF} = \bar{X} - \bar{Y} \pm t_{v, \alpha/2} \cdot \sqrt{\left(\frac{s_X^2}{n_X} + \frac{s_Y^2}{n_Y}\right)}$$

$$IC = \bar{X} \pm t_{n-1, \alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

7. Intervalos confianza para diferencia de parámetros

7.2. Diferencia de proporciones

Se conocen los parámetros de cada población:

DIFERENCIA DE PROPORCIONES

$$\left. \begin{array}{l} X \sim \text{Bin}(n_X, p_X) \\ Y \sim \text{Bin}(n_Y, p_Y) \end{array} \right\} \begin{array}{ll} \tilde{n}_X = n_X + 2 & \tilde{n}_Y = n_Y + 2 \\ \tilde{p}_X = \frac{X + 1}{\tilde{n}_X} & \tilde{p}_Y = \frac{Y + 1}{\tilde{n}_Y} \end{array}$$

IC-diferencias de parámetro

$$IC_{DIF} = \tilde{p}_X - \tilde{p}_Y \pm z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\tilde{p}_X \cdot (1 - \tilde{p}_X)}{n_X} + \frac{\tilde{p}_Y \cdot (1 - \tilde{p}_Y)}{n_Y}}$$

Atención, DIFp [-1,1]

IC-parámetro (para comparación)

$$IC = \tilde{p} \pm z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\tilde{p} \cdot (1 - \tilde{p})}{\tilde{n}}}$$
$$\tilde{n} = n + 4 \quad \tilde{p} = \frac{X + 2}{\tilde{n}}$$

Atención, p [0,1]

EJERCICIOS

1. Muestras pareadas – datos conocidos.
2. Muestras pareadas – datos desconocidos.
3. Muestras diferentes – parámetros conocidos, diferencias para muestras o poblaciones

GUIA DE CONTENIDOS

1. Objetivos
2. Conceptos de partida
3. Distribución normal y distribución normal tipificada
4. Intervalos confianza medias
5. Intervalos confianza probabilidades
6. Intervalos confianza de varianzas
7. Intervalos de confianza de diferencias de parámetros
8. Resumen y ejercicio entregable

8. Resumen y ejercicio entregable

8.1. Resumen

- **Conceptos de partida:** población, muestra, estadísticos de posición y dispersión, grados de libertad, réplica y repetición, software informático.
- **Distribución normal y distribución normal tipificada:** tipificación, simetría y complementariedad, teorema central límite, intervalos confianza, pruebas aleatoriedad y no consideración de datos atípicos. Influencia tamaño muestra en precisión (Anchura del IC)
- **Intervalos confianza medias,** para pruebas grandes $n > 30$ (DNT-Z) y pequeñas $n < 30$ (t Student), IC bilaterales y unilaterales.
- **Intervalos confianza probabilidades.** Distribución binomial $\rightarrow$ TCL $\rightarrow$ DNT, para muestras grandes y pequeñas. IC bilaterales y unilaterales.
- **Intervalos confianza de varianzas.** Distribución chi-cuadrado, para muestras grandes y pequeñas. IC bilaterales.
- **Intervalos de confianza de diferencias de parámetros,** pareados o no, conocidos los datos individuales o sus parámetros.
- **Software informático:** graficación y cálculo inmediato.

8. Resumen y ejercicio entregable

8.2. Entregable

- Entregable individual o por parejas (2 problemas).
- **Objetivos:**
 - Contextualizar el trabajo en una experiencia del estudiante.
 - Trabajar la comprensión de la técnica estadística mediante la abstracción y construcción del problema.
 - Potenciar el manejo de software estadístico para la resolución de problemas.

TRABAJO

- A partir de los datos de una experimentación realizada en TGF-TFM-PEXT realizar la abstracción del problema [enunciado detallado y preciso], y calcula:
 - Los intervalos de confianza para 2 parámetros estadísticos característicos de ese problema (media-desviación típica-probabilidad).
 - Los intervalos de confianza de una diferencia de medias de dos tratamientos independientes.
- Sigue la plantilla disponible en Aula virtual, explicando los pasos y decisiones tomadas de forma detallada, con la notación matemática adecuada.
- Instrucciones específicas en AULA VIRTUAL.

T1. Intervalos de confianza

Distribución normal

Distribución normal tipificada

Intervalos de confianza medias

Intervalos confianza probabilidades

Intervalos confianza desviación típica

T2. Contrastes de hipótesis

Metodología

Contraste H para medias

Contraste H para proporciones

Contraste H para varianzas

Contraste H para diferencias de parámetros

Contraste H para muestras de distribuciones no paramétricas



GUIA DE CONTENIDOS

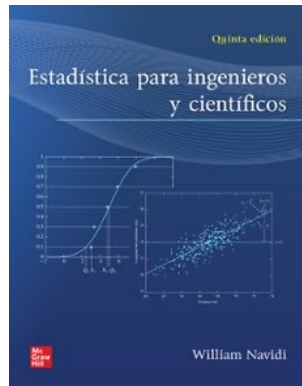
1. Objetivos
2. Contraste de hipótesis
3. Contraste de hipótesis para medias
4. Contraste de hipótesis para probabilidades
5. Contraste de hipótesis para varianzas
6. Contraste hipótesis para diferencia de parámetros
7. Contraste de hipótesis distribuciones no paramétricas
8. Resumen y ejercicio entregable

1. Objetivos

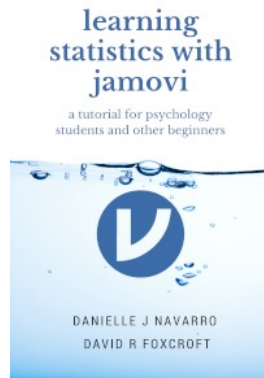
- **RECORDAR** conceptos de partida: distribuciones paramétricas e intervalos de confianza.
- **CONOCER** los conceptos, características y procedimientos de los contrastes de hipótesis.
- **APLICAR** Contrastes de hipótesis para medias, proporciones, varianzas y diferencias de dichos parámetros.
- **EXPERIMENTAR** contrastes de hipótesis con distribuciones libres- no paramétricas.
- **TRABAJAR con Software informático:** graficación y cálculo.

→ Conocido el comportamiento de las distribuciones y el concepto de confianza (y sus intervalos), vamos a realizar pruebas de significancia estadística ante unos supuestos de influencia de parámetros sobre una respuesta (contraste de hipótesis).

Bibliografía de referencia



Estadística para ingenieros y científicos 5ª edición
William Navidi
McGraw-Hill Interamericana de España S.L.- 9781456293147



Navarro DJ and Foxcroft DR (2022). learning statistics with jamovi: a tutorial for psychology students and other beginners. (Version 0.75).
DOI: 10.24384/hgc3-7p15

GUIA DE CONTENIDOS

1. Objetivos
2. Contraste de hipótesis
3. Contraste de hipótesis para medias
4. Contraste de hipótesis para probabilidades
5. Contraste de hipótesis para varianzas
6. Contraste hipótesis para diferencia de parámetros
7. Contraste de hipótesis distribuciones no paramétricas
8. Resumen y ejercicio entregable

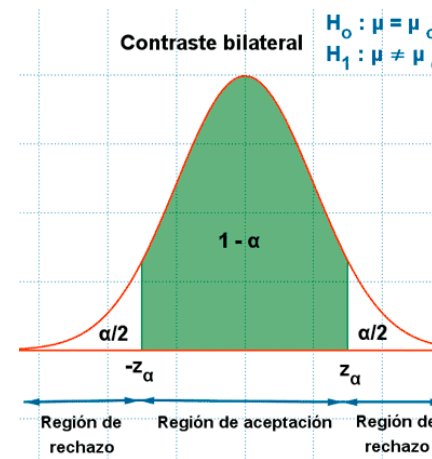
2. Contraste de hipótesis

2.1. Concepto

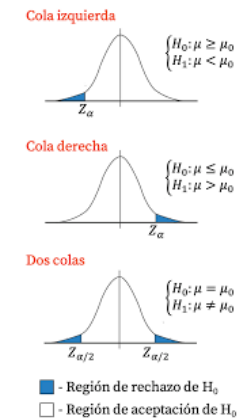
El **contraste de hipótesis**, también conocido como **prueba de hipótesis**, es un proceso estadístico fundamental en la toma de decisiones basado en datos.

Su importancia radica en su capacidad para proporcionar un marco objetivo y cuantitativo para evaluar las afirmaciones o hipótesis sobre fenómenos o sistemas, utilizando datos muestrales.

Ingeniería: En ingeniería, los proyectos y procesos requieren decisiones bien fundamentadas, ya sea en la producción de materiales, la mejora de procesos, el diseño de productos, o la optimización de sistemas. El contraste de hipótesis ayuda a los profesionales de la ingeniería a determinar si ciertos cambios (en materiales, diseños o procesos, i.e. **tratamientos**) son **efectivos** o si las diferencias observadas son meramente **aleatorias**.



Fuente: calculo.cc



Fuente: www.probabilidadyestadistica.net

Experimentación Científica: En la investigación científica, los experimentos están diseñados para poner a prueba teorías o descubrir nuevas relaciones entre variables. El **contraste de hipótesis proporciona una metodología rigurosa para determinar si los resultados experimentales apoyan o rechazan una teoría.**

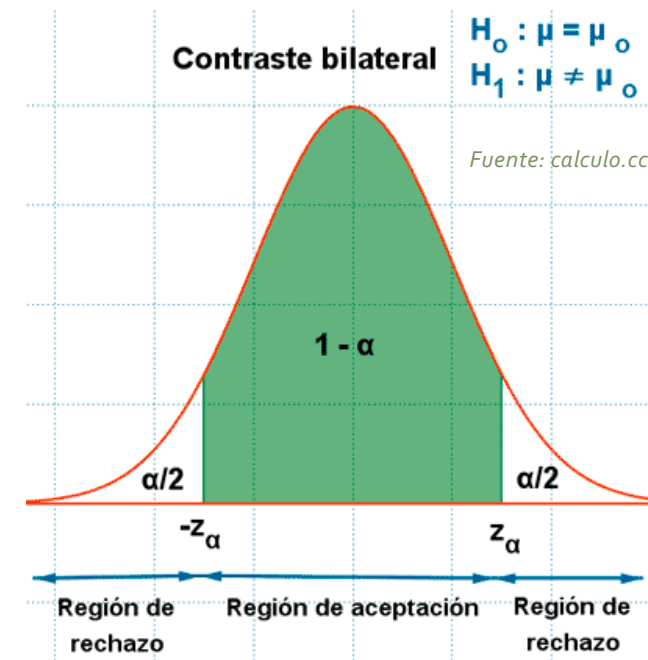
2. Contraste de hipótesis

2.1. Concepto

El **contraste de hipótesis** es un método estadístico cuyo propósito es evaluar una afirmación o suposición sobre un parámetro poblacional (como la media, proporción, varianza, etc.) a partir de datos muestrales. Puede ser bilateral (2 colas) o unilateral (1 cola).

Componentes Clave del Contraste de Hipótesis

- 1. Hipótesis Nula (H_0):** Es la afirmación que se somete a prueba y que se supone cierta hasta que haya suficiente evidencia en contra. Usualmente, la hipótesis nula refleja la idea de que no hay efecto o diferencia significativa.
- 2. Hipótesis Alternativa (H_1):** Es la afirmación que queremos probar y que será aceptada si la evidencia estadística demuestra que H_0 es falsa (en realidad, que no es suficientemente factible). Representa el efecto, cambio o diferencia que se está buscando.
- 3. Estadístico de Prueba:** Es un valor calculado a partir de los datos muestrales que se compara con una distribución teórica (como la normal, t de Student, chi-cuadrado, etc.) para evaluar la hipótesis.
- 4. Regla de Decisión (Nivel de Significación):** Se define un **nivel de significación** (α), que es la probabilidad de rechazar la hipótesis nula cuando es verdadera (error tipo I).
- 5. Región Crítica o Valor P:** La **región crítica** son los valores del estadístico de prueba que llevarían a rechazar H_0 . Alternativamente, se utiliza el **valor P**, que es la probabilidad de obtener un valor del estadístico de prueba tan extremo como el observado si H_0 es verdadera. Si el valor P es menor que α , se rechaza H_0 .



2. Contraste de hipótesis

2.2. Ejemplos de cálculo. Medias ($n > 30$)-Prueba Z

Supongamos que un fabricante de baterías afirma que la duración promedio de sus baterías es de 100 horas [población]. Un investigador desea verificar esta afirmación y toma una muestra aleatoria de 30 baterías. La duración media de las baterías en la muestra es de 98 horas, con una desviación estándar de 5 horas [muestra]. Queremos probar si la duración promedio difiere significativamente de las 100 horas. [contraste]

- **Plantear las Hipótesis:** $H_0 = 100$ h, $H_1 \neq 100$ h
- **Calcular el Estadístico de Prueba:** Como parámetro= media, y tamaño muestra es ≥ 30 , se toma z.
- **Comparar la muestra (alternativa) con la Distribución Teórica (nula):** Cálculo probabilidad.
- **Tomar una Decisión:**
 - **Rechazar H_0 ,** si el estadístico cae en la región crítica o si el valor P es menor que α .
 - **No rechazar H_0 y aceptar H_1** si el estadístico no cae en la región crítica o si el valor P es mayor que α .

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}} = \frac{98 - 100}{5/\sqrt{30}} = -0.07$$

$$p(z) = p(-0.07) = 0.472 = 47.2\%$$

No se puede rechazar H_0 , ya que $p > 0.025$ (bilateral), por lo que no se puede decir que la duración promedio difiera estadísticamente

2. Contraste de hipótesis

2.2. Ejemplos de cálculo. Medias ($n < 30$)-Prueba t

SupEl artículo "Geographically Weighted Regression-Based Methods for Merging Satellite and Gauge Precipitation" (L. Chao, K. Zhang, et al., Journal of Hydrology, 2018:275-289) describe un método para medir la precipitación mediante la combinación de mediciones satelitales con mediciones realizadas en tierra. Se registraron mensualmente errores durante 16 meses, los cuales promediaron 0.393 mm con una desviación estándar de 0.368 mm [muestra]. ¿Se puede concluir que el error medio es inferior [contraste] a 0.6 mm [población]?

- **Plantear las Hipótesis:** $H_0 = 0.6$ mm, $H_1 \neq 0.6$ mm
- **Calcular el Estadístico de Prueba:** Como parámetro= media, y tamaño muestra es ≥ 30 , se toma z.
- **Comparar la muestra (alternativa) con la Distribución Teórica (nula):** Cálculo probabilidad.
- **Tomar una Decisión:**
 - **Rechazar H_0 ,** si el estadístico cae en la región crítica o si el valor P es menor que α .
 - **No rechazar H_0 y aceptar H_1** si el estadístico no cae en la región crítica o si el valor P es mayor que α .

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{s / \sqrt{n}} = \frac{0.393 - 0.6}{0.368 / \sqrt{16}} = -2.25$$

$$p(t) = p(-2.25) = 0.0199 = 1.99\%$$

Se rechaza H_0 , porque $p < 0.5$ (unilateral), se acepta H_1 , de modo que es factible el valor asumido de precipitaciones.

2. Contraste de hipótesis

2.3. El p-valor y la significancia estadística (y práctica)

CRITERIOS ACEPTACION-RECHAZO BASADOS en p-VALOR

- Cuanto menor sea el p-valor, se puede tener más certeza de que H_0 es falsa.
- Cuanto mayor sea el p-valor, más factible se vuelve H_0 , pero nunca se puede tener certeza de que H_0 sea verdadera.

VALORES TÍPICOS DE P-VALOR

- Regla general (convenio, sin base científica): Se puede rechazar H_0 si $p\text{-valor} \leq 0.05$.
- Reglas más estrictas: Se puede rechazar H_0 si $p\text{-valor} \leq 0.01$.
- Atención, usualmente se reporta en investigación ($p\text{-valor} \leq 0.05$), pero no se indica el valor real. Esto no es correcto. Hay que indicar el p-valor para que el lector pueda interpretar en función de su nivel de exigencia.

**Prueba nivel fijo
(Se pre-establece p-valor)**

EXPRESIÓN CIENTÍFICA

- “El resultado es significativamente estadístico a un nivel de $100\alpha\%$ ”. Es decir, si $p\text{-valor} \leq 0.01$, el resultado es significativo a un nivel del 1%. También se puede decir que “se rechaza H_0 a un nivel del 1%”.

SIGNIFICANCIA ESTADÍSTICA NO SIGNIFICA SIGNIFICANCIA PRÁCTICA

- “Estadísticamente significativo” no significa, necesariamente, “importante a nivel práctico” (aquí entran aspectos técnico-comerciales). EJEMPLO: Proceso de fabricación de fibras sintéticas, con promedio de resistencia a la rotura de 50 N. Nuevo proceso, del que se extrae una muestra de 1000 fibras, con promedio de 50.1 N y desviación estándar de 1 N. ¿Se puede concluir que el proceso nuevo ofrece fibras con mayor resistencia? SOL: $p\text{-valor}=0.0008$. Interpretación?

2. Contraste de hipótesis

2.4. Resumen proceso del contraste de hipótesis

Ejercicios

1. Plantear las Hipótesis:

- Hipótesis nula (H_0): la afirmación que se somete a prueba.
- Hipótesis alternativa (H_1): la afirmación opuesta que se desea demostrar [asociado a un tratamiento-condición].

2. Elegir el Nivel de Significación (α):

- Especificar el nivel de riesgo que se está dispuesto a asumir (comúnmente 0.05 o 0.01).

3. Calcular el Estadístico de Prueba:

- A partir de los datos muestrales, se calcula el estadístico de prueba apropiado (como Z, t, F, chi-cuadrado, etc.).

4. Comparar con la Distribución Teórica:

- Se compara el valor del estadístico de prueba con los valores críticos (los asociados a α) correspondientes a la distribución de referencia.

5. Tomar una Decisión:

- **Rechazar H_0** , si el estadístico cae en la región crítica o si el valor P es menor que α .
- **No rechazar H_0 y aceptar H_1** si el estadístico no cae en la región crítica o si el valor P es mayor que α .

2. Contraste de hipótesis

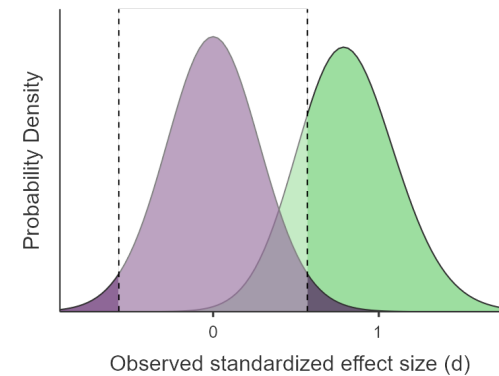
2.6. Potencia de la prueba H

La **potencia (POT)** de una prueba estadística está relacionada con la capacidad de dicha prueba para detectar un efecto real cuando este existe.

Se define como la probabilidad de **rechazar correctamente la hipótesis nula** cuando es falsa.

Error Tipo I (α): Ocurre cuando se rechaza la hipótesis nula siendo esta verdadera. $\alpha = P(\text{Rechazar } H_0 | H_0 \text{ es verdadera})$. Este error está controlado directamente por el nivel de significación (α) que el investigador elige (comúnmente 0.05 o 0.01). **Falso positivo.**

Error Tipo II (β): Es la probabilidad de **no** rechazar la hipótesis nula cuando en realidad es falsa. $\beta = P(\text{No rechazar } H_0 | H_0 \text{ es falsa})$. Es un **falso negativo**.



Es decir, la potencia de una prueba es complementaria al **Error Tipo II (β)**. $POT = P(\text{Rechazar } H_0 | H_0 \text{ es falsa}) = 1 - \beta$

INTERPRETACION

Potencia alta: Significa que la prueba tiene una mayor probabilidad de detectar un efecto si realmente existe. Se prefiere una potencia alta (generalmente superior al 80%).

Potencia baja: Indica que la prueba tiene una mayor probabilidad de no detectar un efecto cuando este en realidad existe (alto Error Tipo II).

2. Contraste de hipótesis

2.6. Potencia de la prueba H

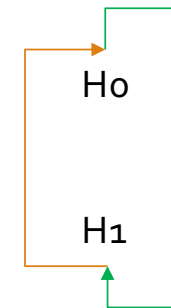
EJEMPLO INTERPRETACIÓN

Imaginemos que una ingeniera quiere probar si una nueva máquina reduce el tiempo promedio de producción. La hipótesis nula es que el tiempo promedio es el mismo que antes, y la alternativa es que el tiempo promedio es menor.

- **Error Tipo I (α):** Si la ingeniera decide rechazar H_0 cuando en realidad no hay una mejora (la máquina no reduce el tiempo), ha cometido un Error Tipo I. Es un falso positivo, ya que cree que la nueva máquina es mejor cuando en realidad no lo es.
- **Error Tipo II (β):** Si la ingeniera no rechaza H_0 cuando en realidad la máquina sí reduce el tiempo de producción, ha cometido un Error Tipo II. Es un falso negativo, ya que no detectó la mejora real proporcionada por la máquina.
- **Potencia de la prueba ($1-\beta$):** Si la potencia de la prueba es alta (por ejemplo, 0.90), la ingeniera tiene un 90% de probabilidad de rechazar correctamente H_0 si la máquina realmente reduce el tiempo de producción. Esto significa que la prueba es efectiva para detectar el efecto positivo de la nueva máquina.

Tipo II (β) – Acepta que la variación es por aleatoriedad de la muestra

Acepta H_0 , cuando H_0 es falsa
Rechaza H_1 , cuando H_1 es verdadera



Tipo I (α) – Acepta cambio por tratamiento experimental - condiciones

Rechaza H_0 , cuando H_0 es verdadera
Acepta H_1 , cuando H_1 es falsa

2. Contraste de hipótesis

2.6. Potencia de la prueba H

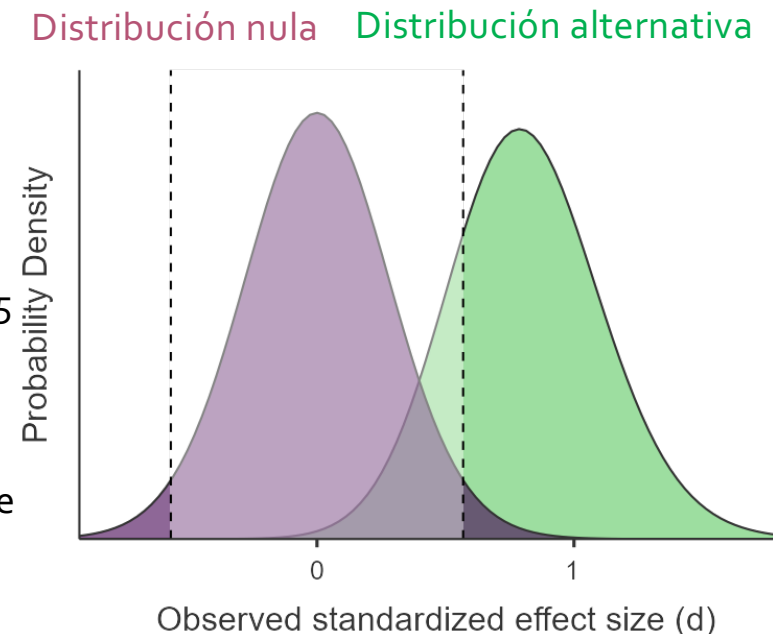
DISEÑO EXPERIMENTACIÓN PARA POTENCIA DETERMINADA

La distribución violeta es nuestra distribución de hipótesis nula (centrada en $d = 0$) y la distribución verde es nuestra distribución de hipótesis alternativa (centrada en $d = 0.8$).

Las líneas discontinuas verticales son los valores críticos para obtener $p < .05$ en ambos lados de la distribución nula (es decir, 2.5% en ambos lados).

- El área verde oscuro es nuestra **potencia (80%)**.
- Las áreas violeta oscuro son nuestra tasa de **error de tipo I (5%)**.
- El área verde claro a la izquierda de la línea discontinua es nuestra tasa de **error de tipo II (20%)**.
- El área violeta claro es la probabilidad de una inferencia correcta suponiendo que la hipótesis nula es verdadera (95%).

Hay que tener en cuenta que estas son las distribuciones de ambas hipótesis y, en realidad, solo una es verdadera. Nunca podemos saber cuál es verdadera; en el mejor de los casos, podemos aproximarnos a ella mediante pruebas repetidas de los efectos.



ACTUAR SOBRE EL EFECTO DE LA MUESTRA

2. Contraste de hipótesis

2.6. Potencia de la prueba H

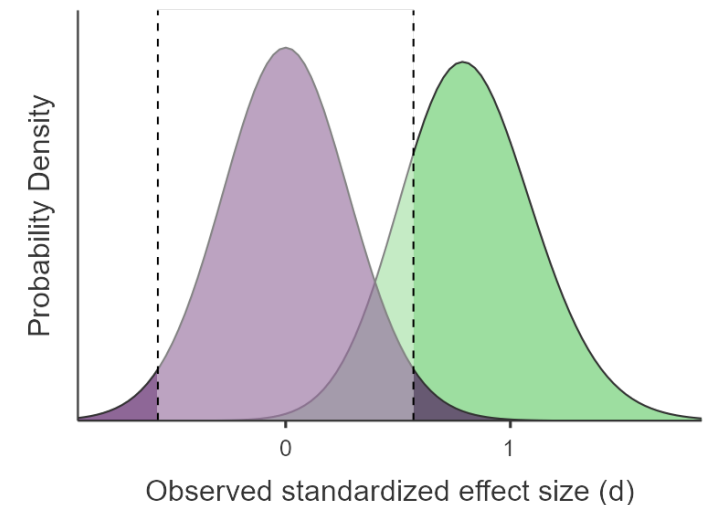
TAMAÑO DEL EFECTO DE LA MUESTRA (δ de COHEN)

Los procedimientos estadísticos de tamaño del efecto tienen como finalidad fundamental la cuantificación de la relevancia del efecto obtenido. Dicho de otra forma, se trata de establecer si efectos estadísticamente significativos son relevantes en el campo de aplicación de la investigación.

La **δ de Cohen** es una medida del tamaño del efecto como diferencia de medias estandarizada. Es decir, nos informa de cuántas desviaciones típicas de diferencia hay entre los resultados de los dos grupos que se comparan (grupo experimental y grupo de control, o el mismo grupo antes y después de la intervención).

Se puede considerar que la **δ de Cohen representa el número de desviaciones típicas que separan a las medias de dos grupos**. Por ejemplo, una δ de 0,5 indica que la diferencia entre el grupo experimental y el grupo de control en la variable evaluada es de media desviación típica.

$$\delta = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\left(\frac{(n_X - 1)s_X^2 + (n_Y - 1)s_Y^2}{n_X + n_Y - 2}\right)}}$$



Herramientas:
JAMOVÍ- Módulo jpower

<https://rpsychologist.com/es/cohend/>

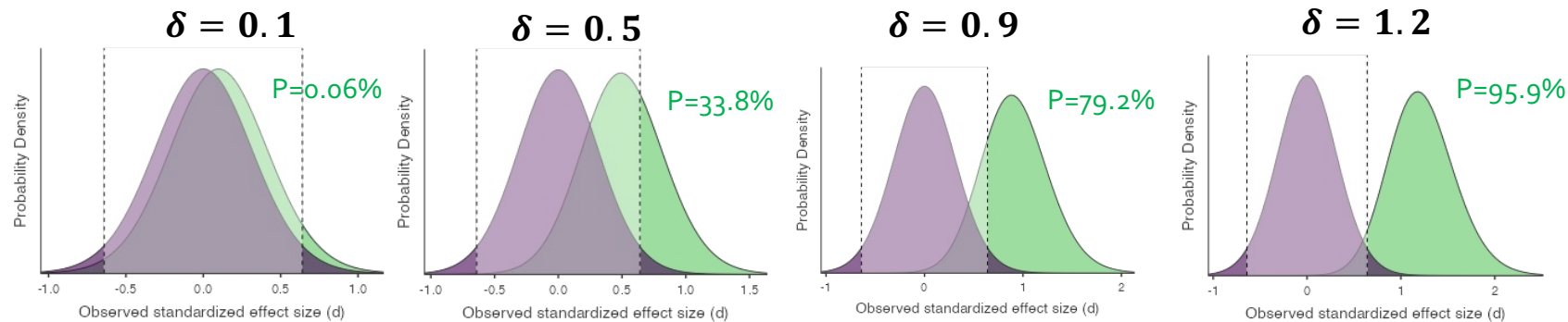
2. Contraste de hipótesis

2.6. Potencia de la prueba H

test A PRIORI

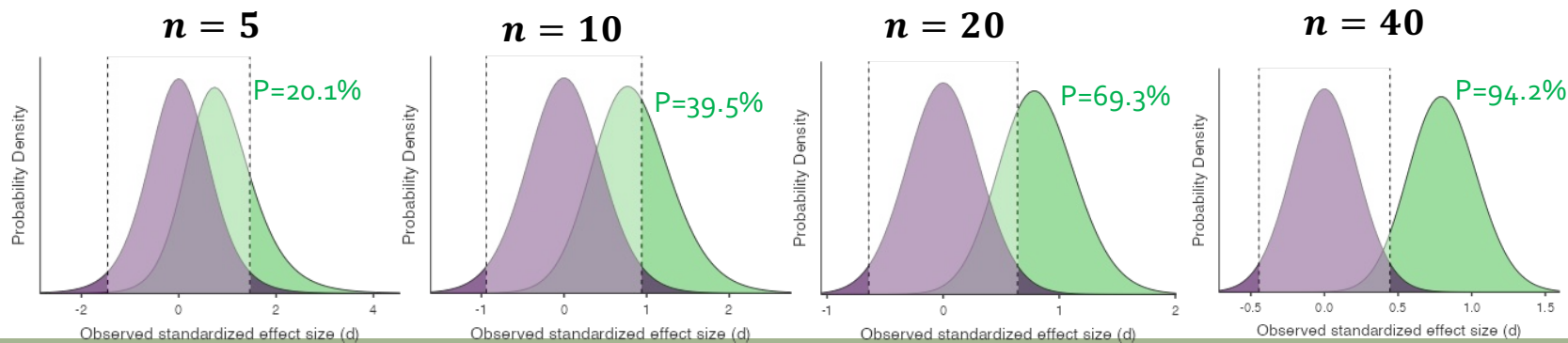
$$\delta = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\left(\frac{(n_X - 1)s_X^2 + (n_Y - 1)s_Y^2}{n_X + n_Y - 2} \right)}}$$

Ejemplo: Mismo tamaño muestra, diferente δ de COHEN



- Diferencias de medias grandes
- s pequeñas

Ejemplo: Mismo δ de COHEN (0.8), diferente tamaño muestra



- Diferencias coste experimentación

2. Contraste de hipótesis

2.6. Potencia de la prueba H

RESUMEN: FACTORES QUE AFECTAN A LA POTENCIA DE LA PRUEBA DE CONTRASTE DE HIPÓTESIS

1. Tamaño de la muestra

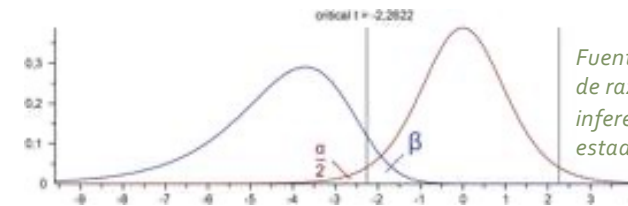
- Un mayor tamaño de muestra aumenta la potencia de una prueba, porque reduce la variabilidad muestral y proporciona una mejor estimación del parámetro poblacional.

2. Tamaño del efecto

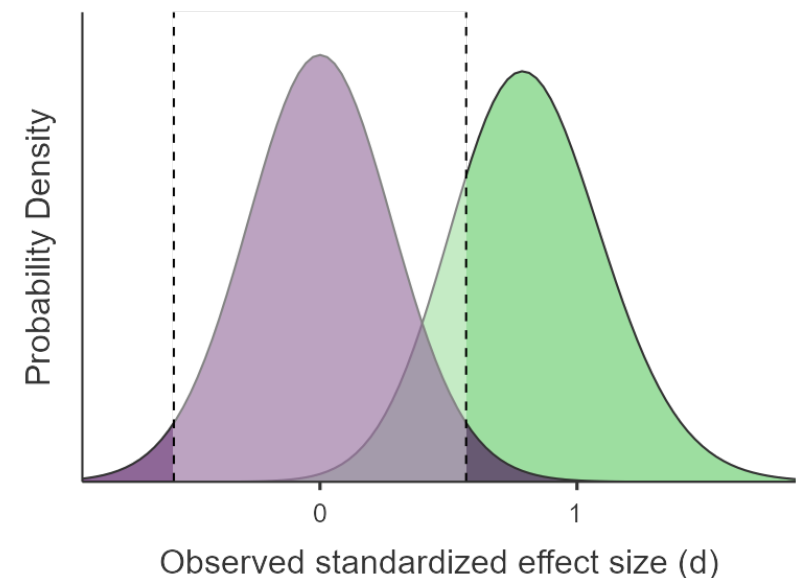
- Un mayor **tamaño del efecto** (la diferencia real entre el parámetro poblacional bajo H_0 y H_1) incrementa la potencia, ya que es más fácil detectar diferencias grandes.

3. Nivel de significación (α)

- Aumentar α incrementa la potencia, ya que se amplía la región de rechazo de H_0 . Sin embargo, esto también aumenta el riesgo de cometer un Error Tipo I.



Fuente: SCIELO-Niveles de razonamiento inferencial para el estadístico t de Student



Ejercicios

GUIA DE CONTENIDOS

1. Objetivos
2. Contraste de hipótesis
3. Contraste de hipótesis para medias
4. Contraste de hipótesis para probabilidades
5. Contraste de hipótesis para varianzas
6. Contraste hipótesis para diferencia de parámetros
7. Contraste de hipótesis distribuciones no paramétricas
8. Resumen y ejercicio entregable

3. Contraste de hipótesis para medias

3.1. Tamaños muestrales grandes, con $n > 30$ (DNT-Z)

Sean $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_n$ muestras independientes de una **población normal grande** ($n > 30$), con media μ y desviación estándar σ conocidas.

Para probar hipótesis nula de la forma $H_0: \mu \leq \mu_0, H_0: \mu \geq \mu_0$ o $H_0: \mu = \mu_0$:

1. Calcular **puntaje z** (si σ desconocida, aproximar con s)

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s / \sqrt{n}}$$

PRUEBA Z

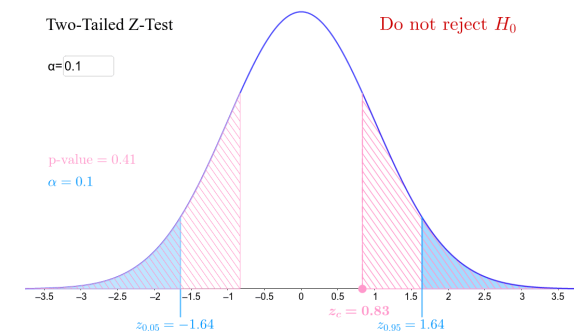
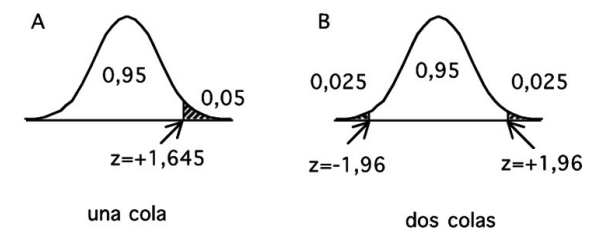
2. Calcular p-valor: **área bajo la curva normal**, según hipótesis alternativa (H_1).

Área a la derecha de z , para $H_1: \mu < \mu_0$

Área a la izquierda de z , para $H_1: \mu > \mu_0$

Suma de áreas en las colas cortadas por z y $-z$, para $H_1: \mu \neq \mu_0$

3. Tomar **decisión** sobre la factibilidad de H_0 (e H_1).



Fuente: Geogebra

3. Contraste de hipótesis para medias

3.2. Tamaños muestrales grandes, con $n < 30$ (t)

Sean $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_n$ muestras independientes de una **población normal pequeña ($n < 30$)**, con media μ y desviación estándar σ , donde σ es desconocida.

Para probar hipótesis nula de la forma $H_0: \mu \leq \mu_0, H_0: \mu \geq \mu_0$ o $H_0: \mu = \mu_0$:

1. **Calcular puntaje t** (si σ desconocida, aproximar con s). Si se conoce σ , usar z y prueba z .

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s / \sqrt{n}}$$

PRUEBA t

2. Calcular p-valor: **área bajo la curva t de Student, con $n-1$ grados de libertad**, según hipótesis alternativa (H_1).

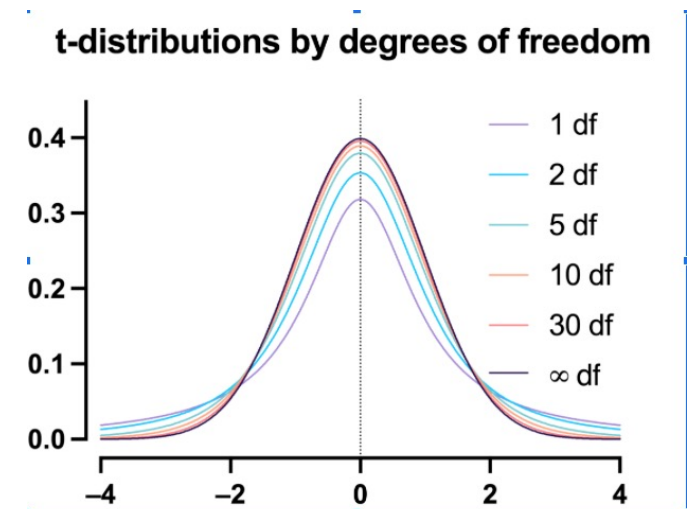
Área a la derecha de z , para $H_1: \mu < \mu_0$

Área a la izquierda de z , para $H_1: \mu > \mu_0$

Suma de áreas en las colas cortadas por t y $-t$, para $H_1: \mu \neq \mu_0$

3. Tomar **decisión** sobre la factibilidad de H_0 (e H_1).

Fuente: Graphpad, The ultimate guide to t-tests



EJERCICIOS

GUIA DE CONTENIDOS

1. Objetivos
2. Contraste de hipótesis
3. Contraste de hipótesis para medias
4. Contraste de hipótesis para probabilidades
5. Contraste de hipótesis para varianzas
6. Contraste de hipótesis distribuciones no paramétricas
7. Resumen y ejercicio entregable

4. Contraste de hipótesis para probabilidades

4.1. Expresión Contraste de hipótesis

Sea X el número de éxitos en n ensayos independientes de Bernoulli, cada uno con una probabilidad de éxito p .

Es decir, sea $X \sim \text{Bin}(n, p)$

Para probar hipótesis nula de la forma $H_0: p \leq p_0, H_0: p \geq p_0$ o $H_0: p = p_0$

1. **Comprobar supuestos** de que tanto $n \cdot p_0 \geq 10$ y $n \cdot (1 - p_0) \geq 10$
2. **Calcular puntaje z** (si σ desconocida, aproximar con s). Si se conoce σ , usar z y prueba z .

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 \cdot (1 - p_0)}{n}}} \quad \hat{p} = \frac{X}{n} \sim N\left(p, \frac{p \cdot (1 - p)}{n}\right)$$

3. Calcular p-valor: **área bajo la curva normal**, según hipótesis alternativa (H_1).

Área a la derecha de z , para $H_1: p < p_0$

Área a la izquierda de z , para $H_1: p > p_0$

Suma de áreas en las colas cortadas por z y $-z$, para $H_1: p \neq p_0$

4. Tomar **decisión** sobre la factibilidad de H_0 (e H_1).

Ejercicios

GUIA DE CONTENIDOS

1. Objetivos
2. Contraste de hipótesis
3. Contraste de hipótesis para medias
4. Contraste de hipótesis para probabilidades
5. Contraste de hipótesis para varianzas
6. Contraste hipótesis para diferencia de parámetros
7. Contraste de hipótesis distribuciones no paramétricas
8. Resumen y ejercicio entregable

5. Contraste de hipótesis para varianzas

5.1. Expresión Contraste de hipótesis

Sea $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_n$ una muestra aleatoria simple de una distribución normal. Sea s^2 la varianza muestral.

Para probar hipótesis nula de la forma $H_0: \sigma^2 \leq \sigma_0^2, H_0: \sigma^2 \geq \sigma_0^2$ o $\sigma^2 = \sigma_0^2$

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

1. Calcular puntaje χ^2

$$\chi^2 = (n-1) \cdot \frac{s^2}{\sigma_0^2}$$

2. Calcular p-valor: **área bajo la curva χ^2 , con n-1 grados de libertad**, según hipótesis alternativa (H_1). Atención que esta distribución no es simétrica.

Área a la derecha de χ^2 , para $H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$

Área a la derecha de χ^2 , para $H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$

Suma de áreas en las colas cortadas por χ^2_{inf} y χ^2_{sup} , para $H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$

4. Tomar **decisión** sobre la factibilidad de H_0 (e H_1).

Ejercicios

GUIA DE CONTENIDOS

1. Objetivos
2. Contraste de hipótesis
3. Contraste de hipótesis para medias
4. Contraste de hipótesis para probabilidades
5. Contraste de hipótesis para varianzas
6. Contraste hipótesis para diferencia de parámetros
7. Contraste de hipótesis distribuciones no paramétricas
8. Resumen y ejercicio entregable

6. Contraste de hipótesis para diferencias de parámetros

6.1. Diferencia de medias, muestras pareadas

Sean $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_n$ y $\bar{Y}_1, \bar{Y}_2, \dots, \bar{Y}_n$ una muestra de pares ordenados cuyas diferencias $D_1, D_2, \dots, D_n$ son muestra de una población normal con $D \sim N(\mu_D, \sigma_D^2)$, con tamaño n .

Para probar hipótesis nula de la forma $H_0: \mu_D \leq \mu_0, H_0: \mu_D \geq \mu_0$ o $\mu_D \neq \mu_0$

DIFERENCIA MEDIAS - MUESTRAS GRANDES ($n > 30$) PAREADAS

Calcular puntaje z + Calcular p-valor y tomar decisión sobre factibilidad de H_0 (y H_1), según prueba z .

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{\bar{D} - \mu_0}{s_D / \sqrt{n}}$$

DIFERENCIA MEDIAS - MUESTRAS PEQUEÑAS ($n < 30$) PAREADAS ($n < 30$)

Calcular puntaje t + Calcular p-valor y tomar decisión sobre factibilidad de H_0 (y H_1), según prueba t con $n-1$ grados de libertad.

$$t = \frac{\bar{D} - \mu_0}{s_D / \sqrt{n}}$$

6. Contraste de hipótesis para diferencias de parámetros

6.2. Diferencia de medias, muestras independientes

Sea $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_{n_X}$ una muestra aleatoria simple de una distribución normal $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$, con tamaño n_X .

Sea $\bar{Y}_1, \bar{Y}_2, \dots, \bar{Y}_{n_Y}$ una muestra aleatoria simple de una distribución normal $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$, con tamaño n_Y .

Para probar hipótesis nula de la forma $H_0: \mu_X - \mu_Y \leq DIF$, $H_0: \mu_X - \mu_Y \geq DIF$ o $\mu_X - \mu_Y = DIF$

MUESTRAS GRANDES ($n > 30$)

Calcular puntaje z + Calcular p-valor y tomar decisión sobre factibilidad de H_0 (y H_1), según prueba z .

$$Z = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - DIF}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_X^2}{n_X} + \frac{\sigma_Y^2}{n_Y}\right)}} \cong \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - DIF}{\sqrt{\left(\frac{s_X^2}{n_X} + \frac{s_Y^2}{n_Y}\right)}}$$

MUESTRAS PEQUEÑAS ($n < 30$), caso más usual por costes de experimentación

Calcular puntaje t , calcular grados de libertad v + Calcular p-valor y tomar decisión sobre factibilidad de H_0 (y H_1), según prueba t con v grados de libertad (cálculo redondeado al entero menor más próximo).

$$t = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - DIF}{\sqrt{\left(\frac{s_X^2}{n_X} + \frac{s_Y^2}{n_Y}\right)}} \quad v = \frac{\left(\frac{s_X^2}{n_X} + \frac{s_Y^2}{n_Y}\right)^2}{\frac{\left(\frac{s_X^2}{n_X}\right)^2}{n_X - 1} + \frac{\left(\frac{s_Y^2}{n_Y}\right)^2}{n_Y - 1}}$$

6. Contraste de hipótesis para diferencias de parámetros

6.3. Diferencia de proporciones

Sea $X \sim \text{Bin}(n_X, p_X)$ y $Y \sim \text{Bin}(n_Y, p_Y)$ muestras independientes de tamaños n y probabilidades p .

Comprobemos que, para cada una de ellas, hay al menos 10 éxitos y 10 fracasos. Esto es $n \cdot p_0 \geq 10$ y $n \cdot (1 - p_0) \geq 10$

1. Calcular estimadores

$$\hat{p}_X = \frac{X}{n_X} \quad \left| \quad \hat{p}_Y = \frac{Y}{n_Y} \quad \left| \quad \hat{p} = \frac{X + Y}{n_X + n_Y} \right.$$

2. Calcular **puntaje z** + Calcular p-valor y tomar decisión sobre factibilidad de H_0 (y H_1), según **prueba z**.

$$z = \frac{\hat{p}_X - \hat{p}_Y}{\sqrt{\hat{p} \cdot (1 - \hat{p}) \cdot \left(\frac{1}{n_X} + \frac{1}{n_Y} \right)}}$$

EJERCICIOS

1. Muestras pareadas – datos conocidos.
2. Muestras pareadas – datos desconocidos.
3. Muestras diferentes – parámetros conocidos, diferencias para muestras o poblaciones

6. Contraste de hipótesis para diferencias de parámetros

6.4. Diferencia de varianzas – Prueba F

La **distribución F (Fischer-Snedecor)** es una distribución de probabilidad continua que surge comúnmente en el análisis de varianzas y pruebas de hipótesis. Es utilizada en situaciones donde **se comparan dos o más varianzas de diferentes poblaciones**, o en **análisis de varianza (ANOVA)** para determinar si las medias de varios grupos son significativamente diferentes (siguiente unidad).

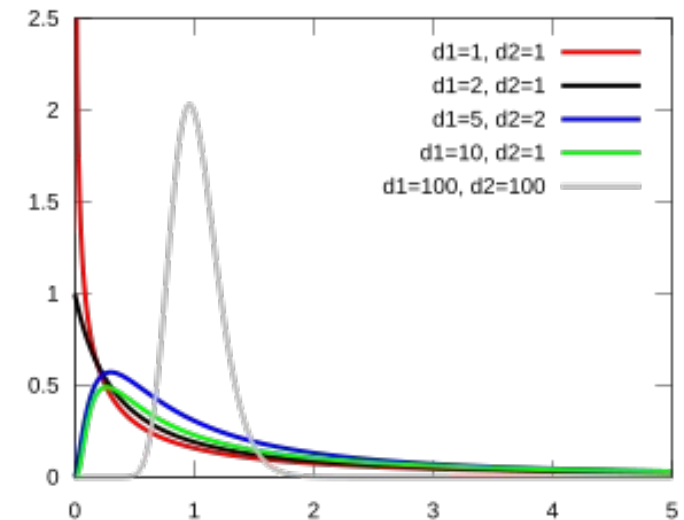
Para dos muestras aleatorias simples X, Y , de dos poblaciones normales, con tamaños diferentes:

$$s_X^2 = \frac{1}{n_X} \sum_{i=1}^{n_X} (X_i - \bar{X})^2 \quad s_Y^2 = \frac{1}{n_Y} \sum_{i=1}^{n_Y} (Y_i - \bar{Y})^2$$

Estadístico $F = \frac{s_X^2}{s_Y^2}$

- Prueba depende mucho de la normalidad de la muestra.
- Si se acepta H_0 , no justifica que H_0 sea verdadera (En caso de H_1 , da más factibilidad)

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} \frac{x^{\frac{m-2}{2}}}{\left(1 + \frac{mx}{n}\right)^{\frac{m+n}{2}}}$$



$$F_{n_X-1, n_Y-1}$$

Función F con grados de libertad de numerador y denominador

6. Contraste de hipótesis para diferencias de parámetros

6.4. Diferencia de varianzas – Prueba F

Sea $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_{n_X}$ una muestra aleatoria simple de una distribución normal $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$.

Sea $\bar{Y}_1, \bar{Y}_2, \dots, \bar{Y}_{n_Y}$ una muestra aleatoria simple de una distribución normal $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$.

Sean las varianzas muestrales:

Para probar hipótesis nula de la forma $H_0: \sigma_X^2 \leq \sigma_Y^2, H_0: \sigma_X^2 \geq \sigma_Y^2$ o $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$

$$s_X^2 = \frac{1}{n_X} \sum_{i=1}^{n_X} (X_i - \bar{X})^2$$

$$s_Y^2 = \frac{1}{n_Y} \sum_{i=1}^{n_Y} (Y_i - \bar{Y})^2$$

1. Calcular puntaje F , de forma que F sea mayor que 1

$$F = \frac{s_X^2}{s_Y^2}$$

2. Calcular p-valor: **área bajo la curva F_{n_X-1, n_Y-1} , con $n_X - 1$ grados de libertad en numerador y $n_Y - 1$ grados de libertad en el denominador**, según hipótesis alternativa (H_1).

Área a la derecha de F , para $H_1: \sigma_X^2 < \sigma_Y^2$, o $\sigma_X^2 < \sigma_Y^2$. Adecuar para que $F > 1$.

Doble del área a la derecha de F , para $H_1: \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$

4. Tomar **decisión** sobre la factibilidad de H_0 (e H_1).

GUIA DE CONTENIDOS

1. Objetivos
2. Contraste de hipótesis
3. Contraste de hipótesis para medias
4. Contraste de hipótesis para probabilidades
5. Contraste de hipótesis para varianzas
6. Contraste hipótesis para diferencia de parámetros
7. Contraste de hipótesis distribuciones no paramétricas
8. Resumen y ejercicio entregable

7. Contraste de hipótesis para distribuciones no paramétricas

7.1. Distribuciones libres o no paramétricas

Las **distribuciones no paramétricas** (o **pruebas no paramétricas**) son métodos estadísticos que **no hacen suposiciones específicas sobre la distribución subyacente de los datos**. En otras palabras, no requieren que los datos sigan una distribución particular, como la normal, lo que las hace útiles para situaciones donde las distribuciones paramétricas no son apropiadas.

CARACTERÍSTICAS CLAVE DE LAS PRUEBAS NO PARAMÉTRICAS

- 1. Independencia de la Distribución**, por lo que son adecuadas para datos que pueden tener distribuciones desconocidas o no cumplir con las suposiciones de las pruebas paramétricas. Por ejemplo, para muestras pequeñas con varios datos atípicos.
- 2. Aplicabilidad a Diferentes Tipos de Datos**: Se pueden aplicar a **datos ordinales**, **datos categóricos**, o datos de escalas de medición que no son adecuadamente manejados por métodos paramétricos. Además, son útiles cuando se trabaja con pequeñas muestras o cuando los datos presentan fuertes asimetrías o valores atípicos.
- 3. Robustez**: Las pruebas no paramétricas suelen ser más robustas frente a violaciones de las suposiciones tradicionales de la estadística paramétrica (como la normalidad y homogeneidad de varianzas).

7. Contraste de hipótesis para distribuciones no paramétricas

7.1. Distribuciones libres o no paramétricas

EJEMPLOS COMUNES DE PRUEBAS NO PARAMÉTRICAS

1. Prueba de Wilcoxon (para dos muestras):

- Se utiliza para comparar dos muestras independientes, sin asumir que provienen de distribuciones normales.

2. Prueba de Mann-Whitney U:

- Alternativa no paramétrica a la prueba t de Student para muestras independientes, comparando las medianas de dos grupos.

3. Prueba de Kruskal-Wallis:

- Análogo no paramétrico al ANOVA para comparar más de dos grupos independientes.

4. Prueba de Chi-cuadrado:

- Para comparar frecuencias observadas con las frecuencias esperadas en tablas de contingencia.

7. Contraste de hipótesis para distribuciones no paramétricas

7.2. Prueba de Wilcoxon para una muestra

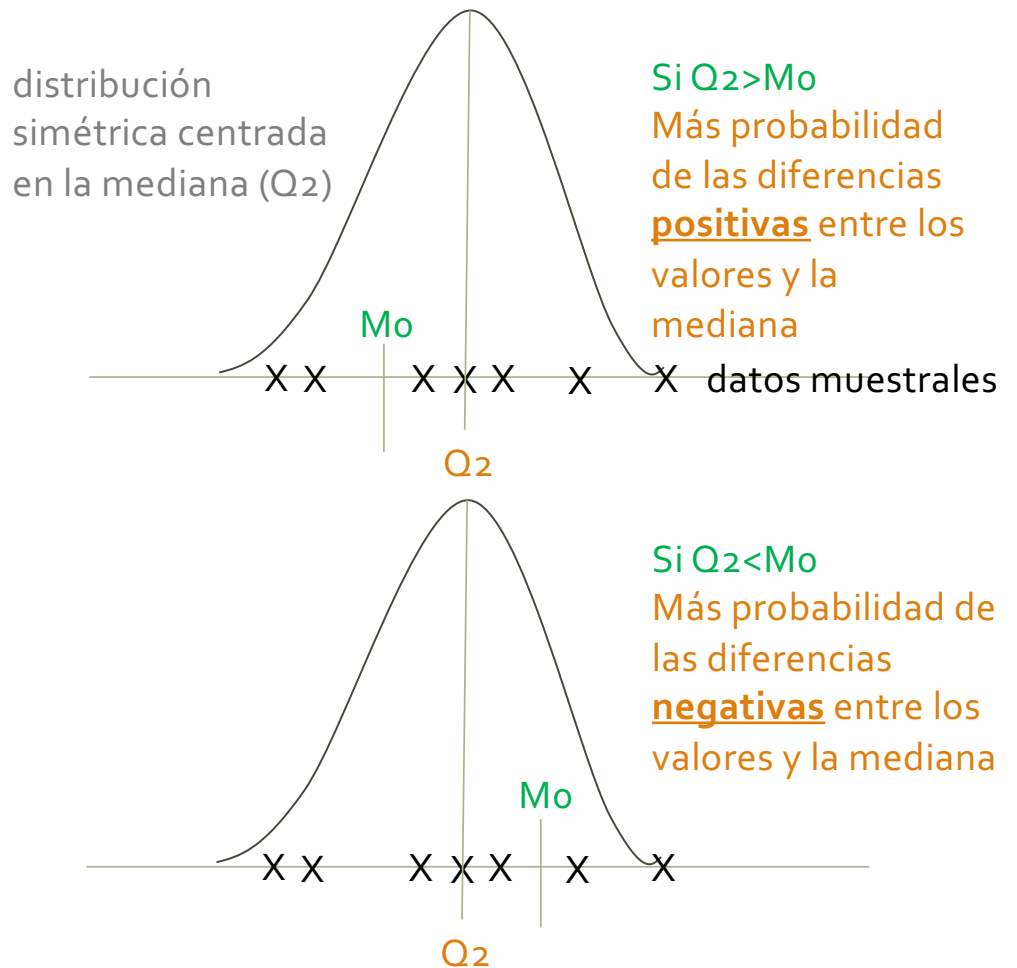
La **prueba de Wilcoxon para una muestra** es una prueba estadística no paramétrica que se utiliza para determinar si la **mediana** de una población es igual a un valor específico.

Es útil cuando no se puede asumir que los datos siguen una distribución normal y se trabaja con una sola muestra de datos.

Esta prueba es una **alternativa a la prueba t para una muestra** en situaciones donde la normalidad no puede garantizarse.

Hipótesis nula (H_0): La mediana de la población es igual a un valor específico M_0 .

Hipótesis alternativa (H_1): La mediana de la población es diferente de M_0 (prueba bilateral) o mayor/menor que M_0 (prueba unilateral)



7. Contraste de hipótesis para distribuciones no paramétricas

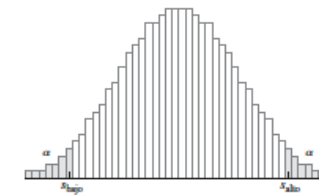
7.2. Prueba de Wilcoxon para una muestra

Herramientas:

- Tabla Puntos críticos para prueba de rangos con signo de Wilcoxon.
- JAMOVÍ- Módulo t-test one-sample

PROCEDIMIENTO

1. Restar M_0 a todos los valores.
2. Excluir diferencias nulas.
3. Ordenar diferencias absolutas de menor a mayor
4. Asignar rangos discretos, de menor a mayor
5. Otorgar signos negativos o positivos, según proceda.
6. Calcula S_+ (suma de rangos de diferencias positivas), y S_- (suma de rangos de diferencias negativas)
7. Obtener estadístico de prueba $W = \min(S_+, S_-)$
8. Comparar con valor crítico, según tamaño de muestra, y orientación de la prueba ($>$, $<$)
9. Nota: si $n > 20$, seguir instrucciones a pie de tabla.



n	S _{bujo}	S _{alto}	α	n	S _{bujo}	S _{alto}	α	n	S _{bujo}	S _{alto}	α	n	S _{bujo}	S _{alto}	α
4	1	9	0.1250	10	15	40	0.1162	12	79	0.0085	35	118	0.0253		
	0	10	0.0625		14	41	0.0967		10	81	0.0052	34	119	0.0224	
5	3	12	0.1562		11	44	0.0527		9	82	0.0040	28	125	0.0101	
	2	13	0.0938		10	45	0.0420	14	32	73	0.1083	27	126	0.0087	
	1	14	0.0625		9	46	0.0322		31	74	0.0969	24	129	0.0055	
	0	15	0.0312		8	47	0.0244		26	79	0.0520	23	130	0.0047	
6	4	17	0.1094		6	49	0.0137		25	80	0.0453	18	56	115	0.1061
	3	18	0.0781		5	50	0.0098		22	83	0.0290	55	116	0.0982	
	2	19	0.0469		4	51	0.0068		21	84	0.0247	48	123	0.0542	
	1	20	0.0312		3	52	0.0049		16	89	0.0101	47	124	0.0494	
	0	21	0.0156						15	90	0.0083	41	130	0.0269	
7	6	22	0.1094	11	18	48	0.1030		13	92	0.0054	40	131	0.0241	
	5	23	0.0781		17	49	0.0874		12	93	0.0043	33	138	0.0104	
	4	24	0.0547		14	52	0.0508		37	83	0.1039	32	139	0.0091	
	3	25	0.0391		13	53	0.0415	15	36	84	0.0938	28	143	0.0052	
	2	26	0.0234		11	55	0.0269		31	89	0.0535	27	144	0.0045	
	1	27	0.0156		10	56	0.0210		30	90	0.0473				
	0	28	0.0078		8	58	0.0122		26	94	0.0277	19	63	127	0.1051
8	9	27	0.1250		7	59	0.0093		25	95	0.0240	62	128	0.0978	
	8	28	0.0977		6	60	0.0068		20	100	0.0108	54	136	0.0521	
	6	30	0.0547		5	61	0.0049		19	101	0.0090	53	137	0.0478	
	5	31	0.0391						16	104	0.0051	47	143	0.0273	
	4	32	0.0273		18	60	0.0549		15	105	0.0042	46	144	0.0247	
	3	33	0.0195		17	61	0.0461	16	43	93	0.1057	38	152	0.0102	
	2	34	0.0117		14	64	0.0261		42	94	0.0964	37	153	0.0090	
	1	35	0.0078		13	65	0.0212		36	100	0.0523	33	157	0.0054	
	0	36	0.0039		10	68	0.0105		35	101	0.0467	32	158	0.0047	
9	11	34	0.1016		9	69	0.0081		30	106	0.0253	20	70	140	0.1012
	10	35	0.0820		8	70	0.0061		29	107	0.0222	69	141	0.0947	
	9	36	0.0645		7	71	0.0046		24	112	0.0107	61	149	0.0527	
	8	37	0.0488						23	113	0.0091	60	150	0.0487	
	6	39	0.0273	13	27	64	0.1082		20	116	0.0055	53	157	0.0266	
	5	40	0.0195		26	65	0.0955		19	117	0.0046	52	158	0.0242	
	4	41	0.0137		22	69	0.0549		49	104	0.1034	44	166	0.0107	
	3	42	0.0098		21	70	0.0471	17	48	105	0.0950	43	167	0.0096	
	2	43	0.0059		18	73	0.0287		42	111	0.0544	38	172	0.0053	
	1	44	0.0039		17	74	0.0239		41	112	0.0492	37	173	0.0047	
					13	78	0.0107								

Para $n > 20$, calcule $z = \frac{S_+ - n(n+1)/4}{\sqrt{n(n+1)(2n+1)/24}}$ y utilice la tabla z (tabla A.2).

7. Contraste de hipótesis para distribuciones no paramétricas

7.2. Prueba de Wilcoxon para una muestra

PROCEDIMIENTO

1. Restar M_0 a todos los valores.
2. Excluir diferencias nulas.
3. Ordenar diferencias absolutas de menor a mayor
4. Otorgar signos negativos o positivos, según proceda.
5. Calcula S^+ (suma de rangos de diferencias positivas), y S^- (suma de rangos de diferencias negativas)
6. Obtener estadístico de prueba $W = \min(S^+, S^-)$
7. Comparar con valor crítico, según tamaño de muestra, y orientación de la prueba ($>$, $<$)
8. Nota: si $n > 20$, seguir instrucciones a pie de tabla.

Ejemplo: Se ha medido el contenido en níquel para 7 soldaduras, cuyos datos están en la columna "valor". Prueba si contenido es ≥ 5 [unilateral]

Procedimiento	1	2	3	3	4	5	6-7-8
Valor (x)	DIF (x-M0)	Elim DIF=0	ABS(DIF)	Ordenar ABS (DIF)	Rango	Rango con signo	Suma + (S+)
9	4	4	4	4	1	1	19
0.9	-4.1	-4.1	4.1	4.1	2	-2	Suma - (S-)
9.3	4.3	4.3	4.3	4.3	3	3	2
11.5	6.5	6.5	6.5	6.5	4	4	W (min [S+, S-])
13.9	8.9	8.9	8.9	8.9	5	5	2
21.7	16.7	16.7	16.7	16.7	6	6	p(W<2)=0.0469
5	0						Tabla W (n=6)

Ejemplo: Se ha medido el contenido en níquel para 7 soldaduras, cuyos datos están en la columna "valor". Prueba si contenido es $= 16$ [bilateral]

M0	16	Prueba BILATERAL (Q2<M5)					
Procedimiento	1	2	3	3	4	5	6-7-8
Valor (x)	DIF (x-M0)	Elim DIF=0	ABS(DIF)	Ordenar ABS (DIF)	Rango	Rango con signo	Suma + (S+)
9	-7	-7	7	2.1	1	-1	3
0.9	-15.1	-15.1	15.1	4.5	2	-2	Suma - (S-)
9.3	-6.7	-6.7	6.7	5.7	3	3	18
11.5	-4.5	-4.5	4.5	6.7	4	-4	Wprueba (min [S+, S-])
13.9	-2.1	-2.1	2.1	7	5	-5	3
21.7	5.7	5.7	5.7	15.1	6	-6	p(W<3)=0.0781
16	0						Tabla W (n=6)
							P=2·P(W>3)=0.1562
							BILATERAL (P=2·P(W>Wprueba))

7. Contraste de hipótesis para distribuciones no paramétricas

7.3. Método Mann-Withney (Wilcoxon para muestras independientes)

La **prueba de Wilcoxon de Suma de Rangos**, también conocida como **prueba Mann-Whitney U**, es una **prueba estadística no paramétrica** que se utiliza para comparar **dos muestras independientes** cuando no se pueden hacer suposiciones sobre la distribución de los datos (como la normalidad). Es una alternativa no paramétrica a la **prueba t para muestras independientes**.

Hipótesis Nula (H_0): Las distribuciones de ambas poblaciones son idénticas; no hay diferencia en las medianas.

Hipótesis Alternativa (H_1): Las distribuciones son diferentes; las medianas son diferentes.

OBJETIVO

El propósito de la prueba Mann-Whitney U es determinar si **una muestra tiende a tener valores más grandes o más pequeños** que otra muestra, lo que sugiere una diferencia significativa en las **medianas** de las dos poblaciones.

SUPOSICIONES

1. Las dos muestras son **independientes** entre sí.
2. Las variables medidas son **continuas** u ordinales.
3. Las distribuciones de las dos poblaciones son **similares en forma** (aunque no se requiere normalidad).

7. Contraste de hipótesis para distribuciones no paramétricas

7.3. Método Mann-Withney (Wilcoxon para muestras independientes)

Herramientas:

- Tabla Puntos críticos para prueba de rangos con signo de Wilcoxon.
- JAMOVÍ- Módulo t-test muestras independientes

PROCEDIMIENTO

Para un conjunto de muestras independientes y aleatorias X, Y.

1. Combinar y ordenar los datos de menor a mayor.
2. Asignar un rango mediante enteros discretos (1,2,3...)
3. Calcular la suma de rangos para cada muestra de forma separada: R_X , R_Y .
4. Calcular estadístico U para cada muestra: U_X , U_Y .
5. Estadístico de prueba $U = \min(U_X, U_Y)$
6. Comparar con valor crítico, según tamaño de muestra, y orientación de la prueba ($>$, $<$)

$$U_X = n_X \cdot n_Y + \frac{n_X \cdot (n_X + 1)}{2} - R_X$$

$$U_Y = n_X \cdot n_Y + \frac{n_Y \cdot (n_Y + 1)}{2} - R_Y$$

7. Contraste de hipótesis para distribuciones no paramétricas

7.3. Método Mann-Withney (Wilcoxon para muestras independientes)

PROCEDIMIENTO

Para un conjunto de muestras independientes y aleatorias X, Y.

1. Combinar y ordenar los datos de menor a mayor.
2. Asignar un rango mediante enteros discretos (1,2,3...)
3. Calcular la suma de rangos para cada muestra de forma separada: R_X , R_Y .
4. Calcular estadístico U para cada muestra: U_X , U_Y .
5. Estadístico de prueba $U = \min(U_X, U_Y)$
6. Comparar con valor crítico, según tamaño de muestra, y orientación de la prueba (>, <) **PRUEBA z**, con

Ejemplo: La resistencia a rotura de fibras (en kN) , con los siguientes valores:

Tradicional: 65, 70, 75, 80, 85 (X)

Experimental: 72, 78, 82, 86, 88 (Y)

Prueba si resistencia de Experimental > Tradicional

Procedimiento		1	1	2	3	3-4-5	6	6
Valor (x)	Valor (Y)	Valores (X e Y)	Ordenar	Asignara ran	Asignar X-Y	Calcular rangos	Calcular U	Calcular z
65	72	65	65	1	X	Rango X (RX)	UX	12.5
70	78	70	70	2	X	21	19	desviacion típica
75	82	75	72	3	Y	Rango Y (RY)	UY	4.79
80	86	80	75	4	X	34	6	z
85	88	85	78	5	Y		U = min(UX, UY)	-1.36
		72	80	6	X		6	
		78	82	7	Y			
		82	85	8	X			
		86	86	9	Y			
		88	88	10	Y			

$$\mu_U = \frac{n_X \cdot n_Y}{2} \quad \sigma_U = \sqrt{\frac{n_X \cdot n_Y \cdot (n_X + n_Y + 1)}{12}} \quad z = \frac{U - \mu_U}{\sigma_U}$$

$p(z < -1.36) = 0.087$, se rechaza hipótesis nula a nivel 0.05, y se acepta H_1

Ejercicios

GUIA DE CONTENIDOS

1. Objetivos
2. Contraste de hipótesis
3. Contraste de hipótesis para medias
4. Contraste de hipótesis para probabilidades
5. Contraste de hipótesis para varianzas
6. Contraste hipótesis para diferencia de parámetros
7. Contraste de hipótesis distribuciones no paramétricas
8. Resumen y ejercicio entregable

8. Resumen y ejercicio entregable

8.1. Resumen

- **Contraste de hipótesis:** relevancia en ciencia e ingeniería, hipótesis nula y alternativa, estadístico de prueba, nivel de significación, p-valor, procedimiento, potencia prueba, error tipo I y tipo II, tamaño del efecto
- **Contraste de hipótesis para medias:** prueba z ($n > 30$) y prueba t ($n > 30$), siendo las t más usuales.
- **Contraste de hipótesis para probabilidades:** prueba z para probabilidad de éxito.
- **Contraste de hipótesis para varianzas:** prueba chi-cuadrado
- **Contraste hipótesis para diferencia de parámetros:** medias, probabilidades y varianzas (Prueba F)
- **Contraste hipótesis distribuciones libres o no paramétricas:** Método Wilcoxon (una muestra), Método Mann-Witney (dos muestras independientes)
- **Software informático:** graficación y cálculo inmediato.

8. Resumen y ejercicio entregable

8.2. Entregable

- Entregable individual o por parejas.
- **Objetivos:**
 - Contextualizar el trabajo en una experiencia del estudiante.
 - Trabajar la comprensión de la técnica estadística mediante la abstracción y construcción del problema.
 - Potenciar el manejo de software estadístico para la resolución de problemas.

TRABAJO

- A partir de los datos de una experimentación realizada en TGF-TFM-PEXT realizar la abstracción del problema [enunciado detallado y preciso], y realiza:
 - Hipótesis de diferencia de medias de dos tratamientos independientes (muestra de distribución paramétrica)
 - Hipótesis de diferencia de medias de dos tratamientos independientes (muestra de distribución no paramétrica)
- Sigue la plantilla disponible en Aula virtual, explicando los pasos y decisiones tomadas de forma detallada, con la notación matemática adecuada.
- Instrucciones específicas en AULA VIRTUAL.

T2. Contrastes de hipótesis

Metodología

Contraste H para medias

Contraste H para proporciones

Contraste H para varianzas

Contraste H para diferencias de parámetros

Contraste H para muestras de distribuciones no paramétricas

T3. Análisis varianza

Análisis de la varianza (ANOVA)

ANOVA experimentos de un factor

Comparaciones múltiples ANOVA de experimentos de un factor

ANOVA experimentos de dos factores

GUIA DE CONTENIDOS

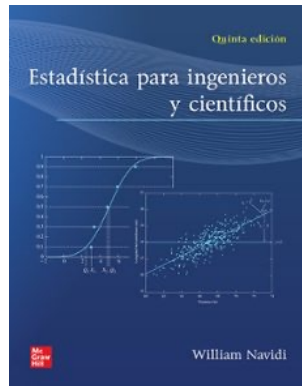
1. Objetivos
2. Análisis de la varianza (ANOVA)
3. ANOVA experimentos de un factor
4. Comparaciones múltiples de ANOVA de experimentos de un factor
5. ANOVA experimentos de dos factores
6. Resumen y ejercicio entregable

1. Objetivos

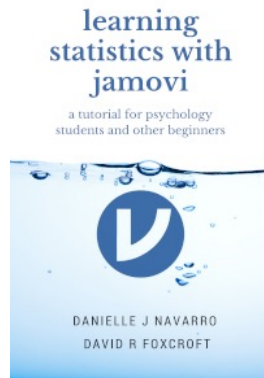
- **RECORDAR** conceptos de partida: contrastes de hipótesis.
- **CONOCER** los conceptos, características y procedimientos del análisis de la varianza.
- **APLICAR** análisis de la varianza para experimentos de un factor, comparaciones de múltiples experimentos de un factor, y experimentos con dos factores.
- **EXPERIMENTAR** ANOVAs con diferente software.
- **TRABAJAR con Software informático:** cálculo.

→ Conocido el contraste de hipótesis, vamos a realizar análisis de experimentos de uno y dos factores, así como aproximaciones ex-post para obtener más información de la significancia estadística.

Bibliografía de referencia



Estadística para ingenieros y científicos 5ª edición
William Navidi
McGraw-Hill Interamericana de España S.L.- 9781456293147



Navarro DJ and Foxcroft DR (2022). learning statistics with jamovi: a tutorial for psychology students and other beginners. (Version 0.75).
DOI: 10.24384/hgc3-7p15

GUIA DE CONTENIDOS

1. Objetivos
2. Análisis de la varianza (ANOVA)
3. ANOVA experimentos de un factor
4. Comparaciones múltiples de ANOVA de experimentos de un factor
5. ANOVA experimentos de dos factores
6. Resumen y ejercicio entregable

2. Análisis de la varianza

2.1. Concepto

El **Análisis de Varianza (ANOVA)** es una técnica estadística utilizada para comparar las **medias de tres o más grupos independientes** y determinar si existen diferencias significativas entre ellos.

Es una extensión de la **prueba t para dos muestras**, pero se aplica cuando hay más de dos grupos o categorías.

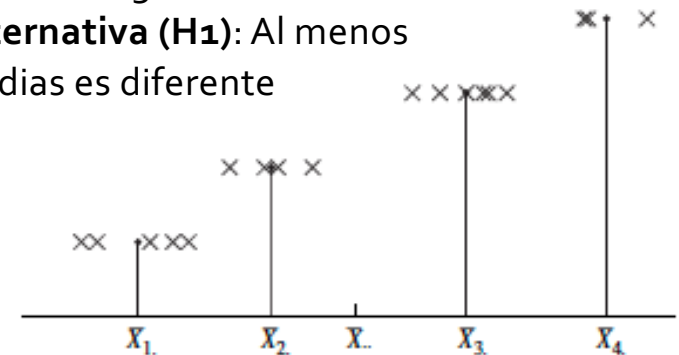
ANOVA descompone la **variabilidad total** de los datos en dos partes:

- 1. Variabilidad entre los grupos (tratamientos):** Cuánto varían las medias de los diferentes grupos entre sí.
- 2. Variabilidad dentro de los grupos (error o ruido):** Cuánto varían los datos dentro de cada grupo individual.

El objetivo de ANOVA es evaluar si la **variabilidad entre los grupos** es significativamente mayor que la **variabilidad dentro de los grupos**, lo que sugeriría que las diferencias entre las medias de los grupos no se deben al azar.

Hipótesis en ANOVA

- **Hipótesis nula (H_0):** Las medias de todos los grupos son iguales.
- **Hipótesis alternativa (H_1):** Al menos una de las medias es diferente



Fuente: Navidi W, Estadística para Ingenieros y científicos. MC Graw-Hill, 5 ed

2. Análisis de la varianza

2.2. Relevancia de ANOVA en Experimentación

1. Comparación Simultánea de Múltiples Grupos: En la experimentación científica e ingeniería, a menudo es necesario comparar varias condiciones, tratamientos o grupos de datos simultáneamente. ANOVA permite hacer esto sin aumentar el riesgo de cometer **errores de tipo I** (rechazar incorrectamente una hipótesis nula verdadera), lo que ocurriría si se realizaran múltiples pruebas t independientes.

2. Identificación de Factores Críticos: En el diseño de experimentos, ANOVA ayuda a identificar qué factores (variables independientes) tienen un impacto significativo sobre una variable de respuesta (variable dependiente). Esto es esencial en ingeniería para optimizar procesos, diseñar productos y mejorar la eficiencia.

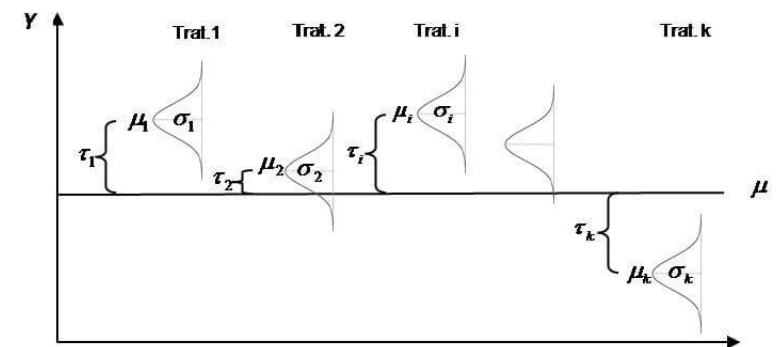
3. Control de la Variabilidad: ANOVA es útil para **controlar la variabilidad** en experimentos, al dividir la variación observada en componentes explicados por factores controlados (tratamientos) y componentes atribuibles a factores aleatorios (ruido). Esto permite a los ingenieros y científicos comprender la fuente de la variabilidad y mejorar la precisión de los experimentos.

2. Análisis de la varianza

2.2. Relevancia de ANOVA en Experimentación

4. Optimización de Procesos: En la ingeniería industrial y la manufactura, ANOVA se utiliza para **optimizar procesos** al evaluar cómo diferentes variables afectan la calidad del producto o la eficiencia del proceso. Por ejemplo, en experimentos de diseño de productos, ANOVA puede identificar los ajustes óptimos en las condiciones del proceso que maximicen el rendimiento.

5. Aplicación en el Diseño de Experimentos (DOE): ANOVA es una herramienta clave en el **Diseño de Experimentos (DOE)**, donde se evalúan múltiples factores simultáneamente. Permite a los ingenieros analizar los efectos de varios factores y sus interacciones sobre una variable de respuesta, lo que conduce a un diseño experimental más eficiente y robusto.



Fuente: TCM Metrología

2. Análisis de la varianza

2.3. Tipo de modelos para aplicar ANOVAs

En el análisis de varianza (ANOVA), los **modelos de efectos fijos** y **modelos de efectos aleatorios** son dos enfoques que dependen de cómo se tratan los factores o tratamientos dentro del análisis. La elección entre ellos depende del diseño del experimento y de la naturaleza de los factores.

Modelo de Efectos Fijos (Fixed Effects Model): se asume que los niveles de los factores (como tratamientos, concentraciones, condiciones) están **fijados y son los únicos niveles de interés**. Es decir, el análisis se realiza únicamente para estos niveles específicos, y cualquier conclusión se limita a ellos.

Interpretación: Los efectos que se miden representan **diferencias sistemáticas entre los niveles específicos** de los factores considerados. Por lo tanto, estamos interesados en comparar estos niveles y determinar si tienen efectos significativos sobre la variable de respuesta.

Ejemplo: Si en un experimento ANOVA sobre la **efectividad de distintos tratamientos de descontaminación de aguas residuales** consideramos cuatro tratamientos específicos (A, B, C, D). Las conclusiones se aplican solo a estos tratamientos y no a otros posibles tratamientos que no se incluyeron en el estudio.

Modelo de Efectos Aleatorios (Random Effects Model): los niveles de los factores no son de interés por sí mismos, sino que son vistos como una **muestra aleatoria extraída de una población más amplia** de posibles niveles. El objetivo es generalizar los resultados a toda la población, no solo a los niveles específicos observados en el estudio.

Interpretación: Los niveles de los factores no están fijados, sino que se consideran **aleatorios**. Esto significa que estamos interesados en la **variabilidad de los efectos entre los niveles**, más que en las diferencias entre ellos.

Ejemplo: **Variabilidad de la calidad del aire en diferentes ciudades**, donde seleccionamos aleatoriamente 10 ciudades de un conjunto más amplio de posibles ciudades. En este caso, los niveles (ciudades) son vistos como efectos aleatorios porque no estamos interesados en esas ciudades específicas, sino en la variabilidad entre ciudades en general.

2. Análisis de la varianza

2.4. Consejos experimentación para validez del ANOVA

1. Asegura la Aleatorización en el Diseño del Experimento

Consejo: Aleatoriza la asignación de tratamientos a las unidades experimentales. Esto ayuda a evitar sesgos sistemáticos y asegura que los factores no controlados se distribuyan de manera uniforme entre los tratamientos, lo que mejora la validez de las conclusiones.

Importancia: La aleatorización es crucial para garantizar que las diferencias observadas entre los grupos se deban a los tratamientos aplicados y no a variables confusas o a un mal diseño del experimento.

2. Verifica los Supuestos del ANOVA

Consejo: ANOVA asume que los residuos del modelo son independientes, siguen una **distribución normal**, y tienen **varianzas homogéneas** (homocedasticidad). Antes de aplicar ANOVA, verifica estos supuestos mediante pruebas estadísticas (como la prueba de Levene para la homocedasticidad) o gráficos de diagnóstico (como gráficos Q-Q para la normalidad).

Importancia: El incumplimiento de estos supuestos puede afectar la precisión del ANOVA, y en tales casos, podrías necesitar transformaciones de datos o aplicar técnicas alternativas (como pruebas no paramétricas).

2. Análisis de la varianza

2.4. Consejos experimentación para validez del ANOVA

3. Asegura un Tamaño de Muestra Adecuado

Consejo: Estima y planifica el tamaño de muestra adecuado para tu experimento utilizando cálculos de **potencia estadística**. Un tamaño de muestra pequeño puede reducir la capacidad del ANOVA para detectar diferencias significativas, mientras que un tamaño de muestra excesivo puede generar resultados significativos pero no relevantes.

Importancia: Un tamaño de muestra adecuado asegura que tu experimento tenga suficiente poder para detectar diferencias reales entre los tratamientos, lo que aumenta la fiabilidad y validez de los resultados.

Atención: no es necesario que cada factor tenga el mismo tamaño de muestra, si bien es muy aconsejable (**Diseño balanceado**).

4. Minimiza la Variabilidad No Controlada

Consejo: Controla cuidadosamente las **condiciones experimentales** y minimiza la **variabilidad no deseada** (ruido) en el experimento. Si es posible, utiliza bloques o replicaciones para reducir la influencia de factores no controlados.

Importancia: La variabilidad no controlada puede aumentar el error dentro de los grupos y reducir la capacidad de ANOVA para detectar diferencias significativas entre los tratamientos. Bloquear o replicar reduce esta variabilidad y mejora la precisión del análisis.

GUIA DE CONTENIDOS

1. Objetivos
2. Análisis de la varianza (ANOVA)
3. ANOVA experimentos de un factor
4. Comparaciones múltiples de ANOVA de experimentos de un factor
5. ANOVA experimentos de dos factores
6. Resumen y ejercicio entregable

3. ANOVA Experimentos de un factor

3.1. Enunciado de ejemplo

Un ingeniero medioambiental quiere investigar cómo diferentes niveles de concentración de un fertilizante afectan el crecimiento de plantas acuáticas en un ambiente controlado. El objetivo es determinar si la **concentración de fertilizante** (factor) tiene un impacto significativo en el crecimiento de las plantas, medido en altura promedio (en cm) después de un mes.

El experimento se realiza bajo cuatro niveles de concentración de fertilizante: Nivel 1: 0 mg/L (control), Nivel 2: 50 mg/L, Nivel 3: 100 mg/L, Nivel 4: 150 mg/L. Cada nivel de concentración se prueba con **5 réplicas** (5 plantas) para asegurar la robustez de los resultados.

Resultados Experimentales:

A continuación se muestra la altura promedio (en cm) de las plantas acuáticas en las 5 réplicas para cada nivel de concentración de fertilizante:

Continúa la robustez de los resultados.

Resultados Experimentales:

En la continuación se muestra la altura promedio (en cm) de las plantas acuáticas en las 5 réplicas para cada nivel de concentración de fertilizante:

Variable respuesta

Unidades experimentales

Réplicas

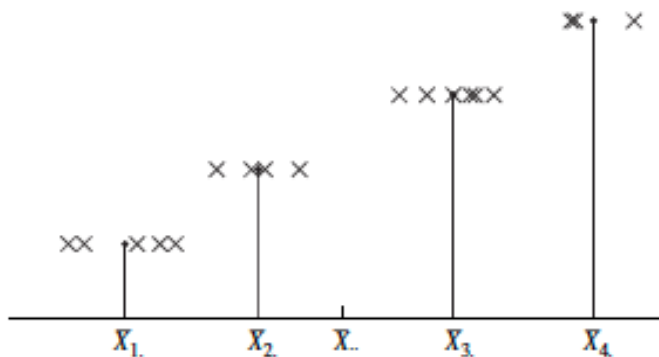
Factor	Nivel de Concentración (mg/L)	Réplica 1	Réplica 2	Réplica 3	Réplica 4	Réplica 5	Media muestral	Desviación estándar muestral
Tratamientos (niveles de factor)	0 mg/L	5.20	4.80	5.10	5.00	4.90	5.00	0.16
	50 mg/L	6.10	6.30	6.00	6.20	6.50	6.22	0.19
	100 mg/L	7.00	7.20	7.10	7.30	7.00	7.12	0.13
	150 mg/L	7.90	8.00	7.80	8.10	7.70	7.90	0.16

3. ANOVA Experimentos de un factor

3.2. ANOVA en un sentido (one-way ANOVA)

Hipótesis en ANOVA

- **Hipótesis nula (H_0):** Las medias de todos los grupos son iguales, por efecto de la aleatoriedad de los datos.
- **Hipótesis alternativa (H_1):** Al menos una de las medias es diferente, por efecto del tratamiento.



Aleatoriedad > Tratamientos

Tratamientos > Aleatoriedad

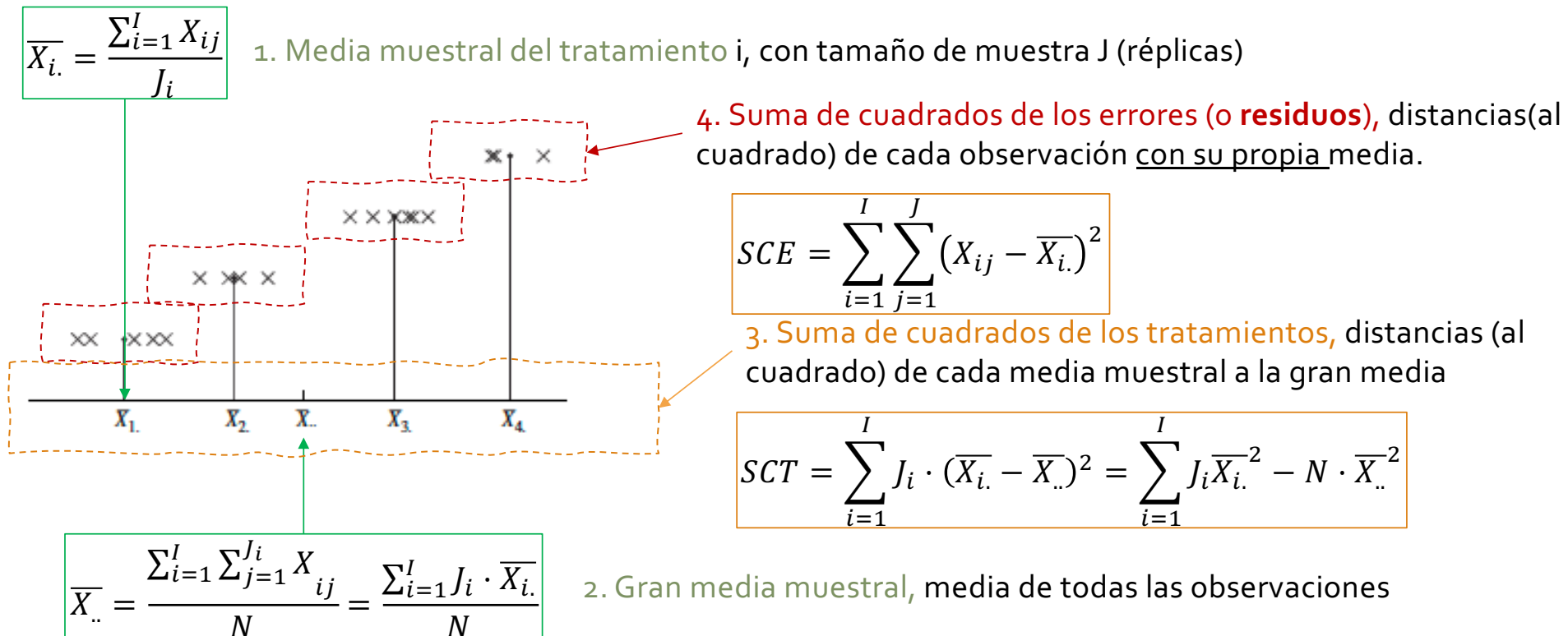
Estadístico

Tratamientos
Aleatoriedad

PRUEBA F

3. ANOVA Experimentos de un factor

3.3. Elementos de un ANOVA



Notar que $SC_{TOT} = SCT + SCE$ (Identidad del análisis de la varianza)

3. ANOVA Experimentos de un factor

3.3. Elementos de un ANOVA

PRUEBA F

Estadístico

Tratamientos
Aleatoriedad

5. Media cuadrática del tratamiento

$$MCT = \frac{SCT}{I - 1}$$

6. Media cuadrática del error

$$MCE = \frac{SCE}{N - I}$$

$$F = \frac{MCT}{MCE}$$

Cada SC (SCT o SCE, dividida por sus grados de libertad [Tenemos I tratamientos y N observaciones en total])

Cuando H_0 es verdadera, el numerador y el denominador son, en promedio, similares, por lo que F tiende a 1.

Cuando H_0 es falsa, el MCT tiende a ser mayor, pero no la MCE, por lo que F tiende a ser mayor de 1

El estadístico de prueba sigue una distribución F con I-1 (numerador), y N-I (denominador) grados de libertad.

3. ANOVA Experimentos de un factor

3.4. ANOVA en un sentido (one-way ANOVA)

Dados I tratamientos Para probar $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_I$, frente a H_1 , en el que, dos o más son diferentes.

1. Calcular medias muestrales y gran media.

$$\bar{X}_{i.} = \frac{\sum_{j=1}^I X_{ij}}{J_i}$$

$$\bar{X}_{..} = \frac{\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^{J_i} X_{ij}}{N} = \frac{\sum_{i=1}^I J_i \cdot \bar{X}_{i.}}{N}$$

2. Calcular Suma de Cuadrados de los Tratamientos (SCT)

$$SCT = \sum_{i=1}^I J_i \cdot (\bar{X}_{i.} - \bar{X}_{..})^2 = \sum_{i=1}^I J_i \bar{X}_{i.}^2 - N \cdot \bar{X}_{..}^2$$

3. Calcular Suma de Cuadrados de los Errores (SCE)

$$SCE = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^{J_i} (X_{ij} - \bar{X}_{i.})^2$$

4. Calcular media cuadrática del tratamiento (MCT) y de los errores (MCE)

5. Calcular estadístico de prueba F

$$MCT = \frac{SCT}{I - 1}$$

$$MCE = \frac{SCE}{N - I}$$

6. Comprobar contraste hipótesis, buscando el p-valor de la distribución F con $I-1$ y $N-I$ grados de libertad.

$$F = \frac{MCT}{MCE}$$

3. ANOVA Experimentos de un factor

3.5. Resolución enunciados I. Fertilizantes

Un ingeniero medioambiental quiere investigar cómo diferentes niveles de concentración de un fertilizante afectan el crecimiento de plantas acuáticas en un ambiente controlado. El objetivo es determinar si la **concentración de fertilizante** (factor) tiene un impacto significativo en el crecimiento de las plantas, medido en altura promedio (en cm) después de un mes.

El experimento se realiza bajo cuatro niveles de concentración de fertilizante: Nivel 1: 0 mg/L (control), Nivel 2: 50 mg/L, Nivel 3: 100 mg/L, Nivel 4: 150 mg/L. Cada nivel de concentración se prueba con **5 réplicas** (5 plantas) para asegurar la robustez de los resultados.

Resultados Experimentales:

A continuación se muestra la altura promedio (en cm) de las plantas acuáticas en las 5 réplicas para cada nivel de concentración de fertilizante:

Nivel de Concentración (mg/L)	Réplica 1	Réplica 2	Réplica 3	Réplica 4	Réplica 5
0 mg/L	5.20	4.80	5.10	5.00	4.90
50 mg/L	6.10	6.30	6.00	6.20	6.50
100 mg/L	7.00	7.20	7.10	7.30	7.00
150 mg/L	7.90	8.00	7.80	8.10	7.70

3. ANOVA Experimentos de un factor

3.5. Resolución enunciados de ejemplo I. Fertilizantes

Dados I tratamientos Para probar $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_I$, frente a H_1 , en el que, dos o más son diferentes.

1. Calcular medias muestrales y gran media.

2. Calcular Suma de Cuadrados de los Tratamientos (SCT)

3. Calcular Suma de Cuadrados de los Errores (SCE)

4. Calcular media cuadrática del tratamiento (MCT) y de los errores (MCE)

5. Calcular estadístico de prueba F

6. Comprobar contraste hipótesis, buscando el p-valor de la distribución F con I-1 y N-1 grados de libertad.

Nivel de Concentración (mg/L)	Réplica 1	Réplica 2	Réplica 3	Réplica 4	Réplica 5	Media muestral
0 mg/L	5.20	4.80	5.10	5.00	4.90	5.00
50 mg/L	6.10	6.30	6.00	6.20	6.50	6.22
100 mg/L	7.00	7.20	7.10	7.30	7.00	7.12
150 mg/L	7.90	8.00	7.80	8.10	7.70	7.90
					Gran media	6.56

$SCT=23.292$, $SCE= 0.416$ (diferencia $SCT > SCE$)

$MCT = 7.764$, $MCE= 0.026$

$F= 298.61$

$p - \text{valor} = 2.97e-14 <<<< 0.05$

Se rechaza H_0 y se concluye que sí hay diferencia entre tratamientos (no especifica)

3. ANOVA Experimentos de un factor

3.5. Resolución enunciados II. Dureza Brinell soldaduras

Fuente: Navidi W, Estadística para Ingenieros y científicos. MC Graw-Hill, 5 ed

El artículo "An Investigation of the CaCO-CaF K SiO₃-SiO₂-Fe Flux System Using the Submerged Arc Welding Process on HSLA-100 and AISI-1081 Steels" (G. Fredrickson, tesis de maestría, Colorado School of Mines, 1992) describe un experimento en el que se prepararon flujos de soldadura con diferentes composiciones químicas. Se hicieron varias soldaduras utilizando cada flujo sobre metal con base de acero AISI-1018. En la tabla se presentan los resultados de las mediciones de dureza. en la escala Brinell, de cinco soldaduras que usan cada uno de los cuatro flujos.

FLUJO	Réplica 1	Réplica 2	Réplica 3	Réplica 4	Réplica 5
A	250	264	256	260	239
B	263	254	267	265	267
C	257	279	269	273	277
D	253	258	262	264	273

3. ANOVA Experimentos de un factor

3.5. Resolución enunciados II. Dureza Brinell soldaduras

Fuente: Navidi W, Estadística para Ingenieros y científicos. MC Graw-Hill, 5 ed

Dados I tratamientos Para probar $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_I$, frente a H_1 , en el que, dos o más son diferentes.

1. Calcular medias muestrales y gran media.
2. Calcular Suma de Cuadrados de los Tratamientos (SCT)
3. Calcular Suma de Cuadrados de los Errores (SCE)
4. Calcular media cuadrática del tratamiento (MCT) y de los errores (MCE)
5. Calcular estadístico de prueba F
6. Comprobar contraste hipótesis, buscando el p-valor de la distribución F con I-1 y N-1 grados de libertad.

FLUJO	Réplica 1	Réplica 2	Réplica 3	Réplica 4	Réplica 5	Media muestral	Desviacion estándar muestral
A	250	264	256	260	239	253.8	9.7570
B	263	254	267	265	267	263.2	5.4037
C	257	279	269	273	277	271.0	8.7178
D	253	258	262	264	273	262.0	7.4498
					Gran media	262.5	

SCT=743,4 SCE= 1023.6 (ojo diferencia SCE> SCT)
MCT = 247.8 , MCE= 63.97

F= 23.87

p – valor = 0.029

Se rechaza H_0 y se concluye que sí hay diferencia entre tratamientos (no especifica)

3. ANOVA Experimentos de un factor

3.6. Resolución con software estadístico

Ruta: Datos → Análisis de datos → Análisis de datos de un factor

Pasos

1. Indicar estructura de datos (ordenación en columnas o filas, e indicación de títulos)
2. Escoger criterio de significancia estadística (Alpha)
3. Escoger rango de salida (celda)
4. Aceptar e **interpretar**

EXCEL

FLUJO	Réplica 1	Réplica 2	Réplica 3	Réplica 4	Réplica 5
A	250	264	256	260	239
B	263	254	267	265	267
C	257	279	269	273	277
D	253	258	262	264	273

Origen de las variaciones	Suma de cuadrados	Grados de libertad	Promedio de los cuadrados	F	Probabilidad	Valor crítico para F
Entre grupos	743.4	3	247.8	3.87338804	0.02943665	3.238871517
Dentro de los grupos	1023.6	16	63.975			
Total	1767	19				

EJERCICIOS – Uso de análisis de datos en excel

3. ANOVA Experimentos de un factor

3.6. Resolución con software estadístico

JAMOVİ

Ruta: Análisis → ANOVA → ANOVA de un factor

1. Transformar datos en dos columnas
2. Columna 1 "Nominal" y 2 "Decimal"
3. Escoger pruebas y análisis
4. Aceptar e interpretar
5. Observar información extra (Intervalos de confianza, normalidad, etc...)

Tratamiento	Valor	Valor	Valor	Valor	Valor
A	250	264	256	260	239
B	263	254	267	265	267
C	257	279	269	273	277
D	253	258	262	264	273

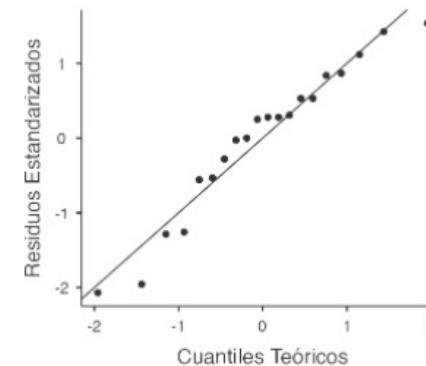
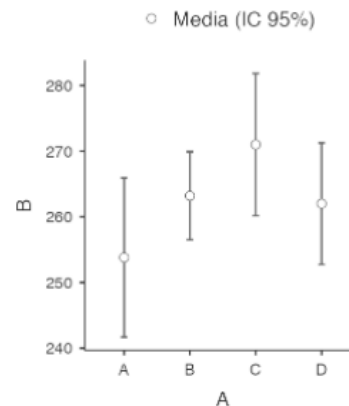
ANOVA de Un Factor

ANOVA de Un Factor (Fisher)

	F	gl1	gl2	p
B	3.873	3	16	0.029

Descriptivas de Grupo

	A	N	Media	DE	EE
B	A	5	253.800	9.757	4.363
	B	5	263.200	5.404	2.417
	C	5	271.000	8.718	3.899
	D	5	262.000	7.450	3.332

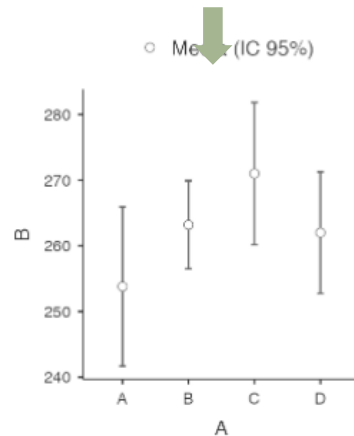
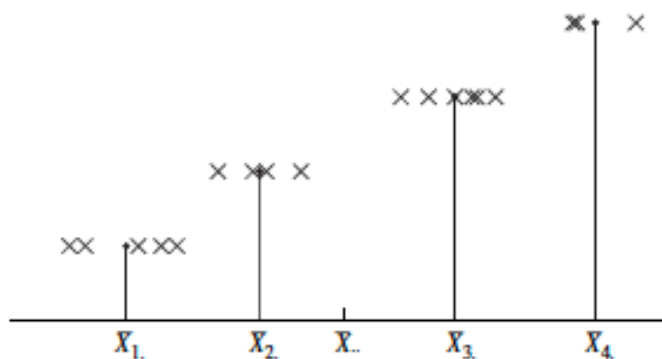


↓

Tratamiento	Valor
A	250
A	264
A	256
A	260
A	239
B	263
B	254
B	267
B	265
B	267
C	257
C	279
C	269
C	273
C	277
D	253
D	258
D	262
D	264
D	273

3. ANOVA Experimentos de un factor

3.7. Intervalos de confianza para medias de tratamiento



Dado que se parte de que todos los tratamientos tienen la misma varianza, la varianza de una media muestral puede estar estimada por $\sqrt{\frac{MCE}{J_i}}$

Así, la cantidad $\frac{\bar{X}_{i.} - \mu_i}{\sqrt{\frac{MCE}{J_i}}}$ sigue una distrib t de Student con **N-I gl**

En consecuencia, un **intervalo de confianza al (100- α)%** para la población μ_i del tratamiento i, del cual se conoce su media muestral y su tamaño muestral (J_i), viene dado por:

$$\bar{X}_{i.} \pm t_{N-I, \alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{MCE}{J_i}}$$

EJERCICIOS – Uso de análisis de datos en JAMOV

GUIA DE CONTENIDOS

1. Objetivos
2. Análisis de la varianza (ANOVA)
3. ANOVA experimentos de un factor
4. Comparaciones múltiples de ANOVA de experimentos de un factor
5. ANOVA experimentos de dos factores
6. Resumen y ejercicio entregable

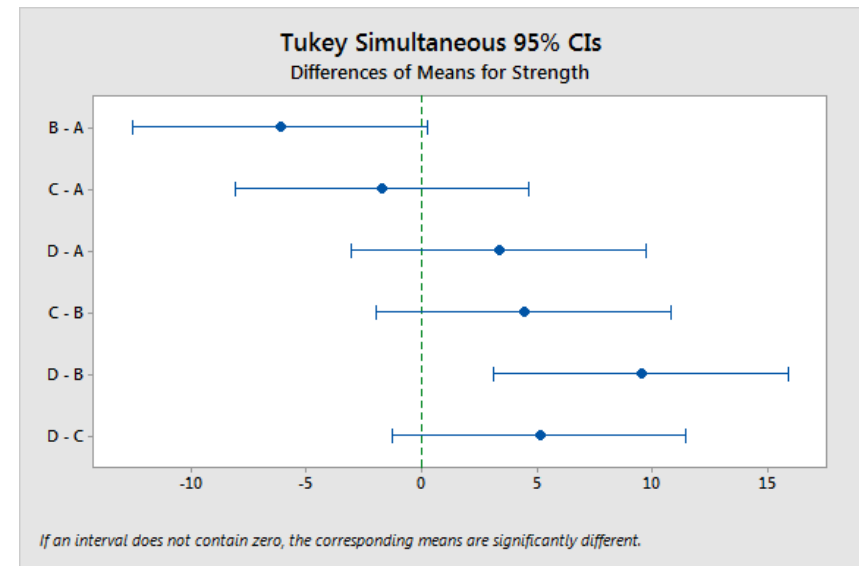
4. Comparaciones múltiples de ANOVA de experimentos de un factor

4.1. Concepto

El one-way ANOVA puede indicar si existe o no diferencia entre tratamientos, pero no informa cuáles son diferentes del resto. Podemos aplicar **métodos post-hoc**

A. En caso de querer comparar dos tratamientos específicos, se utiliza el método de la diferencia mínima significativa de **Fischer** (LSD: Least Significant Difference). Se puede aplicar de forma consecutiva para muchas comparaciones por pares, pero no controla el error tipo I acumulado, por lo que se establecen otros métodos (B).

B. En caso de querer determinar las diferencias entre todos los pares de medias asociados a todos los tratamientos, se puede utilizar los métodos de Bonferroni o **Tukey-Kramer**.



Fuente: Statistics with Jim

4. Comparaciones múltiples de ANOVA de experimentos de un factor

4.2. Método LSD de Fischer (diferencia 2 tratamientos)

La diferencia de medias de dos tratamientos i-j, estandarizada, lleva a la **cantidad**:

, que sigue una **distribución t de Student** con N-I gl $t_{N-I, \alpha/2}$

$$\frac{(\bar{X}_i - \bar{X}_j) - (\mu_i - \mu_j)}{\sqrt{MCE \cdot \left(\frac{1}{J_i} + \frac{1}{J_j}\right)}}$$

Diferencia mínima significativa (LSD) entre las medias poblacionales de dos tratamientos i-j, para un nivel de $100(1 - \alpha)\%$

$$LSD = t_{N-I, \alpha/2} \cdot \sqrt{MCE \cdot \left(\frac{1}{J_i} + \frac{1}{J_j}\right)}$$

Contraste: Se rechaza H_0 al nivel α , si se cumple que

$$|\bar{X}_i - \bar{X}_j| > LSD = t_{N-I, \alpha/2} \cdot \sqrt{MCE \cdot \left(\frac{1}{J_i} + \frac{1}{J_j}\right)}$$

En consecuencia, un **intervalo de confianza al $(100-\alpha)\%$** para la población μ_i del tratamiento i, del cual se conoce su media muestral y su tamaño muestral (J_i), viene dado por:

$$(\bar{X}_i - \bar{X}_j) \pm t_{N-I, \alpha/2} \cdot \sqrt{MCE \cdot \left(\frac{1}{J_i} + \frac{1}{J_j}\right)}$$

4. Comparaciones múltiples de ANOVA de experimentos de un factor

4.3. Método Tukey-Kramer (diferencia ≥ 3 tratamientos)

Recomendado

La diferencia de medias de dos tratamientos i-j, estandarizada, lleva a la **cantidad**:

, que sigue una **distribución q de rango estudentizado** $q_{I,N-I,\alpha}$ con I, y N-I gl

$$\frac{(\bar{X}_i - \bar{X}_j) - (\mu_i - \mu_j)}{\sqrt{\frac{MCE}{2} \cdot \left(\frac{1}{J_i} + \frac{1}{J_j}\right)}}$$

Diferencia **honestamente significativa de Tukey -Kramer (LSD)** entre las medias poblacionales de dos tratamientos i-j, para un nivel de $100(1 - \alpha)\%$

$$HSD_{TK} = q_{I,N-I,\alpha} \cdot \sqrt{\frac{MCE}{2} \cdot \left(\frac{1}{J_i} + \frac{1}{J_j}\right)}$$

Contraste: Se rechaza H_0 al nivel α , si se cumple que

$$|\bar{X}_i - \bar{X}_j| > HSD_{TK} = q_{I,N-I,\alpha} \cdot \sqrt{\frac{MCE}{2} \cdot \left(\frac{1}{J_i} + \frac{1}{J_j}\right)}$$

En consecuencia, un **intervalo de confianza al $(100-\alpha)\%$** para la población μ_i del tratamiento i, del cual se conoce su media muestral y su tamaño muestral (J_i), viene dado por:

$$(\bar{X}_i - \bar{X}_j) \pm q_{I,N-I,\alpha} \cdot \sqrt{\frac{MCE}{2} \cdot \left(\frac{1}{J_i} + \frac{1}{J_j}\right)}$$

4. Comparaciones múltiples de ANOVA de experimentos de un factor

4.3. Método Tukey-Kramer (diferencia >=3 tratamientos)

Continuación ejercicio DUREZA BRINELL

JAMOVÍ

Tratamiento	Valor	Valor	Valor	Valor	Valor
A	250	264	256	260	239
B	263	254	267	265	267
C	257	279	269	273	277
D	253	258	262	264	273

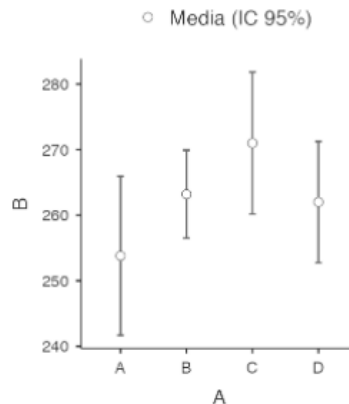
ANOVA de Un Factor

ANOVA de Un Factor (Fisher)

	F	gl1	gl2	p
B	3.873	3	16	0.029

Descriptivas de Grupo

	A	N	Media	DE	EE
B	A	5	253.800	9.757	4.363
	B	5	263.200	5.404	2.417
	C	5	271.000	8.718	3.899
	D	5	262.000	7.450	3.332



$$|\bar{X}_i - \bar{X}_j| > HSD_{TK} = q_{I, N-I, \alpha} \cdot \sqrt{\frac{MCE}{2} \cdot \left(\frac{1}{J_i} + \frac{1}{J_j} \right)}$$

Pruebas Post Hoc

Tukey Post-Hoc Test – B

		A	B	C	D
A	Diferencia de medias	—	-9.400	-17.200 *	-8.200
	valor t	—	-1.858	-3.400	-1.621
	gl	—	16.000	16.000	16.000
	valor p	—	0.284	0.017	0.395
B	Diferencia de medias		—	-7.800	1.200
	valor t		—	-1.542	0.237
	gl		—	16.000	16.000
	valor p		—	0.437	0.995
C	Diferencia de medias			—	9.000
	valor t			—	1.779
	gl			—	16.000
	valor p			—	0.319
D	Diferencia de medias				—
	valor t				—
	gl				—
	valor p				—

Nota. * p < .05, ** p < .01, *** p < .001

Sólo A y C pueden considerarse diferentes.

EJERCICIOS

GUIA DE CONTENIDOS

1. Objetivos
2. Análisis de la varianza (ANOVA)
3. ANOVA experimentos de un factor
4. Comparaciones múltiples de ANOVA de experimentos de un factor
5. ANOVA experimentos de dos factores
6. Resumen y ejercicio entregable

5. ANOVA de experimentos de dos factores

5.1. Concepto

El **two-way ANOVA** es una extensión del ANOVA de un factor que se utiliza para evaluar el efecto de **dos variables independientes (factores)** sobre una variable dependiente continua.

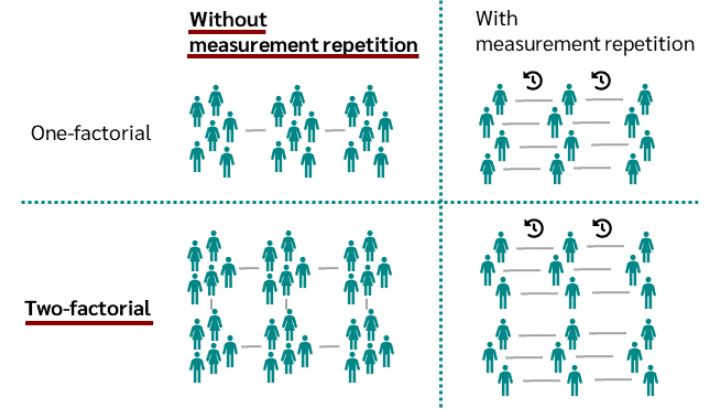
Objetivos del ANOVA de Dos Factores

- **Evaluar el efecto de cada uno de los factores individualmente** (efectos principales).
- **Evaluar la interacción entre los dos factores**: si el efecto de un factor sobre la variable dependiente cambia según el nivel del otro factor.

Supuestos del ANOVA de Dos Factores

Los supuestos del ANOVA de dos factores son similares a los del ANOVA de un factor:

- 1. Independencia de las observaciones**: Las observaciones en cada grupo deben ser independientes unas de otras.
- 2. Normalidad**: Los residuos (diferencias entre las observaciones y las medias de los grupos) deben seguir una distribución normal.
- 3. Homocedasticidad**: Las varianzas de los grupos deben ser homogéneas.



Fuente: DataTab

5. ANOVA de experimentos de dos factores

5.2. Enunciado de ejemplo

Fuente: Navidi W, Estadística para Ingenieros y científicos. MC Graw-Hill, 5 ed

Una ingeniería de catálisis está estudiando los efectos de diferentes reactivos y catalizadores sobre la conversión de la reacción.

FACTOR FILA (I niveles = 4)

FACTOR COLUMNA (J niveles = 3)

CAT	Reactivo											
	1				2				3			
A	86.8	82.4	86.7	83.5	93.4	85.2	94.8	83.1	77.9	89.6	89.9	83.7
B	71.9	72.1	80	77.4	74.5	87.1	71.9	84.1	87.5	82.7	78.3	90.1
C	65.5	72.4	76.6	66.7	66.7	77.1	76.7	86.1	72.7	77.8	83.5	78.8
D	63.9	70.4	77.2	81.2	73.7	81.6	84.2	84.9	79.8	75.7	80.5	72.9

DISEÑO

- Disposición de factores en filas o columnas: arbitrario.
- Mejor datos BALANCEADOS (mismo K)

TRATAMIENTO (X_{ijk})

COMBINACIÓN DE TRATAMIENTOS (ij-k)
con k RÉPLICAS (K=4)

5. ANOVA de experimentos de dos factores

5.3. Parametrización

Fuente: Navidi W, Estadística para Ingenieros y científicos. MC Graw-Hill, 5 ed

	Reactivo											
CAT	1				2				3			
A	86.8	82.4	86.7	83.5	93.4	85.2	94.8	83.1	77.9	89.6	89.9	83.7
B	71.9	72.1	80	77.4	74.5	87.1	71.9	84.1	87.5	82.7	78.3	90.1
C	65.5	72.4	76.6	66.7	66.7	77.1	76.7	86.1	72.7	77.8	83.5	78.8
D	63.9	70.4	77.2	81.2	73.7	81.6	84.2	84.9	79.8	75.7	80.5	72.9

1. Media del tratamiento ij (media de las celdas)

$$\bar{X}_{ij.} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K X_{ijk}$$

3 (o 2). Media de las columnas

$$\bar{X}_{.j.} = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \bar{X}_{ij.}$$

2 (o 3). Media de las filas

$$\bar{X}_{i..} = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J \bar{X}_{ij.}$$

CAT	1	2	3	
A	84.85	89.13	85.28	
B	75.35	79.40	84.65	
C	70.30	76.65	78.20	
D	73.18	81.10	77.23	
X.j.	75.92	81.57	81.34	X...

Xi..
86.42
79.80
75.05
77.17

X... 79.61

$$\bar{X}_{...} = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \bar{X}_{i..} = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J \bar{X}_{.j.} = \frac{1}{IJK} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K X_{ijk}$$

4. Gran media

5. ANOVA de experimentos de dos factores

5.3. Parametrización

Tendencia central de todos los tratamientos (gran media) Efecto factor fila (i) Efecto factor columna (j) Efecto interacción factores (ij) Error residual (ijk)

Respuesta tratamiento $\rightarrow X_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij} + \varepsilon_{ijk}$

$\varepsilon_{ijk} = X_{ijk} - \bar{X}_{ij}.$

ESTIMADORES

Efectos principales $\left\{ \begin{array}{l} \hat{\mu} = \bar{X}_{...} \\ \hat{\alpha}_i = \bar{X}_{i..} - \bar{X}_{...} \\ \hat{\beta}_j = \bar{X}_{.j.} - \bar{X}_{...} \end{array} \right.$

Efecto interacción $\rightarrow \hat{\gamma}_{ij} = \bar{X}_{ij.} + \bar{X}_{...} - \bar{X}_{.j.} - \bar{X}_{i..}$

Si no hay interacciones significativas, se puede explicar por **modelo aditivo**

$$X_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ijk}$$

5. ANOVA de experimentos de dos factores

5.4. ANOVA en dos sentidos (2-way ANOVA)

Se da respuesta a tres preguntas

1. **¿Es válido el modelo aditivo?** (¿No hay interacciones?)
2. En caso de ser aditivo
 - 2.1. ¿Es el resultado medio el mismo para todos los niveles del **factor fila**?
 - 2.2. ¿Es el resultado medio el mismo para todos los niveles del **factor columna**?

$$H_0: \gamma_{11} = \gamma_{12} \dots = \gamma_{ij} = \dots = \gamma_{IJ} = 0$$

Si se acepta H_0

$$H_0: \alpha_1 = \alpha_2 \dots = \alpha_i = \dots = \alpha_I = 0$$

$$H_0: \beta_1 = \beta_2 \dots = \beta_j = \dots = \beta_J = 0$$

CONDICIONES

1. Diseño **completo** y **balanceado** ($k \geq 2$)
2. **Normalidad**: Cualquier observación es una muestra aleatoria simple de una población normal.
3. **Homocedasticidad**: Varianza poblacional es la misma para todos los tratamientos.

$$X_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij} + \varepsilon_{ijk}$$

$$\hat{\mu} = \bar{X}_{...}$$

$$\hat{\alpha}_i = \bar{X}_{i..} - \bar{X}_{...}$$

$$\hat{\beta}_j = \bar{X}_{.j.} - \bar{X}_{...}$$

$$\hat{\gamma}_{ij} = \bar{X}_{ij.} + \bar{X}_{...} - \bar{X}_{.j.} - \bar{X}_{i..}$$

Se cumple que

$$\sum_{i=1}^I \hat{\alpha}_i = 0$$

$$\sum_{j=1}^J \hat{\beta}_j = 0$$

$$\sum_{j=1}^J \hat{\gamma}_{ij} = \sum_{i=1}^I \hat{\gamma}_{ij} = 0$$

5. ANOVA de experimentos de dos factores

5.4. ANOVA en dos sentidos (2-way ANOVA)

Procedimiento similar al ANOVA en un sentido:

- Cálculo de suma de cuadrados | Cálculo de medias cuadráticas | Cálculo de estadístico F | Análisis p-valor.

IDENTIDAD VARIANZA $STC = SCi + SCj + SCij + Sce$

Suma de cuadrados fila [g.l. = I-1]

$$SCi = JK \sum_{i=1}^I (\hat{\alpha}_i)^2 = JK \sum_{i=1}^I (\bar{X}_{i..} - \bar{X}_{...})^2$$

Suma de cuadrados errores [g.l. = IJ(K-1)]

$$Sce = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K (\hat{\gamma}_{ij})^2 = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K (X_{ijk} - \bar{X}_{ij.})^2$$

$$X_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij} + \varepsilon_{ijk}$$

Suma de cuadrados totales [g.l. = IJK-1]

$$SCT = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K (X_{ijk} - \bar{X}_{...})^2$$

$$\hat{\mu} = \bar{X}_{...}$$

$$\hat{\alpha}_i = \bar{X}_{i..} - \bar{X}_{...}$$

$$\hat{\beta}_j = \bar{X}_{.j.} - \bar{X}_{...}$$

$$\hat{\gamma}_{ij} = \bar{X}_{ij.} + \bar{X}_{...} - \bar{X}_{.j.} - \bar{X}_{i..}$$

Suma de cuadrados columna [g.l. = J-1]

$$SCj = IK \sum_{j=1}^J (\hat{\beta}_j)^2 = IK \sum_{j=1}^J (\bar{X}_{.j.} - \bar{X}_{...})^2$$

Suma de cuadrados interacción [g.l. = (I-1)·(J-1)]

$$SCij = K \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (\hat{\gamma}_{ij})^2 = K \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (\bar{X}_{ij.} + \bar{X}_{...} - \bar{X}_{.j.} - \bar{X}_{i..})^2$$

5. ANOVA de experimentos de dos factores

5.4. ANOVA en dos sentidos (2-way ANOVA)

Procedimiento similar al ANOVA en un sentido:

- Cálculo de suma de cuadrados |Cálculo de medias cuadráticas |Cálculo de estadístico F |Análisis p-valor.

Efectos principales

$$MC_i = \frac{SC_i}{I - 1}$$

$$MC_j = \frac{SC_j}{J - 1}$$

Efectos interacción

$$MC_{ij} = \frac{SC_{ij}}{(I - 1) \cdot (J - 1)}$$

$$MC_e = \frac{SC_e}{IJ \cdot (K - 1)}$$

¿No hay interacciones?

$$H_0: \gamma_{11} = \gamma_{12} \dots = \gamma_{ij} = \dots = \gamma_{IJ} = 0$$

$$\frac{MC_{ij}}{MCE} \sim F_{(I-1)(J-1), IJ(K-1)}$$

¿No hay efecto del factor i?

$$H_0: \alpha_1 = \alpha_2 \dots = \alpha_i = \dots = \alpha_I = 0$$

$$\frac{MC_i}{MCE} \sim F_{(I-1), IJ(K-1)}$$

¿No hay efecto del factor j?

$$H_0: \beta_1 = \beta_2 \dots = \beta_j = \dots = \beta_J = 0$$

$$\frac{MC_j}{MCE} \sim F_{(J-1), IJ(K-1)}$$

Se realiza **prueba F** comparando variaciones debidas al efecto (numerador) frente a variaciones debidas a la aleatoriedad de los datos (denominador).

Los puntajes de F se corresponden con los grados de libertad (g.l.) de numerador y denominador.

5. ANOVA de experimentos de dos factores

5.5. Resolución ejemplo. I. Interpretación tabla ANOVA

Fuente: Navidi W, Estadística para Ingenieros y científicos. MC Graw-Hill, 5 ed

	Reactivo											
CAT	1				2				3			
A	86.8	82.4	86.7	83.5	93.4	85.2	94.8	83.1	77.9	89.6	89.9	83.7
B	71.9	72.1	80	77.4	74.5	87.1	71.9	84.1	87.5	82.7	78.3	90.1
C	65.5	72.4	76.6	66.7	66.7	77.1	76.7	86.1	72.7	77.8	83.5	78.8
D	63.9	70.4	77.2	81.2	73.7	81.6	84.2	84.9	79.8	75.7	80.5	72.9



CAT	1	2	3		Xi..
A	84.85	89.13	85.28		86.42
B	75.35	79.40	84.65		79.80
C	70.30	76.65	78.20		75.05
D	73.18	81.10	77.23		77.17
X.j.	75.92	81.57	81.34	X...	79.61



ANÁLISIS DE VARIANZA						
Origen de las variaciones	Suma de cuadrados (SC)	Grados de libertad	Promedio de los cuadrados (MC)	F	Probabilidad	Valor crítico para F
Muestra	877.563	3.000	292.521	9.358	0.000	2.866
Columnas	327.140	2.000	163.570	5.233	0.010	3.259
Interacción	156.983	6.000	26.164	0.837	0.550	2.364
Dentro del grupo	1125.330	36.000	31.259			
Total	2487.017	47.000				

CONCLUSIONES

- No hay interacción
- Ambos factores i,j son significativos

EJERCICIOS

5. ANOVA de experimentos de dos factores

5.5. Resolución ejemplo. II. Uso EXCEL

Ruta: Datos → Análisis de datos → Análisis de varianza de dos factores con varias muestras por grupo

Pasos

1. Ordenar datos según ejemplo
2. Indicar número de filas por muestra
3. Escoger criterio de significancia estadística (Alpha)
4. Escoger rango de salida (celda)
5. Aceptar e **interpretar**

CAT	Reactivo											
	1				2				3			
A	86.8	82.4	86.7	83.5	93.4	85.2	94.8	83.1	77.9	89.6	89.9	83.7
B	71.9	72.1	80	77.4	74.5	87.1	71.9	84.1	87.5	82.7	78.3	90.1
C	65.5	72.4	76.6	66.7	66.7	77.1	76.7	86.1	72.7	77.8	83.5	78.8
D	63.9	70.4	77.2	81.2	73.7	81.6	84.2	84.9	79.8	75.7	80.5	72.9



Catalizador	Reactivo		
	1	2	3
A	86.8	93.4	77.9
	82.4	85.2	89.6
	86.7	94.8	89.9
	83.5	83.1	83.7
B	71.9	74.5	87.5
	72.1	87.1	82.7
	80	71.9	78.3
	77.4	84.1	90.1
C	65.5	66.7	72.7
	72.4	77.1	77.8
	76.6	76.7	83.5
	66.7	86.1	78.8
D	63.9	73.7	79.8
	70.4	81.6	75.7
	77.2	84.2	80.5
	81.2	84.9	72.9



**Resultado
en
diapositiva
anterior**

5. ANOVA de experimentos de dos factores

5.5. Resolución ejemplo. III. Uso JAMOV

Ruta: Análisis → ANOVA

Pasos

1. Ordenar datos según ejemplo
2. Análisis-ANOVA
3. Indicar Variable respuesta y Factores
4. Aceptar e **interpretar**
5. **Explorar opciones.**

ANOVA - C

	Suma de Cuadrados	gl	Media Cuadrática	F	p
Modelo global	1361.687	11	123.790	3.960	<.001
A	877.563	3	292.521	9.358	<.001
B	327.140	2	163.570	5.233	0.010
A * B	156.983	6	26.164	0.837	0.550
Residuos	1125.330	36	31.259		

Permite, además del análisis ANOVA, realizar test de verificación de normalidad y homocedasticidad, así como post-hoc Tukey test

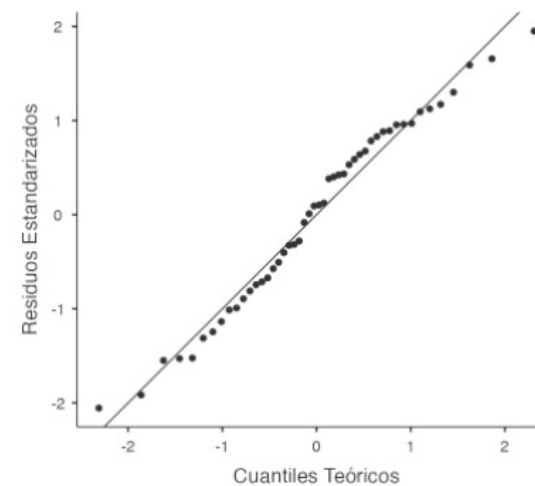
Comprobaciones de Supuestos

Prueba de Levene para homogeneidad de varianzas			
F	gl1	gl2	p
1.046	11	36	0.429

Prueba de Normalidad (Shapiro-Wilk)	
Estadístico	p
0.974	0.372

CAT	Reactivo											
	1				2				3			
A	86.8	82.4	86.7	83.5	93.4	85.2	94.8	83.1	77.9	89.6	89.9	83.7
B	71.9	72.1	80	77.4	74.5	87.1	71.9	84.1	87.5	82.7	78.3	90.1
C	65.5	72.4	76.6	66.7	66.7	77.1	76.7	86.1	72.7	77.8	83.5	78.8
D	63.9	70.4	77.2	81.2	73.7	81.6	84.2	84.9	79.8	75.7	80.5	72.9

Gráfica Q-Q



A	1	86.8
A	1	82.4
A	1	86.7
A	1	83.5
A	2	93.4
A	2	85.2
A	2	94.8
A	2	83.1
A	3	77.9
A	3	89.6
A	3	89.9
A	3	83.7
B	1	71.9
B	1	72.1
B	1	80
B	1	77.4
B	2	74.5
B	2	87.1
B	2	71.9
B	2	84.1
B	3	87.5
B	3	82.7
B	3	78.3
B	3	90.1
C	1	65.5
C	1	72.4
C	1	76.6
C	1	66.7
C	2	66.7
C	2	77.1
C	2	76.7
C	2	86.1
C	3	72.7
C	3	77.8
C	3	83.5
C	3	78.8
D	1	63.9
D	1	70.4
D	1	77.2
D	1	81.2
D	2	73.7
D	2	81.6
D	2	84.2
D	2	84.9
D	3	79.8
D	3	75.7
D	3	80.5
D	3	72.9

5. ANOVA de experimentos de dos factores

5.5. Resumen procedimiento

Dados IJ tratamientos, con factores i, j , y k réplicas por tratamiento.

1. Calcular medias muestrales de fila (i) y columna (j) y gran media.
2. Calcular Suma de Cuadrados de los Tratamientos principales y de interacción ($SCT, S_{Ci}, S_{Cj}, S_{Cij}$)
3. Calcular Suma de Cuadrados de los Errores (SCE)
4. Calcular media cuadrática del tratamientos (M_{Ci}, M_{Cj}, M_{Cij}) y de los errores (MCE)
5. Calcular estadístico de prueba F
6. Comprobar contraste hipótesis de interacción, buscando el p -valor de la distribución F con los grados de libertad correspondientes.
7. Si 6 se confirma (no hay interacción), comprobar contraste hipótesis de interacción, buscando el p -valor de la distribución F con los grados de libertad correspondientes. Si el modelo no es aditivo (hay interacciones), no hay que interpretar resultados de los efectos principales, sino observar las medias de fila-columna

5. ANOVA de experimentos de dos factores

5.6. Precauciones

1. Si el modelo no es aditivo (hay interacciones), no hay que interpretar resultados de los efectos principales, sino observar las medias de fila-columna para evaluar el impacto de los datos.
2. Un ANOVA en dos sentidos no es lo mismo que dos ANOVA en un sentido. Pueden resultar engañosos si hay interacciones entre los resultados de los tratamientos.
3. ANOVA de dos sentidos cuando $K=1$, no se puede aplicar, ya que $SCE=0$. Por seguridad, se tendrá que hacer, al menos, 2 réplicas.
4. Modelos avanzados (En esta asignatura se estudia modelo de factores fijos)
 1. Modelo de factores aleatorios (frente a fijos), o modelos mixtos (fijos-aleatorios)– Ver Hocking (2014).
 2. Diseños desbalanceados (diferentes k por cada $i-j$) – Ver Draper-Smith (1998)

5. ANOVA de experimentos de dos factores

5.7. Comprobación de supuestos. I. Normalidad

La **prueba de Shapiro-Wilk** es una prueba estadística que evalúa la **normalidad** de una muestra de datos.

Hipótesis Nula H_0 : Los datos provienen de una distribución normal. **Hipótesis Alternativa H_1 :** Los datos no provienen de una distribución normal.

$$W_{\text{Shapiro-Wilk}} = \frac{(\sum_{i=1}^n a_i \cdot x_{(i)})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

$$W_{\text{Shapiro-Wilk}} \sim W_{SW} (g.l.=n) \in (0,1)$$

Utilizaremos software específico

SAPHIRO-WILKS

La prueba de Shapiro-Wilk compara el ordenamiento de los datos observados con el orden esperado en una distribución normal.

- 1.Ordenación de los Datos:** Los datos observados se ordenan de menor a mayor.
- 2.Cálculo de Coeficientes de la Prueba:** Se calculan los coeficientes a_i , que dependen del tamaño de la muestra y de la **distribución normal esperada**. Estos coeficientes se obtienen de tablas o cálculos previos basados en la distribución normal [software].
- 3.Cálculo del estadístico de prueba**
- 4.Distribución del Estadístico:** El estadístico W sigue una distribución específica Saphiro-Wilks que permite calcular un valor p asociado. Este valor p se utiliza para evaluar la hipótesis nula.

5. ANOVA de experimentos de dos factores

5.7. Comprobación de supuestos. II. Homocedasticidad

La **prueba de Levene** es un test estadístico utilizado para evaluar la **homogeneidad de varianzas** (también conocida como **homocedasticidad**) entre varios grupos. En muchas aplicaciones estadísticas, como el ANOVA o la regresión lineal, se asume que las varianzas de los diferentes grupos son iguales. La heterocedasticidad (varianzas desiguales entre grupos) puede invalidar los resultados de estos análisis.

$$Z_{ij} = |X_{ij} - \bar{X}_i|$$

$$W_{Levene} = \frac{\frac{\sum_{i=1}^I J \cdot (\bar{Z}_{i.} - \bar{Z})^2}{(I - 1)}}{\frac{\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (Z_{ij} - \bar{Z}_{i.})^2}{(N - I)}}$$

$$W_{Levene} \sim F_{\alpha, I-1, N-I}$$

LEVENE

La prueba de Levene convierte las observaciones en desviaciones absolutas desde la mediana (o la media, dependiendo de la variante de la prueba) y luego compara estas desviaciones entre los grupos. Los pasos son los siguientes:

1. Cálculo de la Mediana o la Media de cada Grupo: Para cada grupo i , se calcula la mediana o la media (según la variante de la prueba).

2. Cálculo de las Desviaciones Absolutas: Para cada observación se calcula la desviación absoluta respecto a la mediana o la media del grupo.

3. Aplicación de ANOVA a las Desviaciones Absolutas: Luego se realiza un ANOVA de un solo factor sobre las desviaciones absolutas para determinar si las medias de las desviaciones absolutas son iguales entre los grupos.

4. Estadístico de la Prueba: El estadístico de la prueba de Levene sigue una distribución F bajo la hipótesis nula.

EJERCICIOS

GUIA DE CONTENIDOS

1. Objetivos
2. Análisis de la varianza (ANOVA)
3. ANOVA experimentos de un factor
4. Comparaciones múltiples de ANOVA de experimentos de un factor
5. ANOVA experimentos de dos factores
6. Resumen y ejercicio entregable

6. Resumen y ejercicio entregable

6.1. Resumen

- **Análisis de la varianza (ANOVA):** comparación de la variabilidad total de los datos entre grupos (tratamientos) y dentro de los grupos (residuos). Modelo de factores fijos y balanceados.
- **ANOVA experimentos de un factor:** Suma de cuadrados, media cuadrática, grados de libertad, prueba F, intervalos de confianza.
- **Comparaciones múltiples de ANOVA de experimentos de un factor.** Método post-hoc. LSD Fischer y HDS de Tukey-Kramer.
- **ANOVA experimentos de dos factores.** Suma de cuadrados, media cuadrática, grados de libertad, prueba F, efectos principales (filas, columnas), efectos de interacción, normalidad (prueba Saphiro-Wilks), homocedasticidad (prueba Levene).
- **Software informático:** cálculo inmediato (Excel, JAMOVI).

6. Resumen y ejercicio entregable

6.2. Entregable

- Entregable individual o por parejas.
- **Objetivos:**
 - Contextualizar el trabajo en una experiencia del estudiante.
 - Trabajar la comprensión de la técnica estadística mediante la abstracción y construcción del problema.
 - Potenciar el manejo de software estadístico para la resolución de problemas.

TRABAJO

- A partir de los datos de una experimentación realizada en TGF-TFM-PEXT realizar la abstracción del problema [enunciado detallado y preciso), y realiza:
 - Análisis de la varianza para un experimento de un factor.
 - Análisis de la varianza para un experimento de dos factores.
- Sigue la plantilla disponible en Aula virtual, explicando los pasos y decisiones tomadas de forma detallada, con la notación matemática adecuada.
- Instrucciones específicas en AULA VIRTUAL.

T3. Análisis varianza

Análisis de la varianza (ANOVA)

ANOVA experimentos de un factor

Comparaciones múltiples ANOVA de experimentos de un factor

ANOVA experimentos de dos factores

T4. Diseño de experimentos

Diseño de experimentos (DOE)

Diseños factoriales 2^k .

Herramientas gráficas de soporte al DOE

Diseños específicos y superficies de respuesta

GUIA DE CONTENIDOS

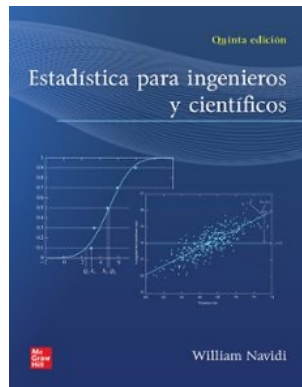
1. Objetivos
2. Diseño de experimentos (DOE)
3. Diseños factoriales 2^k .
4. Herramientas gráficas de soporte al DOE
5. Diseños específicos y superficies de respuesta
6. Resumen y ejercicio entregable

1. Objetivos

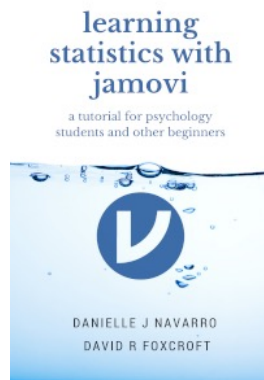
- **RECORDAR** conceptos de partida: análisis de la varianza.
- **CONOCER** los conceptos, características y procedimientos del diseño de experimentos.
- **APLICAR** conocimientos en diseño de experimentos para evaluar reportes de datos o estudios bibliográficos.

→ Antes partíamos de datos de una experimentación, con unos niveles dados. El DOE es una aproximación ex-ante para definir los niveles y obtener ventajas del análisis.

Bibliografía de referencia



Estadística para ingenieros y científicos
5ª edición
William Navidi
McGraw-Hill Interamericana de España
S.L.- 9781456293147



Navarro DJ and Foxcroft DR (2022). learning statistics with jamovi: a tutorial for psychology students and other beginners. (Version 0.75).
DOI: 10.24384/hgc3-7p15



Análisis y Diseño de Experimentos
Humberto Gutiérrez, Román de la Vara
McGraw-Hill Interamericana de España SL
970-10-6526-3

GUIA DE CONTENIDOS

1. Objetivos
2. Diseño de experimentos (DOE)
3. Diseños factoriales 2^k .
4. Herramientas gráficas de soporte al DOE
5. Diseños específicos y superficies de respuesta
6. Resumen y ejercicio entregable

2. Diseño de Experimentos (DOE)

2.1. Concepto y relevancia

El **diseño de experimentos** (DOE, por sus siglas en inglés) es una metodología crucial en ciencia e ingeniería para planificar, realizar y analizar experimentos de manera eficiente y sistemática.

RELEVANCIA

1. **Optimización uso de recursos:** Su importancia radica en que permite **maximizar la información obtenida** a partir de un experimento mientras se minimizan los recursos, tiempo y esfuerzos invertidos.
2. **Control sobre variables:** El diseño de experimentos ayuda a **identificar y controlar** las variables más importantes, permitiendo a los investigadores aislar los efectos de las variables independientes sobre las dependientes. Esto minimiza la confusión en los resultados y proporciona una visión clara de las relaciones de causa y efecto.

3. **Reducción de la incertidumbre y aumento de la precisión:** Esto se logra al minimizar el impacto de los factores externos no controlados y al reducir la variabilidad aleatoria en los resultados mediante el uso de técnicas como la aleatorización y la replicación.

4. **Evaluación simultánea de múltiples factores:** Esto permite analizar no solo los efectos individuales de cada factor, sino también las **interacciones** entre los factores. En lugar de realizar experimentos separados para cada variable, los investigadores pueden realizar experimentos multifactoriales que aumenten la eficiencia.

5. **Mejora del proceso de toma de decisiones:** Los resultados obtenidos a partir de un diseño experimental son más confiables y robustos, lo que permite tomar decisiones fundamentadas, ya sea para optimizar procesos, mejorar productos o desarrollar nuevas tecnologías.

2. Diseño de Experimentos (DOE)

2.1. Concepto y relevancia

En la investigación y experimentación científica e ingenieril, dos enfoques comunes para estudiar los efectos de múltiples factores sobre una variable de respuesta son **la experimentación factorial** y el método de **mover un factor a la vez (OFAT)**. El enfoque **OFAT** consiste en variar un solo factor a la vez mientras se mantienen todos los demás factores constantes. Después de identificar el efecto del factor en la respuesta, se repite el proceso con el siguiente factor. Este método es bastante sencillo y se utiliza frecuentemente en experimentos exploratorios.

•Ventajas:

- **Simplicidad:** Es fácil de implementar y de entender. Se trabaja con un solo factor, lo que simplifica el diseño experimental.
- **Útil en pruebas iniciales:** Puede ser útil cuando se trata de identificar rápidamente el efecto de un solo factor sin preocuparse por interacciones complejas.

•Limitaciones:

- **Ineficiencia:** Al cambiar solo un factor a la vez, el número de experimentos necesarios puede ser mucho mayor en comparación con otros métodos, lo que aumenta los costos y el tiempo.
- **No detecta interacciones:** OFAT **no puede identificar interacciones entre los factores**, que son comunes en muchos sistemas. El efecto combinado de varios factores sobre la variable de respuesta puede ser muy distinto del efecto de cada uno por separado.
- **Resultado limitado:** Al no evaluar interacciones, OFAT puede proporcionar resultados que no reflejan con precisión cómo los factores realmente afectan el sistema en su conjunto.

2. Diseño de Experimentos (DOE)

2.1. Concepto y relevancia

La **experimentación factorial**, por el contrario, implica variar todos los factores simultáneamente, probando todas las combinaciones posibles de niveles de los factores (en diseños completos) o una selección bien estructurada de combinaciones (en diseños fraccionados). Este enfoque permite obtener información más rica y detallada en menos tiempo.

•Ventajas:

- **Detección de interacciones:** Los diseños factoriales permiten estudiar no solo los **efectos principales** de cada factor, sino también las **interacciones** entre los factores. Esto es crucial en experimentos donde los factores no operan de manera independiente.
- **Eficiencia:** Aunque los experimentos factoriales involucran múltiples factores simultáneamente, pueden ser más eficientes en términos del número total de corridas necesarias para obtener la misma cantidad de información que OFAT. Esto es especialmente cierto si los factores interactúan entre sí.
- **Mejor optimización:** Al analizar varias combinaciones de factores al mismo tiempo, los experimentos factoriales proporcionan una visión más completa y precisa del sistema, lo que permite una **optimización más efectiva**.
- **Representación precisa:** Capturan de manera más completa cómo los factores afectan la respuesta, lo que resulta en una **mejor representación del sistema** en su conjunto.

•Limitaciones:

- **Complejidad:** Los diseños factoriales pueden ser más complejos de implementar y analizar, especialmente cuando se consideran muchos factores. Las interacciones de alto orden también pueden ser difíciles de interpretar.
- **Número de experimentaciones:** Para un gran número de factores, el número de corridas (*runs*) puede volverse rápidamente prohibitivo, aunque esto se puede mitigar con el uso de diseños fraccionados.

2. Diseño de Experimentos (DOE)

2.2. Tipo de DOEs

1. Diseños Completamente Aleatorizados

- Descripción:** Este es el diseño más simple, en el cual los tratamientos se asignan a las unidades experimentales de manera completamente aleatoria. Es útil cuando no hay factores de bloqueo ni estructura en las unidades experimentales.
- Aplicación:** Útil en experimentos donde se busca reducir el sesgo y las variaciones aleatorias en un solo factor de interés.
- Ejemplo:** Un experimento para probar diferentes fertilizantes en un campo agrícola donde las parcelas son asignadas aleatoriamente a los diferentes tratamientos. [Visto en Tema 3]

2. Diseños de Bloques Aleatorizados

- Descripción:** Se utiliza cuando hay una fuente conocida de variabilidad que se puede agrupar o bloquear. Dentro de cada bloque, los tratamientos se asignan aleatoriamente.
- Aplicación:** Este diseño es común cuando se puede dividir el experimento en bloques homogéneos para controlar una fuente de variación no deseada.
- Ejemplo:** En una planta de manufactura, los turnos de trabajo (bloques) se usan para evaluar el efecto de una nueva máquina, asignando aleatoriamente las operaciones a cada turno. [Visto en Tema 3]

2. Diseño de Experimentos (DOE)

2.2. Tipo de DOEs

3. Diseños Factoriales

- Descripción:** Los **diseños factoriales** se utilizan cuando se investigan los efectos de múltiples factores simultáneamente. Todos los niveles de cada factor se combinan con todos los niveles de los otros factores.

- Aplicación:** Útil cuando se desea estudiar las interacciones entre factores. Los más comunes son los diseños **factoriales completos** (donde se prueban todas las combinaciones de niveles) y los **diseños factoriales fraccionados** (donde solo se prueba una fracción de las combinaciones posibles para reducir el número de experimentos).

- Ejemplo:** Un experimento que estudia cómo la temperatura y la presión afectan el rendimiento de una reacción química en un proceso industrial.

- Subtipos:

- 3.1. Diseños de Cuadrado Latino.** Se utiliza cuando hay dos fuentes de variación que deben controlarse, además del tratamiento principal. El experimento se organiza en una matriz cuadrada en la cual cada tratamiento aparece una vez en cada fila y en cada columna.

- 3.2. Diseños de Cuadrado Grecolatino.** Similar al diseño de Cuadrado Latino, pero con una tercera fuente de variabilidad controlada. Cada tratamiento aparece una vez en cada fila, columna y grupo adicional.

2. Diseño de Experimentos (DOE)

2.2. Tipo de DOEs

4. Diseños de Superficie de Respuesta

- Descripción:** Estos diseños se utilizan para modelar y optimizar respuestas cuando los factores influyen de manera no lineal en los resultados. La **metodología de superficie de respuesta (RSM)** es útil para identificar los niveles óptimos de los factores para obtener el mejor rendimiento del proceso.
- Aplicación:** Se usa comúnmente en la optimización de procesos y la ingeniería de productos cuando se busca maximizar o minimizar una variable de interés.
- Ejemplo:** Optimización de las condiciones de temperatura y tiempo de cocción en la producción de alimentos para maximizar la calidad del producto.

5. Otros diseños

Diseños Anidados: Este diseño se utiliza cuando los niveles de un factor están anidados dentro de los niveles de otro factor. Se aplica cuando los experimentos involucran jerarquías naturales, como subgrupos dentro de grupos. **Ejemplo:** Un experimento en el que las mediciones de diferentes máquinas están anidadas dentro de distintas plantas de manufactura.

Diseños cruzados: Las unidades experimentales están expuestas a cada nivel de tratamiento en diferentes momentos. Las unidades actúan como sus propios controles, lo que reduce la variabilidad individual. **Ejemplo:** Un estudio clínico en el cual los pacientes reciben múltiples tratamientos en diferentes momentos.

2. Diseño de Experimentos (DOE)

2.3. Fundamentos estadísticos

1. Aleatorización

•**Fundamento:** La **aleatorización** implica asignar tratamientos o condiciones experimentales a las unidades experimentales de manera aleatoria. Este proceso es crucial para evitar sesgos y equilibrar los efectos de factores externos que no se están midiendo.

•**Objetivo:** Garantizar que las diferencias observadas en los resultados puedan atribuirse a los tratamientos aplicados y no a otros factores no controlados. La aleatorización ayuda a asegurar que los grupos de tratamiento sean comparables y que las diferencias se deban a la intervención y no a una influencia sistemática no prevista.

•**Ejemplo:** En un ensayo clínico, los pacientes son asignados al azar a diferentes tratamientos, lo que reduce la probabilidad de que las características individuales influyan en los resultados.

2. Replicación

•**Fundamento:** La **replicación** consiste en repetir los tratamientos en múltiples unidades experimentales. Esto permite una estimación precisa de la variabilidad dentro de los experimentos y mejora la capacidad de detectar efectos verdaderos.

•**Objetivo:** Aumentar la precisión de las estimaciones del efecto del tratamiento y reducir el error experimental. Cuantas más réplicas se tengan, mejor será la capacidad de generalizar los resultados a la población general.

•**Ejemplo:** Si un experimento de cultivo utiliza diferentes fertilizantes, aplicar cada fertilizante a múltiples parcelas replicadas ayudará a reducir la variabilidad debida a factores no controlados, como el clima o la calidad del suelo.

2. Diseño de Experimentos (DOE)

2.3. Fundamentos estadísticos

3. Bloqueo

•**Fundamento:** El **bloqueo** implica agrupar unidades experimentales que son similares entre sí en uno o más aspectos que pueden influir en los resultados. Dentro de cada bloque, se aplican los tratamientos aleatoriamente.

•**Objetivo:** El bloqueo reduce la variabilidad debida a fuentes conocidas de error, haciendo que la comparación entre tratamientos sea más precisa. Al agrupar las unidades en bloques homogéneos, se minimiza la influencia de factores externos no controlados.

•**Ejemplo:** En un experimento agrícola, las parcelas de terreno que tienen características similares, como la inclinación o la fertilidad, se agrupan en bloques, y dentro de cada bloque se prueban diferentes tipos de semillas.

4. Factorialidad

•**Fundamento:** Los **diseños factoriales** permiten estudiar los efectos de dos o más factores simultáneamente. En lugar de estudiar un factor a la vez, se consideran todas las combinaciones posibles de los niveles de los factores.

•**Objetivo:** Evaluar no solo los efectos principales de cada factor, sino también las **interacciones** entre factores. Esto proporciona una visión más completa del sistema estudiado, ya que muchos procesos reales dependen de la combinación de múltiples variables.

•**Ejemplo:** En un experimento industrial, se podrían estudiar simultáneamente los efectos de la temperatura y la presión sobre la eficiencia de una reacción química, observando cómo interactúan estos dos factores.

2. Diseño de Experimentos (DOE)

2.3. Fundamentos estadísticos

5. Análisis de Varianza (ANOVA)

•**Fundamento:** El **ANOVA** es una técnica estadística utilizada para analizar los datos de los experimentos. Permite comparar las medias de diferentes grupos y determinar si las diferencias observadas son estadísticamente significativas.

•**Objetivo:** Descomponer la variabilidad total en el experimento en componentes debidos al tratamiento y al error experimental. Si la variabilidad entre los grupos es mayor que la variabilidad dentro de los grupos, se puede concluir que los tratamientos tienen un efecto significativo.

•**Ejemplo:** En un experimento que compara diferentes técnicas de tratamiento del agua, el ANOVA puede determinar si las diferencias en la pureza del agua entre los tratamientos son significativas.

6. Estimación del Error Experimental

•**Fundamento:** La estimación del **error experimental** es fundamental en el diseño de experimentos, ya que mide la variabilidad inherente que no puede ser explicada por los tratamientos. Este error se utiliza para evaluar la significancia de los efectos observados.

•**Objetivo:** Proporcionar una base para hacer comparaciones entre tratamientos. Si el error experimental es pequeño, se pueden detectar diferencias más pequeñas entre los tratamientos.

•**Ejemplo:** En un experimento clínico, el error experimental podría representar la variabilidad debida a diferencias biológicas entre los pacientes que no están directamente relacionadas con el tratamiento.

GUIA DE CONTENIDOS

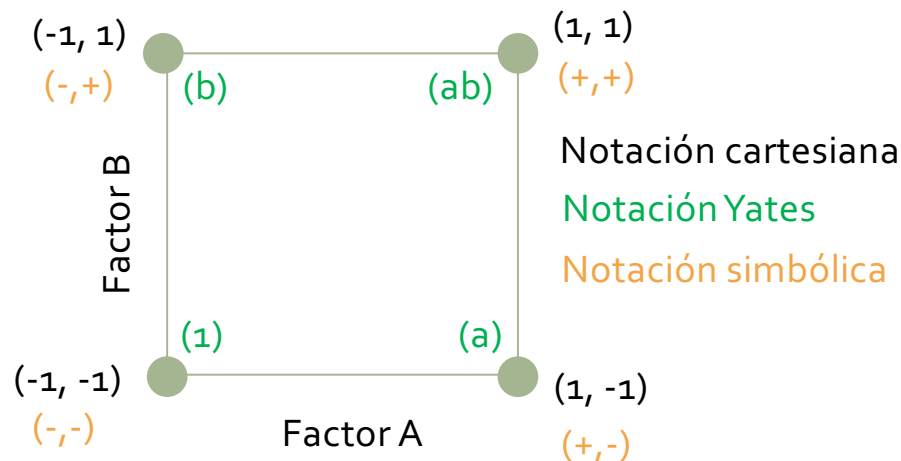
1. Objetivos
2. Diseño de experimentos (DOE)
3. Diseños factoriales 2^k .
4. Herramientas gráficas de soporte al DOE
5. Diseños específicos y superficies de respuesta
6. Resumen y ejercicio entregable

3. Diseños factoriales 2^k

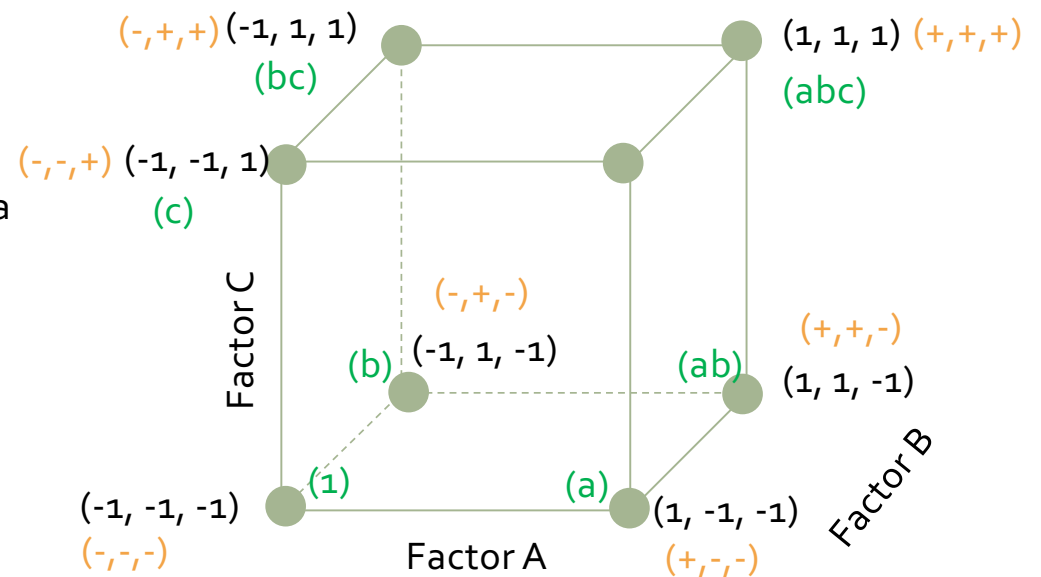
3.1. Concepto

Los **diseños factoriales 2^k** son un tipo de diseño de experimentos muy utilizado cuando se desean estudiar los efectos de **k** factores, cada uno con **2 niveles** (bajo y alto, generalmente codificados como **-1 y +1**), sobre una o más variables de respuesta. Estos diseños permiten evaluar los efectos principales de los factores, así como sus interacciones.

Región experimental (ventana de tratamientos), $k=2$



Región experimental (ventana de tratamientos), $k=3$

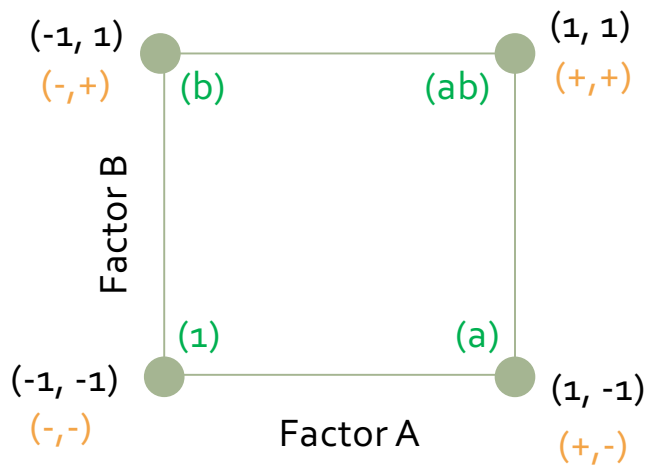


3. Diseños factoriales 2k

3.2. Diseño k=2. Contrastes

Región experimental (ventana de tratamientos), **k=2**,
para **n** ensayos por tratamiento (réplicas)

$$Y = \text{Efecto A} + \text{Efecto B} + \text{Efecto interacción AB}$$



Efecto A = Media de Y en el nivel alto de A – Media de Y en el nivel bajo de A
(verticales)

$$\text{Efecto A} = \frac{[a + ab]}{2n} - \frac{[(1) + b]}{2n}$$

Efecto B = Media de Y en el nivel alto de B – Media de Y en el nivel bajo de B
(horizontales)

$$\text{Efecto B} = \frac{[b + ab]}{2n} - \frac{[(1) + a]}{2n}$$

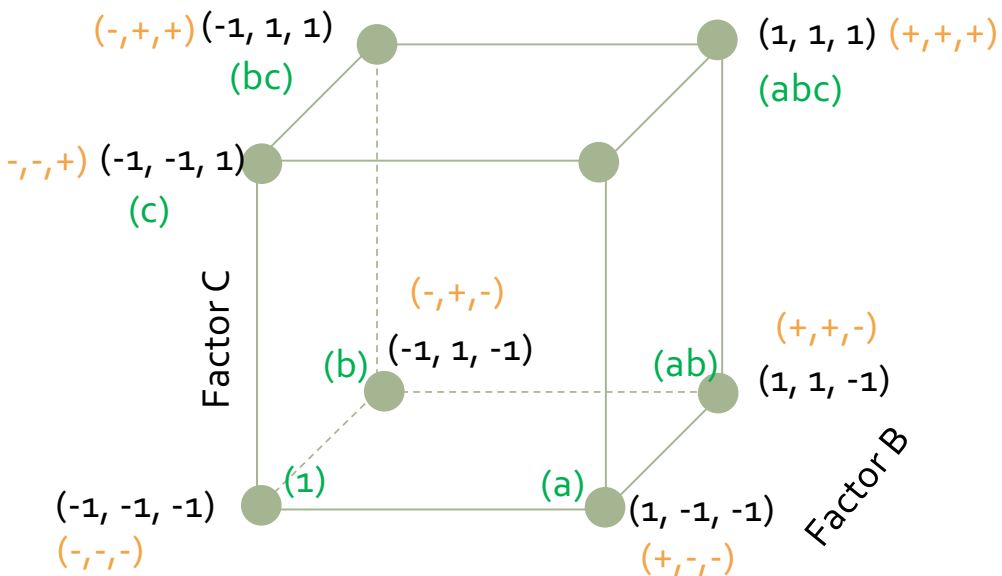
Efecto AB = Efecto de A en el nivel alto de B – Efecto de A en el nivel bajo de B
(Diagonales)

$$\text{Efecto AB} = \frac{[ab - b]}{2n} - \frac{[a - (1)]}{2n}$$

3. Diseños factoriales 2^k

3.3. Diseño $k=3$. Contrastes

Región experimental (ventana de tratamientos), $k=3$



Se recurrirá a software avanzado para su cálculo (SPSS, Minitab, etc). En este curso se abordará la interpretación de los resultados

Se calculan de forma similar a lo explicado para $k=2$ (coordenadas donde los valores son máximos, a las que se les sustrae coordenadas donde los valores son mínimos)

$$Y = A + B + C + AB + BC + AC + ABC$$

$$\text{Contraste } A = a + ab + ac + abc - (1) - b - c - bc$$

$$\text{Contraste } B = b + ab + cb + abc - (1) - a - c - ac$$

$$\text{Contraste } C = c + ac + cb + abc - (1) - b - a - ab$$

$$\text{Contraste } AB = ab + abc + (1) + c - b - a - bc - ac$$

$$\text{Contraste } BC = bc + abc + (1) + a - b - c - ac - ab$$

$$\text{Contraste } AC = ac + abc + (1) + b - a - c - ab - bc$$

$$\text{Contraste } ABC = a + b + c + abc - (1) - ab - ac - bc$$

3. Diseños factoriales 2k

3.4. Análisis factorial para k=2 y k=3

Contrastes → Efectos → Suma de cuadrados → ANOVA

1. Cálculo Contrastes, según se ha mostrado.
2. Cálculo Efectos

$$Efecto = \frac{Contraste}{n \cdot 2^{k-1}}$$

3. Cálculo suma de cuadrados

$$SC = \frac{(Contraste)^2}{n \cdot 2^k}$$

$$SCT = \sum_{i=1}^{n \cdot 2^k} Y_i^2 - \frac{Y_{..}^2}{n \cdot 2^k}$$

$$SC - error = SCT - \sum SC - efectos$$

4. ANOVA

1. Cálculo media cuadrática (SC/g.l.)
2. Cálculo F
3. Comprobar hipótesis (p-valor)

$$CM = \frac{SC}{g.l.}$$

$$F = \frac{SC - tratamiento}{SC - error}$$

3. Diseños factoriales 2k

3.4. Análisis factorial para k=2 y k=3

Tabla ANOVA (k=2)

<i>FV</i>	<i>SC</i>	<i>GL</i>	<i>CM</i>	<i>F₀</i>	Valor- <i>p</i>
<i>A</i>	SC_A	1	CM_A	CM_A/CM_E	$P(F > F_0)$
<i>B</i>	SC_B	1	CM_B	CM_B/CM_E	$P(F > F_0)$
<i>AB</i>	SC_{AB}	1	CM_{AB}	CM_{AB}/CM_E	$P(F > F_0)$
Error	SC_E	$4(n - 1)$	CM_E		
Total	SC_T	$n2^2 - 1$			

Tabla ANOVA (k=3)

<i>FV</i>	<i>SC</i>	<i>GL</i>	<i>CM</i>	<i>F₀</i>	Valor- <i>p</i>
<i>A</i>	SC_A	1	CM_A	CM_A/CM_E	$P(F > F_0)$
<i>B</i>	SC_B	1	CM_B	CM_B/CM_E	$P(F > F_0)$
<i>C</i>	SC_C	1	CM_C	CM_C/CM_E	$P(F > F_0)$
<i>AB</i>	SC_{AB}	1	CM_{AB}	CM_{AB}/CM_E	$P(F > F_0)$
<i>AC</i>	SC_{AC}	1	CM_{AC}	CM_{AC}/CM_E	$P(F > F_0)$
<i>BC</i>	SC_{BC}	1	CM_{BC}	CM_{BC}/CM_E	$P(F > F_0)$
<i>ABC</i>	SC_{ABC}	1	CM_{ABC}	CM_{ABC}/CM_E	$P(F > F_0)$
Error	SC_E	$2^3(n - 1)$	CM_E		
Total	SC_T	$n2^3 - 1$			

EJERCICIOS

3. Diseños factoriales 2^k

3.6. Fraccionamiento del diseño

El **fraccionamiento del diseño** es una técnica utilizada en **Diseño de Experimentos (DOE)** para reducir el número de corridas experimentales cuando se tienen **muchos factores**.

En lugar de realizar un diseño factorial completo, que puede ser muy costoso y llevar mucho tiempo, el fraccionamiento permite a los experimentadores investigar una porción (o fracción) del total de combinaciones de factores. Esto se hace de manera controlada, permitiendo aún identificar efectos importantes.

Principio del Fraccionamiento

Identificar una fracción del diseño: En un diseño fraccionado, solo se seleccionan una fracción específica de las combinaciones posibles de niveles de factores.

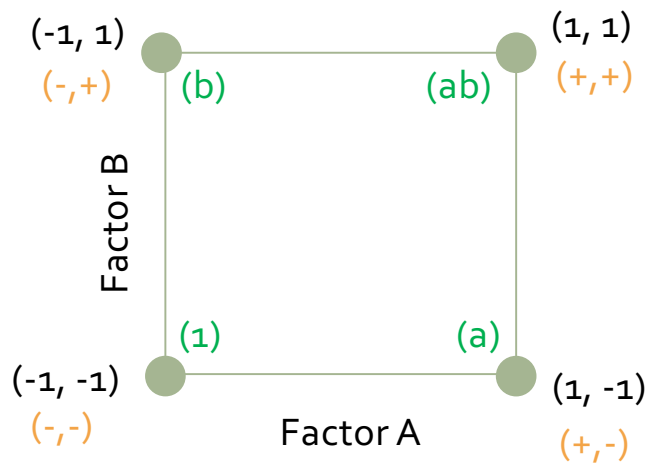
Por ejemplo, un diseño 2^{k-p} es un diseño donde se realiza una fracción $1/(2^p)$ del diseño completo 2^k . Aquí, k es el número de factores, y p es el grado de fraccionamiento.

Si $p=1$, realizas la mitad de los experimentos posibles; si $p=2$, realizas un cuarto, y así sucesivamente.

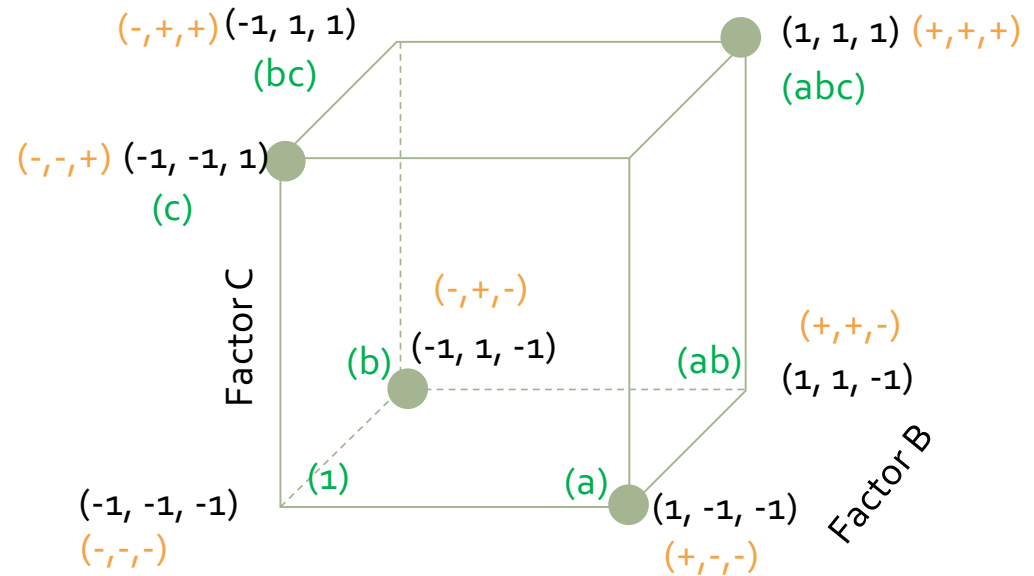
3. Diseños factoriales 2k

3.6. Fraccionamiento del diseño

k= 2 (No fraccionable)



k= 3, p=1 (1 fraccionamiento)
Diseño 2^{3-1}



Se pasa de 8 a 4 experimentos

3. Diseños factoriales 2k

3.6. Fraccionamiento del diseño

Cuanto mayor es el tamaño del diseño (k), mayor es el grado de fraccionamiento (p) que permite el diseño.

Ejemplo k=7

Principales + Interacciones dobles Interacciones triples, cuádruples, etc...

Diseño factorial	Experimentos	Efectos estimables	Efectos no ignorables	Efectos ignorables
Completo 2^7	128	127	28	99
Fraccionado 2^{7-1}	64	63	28	35
Fraccionado 2^{7-2}	32	31	28	3
Fraccionado 2^{7-3}	16	15	28	-
Fraccionado 2^{7-4}	8	7	28	-

mitad

Exceso de info

No exceder el fraccionamiento, para no perder información relevante

3. Diseños factoriales 2^k

3.6. Fraccionamiento del diseño

Confusión o aliasing de efectos: En el fraccionamiento, algunos **efectos principales** y **efectos de interacción** se mezclan entre sí; esto se llama **confusión o aliasing**.

Esto ocurre porque, al reducir el número de corridas, no es posible estimar todos los efectos independientemente.

El objetivo es diseñar el fraccionamiento de manera que los efectos principales no estén confundidos con interacciones de bajo orden, que generalmente se consideran menos importantes.

Atención: El análisis de datos en diseños fraccionados puede ser más complejo que en los diseños completos, ya que se requiere un mayor cuidado para desambiguar los efectos

Resolución del diseño: La **resolución** de un diseño fraccionado indica el grado de confusión que existe entre los efectos principales y las interacciones.

Resolución III: Los efectos principales están confundidos con interacciones de dos factores.

Resolución IV: Los efectos principales no están confundidos con interacciones de dos factores, pero las interacciones de dos factores están confundidas entre sí.

Resolución V: Los efectos principales y las interacciones de dos factores no están confundidos entre sí, pero las interacciones de orden superior pueden estarlo.

A mayor resolución, mayor independencia entre los efectos estimados, pero también se requiere un mayor número de corridas

3. Diseños factoriales 2^k

3.6. Fraccionamiento: Diseños Plackett-Burman

Los **diseños de Plackett-Burman** son un tipo de diseño experimental que se utiliza para identificar rápidamente los factores más importantes en un proceso, especialmente **cuando se tienen muchos factores y se quiere minimizar el número de experimentos**. Estos diseños son útiles en las fases iniciales de la experimentación, cuando el objetivo principal es **seleccionar los factores más significativos** de un conjunto grande de variables.

Características Principales

1. Eficiencia: Los diseños de Plackett-Burman están diseñados para ser altamente eficientes. Con un número limitado de corridas experimentales, es posible evaluar los efectos principales de muchos factores. **Este diseño no evalúa las interacciones entre los factores, sino que se enfoca únicamente en los efectos principales.**

2. Matrices Ortogonales: Los experimentos se organizan en forma de **matrices ortogonales** donde cada columna corresponde a un factor y cada fila a una corrida experimental. Estas matrices están estructuradas de tal forma que los factores son balanceados (aparecen el mismo número de veces en sus niveles alto y bajo).

3. Niveles: Los factores en un diseño de Plackett-Burman se evalúan generalmente en dos niveles: **nivel bajo (-1)** y **nivel alto (+1)**. Estos niveles pueden representar condiciones experimentales como temperatura, presión, concentración, etc.

4. Número de Corridas: El número de corridas experimentales en un diseño de Plackett-Burman es siempre un múltiplo de 4 (e.g., 4, 8, 12, 16, 20, etc.). Los diseños de Plackett-Burman se construyen para que el número de corridas sea uno más que el número de factores. Por ejemplo, un diseño con 11 factores requerirá 12 corridas.

3. Diseños factoriales 2^k

3.6: Fraccionamiento. Diseños Plackett-Burman

VENTAJAS

Detección de efectos principales: Estos diseños permiten estimar de manera efectiva los **efectos principales** de los factores en un proceso, lo que es particularmente útil cuando se tienen muchos factores y se desea hacer una preselección de los más importantes.

LIMITACIONES

No considera interacciones: Los diseños de Plackett-Burman no pueden estimar las interacciones entre factores, ya que están contruidos solo para evaluar los efectos principales. **Confusión de efectos:** A veces los efectos principales pueden estar confundidos o sesgados por las interacciones entre factores no considerados en el diseño, lo que podría llevar a conclusiones incorrectas.

Ejemplo 7 factores

Corrida	A	B	C	D	E	F	G
1	1	1	1	1	-1	-1	-1
2	1	-1	-1	-1	1	1	-1
3	-1	1	-1	1	-1	1	-1
4	-1	-1	1	1	-1	-1	1
5	1	1	-1	-1	1	-1	1
6	-1	1	1	-1	1	-1	-1
7	-1	-1	1	1	1	-1	-1
8	1	-1	-1	1	-1	1	1

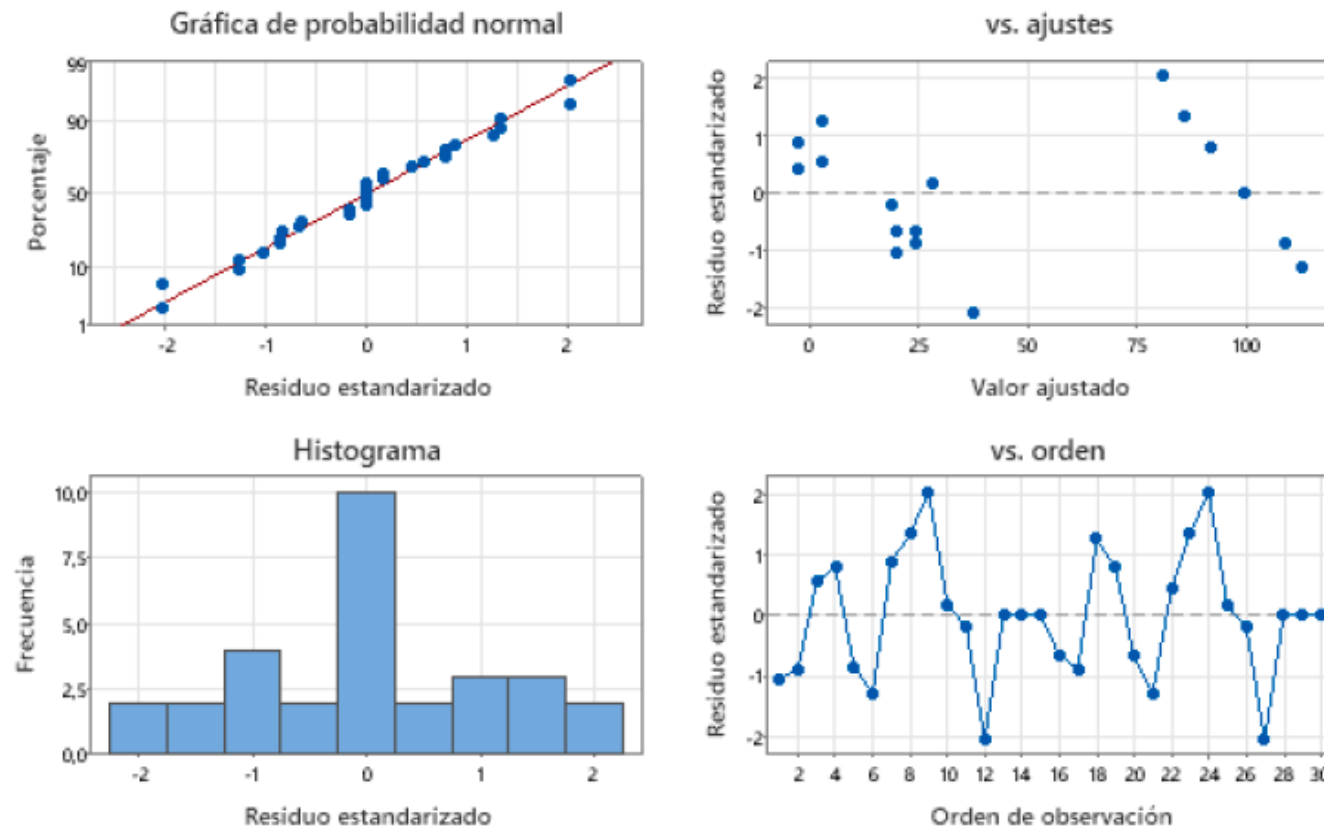
GUIA DE CONTENIDOS

1. Objetivos
2. Diseño de experimentos (DOE)
3. Diseños factoriales 2^k .
4. Herramientas gráficas de soporte al DOE
5. Diseños específicos y superficies de respuesta
6. Resumen y ejercicio entregable

4. Herramientas gráficas de soporte al DOE

4.1. Gráficas de residuos

Fuente: Gamir, Badia, Chafer. TFM Máster Ingeniería Química, 2021. Gráficas antes del análisis detallado (ver ajustes <0 y >100 para conversión de reacción).



Las **gráficas de residuos** son herramientas importantes en el análisis de datos en el contexto de Diseño de Experimentos (DOE), ya que permiten evaluar la adecuación del modelo ajustado a los datos experimentales.

Los residuos representan la **diferencia entre los valores observados y los valores predichos por el modelo**, y su análisis ayuda a identificar posibles problemas en el modelo, como falta de ajuste, presencia de **valores atípicos** o la no conformidad con los supuestos estadísticos del análisis.

4. Herramientas gráficas de soporte al DOE

4.2. Diagrama de Pareto

El **diagrama de Pareto** es una herramienta visual utilizada en el análisis de los resultados de un diseño estadístico de experimentos para **identificar y priorizar** los factores que tienen un **impacto significativo** en la respuesta del sistema estudiado. Esta técnica es especialmente útil cuando se trabaja con muchos factores en un experimento, como en los diseños factoriales, donde es necesario distinguir entre los efectos importantes y los menos relevantes.

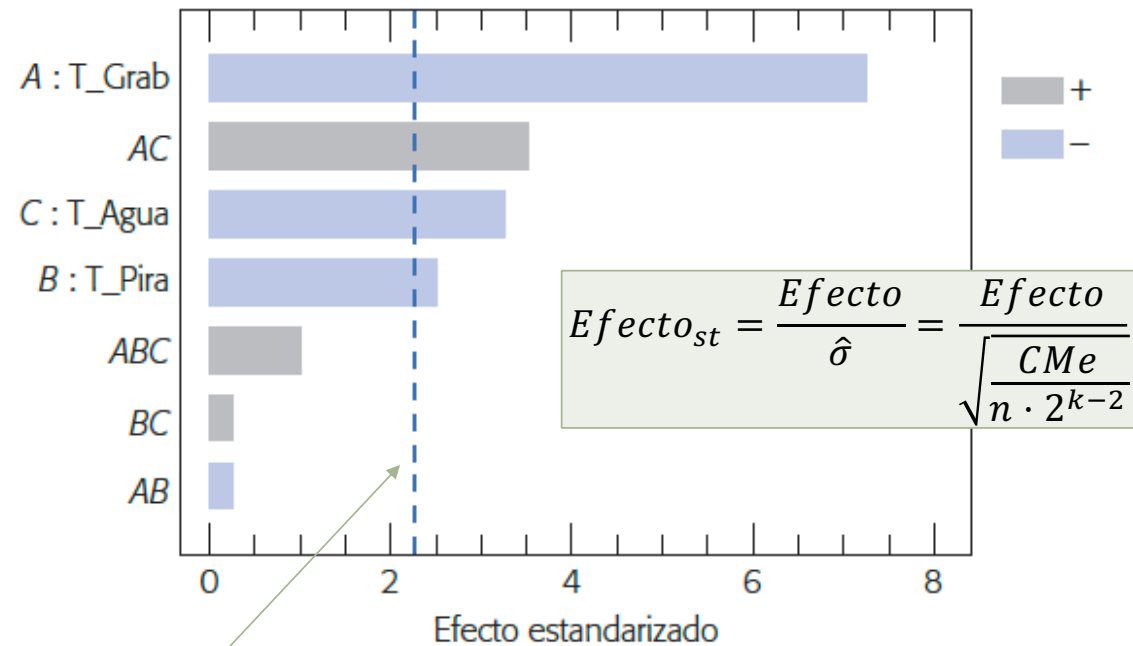
Ejemplo: Impacto en la fabricación de obleas de Si para semiconductores, de los factores:

Temperatura de grabado (T_grab): -3, -1 °C

Temperatura de piraña (T_pir): 60, 98 °C

Temperatura de agua (T_agua): 20, 70 °C

Fuente: Gutierrez H, De la Vara R, *Análisis y diseño de experimentos*. McGraw-Hill, 2 ed

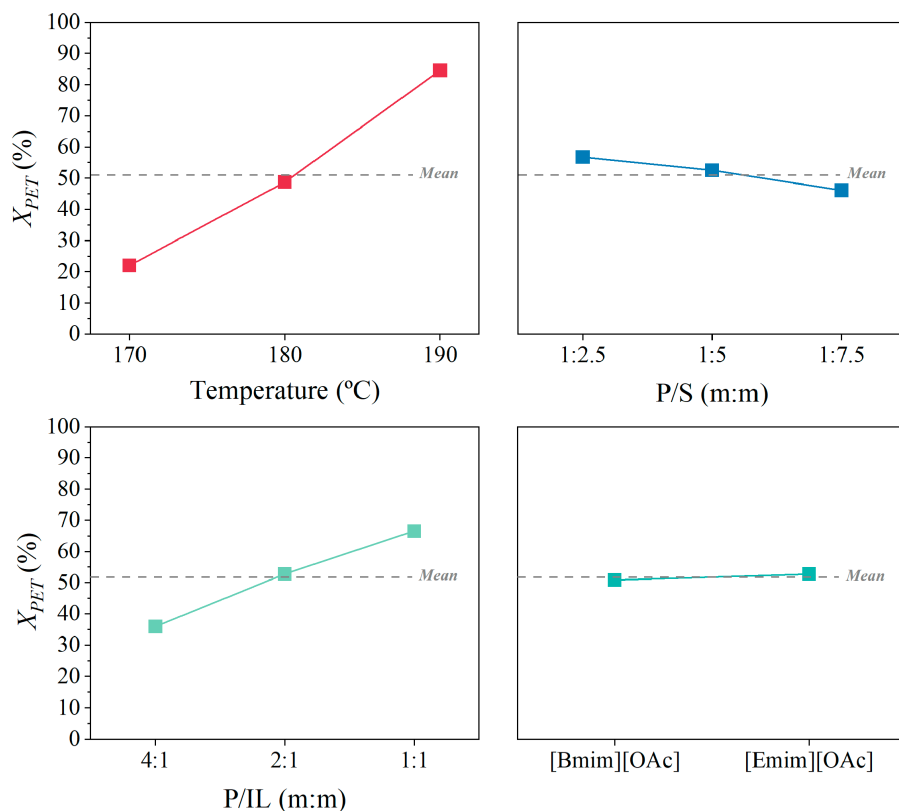


$$t_{\frac{\alpha}{2}, g.l.error} = t_{\frac{\alpha}{2}, 2^3(n-1)}$$

Identificación (y ordenación) de factores significativos

4. Herramientas gráficas de soporte al DOE

4.3. Gráfica efectos principales



Fuente: Gil-Castell, O.; Jiménez-Robles, R.; Gálvez-Subiela, A.; Marco-Velasco, G.; Cumplido, M.P.; Martín-Pérez, L.; Cháfer, A.; Badia, J.D. Factorial Analysis and Thermal Kinetics of Chemical Recycling of Poly(ethylene terephthalate) Aided by Neoteric Imidazolium-Based Ionic Liquids. *Polymers* 2024, 16, 2451. <https://doi.org/10.3390/polym16172451>

La **gráfica de efectos principales** es una herramienta visual utilizada en el análisis de **Diseño de Experimentos (DOE)** para interpretar cómo cada factor afecta la respuesta en un experimento.

Esta gráfica muestra el impacto de cada factor (o variable independiente) en la variable dependiente (respuesta) y ayuda a identificar la magnitud y la dirección de los efectos principales.

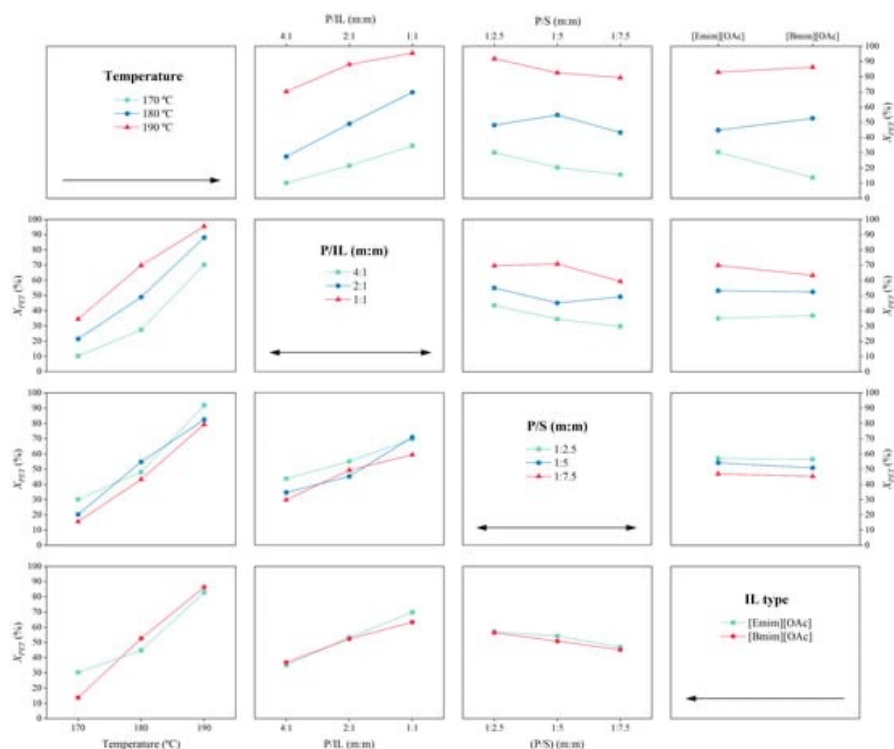
Características:

- Línea central = gran media
- Punto = media de todos los tratamientos en los que existe esa condición.

4. Herramientas gráficas de soporte al DOE

4.4. Gráfica efectos interacción

Fuente: Gil-Castell, O.; Jiménez-Robles, R.; Gálvez-Subiela, A.; Marco-Velasco, G.; Cumplido, M.P.; Martín-Pérez, L.; Cháfer, A.; Badia, J.D. Factorial Analysis and Thermal Kinetics of Chemical Recycling of Poly(ethylene terephthalate) Aided by Neoteric Imidazolium-Based Ionic Liquids. *Polymers* 2024, 16, 2451. <https://doi.org/10.3390/polym16172451>



La **gráfica de interacción de efectos** en el **Diseño de Experimentos (DOE)** es una herramienta visual utilizada para identificar y analizar cómo interactúan dos o más factores en un experimento y cómo estas interacciones afectan la respuesta.

Esta gráfica ayuda a comprender si el efecto de un factor sobre la respuesta depende del nivel de otro factor.

Características:

- Gráfica simétrica.
- Cruce de líneas = interacción.
- Líneas paralelas = no interacción.

EJERCICIOS

GUIA DE CONTENIDOS

1. Objetivos
2. Diseño de experimentos (DOE)
3. Diseños factoriales 2^k .
4. Herramientas gráficas de soporte al DOE
5. Diseños específicos y superficies de respuesta
6. Resumen y ejercicio entregable

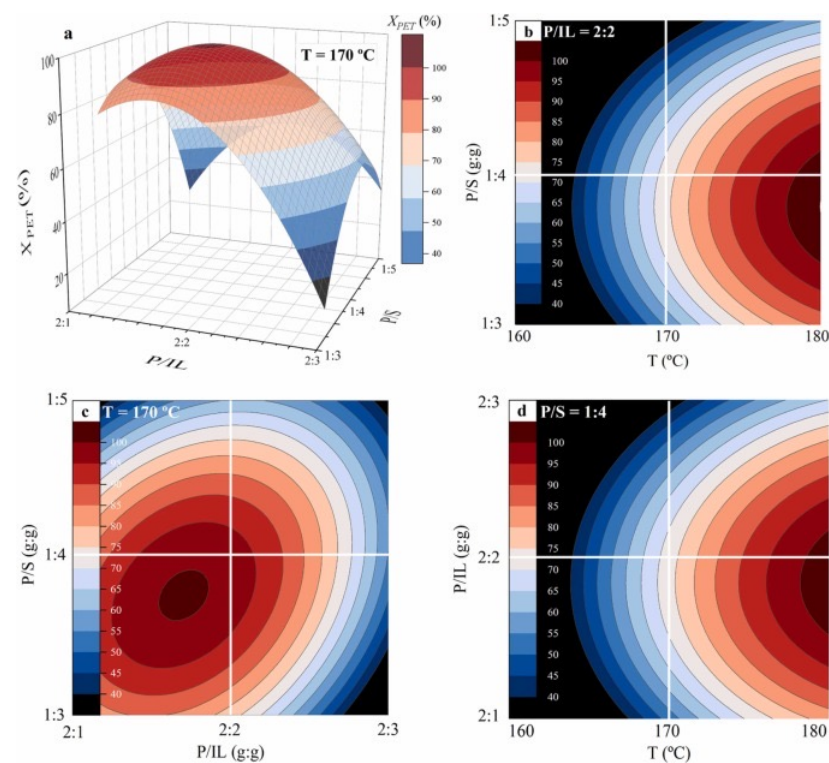
5. Diseños específicos y superficies de respuesta

5.1. Conceptos. Metodología RSM

La **Metodología de Superficie de Respuesta (RSM)** es una colección de técnicas estadísticas y matemáticas utilizadas para modelar y analizar problemas en los que una o más respuestas de interés son influenciadas por varias variables explicativas (o factores). Su objetivo principal es **optimizar la respuesta**, generalmente mediante la identificación de condiciones óptimas de los factores.

RSM es muy útil cuando el objetivo es encontrar las configuraciones de las variables de entrada que **maximizan** o **minimizan** una respuesta, o que la ajustan a un valor deseado. Esta metodología es ampliamente aplicada en **ingeniería, industria, investigación científica y diseño de productos**.

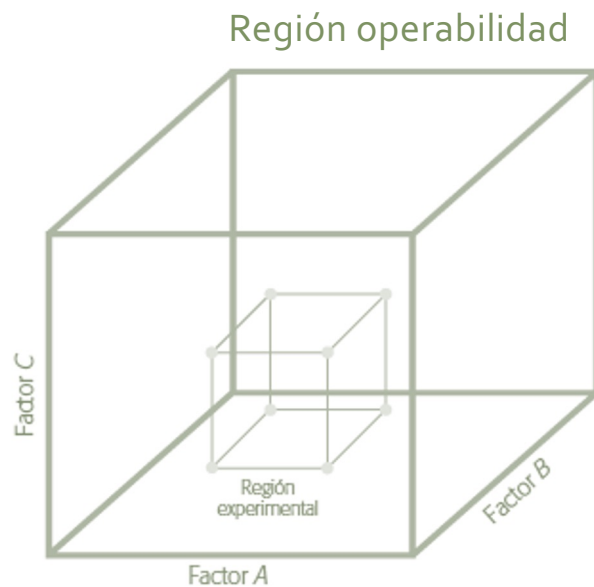
Fuente: J.D. Badia, R. Ballesteros-Garrido, A. Gamir-Cobacho, O. Gil-Castell, A. Cháfer, Chemical recycling of post-consumer poly(ethylene terephthalate) (PET) driven by the protic ionic liquid 2-HEAA: Performance, kinetics and mechanism, *Journal of Environmental Chemical Engineering*, 12, 113134. doi:10.1016/j.jece.2024.113134.



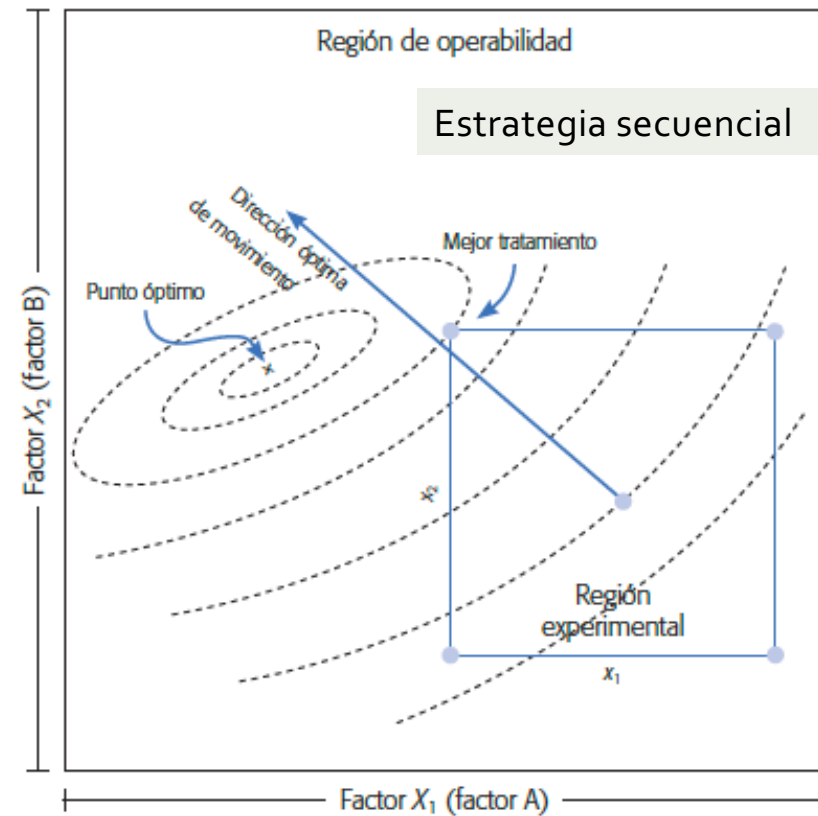
5. Diseños específicos y superficies de respuesta

5.1. Conceptos. Metodología RSM

La MSR es un estrategia experimental que permite resolver el problema de encontrar condiciones de operación óptimas de un proceso.



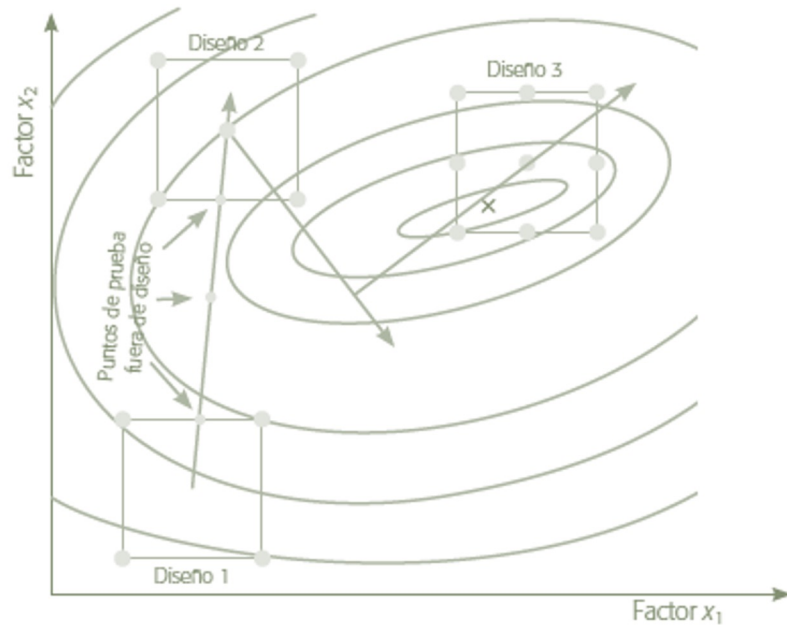
Fuente: Gutierrez H, De la Vara R, Análisis y diseño de experimentos. McGraw-Hill, 2 ed



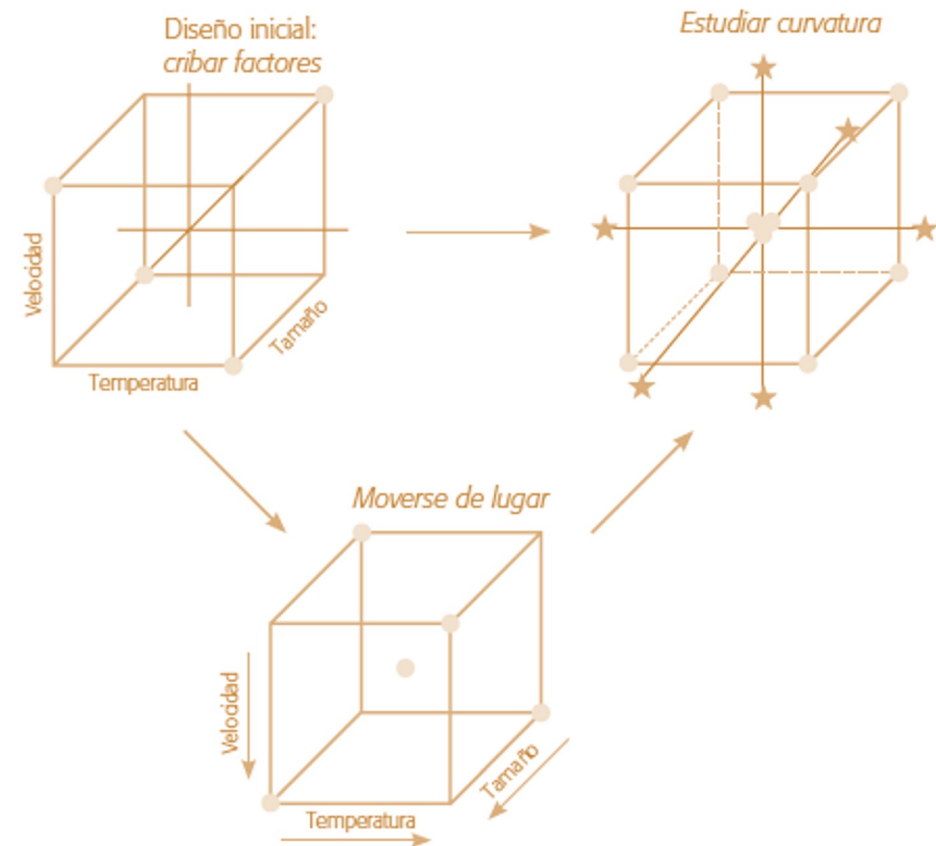
5. Diseños específicos y superficies de respuesta

5.1. Conceptos. Metodología RSM

La MSR es un estrategia experimental que permite resolver el problema de encontrar condiciones de operación óptimas de un proceso.



Fuente: Gutierrez H, De la Vara R, Análisis y diseño de experimentos. McGraw-Hill, 2 ed



5. Diseños específicos y superficies de respuesta

5.2. DOEs para RSMs.

Las técnicas estadísticas utilizadas en la **Metodología de Superficie de Respuesta (RSM)** se centran en el diseño de experimentos y el ajuste de modelos para optimizar las respuestas influenciadas por múltiples factores.

1. Diseños Factoriales

•**Descripción:** Los **diseños factoriales** son el punto de partida para muchos estudios de RSM. En un diseño factorial completo, se estudian todas las combinaciones posibles de los niveles de los factores.

•**Aplicación:** Ideal para identificar efectos principales y las interacciones entre factores.

2. Diseños Factoriales Fraccionados

•**Descripción:** Los **diseños factoriales fraccionados** son una versión simplificada del diseño factorial completo, donde se estudia solo una fracción de las combinaciones posibles de niveles.

•**Aplicación:** Útil cuando se manejan muchos factores y se desea reducir el número de experimentos manteniendo una buena precisión en la estimación de los efectos.

3. Diseño Central Compuesto (CCD)

•**Descripción:** El **Diseño Central Compuesto (CCD)** es el diseño más común en RSM. Combina un diseño factorial con puntos estrella (axiales) y puntos centrales, lo que permite ajustar modelos de segundo orden (cuadráticos).

•**Aplicación:** Se utiliza para ajustar superficies de respuesta cuando las relaciones entre los factores y la respuesta son no lineales. Es ideal para explorar las proximidades de un óptimo.

4. Diseños de Box-Behnken

•**Descripción:** El **Diseño de Box-Behnken** es una alternativa al CCD para ajustar modelos cuadráticos. No incluye puntos en los vértices del diseño factorial, lo que lo hace más eficiente en experimentos donde los niveles extremos de los factores no son factibles.

•**Aplicación:** Útil cuando se busca ajustar un modelo cuadrático con un número moderado de ensayos sin explorar los extremos del espacio experimental.

5. Diseños específicos y superficies de respuesta

5.3. Ortogonalidad y rotabilidad.

La **ortogonalidad** en los diseños de experimentos se refiere a la **independencia estadística** entre los factores que se están investigando. En un diseño ortogonal, las columnas de la matriz de diseño, que representan los niveles de los factores, son **linealmente independientes**, lo que significa que no existe correlación entre ellos. Esto garantiza que los efectos de los diferentes factores se puedan estimar de forma **precisa e independiente**.

Ventajas de la Ortogonalidad

- **Estimación precisa de los efectos:** Cada factor tiene un impacto separable en la respuesta, lo que permite estimar los efectos principales y las interacciones de manera más clara.
- **Simplificación del análisis:** En un diseño ortogonal, los coeficientes de los efectos de los factores se pueden estimar directamente mediante modelos de regresión lineal sin sesgo introducido por la colinealidad.
- **Reducción de la varianza:** En un diseño ortogonal, la varianza de los estimadores de los efectos es minimizada, lo que resulta en estimaciones más confiables.

5. Diseños específicos y superficies de respuesta

5.3. Ortogonalidad y rotabilidad.

La **rotabilidad** es una propiedad de algunos diseños de superficies de respuesta (como el **Diseño Central Compuesto**, o CCD), que asegura que **la precisión de las predicciones es la misma en todas las direcciones desde el centro del diseño**. En otras palabras, en un diseño rotacional, la varianza del error de predicción es constante a la misma distancia del punto central, sin importar en qué dirección se mire.

Esta propiedad es particularmente útil cuando se está optimizando una función objetivo o cuando se quiere prever cómo cambiarán las respuestas a diferentes niveles de los factores alrededor de un **punto óptimo**.

Ventajas de la Rotabilidad:

- **Uniformidad de precisión:** Proporciona predicciones igualmente precisas en todas las direcciones alrededor del punto central, lo que es crucial en problemas de optimización.
- **Eficiencia en la búsqueda de óptimos:** En un diseño rotacional, la exploración de los niveles de los factores produce una varianza constante en las predicciones, lo que permite localizar puntos óptimos de forma más efectiva y confiable.

5. Diseños específicos y superficies de respuesta

5.3. Ortogonalidad y Rotabilidad.

Ejemplo de Diseño Ortogonal

Un diseño **factorial** 2^2 con dos factores A y B a dos niveles es ortogonal si las combinaciones de los niveles alto (+1) y bajo (-1) están balanceadas. En este caso, las columnas para A y B son ortogonales entre sí (la suma cruzada de sus productos es cero), lo que asegura que los efectos de A y B no están correlacionados

Corrida	A	B
1	-1	-1
2	1	-1
3	-1	1
4	1	1

Esencial para separar claramente los efectos de los factores y realizar análisis simples y precisos. Esto es especialmente relevante en experimentos donde se desea una alta calidad en la estimación de los efectos principales y las interacciones.

Ejemplo de Diseño Rotacional

Consideremos un **Diseño Central Compuesto (CCD)**, que se utiliza para ajustar un modelo cuadrático a las respuestas. Este tipo de diseño es rotacional si las coordenadas de los puntos estrella (los puntos que no están en el cubo central) se eligen de forma que la varianza de la predicción sea la misma a una distancia α igual desde el centro en cualquier dirección.

Corrida	A	B
1	-1	-1
2	1	-1
3	-1	1
4	1	1
5	0	0
6	$-\alpha$	0
7	$+\alpha$	0
8	0	$-\alpha$
9	0	$+\alpha$

Fundamental en experimentos de superficies de respuesta, donde el objetivo es predecir y optimizar la respuesta de un sistema. La rotabilidad permite obtener predicciones igualmente confiables en todas las direcciones desde el punto central, facilitando la localización de óptimos de manera eficiente.

5. Diseños específicos y superficies de respuesta

5.4. Modelos matemáticos y diseños.

Modelos de primer orden

$$Y = \beta_0 + \underbrace{\sum_{i=1}^k \beta_i \cdot x_i}_{\text{Efectos lineales}} + \varepsilon$$

Modelos de segundo orden

$$Y = \beta_0 + \underbrace{\sum_{i=1}^k \beta_i \cdot x_i}_{\text{Efectos lineales}} + \underbrace{\sum_{i=1}^k (\beta_{ii} \cdot x_i^2)}_{\text{Efectos cuadráticos (curvatura)}} + \underbrace{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \beta_{ij} \cdot x_i \cdot x_j}_{\text{Efectos interacción}} + \varepsilon$$

La resolución de los mejores parámetros del modelo se realizará de forma similar a lo explicado para evaluar la significancia estadística de cada parámetro, mediante **análisis ANOVA**.

- Suma de cuadrados
- Medias cuadráticas
- Prueba F

5. Diseños específicos y superficies de respuesta

5.4. Modelos matemáticos y diseños.

La **Navaja de Ockham** es un principio filosófico y científico que establece que, cuando se tienen múltiples hipótesis que explican un fenómeno, la más sencilla es generalmente la mejor. En el contexto de la **Metodología de Superficie de Respuesta (RSM)**, la Navaja de Ockham se aplica al seleccionar y ajustar modelos matemáticos que describen la relación entre los factores y la respuesta.

En superficies de respuesta, los modelos suelen representar una relación funcional entre las variables independientes (factores) y una variable dependiente (respuesta). Estos modelos pueden ser lineales, cuadráticos o incluso más complejos (cúbicos, etc.). La **Navaja de Ockham** sugiere que:

Modelos Sencillos Son Preferibles

- Si un modelo más simple (por ejemplo, lineal o cuadrático) describe adecuadamente la relación entre las variables y la respuesta, debe preferirse sobre modelos más complejos que incluyan términos cúbicos, interacciones de mayor orden o transformaciones más complicadas.
- La simplicidad aquí no solo se refiere a menos términos en el modelo, sino también a la interpretación más clara y menor riesgo de sobreajuste.
- El sobreajuste ocurre cuando el modelo es demasiado específico para los datos de la muestra y no generaliza bien para nuevas observaciones.

5. Diseños específicos y superficies de respuesta

5.4. Modelos matemáticos y diseños.

Polinomios lineales / cuadráticos



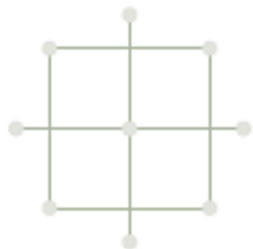
$$Y = \beta_0 + \beta_1 \cdot x_1 + \beta_2 \cdot x_2 + \beta_{12} \cdot x_1 \cdot x_2 + \varepsilon$$

Detección de efectos lineales e interacción



$$Y = \beta_0 + \beta_1 \cdot x_1 + \beta_2 \cdot x_2 + \beta_{12} \cdot x_1 \cdot x_2 + \overbrace{\beta_{11} \cdot x_1^2 \text{ o } \beta_{22} \cdot x_2^2}^{\text{curvatura}} + \varepsilon$$

Detección curvatura (pero no identifica efecto)



$$Y = \beta_0 + \beta_1 \cdot x_1 + \beta_2 \cdot x_2 + \beta_{12} \cdot x_1 \cdot x_2 + \beta_{11} \cdot x_1^2 + \beta_{22} \cdot x_2^2 + \varepsilon$$

Efectos lineales

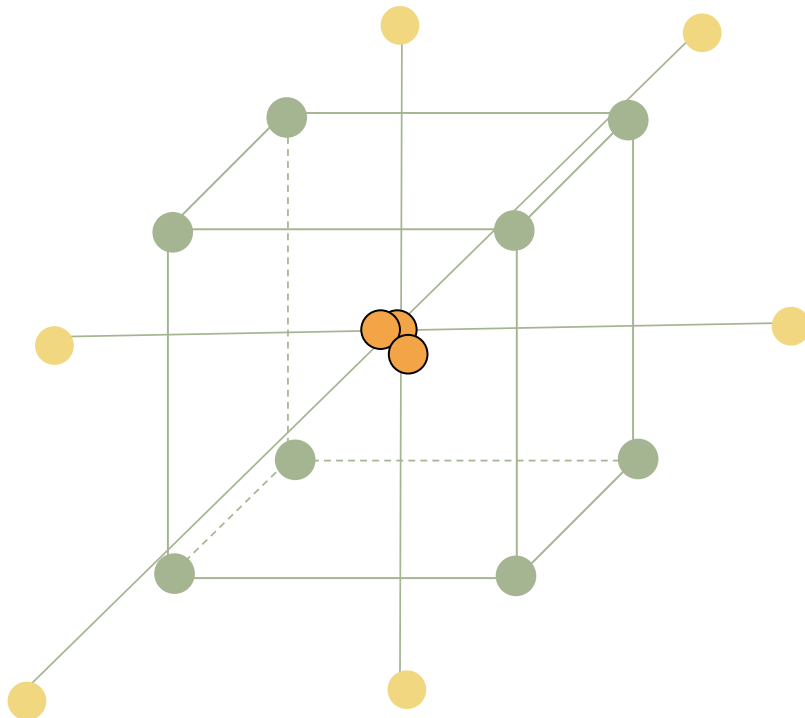
Efectos interacción

Efectos cuadráticos (curvatura)

Detección curvatura, y estudio separado de cada efecto cuadrático

5. Diseños específicos y superficies de respuesta

5.5. DOEs. Diseño central compuesto.



Los puntos centrales proporcionan información sobre la variabilidad experimental y mejoran la robustez del modelo. También ayudan a estimar el error puro y sirven para verificar si el modelo lineal es suficiente o si se requiere un modelo cuadrático.

$$Y = \beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i \cdot x_i + \sum_{i=1}^k (\beta_{ii} \cdot x_i^2) + \sum_{i < j}^k \beta_{ij} \cdot x_i \cdot x_j + \varepsilon$$

El **diseño central compuesto** es el más utilizado en la etapa de búsqueda de segundo orden, debido a su flexibilidad. Puede realizarse a partir de diseño factorial completo o fraccionado.

Estructura:

1. Una réplica de un DF a 2 niveles (porción factorial) ●
2. $n \geq 1$ repeticiones en el centro ●
3. Dos puntos sobre cada eje axial a una distancia α del centro del diseño (porción axial) ●

Notas (Diseños 2^k)

Para diseño ortogonal: $\alpha = \left(\frac{F \cdot N^{1/2} - F}{2} \right)^{1/2}$

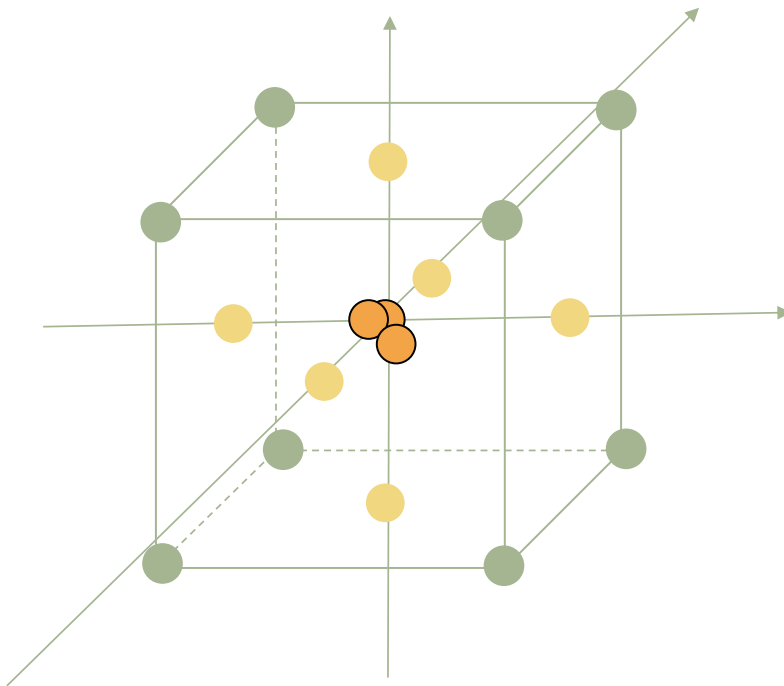
Para diseño ortogonal y rotatable: $\alpha = (F)^{1/4}$

F: número puntos en porción factorial. $n \cong 4 \cdot \sqrt{F} + 4 - F$

N: corridas experimentales.

5. Diseños específicos y superficies de respuesta

5.5. DOEs. Diseño compuesto centrado en las caras.



$$Y = \beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i \cdot x_i + \sum_{i=1}^k (\beta_{ii} \cdot x_i^2) + \sum_{i < j}^k \beta_{ij} \cdot x_i \cdot x_j + \varepsilon$$

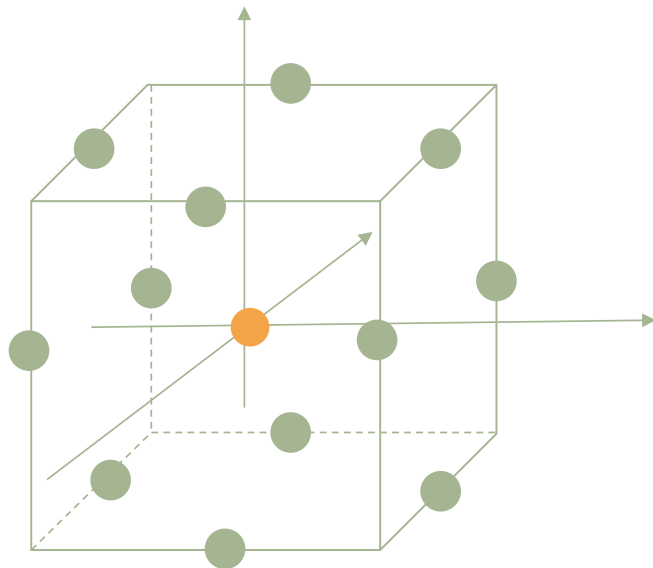
El **diseño central centrado en las caras** se utiliza cuando es complicado evaluar experimentalmente variables más allá de la operabilidad del proceso.

Estructura:

1. Una réplica de un DF a 2 niveles (porción factorial) ●
2. $n \geq 1$ repeticiones en el centro ●
3. Dos puntos sobre cada eje axial a una distancia α del centro del diseño (porción axial), siendo α la semidistancia entre los niveles de los factores (para que quede en las caras) ●

5. Diseños específicos y superficies de respuesta

5.5. DOEs. Diseño Box-Behnken



$$Y = \beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i \cdot x_i + \sum_{i=1}^k (\beta_{ii} \cdot x_i^2) + \sum_{i < j}^k \beta_{ij} \cdot x_i \cdot x_j + \varepsilon$$

El **diseño Box-Behnken** se utiliza cuando se tienen tres o más factores y se quiere ser eficiente en el número de corridas. Es cuasi-rotable, al no incluir tratamientos en los vértices de la región experimental.

Estructura:

1. Puntos en el medio de las aristas del cubo centrado en el origen. ●
2. n= 1 repeticiones en el centro ●

El BBD incluye combinaciones de niveles altos (+1) y bajos (-1) de los factores, pero no incluye ensayos en los vértices (extremos) del cubo experimental. En cambio, los puntos experimentales están en el centro de las caras de los cubos definidos por los factores. Esto significa que los puntos experimentales se ubican en las combinaciones entre dos factores a sus niveles alto y bajo, mientras que el resto de los factores se mantiene en sus niveles medios.

5. Diseños específicos y superficies de respuesta

5.5. DOEs. Diseño Box-Behnken

Ventajas

- **Menor Número de Ensayos:** El BBD es más eficiente en términos de número de ensayos necesarios para ajustar un modelo cuadrático. Para tres factores, el diseño requiere 13 experimentos, frente a los 15 experimentos del CCD.
- **Protección contra Puntos Extremos:** Al no incluir puntos en los extremos del rango experimental, el BBD puede proteger contra ensayos en condiciones extremas que puedan ser peligrosas, costosas o inviables.
- **Adecuado para Modelos Cuadráticos:** El diseño es capaz de modelar relaciones cuadráticas entre los factores y la respuesta de manera efectiva, siendo útil para optimización y ajuste fino de procesos.
- **Flexibilidad:** Es adecuado para aplicaciones donde se requiere un equilibrio entre el número de ensayos y la capacidad de estimar efectos cuadráticos.

Desventajas

- **No es Rotable:** A diferencia de algunos CCD, el diseño Box-Behnken no es naturalmente rotatable, lo que significa que la variabilidad de las predicciones no es la misma en todas las direcciones desde el centro del diseño.
- **Limitaciones para Regiones Extensas:** Si se sospecha que los factores tienen un comportamiento no lineal fuera del rango medio (en los extremos), este diseño puede no ser el más adecuado, ya que no incluye puntos en esos extremos.

EJERCICIOS

GUIA DE CONTENIDOS

1. Objetivos
2. Diseño de experimentos (DOE)
3. Diseños factoriales 2^k .
4. Herramientas gráficas de soporte al DOE
5. Diseños específicos y superficies de respuesta
6. Resumen y ejercicio entregable

6. Resumen y ejercicio entregable

6.1. Resumen

- **Diseño de experimentos (DOE):** relevancia, tipos, diseños factoriales, superficies de respuesta. Fundamentos estadísticos: aleatorización, replicación, bloqueo, factorialidad.
- **Diseños factoriales 2^k :** $k=2, 3$, análisis factorial, ANOVA, fraccionamiento $k-p$, fraccionamiento Placket-Burman.
- **Herramientas gráficas de soporte al DOE:** gráficas de residuos, Pareto, efectos principales, interacción de efectos
- **Diseños específicos y superficies de respuesta:** Metodología RSM, DOEs para RSMs, Ortogonalidad, Rotabilidad, Modelos matemáticos, Diseño central compuesto, Diseño centrado en caras, Diseño Box-Behnken

6. Resumen y ejercicio entregable

6.2. Entregable

- Entregable individual o por parejas.
- **Objetivos:**
 - Evaluar la calidad de un estudio de bibliografía basado en un diseño de experimentos
 - Trabajar la comprensión de los resultados reportados.

TRABAJO

- A partir de los datos reportados en un artículo científico, y realiza:
 - Descripción de la metodología de Diseño de Experimentos realizada.
 - Evaluación de la validez de los resultados reportados.
- Sigue la plantilla disponible en Aula virtual, explicando los pasos y decisiones tomadas de forma detallada, con la notación matemática adecuada.
- Instrucciones específicas en AULA VIRTUAL.

T4. Diseño de experimentos

Diseño de experimentos (DOE)

Diseños factoriales 2^k .

Herramientas gráficas de soporte al DOE

Diseños específicos y superficies de respuesta