

Universitat de València

Libro de ejercicios Matemáticas para maestros

Aritmética

Jaime Castillo Medina, Irene Ferrando Palomares,
Carlos Segura Cordero, Miguel Ángel García
Moreno, Rosario María Carrasco Torres, María
Emilia García Marques, Camilo Sua Flórez, Edna
González Quiza , Pascual Diago Nebot, Ismael
García Bayona, Lara Ferrando Esteve
[Fecha]

Índice

Índice.....	1
1. Números naturales y aritmética	3
1.1 Introducción al concepto de número natural	3
1.2 Sistemas de numeración a lo largo de la historia	3
1.2.1 Sistema de numeración babilónico.....	3
1.2.2 Sistema de numeración romano	4
1.2.3 Comprensión básica del sistema de numeración decimal.	5
1.3 Aritmética en otras bases de numeración	5
1.3.1 Cambios de base	5
1.3.2. Ejercicios sobre la cadena numérica en otras bases.....	9
1.3.3 Ejercicios sobre la expresión polinómica	10
1.3.4 Suma	11
1.3.5 Resta.....	12
1.3.6 Multiplicación.....	14
1.3.7 División	15
1.3.8 Problemas de base desconocida.....	16
1.4 Ejercicios de autoevaluación.....	19
1.4.1 Enunciados	19
1.4.2 Soluciones	20
2. Divisibilidad.....	21
2.1 Fundamentos de divisibilidad.....	21
2.1.1 Problemas de introducción a la divisibilidad	21
2.1.2 Números primos y compuestos.....	22
2.2 Descomposición en factores primos y búsqueda de divisores	22
2.3 Máximo común divisor y mínimo común múltiplo	23
2.3.1 Problemas de máximo común divisor	23
2.3.2 Problemas de encontrar los divisores comunes a dos o más cantidades.	24
2.3.3 Problemas de mínimo común múltiplo	26
2.3.4 Problemas que relacionan máximo común divisor y mínimo común múltiplo	28
2.4 Propiedades de divisibilidad, criterios de divisibilidad y cuestiones sobre restos	28
2.4.1 Ejercicios sencillos de aplicación de los criterios de divisibilidad.	28
2.4.2 Cuestiones teóricas	30

3.	Fracciones y proporcionalidad	32
3.1	Fundamentos de fracciones.....	32
3.1.1	Identificar fracciones	32
3.1.2	Fracciones equivalentes	35
3.2	Operaciones con fracciones	37
3.2.1	¿Cómo operamos con fracciones?	37
3.2.2	Problemas aritméticos sencillos para introducir los diagramas de barras 44	
3.2.3	Problemas sencillos de fracciones para resolver con diagramas de barras 44	
3.2.4	Problemas de operaciones con fracciones.....	45
3.3	Razón y proporción	50
3.3.1	Introducción al concepto de razón.....	50
3.3.2	Problemas que combinan razones y proporciones de un total.....	51
3.3.3	Problemas con varias razones.	55
3.4	Números decimales	58
3.4.1	Lectura y escritura de números decimales.	58
3.4.2	Transformación de unidades decimales.....	58
3.4.3	Fracción generatriz	59
3.4.4	Clasificación de números decimales	60
3.4.5	Aproximación de números decimales	60
3.5	Porcentajes	61
3.5.1	Problemas sencillos sobre porcentajes	63
3.5.2	Problemas de aplicar porcentajes de forma iterada.....	63
3.5.3	Problemas de porcentajes y fracciones para resolver con diagramas de barras 65	
3.6	Proporcionalidad	66

1. Números naturales y aritmética

1.1 Introducción al concepto de número natural

1. Considera S el conjunto de los días de la semana y C el conjunto de los colores del arcoíris.
 - a. Escribe los elementos de cada conjunto.
 - b. Define dos aplicaciones biyectivas diferentes entre ambos conjuntos.
 - c. Define dos aplicaciones que no sean biyectivas entre ambos conjuntos, justificando por qué no lo son.
2. Determina justificadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:
 - a. Puedo definir una aplicación inyectiva del conjunto de los colores primarios al conjunto de las vocales.
 - b. Puedo definir una aplicación biyectiva del conjunto de las vocales al conjunto de los días de la semana.
 - c. Puedo definir una aplicación sobreyectiva del conjunto de los días de la semana al conjunto de las cifras del sistema numérico decimal.
 - d. Puedo definir una aplicación inyectiva del conjunto de los dedos a una mano al conjunto de las vocales.

1.2 Sistemas de numeración a lo largo de la historia

1.2.1 Sistema de numeración babilónico

3. Escribe con notación actual los números que representan los numerales babilónicos:
 - a. 
 - b. 
 - c. 
 - d. 
4. Representa en el sistema babilónico los siguientes números:

a. 43	b. 62	c. 93
d. 671	e. 1222	f. 3333

Recuerda que has de hacer grupos de 60 unidades para números mayores que 59, y que la operación que te permite agrupar es la división.

Ejemplo: Representa el número 4000 con el sistema de numeración babilónico.

Para representar el número 4000, primero tenemos que ver cuántos grupos de 60 unidades podemos hacer con 4000 unidades. Para ello, dividimos 4000 entre 60: el cociente es 66 y el resto es 40. Eso quiere decir que con 4000 unidades podemos hacer 66 grupos de 60 unidades y nos sobran 40 unidades. Como estas 40 unidades no se pueden agrupar, quedarán representadas en la posición del extremo derecho. La posición a la izquierda de esta es para los grupos, pero en el sistema babilónico no podemos representar 66 con una única posición, así que agrupamos los 66 grupos de 60 unidades, dividiendo de nuevo por 60, en un grupo de 60 grupos de 60 unidades y 6 grupos de 60 unidades que nos sobran.

Por tanto, necesitaremos una tercera posición, a la izquierda de los grupos, para representar este número con el sistema babilónico, y la representación final será:



Este numeral se lee: un grupo de 60 grupos de 60 unidades, 6 grupos de 60 unidades y 40 unidades sueltas. Es decir: $1 \times 60 \times 60 + 6 \times 60 + 40 = 4000$ unidades.

Si te ha costado de entender cómo hemos agrupado las unidades, pongamos un ejemplo más fácil de imaginar. Supongamos que tenemos 4000 monedas y las queremos agrupar en grupos de 60 monedas, que representaremos con sacos. En este caso, al dividir 4000 entre 60 nos salen 66 sacos de 60 monedas sueltas y 40 monedas sueltas. Como no podemos hacer grupos de más de 60, 66 sacos son demasiados, así que los metemos en cofres, haciendo grupos de 60. Por tanto, con 66 sacos, podemos hacer un cofre con 60 sacos y nos sobran 6 sacos. Así, la representación queda de la siguiente manera:



4000 monedas = 1 cofre + 6 sacos + 40 monedas sueltas

Este procedimiento es el mismo que hemos utilizado para llegar a la representación del 4000 en el sistema babilónico:

4000 unidades =

Un grupo de 60 grupos de 60 unidades, 6 grupos de 60 unidades y 40 unidades sueltas.

5. Representa en el sistema babilónico los siguientes números:

- a. 6362
- b. 12121

1.2.2 Sistema de numeración romano

6. Representa en el sistema romano los siguientes números:

- | | | |
|--------|--------|---------|
| a. 123 | b. 44 | c. 639 |
| d. 99 | e. 487 | f. 1994 |

7. Representa en el sistema decimal los siguientes números:

- | | | |
|---------|-----------|-------------|
| a. XXIX | b. XCIX | c. CCLIX |
| d. CDLI | e. DCXCIX | f. MMCMXLVI |

8. Encuentra el error en la escritura de los siguientes numerales romanos y corrígelos:

- | | | |
|----------|-----------|-------------|
| a. CIC | b. XXVX | c. MDDXXIII |
| d. LXXXX | e. CMLIIV | f. IXVI |

1.2.3 Comprensión básica del sistema de numeración decimal.

9. Determina si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:
- La cifra de las decenas de 123 es 2.
 - En 123 unidades hay 2 decenas.
 - La cifra de las centenas de 2468 es 2.
 - En 2468 unidades hay 46 decenas.
 - En 2468 unidades hay 24 centenas.
10. Escribe la expresión polinómica de los siguientes numerales:
- a. 345 b. 7601 c. 204003
11. Resuelve las siguientes preguntas sobre el sistema numérico decimal:
- ¿Cuántos números hay que tengan exactamente dos cifras?
 - ¿Y con tres cifras?
 - ¿Podrías dar una expresión algebraica que indique la cantidad de números de n cifras?
12. ¿Cuántos números de dos cifras hay tales de que su primera cifra sea par y la segunda sea la mitad de la primera?
13. ¿Cuántos números de tres cifras hay tales de que su primera cifra sea menor que siete, la segunda cifra sea el triple de la primera y la cifra de las unidades sea impar?

1.3 Aritmética en otras bases de numeración

1.3.1 Cambios de base

Ejemplo 2: Agrupando por manos – Base 5

En el sistema numérico decimal que utilizamos en nuestra vida diaria las unidades se agrupan de diez en diez, y es razonable asumir que el diez fue la cantidad escogida para los grupos porque podemos contar hasta 10 con los dedos de ambas manos. Pero ¿qué pasaría si agrupamos las cantidades de 5 en 5, como si contáramos sólo con los dedos de una mano?

Para empezar, si solo podemos contar usando los dedos de una mano, solo podemos usar como cifras 0, 1, 2, 3 y 4, ya que al llegar al 5 ya hemos formado una mano completa, un grupo completo, y, si seguimos las reglas de los sistemas posicionales, hay que representar los grupos a la derecha de las unidades con una nueva cifra. Esto lo escribiremos de la siguiente manera:

$$5_{(10)} = 10_{(5)}.$$

Esta igualdad se puede leer: “cinco, en base diez, se escribe uno cero, en base cinco”, y quiere decir que, si agrupamos de cinco en cinco, para representar el cinco necesitamos un grupo y cero unidades sueltas. Las **bases** que aparecen en la frase anterior indican de cuántas unidades son los grupos que vamos a ir formando. Continuemos con este ejemplo. ¿Cómo contaríamos hasta doce usando solo una mano? Primero contaríamos hasta 5 (una mano), luego de nuevo hasta 5 (otra mano, llevamos dos), y luego dos unidades (dos dedos) más. Por tanto:

$$12_{(10)} = 22_{(5)}.$$

Intenta leer en voz alta esta ecuación como hemos explicado antes. Deberías decir “doce es lo mismo que dos manos y dos dedos” o “doce se escribe como dos dos en base 5”. Fíjate bien en que evitamos leer los numerales escritos en base 5 de la manera tradicional, pues $22_{(5)}$ no representa el número veintidós ($22_{(10)}$), ya que veintidós se corresponde con dos decenas y dos unidades, no dos manos (grupos de 5) y dos dedos (unidades). Al principio será difícil acostumbrarte a la lectura de los numerales en base 5, pero te recomendamos que evites la lectura tradicional en base diez cuando el numeral que estás leyendo esté en otra base para entender bien a qué número hace referencia ese numeral. ¿Qué pasa si queremos representar números más grandes? ¿Cómo representaríamos por ejemplo el número treinta y ocho agrupando por manos, de cinco en cinco? Si vas contando con los dedos de una mano verás que puedes completar siete manos y te sobran tres unidades. Pero, hay un problema: en base 5 solo podemos utilizar las cifras 0, 1, 2, 3 y 4. ¿Cómo representamos entonces “siete manos” (siete grupos de cinco unidades) en base 5? Necesitamos agrupar las manos en grupos de cinco en cinco, y dar un nuevo nombre a estos grupos. Siguiendo con la temática anatómica, llamaremos a estos grupos “brazos”. Con esta nomenclatura, un grupo de cinco manos forma un “brazo”. Por tanto, siete manos y tres dedos es lo mismo que un brazo, dos manos y tres dedos, y:

$$38_{(10)} = 123_{(5)}.$$

Fíjate que podemos hacer la operación inversa utilizando la herramienta que tenemos que da sentido a la escritura de un numeral en una determinada base: la expresión polinómica. ¿Cómo puedo saber qué número representa el numeral $314_{(5)}$? ¿Cuántas unidades son tres “brazos”, una mano y 4 dedos? Utilizando la expresión polinómica:

$$314_{(5)} = 3 \times 5^2 + 1 \times 5^1 + 4 = 3 \times 25 + 1 \times 5 + 4 = 75 + 5 + 4 = 84.$$

Fíjate que en el desarrollo que acabamos de hacer hemos dado sentido a cada cifra. Cada brazo son cinco manos, y cada mano cinco dedos (unidades), así que cada brazo son $5 \times 5 = 25$ unidades. Además, si no podemos ningún subíndice, entenderemos directamente que el numeral está escrito en base 10, por lo que el resultado final es $314_{(5)} = 84_{(10)}$.

14. Escribe el numeral en base 5 para los siguientes números:

- | | |
|-----------|----------------|
| a. Siete | b. Diecinueve |
| c. Trece. | d. Veintiocho. |

15. Usando la división para agrupar de cinco en cinco, y la expresión polinómica para interpretar numerales en base 5, obtén el numeral que falta en cada caso:

- | | |
|-----------------------------------|------------------------------------|
| a. $88_{(10)} = \square_{(5)}$. | b. $\square_{(10)} = 3124_{(5)}$. |
| c. $\square_{(10)} = 332_{(5)}$. | d. $286_{(10)} = \square_{(5)}$. |

Ejemplo 3: Agrupando por docenas – Base 12

Supongamos que queremos agrupar números de doce en doce, como si estuviéramos guardando huevos en sus envases, por docenas. Para representar números en base 12 necesitamos cifras que representen a todos los números hasta el doce, ya que no haremos el primer grupo hasta que tengamos doce unidades. Por tanto, hemos de añadir dos cifras más al conjunto de cifras del sistema decimal. Siguiendo con el estándar al trabajar con bases mayores que la decena, las nuevas cifras que añadamos serán A, que representará el 10, y B, que representará el 11.

$$10_{(10)} = A_{(12)}, \quad 11_{(10)} = B_{(12)}.$$

¿Cómo representaríamos el veinte en base 12? Si pensamos que tenemos 20 huevos, podemos formar una docena y nos sobran ocho huevos, por lo que:

$$20_{(10)} = 18_{(12)}.$$

¿Y si tenemos setenta huevos? ¿Cómo representamos el setenta en base 12? Con una división rápida puedes comprobar que te salen 5 docenas y te sobran diez huevos. Es muy importante que te des cuenta de que esos diez huevos que te sobran no son suficientes para ser agrupados en una nueva docena, y por lo tanto se expresarán en una única cifra, la correspondiente al número diez, en la posición de las unidades. Por tanto:

$$70_{(10)} = 5A_{(12)}.$$

Además, puede ser que necesitemos recurrir a grupos de mayor tamaño que las docenas. Por ejemplo, llamemos “cartón” a una docena de docenas, y “cajón” a una docena de cartones. Entonces, si queremos representar el número tres mil en base 12:

$$\begin{array}{r} 3000 \\ 60 \overline{) 3000} \\ \underline{60} \\ 2400 \\ 20 \overline{) 2400} \\ \underline{2400} \\ 00 \end{array} \quad \begin{array}{r} 250 \\ 10 \overline{) 250} \\ \underline{20} \\ 50 \\ 5 \overline{) 50} \\ \underline{48} \\ 20 \\ 2 \overline{) 20} \\ \underline{20} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 20 \\ 8 \overline{) 20} \\ \underline{16} \\ 4 \end{array}$$

Tres mil huevos se pueden agrupar en 250 docenas y, agrupando las docenas, salen 20 cartones y sobran 10 docenas. Agrupando los cartones, te queda 1 cajón y sobran 8 cartones. Por tanto:

$$3000_{(10)} = 250 \times 12 = (20 \times 12 + 10) \times 12 = ((1 \times 12 + 8) \times 12 + 10) \times 12$$

$$1 \times 12^3 + 8 \times 12^2 + 10 \times 12^1 = 18A0_{(12)}$$

De la misma manera que con otras bases, se puede utilizar la expresión polinómica para saber a qué número hace referencia un numeral. Por ejemplo:

$$3A5_{(12)} = 3 \times 12^2 + 10 \times 12^1 + 5 = 3 \times 144 + 10 \times 12 + 5 = 432 + 120 + 5 = 557.$$

16. Usando la división para agrupar de doce en doce, y la expresión polinómica para interpretar numerales en base 12, obtén el numeral que falta en cada caso:

a. $95_{(10)} = \square_{(12)}.$

b. $\square_{(10)} = B07_{(12)}.$

c. $\square_{(10)} = 36A_{(12)}.$

d. $7039_{(10)} = \square_{(12)}.$

17. ¿Eres capaz de hacer los siguientes cambios de base entre base 5 y base 12?

a. $24_{(5)} = \square_{(12)}.$

b. $\square_{(5)} = 48_{(12)}.$

c. $\square_{(5)} = 20_{(12)}.$

d. $4400_{(5)} = \square_{(12)}.$

18. Haz los siguientes cambios de base:

a. $\square_{(10)} = 1001110_{(2)}.$

b. $25842_{(10)} = \square_{(12)}.$

c. $\square_{(10)} = ABC6_{(13)}.$

d. $\square_{(10)} = 1463_{(7)}.$

e. $3415_{(10)} = \square_{(3)}.$

f. $237_{(10)} = \square_{(3)}.$

g. $999_{(10)} = \square_{(7)}.$

h. $3058_{(10)} = \square_{(15)}.$

19. Escribe los siguientes números en las bases que se indican:

a. $\square_{(10)} = 7658_{(9)}.$

b. $735_{(10)} = \square_{(8)}.$

c. $\square_{(10)} = 23102_{(4)}.$

d. $501086_{(10)} = \square_{(18)}.$

e. $\square_{(10)} = 7A38_{(13)}.$

f. $31098_{(12)} = \square_{(6)}.$

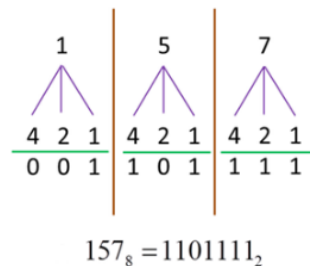
g. $\square_{(10)} = A34B1_{(16)}.$

h. $302112_{(5)} = \square_{(7)}.$

i. $21356_{(10)} = \square_{(4)}.$

j. $7A65C8_{(15)} = \square_{(3)}.$

20. ¿Qué número es en el sistema decimal el número que en el sistema hexadecimal se escribe $3BF_{(16)}$?
21. Expresa en base octal el número que en base hexadecimal tiene seis dígitos que son los primeros seis números pares del sistema decimal ordenados de izquierda a derecha.
22. A Juan le encantan las matemáticas y a veces se plantea retos para practicar conceptos. Por ejemplo, el último reto que se ha planteado es contestar a la siguiente pregunta: Un número que en base cuatro tiene seis cifras, ¿puede ser mayor que 4100 en base 10? Esta vez Juan está teniendo problemas para resolverlo. Ayúdale tú a resolver el reto.
23. Contesta a las siguientes preguntas:
- ¿Cómo se escribe $234_{(6)}$ en base 10?
 - ¿Y cómo se escribe $489_{(10)}$ en base 12?
 - ¿Y $489_{(10)}$ en base 7?
24. La siguiente imagen ilustra un método para convertir números de base 2 a base 8 y viceversa.



- ¿Puedes explicar cómo funciona este método? Para entenderlo, fíjate en que cada cifra en base 8 produce tres cifras en base 2, o que las cifras en base 2 se agrupan de tres en tres para producir cifras en base 8, e intenta deducir cómo se transmite la información de una base a otra.
 - ¿Se puede extender esta idea a otras bases?
25. Completa la tabla haciendo los cambios de base correspondientes. Puedes hacerlos directamente o pasando primero por base 10:

base Decimal	base Binaria	base Octal	base Hexadecimal
	1110000		
		162	
			8F
125			
	101010		
		73	
			2AB
888			

1.3.2. Ejercicios sobre la cadena numérica en otras bases

26. Completa la tabla:

base 10	base 2	base 3	base 4	base 5	base 6
0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1
2	10	2	2	2	2
3	11	10	3	3	3
4	100				
5					
6			12		
7	111				
8					12
9				14	
10					
11	1011	102			
12				22	

27. Escribe los seis numerales siguientes al numeral $30_{(4)}$ en base 4. ¿Cuál es el numeral anterior en la misma base?

28. Escribe los primeros 12 números si cuentas en base 2, 6 y 9.

29. ¿Cuál es el nombre del sistema que utiliza solos los dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7?

30. Escribe los seis numerales siguientes al número $20_{(3)}$. ¿Cuál es el número anterior en la misma base?

31. Escribe los primeros 10 números si cuentas en base 2, 3 y 5.

32. Escribe los dos números anteriores a los siguientes: $555_{(6)}$, $100_{(7)}$, $1000_{(5)}$.

33. Completa cada uno de los siguientes enunciados.

- En base 12, el número siguiente al $AB_{(12)}$ es el
- En base 14, el número anterior al $100_{(14)}$ es el
- En base 9, el número anterior al $100_{(9)}$ es el

34. ¿Cuántos números hay entre el $99_{(11)}$ y el $100_{(11)}$?

35. Completa cada uno de los siguientes enunciados.

- En base 7, entre el $24_{(7)}$ y el $42_{(7)}$ hay números.
- En base 12, entre el $99_{(12)}$ y el $100_{(12)}$ hay números.
- En base 14, el número siguiente al $CD_{(14)}$ es el
- En base 15, el número anterior al $100_{(15)}$ es el

36. El mayor número de tres cifras en base 11, ¿cuántas cifras tiene en base 5?

37. Completa la siguiente tabla

Numeral anterior	Numeral	Numeral posterior
	El menor número que tiene 5 dígitos en base 6	
	El mayor número que tiene 3 dígitos en base 3	
	$1AD9_{(16)}$	

1.3.3 Ejercicios sobre la expresión polinómica

38. Escribe el numeral correspondiente al siguiente número en base 3. Puedes hacerlo directamente, pero luego comprueba el resultado trabajando en base 10 y luego haciendo el cambio.

$$1 + 3 + 3^2 + 3^4 + 3^6$$

39. Escribe el numeral correspondiente al siguiente número en base 5. Puedes hacerlo directamente, pero luego comprueba el resultado trabajando en base 10 y luego haciendo el cambio. El símbolo $\times$ representa la multiplicación.

$$5 \times 5 \times (5 \times (5 + 4) + 3) + 2 + 1$$

40. Escribe el numeral en base 5 correspondiente a las siguientes expresiones:

a. $5 \times (5 \times (5 \times 5 \times (7 + 8) + 3) + 4) + 2$

b. $5 \times 12 + 5 \times (5 \times 5 \times 2 + 3) + 4 + 125$

41. En base 7 ¿cómo se escribe el siguiente número?

$$7 \times (7 \times 7 \times (7 \times 11 + 5) + 2) + 4$$

42. Calcula el valor de a para que $4aa_{(5)} = 112_{(10)}$.

43. El número M escrito en base 8 tiene cuatro cifras: $1X42_{(8)}$. En base seis se escribe como $X2X0_{(6)}$. ¿Cuál es el valor de X ?

44. Hallar a para que el número $10a5_{(6)}$ sea igual que $a2aa_{(4)}$.

45. En el numeral $25023_{(6)}$ ¿cuántas veces mayor es la cantidad que representa la cifra 2 de la izquierda que la cantidad que representa la cifra 2 de la derecha?

46. En el numeral $2312_{(4)}$, ¿cuántas veces es mayor la cantidad que representa la cifra 2 de la izquierda que la que representa la cifra 2 de la derecha?

47. En el numeral $243521_{(7)}$,

a. ¿Cuántas veces es mayor la cantidad que representa la cifra 2 de la izquierda que la que representa la cifra 2 de la derecha?

b. ¿Cuántas veces es mayor la cantidad que representa la cifra 4 que la cantidad que representa la cifra 2 de la derecha?

48. ¿Cuántos grupos de $125 = 5^3$ hay en el número $43234_{(5)}$? Expresa la respuesta en base 10 y en base 5.
49. En el numeral $324561_{(8)}$,
- ¿Cuántas veces es mayor la cantidad que representa la cifra 6 que aquella que representa la primera cifra del número?
 - ¿Cuántas veces es mayor la cantidad que representa la cifra 2 que la cantidad que representa la cifra 4?
50. ¿Cuántos grupos de $27 = 3^3$ hay en $1202021_{(3)}$?
51. ¿Cuántos grupos de $125 = 5^3$ hay en $1234321_{(5)}$?
52. Determina justificadamente si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos. En caso de ser falsos, corrígelos como consideres.
- En base 7, el número anterior al $100_{(7)}$ es el $69_{(7)}$.
 - En base 8 hay trece números entre el $24_{(8)}$ y el $42_{(8)}$ (sin contar ambos).
 - En base 12, el número siguiente al $AB_{(12)}$ es el $B0_{(12)}$.
 - En base 6, en el número $4321_{(6)}$ hay tres grupos de $6^2 = 36$ unidades.
 - En base 9 hay ocho números entre el $45_{(9)}$ y el $54_{(9)}$.
53. Determina justificadamente si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos. En caso de ser falsos, corrígelos como consideres.
- En base 12 después del $99_{(12)}$ viene el $A0_{(12)}$.
 - En base 7 antes del $100_{(7)}$ viene el $69_{(17)}$.
 - En base 8 antes del $50_{(8)}$ viene el $47_{(8)}$.
 - En base 5, entre el $23_{(5)}$ y el $102_{(5)}$ hay quince números (sin contar ambos).
 - En base 9, entre el $45_{(9)}$ y el $78_{(9)}$ hay treinta números (sin contar ambos).
 - En base 8, en el numeral $1234_{(8)}$ hay dos grupos de $64 = 8^2$ unidades.
 - En base 6, en el numeral $1234_{(6)}$ hay ocho grupos de $36 = 6^2$ unidades.
 - En base 7, en el numeral $1234_{(7)}$ hay doce grupos de $49 = 7^2$ unidades.
 - En base 5, en el numeral $4321_{(5)}$, la cantidad que representa el 4 es 25 veces mayor a la que representa el 2.
 - En base 8, en el numeral $6321_{(8)}$, la cantidad que representa el 6 es 16 veces mayor a la cantidad que representa el 3.

1.3.4 Suma

Ejemplo: Realiza la operación $14_{(5)} + 23_{(5)}$.

Para realizar esta suma podemos hacer un desarrollo en horizontal, separando las manos (grupos de 5) de los dedos (unidades). De esta manera:

$$\begin{aligned}
 14_{(5)} + 23_{(5)} &= (10_{(5)} + 4_{(5)}) + (20_{(5)} + 3_{(5)}) = 10_{(5)} + 4_{(5)} + 20_{(5)} + 3_{(5)} \\
 &= 10_{(5)} + 20_{(5)} + 4_{(5)} + 3_{(5)} = 30_{(5)} + 12_{(5)} = 30_{(5)} + 10_{(5)} + 2_{(5)} \\
 &= 40_{(5)} + 2_{(5)} = 42_{(5)}.
 \end{aligned}$$

Los pasos que hemos dado aquí son los mismos que haríamos en una suma con llevabas en base 10. Enunciémoslos:

1. Primero escribimos cada número separando explícitamente las manos (grupos de 5) y los dedos (unidades).
2. Utilizamos la propiedad asociativa para poder alterar el orden las operaciones. Así podemos “desenganchar” las manos y los dedos de cada sumando.
3. Utilizamos la propiedad conmutativa para poder alterar el orden de los sumandos, con el objetivo de “emparejar” las manos de un sumando con las de otro, y lo mismo con los dedos.
4. Agrupamos manos con manos y dedos con dedos, es decir, los sumamos.
5. Al sumarlos obtenemos que tenemos demasiados dedos, así que tendremos que agrupar 5 dedos en una mano.
6. Descomponemos los siete ($12_{(5)}$) dedos en una mano y dos dedos.
7. Agrupamos la mano con las manos que ya habíamos agrupado de los sumandos.
8. Reconstruimos el resultado en su expresión en el sistema numérico en base 5 reagrupando las manos y los dedos.

El algoritmo en su escritura tradicional funciona perfectamente también en base 5. Las llevadas que surgen de agrupar las unidades que superan el tamaño de la base se anotan en la columna de los grupos de siguiente orden (en este caso, de las manos), y se añaden al hacer la suma para obtener el resultado.

$$\begin{array}{r} (1) \\ 14 \\ + 23 \\ \hline 42 \end{array}$$

54. Realiza las siguientes operaciones en la base que se indica, sin recurrir a cambios en base 10. Para comprobar el resultado, puedes pasar tanto los sumandos como el resultado a base 10 y realizar la suma en base 10.

- | | |
|------------------------------------|----------------------------------|
| a. $1231_{(4)} + 3213_{(4)}$ | b. $670122_{(8)} + 102367_{(8)}$ |
| c. $15204_{(6)} + 22135_{(6)}$ | d. $AB0D_{(14)} + 82C9_{(14)}$ |
| e. $1100101_{(2)} + 1001110_{(2)}$ | f. $8701_{(11)} + 52A6_{(11)}$ |

1.3.5 Resta

Ejemplo: Realiza la operación $41_{(5)} - 12_{(5)}$.

Para realizar la resta tenemos que recurrir al algoritmo de “pedir prestado” o al de “pedir y pagar”, ya que la cifra de los dedos (unidades) del minuendo es menor que la del sustraendo.

Pedir prestado

Según el algoritmo de pedir prestado, cogemos una de las 4 manos del minuendo y la descomponemos en los 5 dedos que la forman. Ahora añadimos esos 5 dedos al dedo que ya había en el minuendo. Si queremos hacer la resta de los dedos mediante cálculo mental, podemos decir que 5 dedos que hemos añadido a 1 dedo forman 6 dedos, y $6 - 2 = 4$ dedos. Como hemos aprendido a hacer cálculo mental en base 10, la resta de los dedos la haríamos en base 10 y por eso hemos representado los números involucrados en la resta en base 10.

$$\begin{array}{r} 3 \\ 41_{(5)} \\ - 12_{(5)} \\ \hline 24_{(5)} \end{array}$$

La otra opción para completar la resta de los dedos es mantener la notación en base 5 y acudir a la cadena numérica escrita en base 5:

0 1 2 3 4 10 11 12 13 14 ...

Si añadimos una mano (5 dedos) al dedo que teníamos, pero seguimos representando en base 5 esta cantidad, ahora tenemos $11_{(5)}$ dedos. Si queremos restar $11_{(5)} - 2_{(5)}$, podemos hacerlo en la cadena numérica, bien dando 2 pasos hacia atrás desde el $11_{(5)}$:

0 1 2 3 4 10 11 12 13 14 ...

 Dos pasos hacia atrás porque la cifra del sustraendo

El resultado es $4_{(5)}$ porque es el numeral al que hemos llegado al dar dos pasos hacia atrás. La otra opción para hacer esta resta utilizando la cadena numérica en base 5 es contar cuántos pasos hay que dar desde el $11_{(5)}$ para llegar al $2_{(5)}$:

0 1 2 3 4 10 11 12 13 14 ...

 Vamos hasta el 2 hacia atrás porque la cifra del sustraendo

En cualquier caso, la respuesta es $4_{(5)}$, pero según el sentido que estemos dando a la resta, se puede calcular a través de la cadena numérica de cualquiera de las dos maneras.

Una vez terminada la resta de la columna de los dedos, hacemos la resta de la columna de las manos, recordando ahora que tenemos una mano menos en el minuendo, pues hemos cogido una de ellas para descomponerla en dedos. Por eso cambiamos la cifra de las manos del minuendo que pasa de 4 a 3, y el resultado de la resta en esta columna es 2. Si desarrollamos la resta en horizontal:

$$\begin{aligned} 41_{(5)} - 12_{(5)} &= (40_{(5)} + 1_{(5)}) - (10_{(5)} + 2_{(5)}) = 30_{(5)} + 10_{(5)} + 1_{(5)} - 10_{(5)} - 2_{(5)} \\ &= 30_{(5)} - 10_{(5)} + 11_{(5)} - 2_{(5)} = 20_{(5)} + 4_{(5)} = 24_{(5)}. \end{aligned}$$

Pedir y pagar

En la práctica, la resta de la primera columna ocurre de la misma manera con esta versión del algoritmo, pero en realidad no porque hayamos pedido prestada una mano a la columna de la izquierda, sino porque hemos “inventado” 5 dedos extra para poder hacer la resta de la columna de los dedos. Hacemos la resta $6 - 2 = 4$ o $11_{(5)} - 2_{(5)} = 4_{(5)}$, y continuamos a la siguiente columna. Ahora, como hemos añadido 5 dedos en el minuendo, hemos de añadir lo mismo en el sustraendo para que la resta no se vea afectada. Esos 5 dedos se corresponden con una mano, así que lo que hacemos en la práctica es sumar una mano más a la cifra de las manos del sustraendo y terminar la resta. Si desarrollamos la resta en horizontal:

$$\begin{array}{r} 41_{(5)} \\ - \overset{2}{\cancel{1}}2_{(5)} \\ \hline 24_{(5)} \end{array}$$

$$\begin{aligned} 41_{(5)} - 12_{(5)} &= (40_{(5)} + 1_{(5)}) - (10_{(5)} + 2_{(5)}) \\ &= (40_{(5)} + 10_{(5)} + 1_{(5)}) - (10_{(5)} + 10_{(5)} + 2_{(5)}) \\ &= 40_{(5)} - 20_{(5)} + 11_{(5)} - 2_{(5)} = 20_{(5)} + 4_{(5)} = 24_{(5)}. \end{aligned}$$

Se escoja el algoritmo que se escoja, este se puede llevar a cabo en cualquier base, siempre teniendo en mente que la base marca el número de elementos de cada grupo.

55. Realiza las siguientes operaciones. Para comprobar el resultado, pues realizar la prueba de la resta:

- | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|
| a. $10010111_{(2)} - 1010101_{(2)}$ | b. $5793_{(11)} - 2A96_{(11)}$ |
| c. $120021_{(3)} - 12212_{(3)}$ | d. $82C6_{(13)} - 3B1A_{(13)}$ |
| e. $1322112_{(4)} - 1210131_{(4)}$ | f. $24680_{(14)} - ABCD_{(14)}$ |
| g. $52414_{(8)} - 37166_{(8)}$ | h. $3692570_{(16)} - BEAFEA_{(16)}$ |

56. Si sabes que los números $1001_{(2)}$ y $10011_{(2)}$ son dos números consecutivos de una progresión aritmética en base 2, ¿cuál es la diferencia de la progresión?
57. ¿Pueden los números $12101_{(3)}$, $21002_{(3)}$ y $22210_{(3)}$ ser números consecutivos de una progresión aritmética?
58. Si los números $301211_{(4)}$ y $303012_{(4)}$ son números consecutivos de una progresión aritmética, ¿cuál sería el siguiente número de la progresión?
59. Genera los primeros cuatro términos de una progresión aritmética de diferencia $432_{(5)}$ sabiendo que el quinto término es $401023_{(5)}$.

1.3.6 Multiplicación

Ejemplo: Realiza la operación $31_{(5)} \times 24_{(5)}$.

Para realizar la multiplicación, separaremos las manos (grupos de 5) y los dedos (unidades) de cada factor y aplicaremos la propiedad distributiva. Podemos ver cómo en el siguiente desarrollo en horizontal de la operación:

$$\begin{aligned} 31_{(5)} \times 24_{(5)} &= 31_{(5)} \times (20_{(5)} + 4_{(5)}) = 31_{(5)} \times 20_{(5)} + 31_{(5)} \times 4_{(5)} \\ &= (30_{(5)} + 1_{(5)}) \times 20_{(5)} + (30_{(5)} + 1_{(5)}) \times 4_{(5)} \\ &= 30_{(5)} \times 20_{(5)} + 1_{(5)} \times 20_{(5)} + 30_{(5)} \times 4_{(5)} + 1_{(5)} \times 4_{(5)}. \end{aligned}$$

Ahora, resolvemos cada una de las operaciones intermedias que tenemos escritas, entendiendo que podemos calcular más rápidamente aquellas en las que uno o más factores terminen en ceros si interpretamos que hacen referencia a grupos (en base 5: manos, brazos, etc.). Por tanto, tenemos que calcular 4 operaciones mentalmente:

- En operación más sencilla no tenemos que hacer mucho trabajo: $1_{(5)} \times 4_{(5)} = 4_{(5)}$ dedos (unidades).
- En las siguientes operaciones, cambiaremos los factores terminados en 0 por los correspondientes factores sin cero, entendiendo que estamos expresando el factor en manos (grupos de 5 unidades) en vez de dedos (unidades). Además, tenemos que escribir el numeral correspondiente a cada resultado en base 5:
 - $30_{(5)} \times 4_{(5)}$ dedos = $3_{(5)} \times 4_{(5)}$ manos = doce manos = $22_{(5)}$ manos.
 - $1_{(5)} \times 20_{(5)}$ dedos = $1_{(5)} \times 2_{(5)}$ manos = dos manos = $2_{(5)}$ manos.
- En la última de estas operaciones hay que tener en cuenta que, al terminar ambos factores en cero, ambos representan grupos. Repitiendo la misma idea que en los casos anteriores, pero para cada uno de los factores, obtenemos que: $30_{(5)} \times 20_{(5)}$ dedos = $3_{(5)} \times 2_{(5)}$ manos = $3_{(5)} \times 2_{(5)}$ brazos = seis brazos = $11_{(5)}$ brazos.

Finalmente, si sumamos todos estos valores:

$$\begin{aligned} 31_{(5)} \times 24_{(5)} &= 30_{(5)} \times 20_{(5)} + 1_{(5)} \times 20_{(5)} + 30_{(5)} \times 4_{(5)} + 1_{(5)} \times 4_{(5)} \\ &= 1100_{(5)} + 220_{(5)} + 20_{(5)} + 4_{(5)} = 1344_{(5)}. \end{aligned}$$

Este desarrollo se puede expresar también en la forma tradicional vertical, donde se agrupan los sumandos en función del multiplicador. Es muy importante recordar que todos numerales que aparecen en la operación han de ser los numerales correctos en la base adecuada (base 5 en este caso) ya que, aunque siempre recurrimos al cálculo mental en base 10, los sistemas de numeración con diferentes bases son independientes entre ellos y

$$\begin{array}{r} 31 \\ \times 24 \\ \hline 224 \\ + 1120 \\ \hline 1344 \end{array}$$

funcionan de forma cerrada y completa (no se necesita usar base 10 para hacer operaciones en base 5).

Aunque en esta operación no han entrado en juego con especial relevancia las llevadas, por ser la cifra de los dedos (unidades) del multiplicando un 1, es importante recordarlas a la hora de hacer multiplicaciones con varias cifras en cualquier base.

60. Realiza las siguientes operaciones. Puedes comprobar el resultado pasando los factores a base 10, así como el resultado, y multiplicando en base 10.

a. $1233_{(4)} \times 32_{(4)}$

b. $624_{(9)} \times 73_{(9)}$

c. $3456_{(7)} \times 42_{(7)}$

d. $87878_{(15)} \times 3434_{(15)}$

e. $873_{(12)} \times AB_{(12)}$

f. $4276_{(8)} \times 64_{(8)}$

g. $B9D_{(15)} \times 3C_{(15)}$

h. $AB5_{(12)} \times 38_{(12)}$

61. El número $657401_{(8)}$ es el primer término de una progresión aritmética. ¿Cuál será el cuarto término si la diferencia de la progresión es el número $321_{(8)}$?

62. El número $1453_{(7)}$ es el primer término de una progresión aritmética. ¿Cuál será el vigésimo término si la diferencia de la progresión es el número $25_{(7)}$?

1.3.7 División

Ejemplo: Realiza la operación $26A5_{(12)} \div 43_{(12)}$.

Para realizar la división, primero recordemos que la lectura en base 12 de $26A5_{(12)}$ nos da cinco huevos (unidades), diez docenas, seis cartones (grupos de 12 grupos de 12 unidades) y dos cajones (grupos de 12 grupos de 12 grupos de 12 unidades). Como no podemos agrupar $26_{(12)}$ cartones en grupos de $43_{(12)}$, porque no hay suficientes para formar ningún grupo, tenemos que considerar agrupar $26A_{(12)}$ docenas en grupos de $43_{(12)}$. Para saber cuántos grupos salen, tenemos que hacer una estimación en base 12.

La estimación puede parecer la parte más desafiante de todo el proceso, pero bloquearse aquí no tiene sentido porque cada estimación incorrecta te da más información sobre cuál será la correcta. Probaremos con las primeras cifras y, como base 12 y base 10 no son tan diferentes, nos dejaremos llevar por la intuición de base 10. Como las primeras cifras de $26A_{(12)}$ son 26, la primera cifra de $43_{(12)}$ es 4, y 26 entre 4 cabe a 6 en base 10, estimaremos con el 6. Para ello calculamos $43_{(12)} \times 6_{(12)} = 216_{(12)}$ (recuerda hacer la multiplicación en base 12, estamos trabajando en base 12). Parece que nos hemos quedado cortos. La manera de comprobarlo es hacer la resta $26A_{(12)} - 216_{(12)} = 54_{(12)}$, que es más que $43_{(12)}$, luego aún nos cabe otro grupo más. La estimación correcta para este primer paso es $43_{(12)} \times 7_{(12)} = 259_{(12)}$, ya que $26A_{(12)} - 259_{(12)} = 11_{(12)}$, que es menor que $43_{(12)}$. De aquí podemos concluir que la primera cifra del cociente, que será la cifra de las docenas, es un 7.

Para el siguiente paso, cogemos las $11_{(12)}$ docenas que nos sobran y le añadimos los 5 huevos (unidades) es que aún no hemos considerado en el número, y nos preguntamos cuántos grupos de $43_{(12)}$ unidades podemos hacer con $115_{(12)}$ unidades. Estimando como antes, usando las primeras cifras, podríamos pensar que 2 es una buena opción, ya que 11 entre 4 cabe a 2 en base 10, pero como antes nos hemos quedado cortos, probaremos ahora con 3 directamente. Como $43_{(12)} \times 3_{(12)} = 109_{(12)}$, que es menor que $115_{(12)}$, la

estimación es correcta. Por tanto, la siguiente (y última) cifra del cociente es 3, y el cociente de la división es $73_{(12)}$ y el resto es $115_{(12)} - 109_{(12)} = 8_{(12)}$.

Si desarrollamos esta división de la forma tradicional, el resultado podría ser algo así:

$ \begin{array}{r} 26A5 \\ - 259 \\ \hline 0115 \\ 109 \\ \hline 008 \end{array} $ Resto	$ \begin{array}{r} 43 \\ \hline 73 \end{array} $ Cociente	ESTIMACIONES (base 12) $\begin{array}{r} 43 \\ \times 6 \\ \hline 216 \end{array}$ $\begin{array}{r} 43 \\ \times 7 \\ \hline 259 \end{array}$ $18_{(10)} = 16_{(12)}$ $24_{(10)} = 20_{(12)}$ $21_{(10)} = 19_{(12)}$ $29_{(10)} = 25_{(12)}$ $\begin{array}{r} 43 \\ \times 3 \\ \hline 109 \end{array}$
---	--	--

63. Realiza las siguientes operaciones. Puedes comprobar el resultado haciendo la prueba de la división: $D = d \times q + r$.

a. $4562_{(7)} \div 35_{(7)}$

b. $ABC6_{(13)} \div 37_{(13)}$

c. $4235_{(6)} \div 14_{(6)}$

d. $85A1_{(12)} \div 3B_{(12)}$

e. $7836_{(9)} \div 25_{(9)}$

f. $4276_{(8)} \div 115_{(8)}$

1.3.8 Problemas de base desconocida

64. En base n , el numeral decimal $94_{(10)}$ se escribe $163_{(n)}$. ¿En qué base está?

65. ¿Podrías decir la base en que está expresado el número $765_{(n)}$ si este número en base 4 se expresa como $13311_{(4)}$?

66. El número $46578_{(10)}$ se escribe $70803_{(n)}$ en base n . Encuentra la base n .

67. El número $824_{(10)}$ se escribe $3452_{(n)}$ en base n . Encuentra la base n .

68. El número $3249_{(10)}$ se escribe $12321_{(n)}$ en base n . Encuentra la base n .

69. ¿En qué base se escribe el diez mil trescientos cuarenta y siete como $24135_{(n)}$?

70. Encuentra la base desconocida x :

a. $32_{(10)} = 44_{(x)}$

b. $31_{(4)} = 11_{(x)}$

c. $15_{(x)} = 30_{(y)}$

71. Un número N se representa en una base b como $51_{(b)}$ y en la base $b + 1$ como $44_{(b+1)}$. Calcula la base b y expresa el número N en base 9.

72. Un número N se representa en una base b como $435_{(b)}$ y en la base $b + 1$ como $326_{(b+1)}$. Calcula la base b y expresa el número N en base decimal.

73. Sea b un número natural. Considera un sistema de numeración posicional con base b . Considera ahora el número $100_{(b)}$ expresado en esa base. Indica cuáles son las cifras de ese número en un sistema posicional de base $b + 1$.
74. ¿En qué sistema de numeración se cumple que $55_{(x)} + 43_{(x)} = 131_{(x)}$?
75. Para las siguientes expresiones, encuentra la base en la que son ciertas:
- | | |
|--------------------------------|---|
| a. $A \times B \times 8 = 529$ | b. $6 \times 7 \times 8 = 286$ |
| c. $A \times B \times 5 = 334$ | d. $2 \times 3 \times 4 \times 5 = 170$ |
| e. $B \times 2 \times C = 129$ | f. $2 \times B \times 7 \times A = 916$ |
76. Encuentra la base del sistema de numeración en la que el doble del número $698_{(n)}$ es igual a la suma de los números $479_{(n)}$ y $907_{(n)}$.
77. El número $224_{(n)}$ es el cuadrado del $13_{(n)}$ en una determinada base n . Calcula dicha base.
78. ¿En qué sistema de numeración se duplica $25_{(n)}$ al invertir sus cifras?
79. ¿En qué base de un sistema de numeración, el triple de $54_{(n)}$ es $250_{(n)}$?
80. Los números $228_{(n)}$, $252_{(n)}$ y $278_{(n)}$ están en progresión aritmética ¿Cuál es la base n que hace esta afirmación cierta?
81. Los números $123_{(n)}$, $140_{(n)}$ y $145_{(n)}$ están en progresión aritmética ¿Cuál es la base n que hace esta afirmación cierta?
82. En el planeta Neptuno están contando las estribaciones que pueden observarse en tres cuadrantes diferentes de la galaxia. Un neptuniano cuenta 24, otro cuenta 36, y un tercero sólo ha contado 13. Dicen que en total han contado 106. ¿En qué base cuentan los neptunianos?
83. En Plutón tienen máquinas multiplicadoras que les facilitan mucho la vida, y han desarrollado un nuevo orden socioeconómico: el multiplicapitalismo. Si en una de estas máquinas introduces monedas, la máquina te devuelve el triple. Los plutonianos dicen que si tienes $25_{(n)}$ monedas, la máquina te vuelve $71_{(n)}$. ¿Cómo es posible? ¿En qué base cuentan los plutonianos?
84. Estoy haciendo recuento de mis juegos de Pokémon, y encontré una nota que hice hace un tiempo donde tengo el inventario. En la nota dice que tengo 11 a los que puedo jugar en la Game Boy Advance, 13 a los que puedo jugar con la Nintendo 3DS y 12 a los que puedo jugar con la Nintendo Switch. Pero en la nota pongo que tengo 41, ¿cómo puede ser esto? Igual es que escribí la nota en otra base para que el inventario fuera secreto... ¿En qué base está escrita la nota?
85. Los duendes del bosque recogen flores para hacer una guirnalda festiva. Nayru ha recogido 65 flores, Farore ha recogido 43 y Din ha recogido el doble que Nayru. En total han recogido 185 flores. ¿En qué bases cuentan los duendes?

86. Los extraterrestres de Marte tienen tres sexos: A, B y C. Han enviado un mensaje a la Tierra diciendo que van a enviar una expedición con 50 marcianos, de los que 21 son del sexo A, 15 del sexo B y 11 del sexo C. ¿En qué base de numeración están contando los marcianos? Razona la respuesta.
87. Mariola, Lluís y Santi tienen colecciones de libros de las que están muy orgullosos. Santi es el que más tiene, con $145_{(n)}$, Mariola tiene $132_{(n)}$; y finalmente Lluís tiene $116_{(n)}$. Santi decide regalarle a Lluís unos libros que tiene repetidos en dos ediciones diferentes, de forma que ahora los tres tienen $132_{(n)}$. ¿Cuántos libros le ha regalado Santi a Lluís y en qué base están contando?
88. Dos habitantes del planeta Kamino coleccionan fragmentos de meteorito. Uno de ellos tiene 66 fragmentos y el otro tiene 23. Si ellos dicen que entre los dos tienen 111, ¿en qué base de numeración trabajan?
89. Un profesor de matemáticas del planeta Geonosis se encuentra corrigiendo un examen. Un estudiante ha escrito que $16^2 = 270$. Sabiendo que el profesor lo ha marcado como correcto (y no se ha equivocado), ¿en qué base de numeración trabajan en ese planeta?
90. Mirando de imprimir fotos para ponerlas en las paredes en mi piso, he estado eligiendo fotos de las que tengo guardadas en el ordenador. He hecho una primera selección, y he dividido las fotos en tres categorías: viajes, familia y amigos. Estoy pensando en ponerlas en unos marcos que vienen a Amazon de esos que hacen como un grupito de fotos. Además, los marcos están en oferta, así que voy a comprar a montón, todos iguales, para que no desentone. He visto que para las de las de familia necesito dos marcos y me sobran tres fotos, que de las de amigos tengo seis fotos más que las de familia, y que de las de viajes tengo el doble de fotos que de las de amigos. En total he completado tantos marcos que he pensado aprovechar la pared grande que tengo en el estudio para hacer como un mosaico. He decidido que, para que sea más estético, pondré en el mosaico la misma cantidad de marcos que de fotos hay en cada marco. Después de colgar todos los marcos que van al mosaico, me quedan 5 marcos más para las otras paredes, y dos fotos sueltas, que las dejo para la mesa de escritorio (a esas las pondré un marco individual diferente, que son más bonitas). ¿Podrías decir de cuántas fotos son los marcos?
91. Tus compañeros elfos Bola de Nieve Fresquita, Muérdago Pinchoso y Turrón Bien Dulzón te traen los últimos regalos que han empaquetado en el taller del Polo Norte. Bola de Nieve dice que ha empaquetado 24 regalos, Muérdago ha traído 13 y Turrón se ha encargado de 32 regalos. Si los juntas con los 22 que había en el almacén, en total tenemos 113 regalos empaquetados. Averigua en qué base cuentan los elfos empaquetadores, justificando tu respuesta como consideres adecuado.

1.4 Ejercicios de autoevaluación

1.4.1 Enunciados

1. Resuelve las siguientes operaciones

- $1100101_{(2)} + 1001110_{(2)}$
- $12321_{(4)} - 2332_{(4)}$
- $4562_{(7)} \div 35_{(7)}$
- $4276_{(8)} \times 64_{(8)}$
- $8521_{(9)} \div 23_{(9)}$
- $AB5_{(12)} \times 38$
- $C08D7_{(14)} - BC89A_{(14)}$
- $1312203_{(4)} + 2213232_{(4)}$
- $C286_{(13)} - 8AC_{(13)}$
- $ACDC_{(15)} \times 54_{(15)}$
- $4276_{(8)} \div 115_{(8)}$

2. ¿Cuántos grupos de $16 = 4^2$ hay en $1234_{(4)}$?

3. ¿Cuántos grupos de $64 = 8^2$ hay en $1234_{(8)}$?

4. Expresa en base 7 el número:

$$2 + 7 \times (3 + 7 \times (5 + 8)) + 7 \times (3 + 7 \times 2)$$

5. Expresa en base 5 el siguiente número:

$$3 + 20 + 75 + 5 \times 5 \times (5 \times 8 + 1)$$

6. ¿Cómo se escribe en base 10 el número que en base 7 se escribe $abc_{(7)}$, donde a es el doble que b , b es el doble que c y c no es cero?

7. En mi colección de cromos tengo $123_{(n)}$ y mi hermana tiene el doble que yo. Juntando las dos colecciones, en total tenemos $413_{(n)}$. ¿En qué base estamos contando?

8. Los venusianos hacen magia con los números. Está claro que $5 \times 11 = 55$, $4 \times 11 = 44$ y $11 \times 11 = 121$, pero ahora dicen que $55_{(n)} + 44_{(n)} = 121_{(n)}$. ¿Será que cuentan en otra base? ¿cuál será?

9. Para las siguientes expresiones, encuentra la base en la que son ciertas:

- $B \times 7 \times A = 473$
- $7 \times 6 \times 3 = 176$
- $9 \times A \times 5 = 200$

10. Los números $331_{(n)}$, $345_{(n)}$ y $362_{(n)}$ están en progresión aritmética ¿Cuál es la base n que hace esta afirmación cierta?

1.4.2 Soluciones

1. Resuelve las siguientes operaciones

- a. $1100101_{(2)} + 1001110_{(2)} = 10110011_{(2)}$
- b. $12321_{(4)} - 2332_{(4)} = 3323_{(4)}$
- c. $4562_{(7)} \div 35_{(7)} \rightarrow \text{cociente } 120_{(7)}, \text{ resto } 32_{(7)}$
- d. $4276_{(8)} \times 64_{(8)} = 343230_{(8)}$
- e. $8521_{(9)} \div 23_{(9)} \rightarrow \text{cociente } 360_{(9)}, \text{ resto } 21_{(9)}$
- f. $AB5_{(12)} \times 38 = 341A4_{(12)}$
- g. $C08D7_{(14)} - BC89A_{(14)} = 203B_{(14)}$
- h. $1312203_{(4)} + 2213232_{(4)} = 10132101_{(4)}$
- i. $C286_{(13)} - 8AC_{(13)} = B6A7_{(13)}$
- j. $ACDC_{(15)} \times 54_{(15)} = 3C30A3_{(8)}$
- k. $4276_{(8)} \div 115_{(8)} \rightarrow \text{cociente } 35_{(8)}, \text{ resto } 5_{(8)}$

2. ¿Cuántos grupos de $16 = 4^2$ hay en $1234_{(4)}$? Cuarenta y siete

3. ¿Cuántos grupos de $64 = 8^2$ hay en $1234_{(8)}$? Ciento noventa y cuatro

4. Expresa en base 7 el número:

$$2 + 7 \times (3 + 7 \times (5 + 8)) + 7 \times (3 + 7 \times 2) = 2162_{(7)}$$

5. Expresa en base 5 el siguiente número:

$$3 + 20 + 75 + 5 \times 5 \times (5 \times 8 + 1) = 13443_{(5)}$$

6. ¿Cómo se escribe en base 10 el número que en base 7 se escribe $abc_{(7)}$, donde a es el doble que b , b es el doble que c y c no es cero? $a = 1, b = 2, c = 4, 124_{(7)} = 67_{(10)}$.

7. En mi colección de cromos tengo $123_{(n)}$ y mi hermana tiene el doble que yo. Juntando las dos colecciones, en total tenemos $413_{(n)}$. ¿En qué base estamos contando? Base 6.

8. Los venusianos hacen magia con los números. Está claro que $5 \times 11 = 55$, $4 \times 11 = 44$ y $11 \times 11 = 121$, pero ahora dicen que $55_{(n)} + 44_{(n)} = 121_{(n)}$. ¿Será que cuentan en otra base? ¿cuál será? Base 8.

9. Para las siguientes expresiones, encuentra la base en la que son ciertas:

- a. $B \times 7 \times A = 473 \rightarrow \text{Base } 13$
- b. $7 \times 6 \times 3 = 176 \rightarrow \text{Base } 8$
- c. $9 \times A \times 5 = 200 \rightarrow \text{Base } 15$

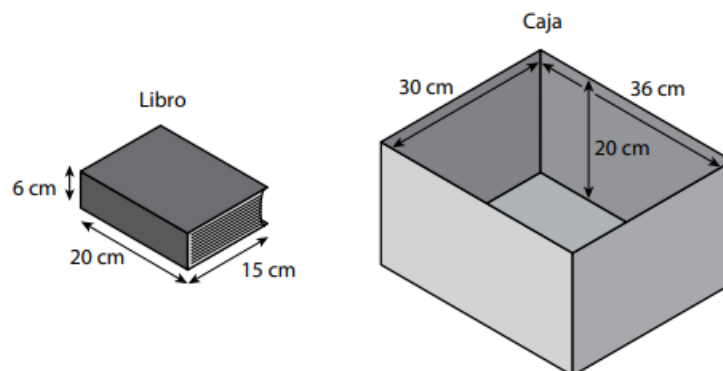
10. Los números $331_{(n)}$, $345_{(n)}$ y $362_{(n)}$ están en progresión aritmética ¿Cuál es la base n que hace esta afirmación cierta? Base 7

2. Divisibilidad

2.1 Fundamentos de divisibilidad

2.1.1 Problemas de introducción a la divisibilidad

1. Anota todos los múltiplos de 11 menores que 100.
2. Encuentra el múltiplo más pequeño de 7 que tiene tres dígitos.
3. Encuentra el múltiplo más grande de 3 que es menos de 2.000.
4. Escribe los divisores comunes de 15 y 20. ¿Cuál es el más grande? ¿Cómo se llama este número?
5. Escribe los divisores comunes de 18 y 30. ¿Cuál es el más grande? ¿Cómo se llama este número?
6. Escribe los múltiplos comunes de 3 y 5 menores que 100. ¿Cuál es el más pequeño? ¿Cómo se llama este número?
7. Escribe los múltiplos comunes de 6 y 8 menores que 100. ¿Cuál es el más pequeño? ¿Cómo se llama este número?
8. Tenemos 72 caramelos y queremos hacer bolsas de cumpleaños iguales. ¿Cuántas maneras diferentes podemos distribuir los caramelos?
9. Carla está empaquetando huevos en cajas. Cada caja tiene capacidad para 6 huevos. Tiene 94 huevos. ¿Cuál es el número más pequeño de cajas que necesitas para empaquetar todos los huevos?
10. Raúl está empaquetando libros en una caja rectangular. Todos los libros tienen el mismo tamaño. ¿Cuál es el mayor número de libros que entrarán en la caja?



11. Los profesores de la Escuela El Parque tienen previsto enviar 6 boletines al año a cada una de las 620 familias con niños de la escuela. Cada uno de los boletines necesita 2 hojas de papel. El papel se vende en paquetes de 500 hojas. ¿Cuál es el

número mínimo de paquetes de papel necesarias para imprimir el boletín escolar durante un año?

12. Una editorial quiere editar un estudio de investigación de 2400 páginas. Quieren que se venda por fascículos y que todos ellos tengan el mismo número de páginas. Por cuestiones de infraestructura el número de fascículos debe ser igual o mayor de 12 pero no mayor de 16. Además, por el tamaño del lomo de la encuadernación, el número páginas de cada fascículo debe ser de al menos 160 y no superar las 180.
 - a. ¿Cuántos fascículos deben ser por tanto?
 - b. ¿Y cuántas páginas deberán tener finalmente cada uno?

2.1.2 Números primos y compuestos

13. ¿Se puede encontrar un número entre 30 y 50 que tenga más de dos divisores y sea primo?
14. Pau sólo puede colocar a sus soldados principales de dos maneras diferentes en filas y columnas. Si tienes entre 15 y 20 soldados, ¿podrías decir cuántos tienes exactamente?
15. Los números 2 y 3 son dos primos y son consecutivos. ¿Es posible encontrar dos números primeros más que sean consecutivos?
16. En el instituto hay un número de estudiantes de entre 780 y 788, con los que no se pueden formar equipos del mismo número de miembros sin más estudiantes, salvo que solo haya un equipo o tantos equipos como estudiantes. ¿Cuántos hay exactamente?
17. Justifica si los números 317, 387, 433, 563, 583, 719, 997 y 1001 son números primos o compuestos.
18. Averigua cuáles de estos números son números primos: 71, 91, 101, 111, 121, 1001.
19. Encuentra todos los números primos entre 99 y 149. ¿Cómo se llaman el resto de los números que hay entre estos dos?

2.2 Descomposición en factores primos y búsqueda de divisores

20. Calcula el número de divisores de: 30, 72, 125, 1260. Si cada uno de estos números representa una cantidad de monedas, ¿cuántos rectángulos diferentes podemos hacer con cada una de estas cantidades? (Fíjate aquí que tendrás que decidir si dos rectángulos con la misma forma, pero diferente orientación, los consideras iguales o diferentes).
21. Sin calcularlos y justificando la respuesta, ¿cuántos divisores tienen los números 396, 7542, 296, 340, 270, 368?
22. Calcula los divisores de los siguientes números: 72, 136, 300, 255.

23. Sabiendo que $5720 = 2^3 \times 5 \times 11 \times 13$,
- ¿Cuántos divisores tiene el número 5720?
 - Escribe los divisores impares de 5720.
 - ¿Cuántos divisores de 5720 son múltiplos de 22?
24. Encuentra razonadamente el número de divisores de 450, 288 y 168. Para cada uno de estos números, digamos cuántos divisores son impares y cuántos son múltiplos de 6.
25. Para cada caso, da dos ejemplos diferentes de números que tengan 2, 3, 4, 6, 9, 12 y 18 divisores.
26. Encuentra 4 números de 3 dígitos que tienen 20 divisores.
27. Da un ejemplo de un número de dos cifras con 6 divisores y otros con 10 divisores. Haz lo mismo para números de tres cifras.

2.3 Máximo común divisor y mínimo común múltiplo

2.3.1 Problemas de máximo común divisor

28. Una ONG tiene 48 contenedores de un medicamento A, 96 de otro B y 72 de otro C. Quieres empaquetarlos en cajas que contengan la misma cantidad de cada una de ellas y para que se gasten el mínimo de cajas posible.
- ¿Cómo puedes hacerlo?
 - ¿Cuántas cajas necesitas para hacerlas?
29. Quiero repartir mis anillos, pendientes y collares en cajetillas para tener la bisutería más organizada. Me gustaría que todas las cajetillas que emplearé para organizar la bisutería sean iguales, y guardaré la misma cantidad de piezas en cada caché. Quería comprar el mínimo número de cajetillas posible, y tengo 30 anillos, 42 pendientes y 18 collares. ¿Cuántas cajas tengo que comprar?
30. En el contorno de un campo trapezoidal cuyos lados miden 72m, 96m, 120m y 132m, se han plantado árboles igualmente espaciados. Calcula el número de árboles plantados, sabiendo que hay uno en cada vértice y que la distancia entre dos árboles consecutivos es lo máximo posible.
31. Quieren envasar en una fábrica de alimentos lácteos 350 litros de leche desnatada, 300 litros de leche semidesnatada y 450 litros de leche entera en envases iguales de la mayor capacidad posible. ¿Qué capacidad deben tener estos contenedores?
32. En dos calles de 144m y 168m cada una se quieren plantar árboles que estén igualmente espaciados. ¿Cuál es la distancia más grande posible entre cada árbol? ¿Cuántos árboles necesitaríamos si los separamos lo máximo posible?

33. Quieren cortar dos listones de 2,5 metros y 3 metros en piezas de igual longitud y sin malgastar ninguna pieza. ¿Cuál es la longitud de la pieza más grande que se puede hacer? ¿Cuántas piezas se obtendrán?
34. María tiene 120 libros y Paz 160. Para facilitar el movimiento quieren poner sus libros en cajas lo más grandes posible, con el mismo número de libros y sin mezclarse. ¿Cuántos libros contiene cada caja?
35. Tenemos una caja cuyo interior tiene unas dimensiones de 42 x 21 x 14 centímetros.
- ¿Puedo llenar la caja con cubos de madera, de más de 1 cm de borde, sin espacio perdido?
 - ¿Qué dimensión máxima deben tener estos cubos?
 - ¿Cuántos caben en la caja?
36. Jordi quiere celebrar su cumpleaños y quiere dar a cada asistente un regalo con caramelos, cromos y fichas para ir a la feria del pueblo. Jordi ha comprado 120 caramelos, 420 cromos y 80 fichas. Quiere hacer paquetes iguales para cada asistente sin que sobre ningún regalito.
- ¿A cuántos amigos puede invitar?
 - ¿Qué cantidad de caramelos pondrá en cada bolsa? ¿Y de cromos? ¿Y de fichas?
 - Si aparecen veintidós personas en la fiesta, ¿cómo podría solucionar el reparto para que todas las bolsas tuvieran el mismo contenido, aunque le sobran algunos regalitos de cada tipo?
 - ¿Cuántos le sobrarían?

2.3.2 Problemas de encontrar los divisores comunes a dos o más cantidades.

37. Quiero hacer un mural en una de las paredes de mi habitación, cubriéndola completamente con fotos cuadradas tipo polaroid, sin dejar ningún espacio de la pared visible. La pared mide 1,80m de ancho y 2,40 m de alto. En la tienda me dicen que puedo elegir las siguientes opciones para el tamaño de las fotos, en centímetros: 12x12, 14x14, 15x15, 18x18, 20x20, 25x25 o 30x30.
- ¿Cuáles de estas medidas puedo elegir si quiero que todas las fotos que empleen del mismo tamaño?
 - ¿Cuántas fotos necesitaré en cada uno de estos casos posibles?
38. Una sociedad de matemáticos celebra su 25 aniversario. El pastelero recibe el encargo de que el pastel de celebración incluya algún elemento que tenga que ver con las matemáticas y decide realizar, encima del pastel, una representación gráfica de una función en un sistema de coordenadas. La cuadrícula del sistema de coordenadas ocupará toda la superficie del pastel, que tendrá forma de prisma rectangular, cuya base tendrá unas dimensiones de 120cm x 84cm.
- Si suponemos que quiere los ejes centrados en el pastel, y que intenta que una unidad sea mayor que 2cm, pero menor 12cm, ¿cuántas posibles medidas pueden tener las unidades de los ejes de coordenadas?
 - ¿Cuántos cuadraditos deberá representar en total el pastelero encima del pastel en cada caso?

39. Este año el profesorado se ha dado cuenta de que había que forrar los libros de la biblioteca ya que se estaban estropeando mucho al reinstaurarse el préstamo escolar semanal. Algunas familias se han ofrecido a ayudar llevándose a casa libros para forrarlos, pero han insistido en que todas las familias involucradas deben utilizar la misma cantidad de forro. El responsable de la biblioteca ha agrupado los libros por tamaño de manera que en la biblioteca hay 30 libros de tamaño pequeño, 210 libros de tamaño medio y 60 libros grandes. Después de pensarlo mucho, ha decidido que para cumplir con la restricción que han puesto las familias, hará paquetes. Todos los paquetes serán iguales, es decir, estarán formados por el mismo número de libros grandes, el mismo número de libros medianos y el mismo número de libros pequeños.
- Ayuda al bibliotecario especificando qué opciones tiene para repartir todos los libros.
 - En cada una de estas opciones indica cuántas familias estarían involucradas y cuántos libros de cada tipo estarían formados los paquetes.
40. Disponemos de una habitación rectangular, de 6,30 m de largo y 4,50 m de ancho. Queremos poner un suelo de baldosas cuadradas, todas iguales, sin tener que dividir ninguna baldosa.
- ¿De qué tamaños pueden ser las baldosas?
 - ¿Cuántas baldosas necesitaremos en cada caso?
41. Arantxa tiene una colección de libros importante. Es una gran lectora y tiene 350 libros en castellano y 280 en inglés. Este año se traslada de casa y está preparándose todos sus objetos personales en cajas. Por cuestiones organizativas, quiere distribuir los libros en cajas de manera que quepan el mismo número de libros de cada tipo en cada caja, sin mezclar libros de diferentes idiomas.
- ¿Cuál es el número máximo de cajas que podría utilizar para cumplir su criterio organizativo?
 - Da tres posibles formas de organizar los libros en cajas según su criterio.
42. Sabiendo que $17640 = 2^3 \times 3^3 \times 5 \times 7^2$, $12474 = 2 \times 3^4 \times 7 \times 11$, $3591 = 3^3 \times 7 \times 19$ y $4998 = 2 \times 3 \times 7^2 \times 17$, calcula el $mcd(17640, 12474, 3591, 4998)$ y escribe todos los divisores comunes de estos números.
43. Tenemos una pared rectangular de 8,4 m de anchura y 2,4 m de altura. Queremos cubrirla con pósteres cuadrados, todos iguales, sin tener que partir ninguno ni dejar espacios sin cubrir.
- ¿De qué tamaño pueden ser los pósteres teniendo en cuenta que no queremos poner pósteres con lado menor de 20 cm?
 - ¿Cuántos necesitaremos en cada caso?
 - Si los pósteres cuadrados pueden tener cualquier medida de lado en centímetros, ¿cuál será la cantidad mínima de pósteres con la cual se puede cubrir la pared?
 - ¿Cuál será el tamaño de estos pósteres en ese caso?

2.3.3 Problemas de mínimo común múltiplo

44. Cada tipo de planta requiere una cantidad diferente de agua y una frecuencia diferente en el riego. Las tropicales necesitan agua cada 3 días, las mediterráneas tienen bastante con una vez a la semana, y los cactus aproximadamente cada 18 días.
- ¿Cada cuántos días regaré todas las plantas el mismo día?
 - Teniendo en cuenta que este calendario de riego sólo lo emplea en los 6 meses más calurosos del año, ¿cuántos días habrá en esos 6 meses en los que tenga que regar todas las plantas el mismo día?
45. Dos faros emiten una señal especial cada 16 y 12 minutos, respectivamente. Sabiendo que emiten la señal a la misma hora a las 00:00 horas y que vamos a mirarlos a las 5 de la tarde:
- ¿A qué hora coinciden por primera vez después de medianoche?
 - ¿Cuántas veces hemos emitido la señal en seguida antes de llegar?
 - ¿A qué hora los veremos coincidir por primera vez?
46. Las ventanas del instituto se limpian cada 9 semanas, los techos cada 12 y las estanterías de la biblioteca cada 6.
- ¿Cuántas semanas coincidirán las tres tareas?
 - Si al inicio del curso se hace una limpieza general, ¿cuántas veces se limpiarán los cristales durante el curso?
47. Eva va a la peluquería cada 3 meses y Laura cada 36 días. Coincidieron el 1 de febrero. ¿Cuándo será la próxima vez que coincidan?
48. Gemma lleva sus envases a reciclar cada 12 días y Andrés cada 18 días. Coincidieron el lunes pasado.
- ¿En cuántos días volverán a coincidir?
 - ¿Qué día de la semana será?
49. En el horno de abajo de casa hay napolitanas acabaditas de hacer cada 10 minutos, ensaimadas cada 14 minutos y donuts cada 28 minutos. A las 11 y cuarto de la mañana podía comprar un producto de cada uno, acabado de hacer. ¿A qué hora podré repetir una compra similar?
50. Tres embarcaciones realizan sus desplazamientos entre las Islas Canarias cada 6, 9 y 12 días respectivamente. El 19 de julio coincidieron por primera vez, ¿cuándo volverán a coincidir?
51. Alan han comprado un scalextric. Está probándolo, pero parece que los dos coches de la cancha no corren igual. Partiendo los dos de la línea de salida al mismo tiempo, el coche rojo tarda 21 segundos en recorrer el circuito completo, mientras que el verde tarda 45 segundos.
- ¿Cuánto tiempo pasará hasta que se encuentran de nuevo en la línea de salida?
 - ¿Cuántas veces coincidirán en una carrera de una hora de duración?

52. Hoy miércoles 26/01/2022 hemos conseguido reunirnos todo el profesorado, el psicólogo, la responsable del comedor y la directora. Lamentablemente se nos han quedado temas por tratar y tenemos que programar otra reunión con los mismos participantes. Por favor, ayúdanos diciéndonos en qué fecha volveremos a estar todos disponibles en la escuela para hacer la reunión. Nosotros no hemos podido encontrar la solución porque cada uno tiene una agenda y no nos aclaramos. Estamos tan desesperados que ya nos es igual que se haga la reunión en fin de semana o en días festivos.

- La psicóloga va a escuela cada 20 días (los días festivos y fines de semana también cuentan)
- La directora tiene otros compromisos, así que solo puede el miércoles cada dos semanas.
- El claustro de todo el profesorado se reúne cada miércoles.
- El responsable de comedor va cada día.

53. Gregorio quiere organizar una fiesta. Como le encantan las luces de colores, ha comprado bombillas de color verde, rojo, fucsia y blanco. Cada tipo de bombilla tiene un tiempo de intermitencia para crear ambiente de fiesta. Todas tienen 5 segundos de desconexión después de estar encendidas su tiempo correspondiente. Las verdes, cuando se encienden, están 15 segundos encendidas, se apagan durante 5 segundos y se vuelven a encender de nuevo, y así sucesivamente. O sea que tienen ciclos de 20 segundos. Las rojas tienen ciclos de 45 segundos, las fucsias, de 35 segundos y las blancas de 15 segundos.

- a. Si se encienden todas al mismo tiempo, ¿cuántos minutos tienen que pasar para qué vuelven a encenderse todas al mismo tiempo de nuevo?
- b. ¿Cuántas veces pasará en un día entero?

54. Carla va a la peluquería una vez cada 30 días, al salón de belleza una vez cada 45 días y al podólogo una vez cada 75 días.

- a. Si hoy va a los tres sitios, ¿cuál será el primer día en que tendrá que ir a los tres sitios de nuevo?
- b. ¿Cuántas veces se dará la misma circunstancia a lo largo de diez años?

55. Marcos, Sara y Juan trabajan en Amazon preparando pedidos. Marcos tarda 12 minutos en preparar una caja completa, Sara tarda 16 minutos y Juan necesita 20 minutos ya que es nuevo en el trabajo. Han acordado hacer un descanso de 15 minutos cada vez que acaben los tres a la vez de preparar una caja. Si empiezan a trabajar juntos a las 8:00, y salen de trabajar a las 17:00,

- a. ¿Cuántos descansos harán?
- b. ¿Cuántas cajas han preparado entre todos antes del primer descanso?

56. Determina justificadamente si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas:

- a. Los múltiplos de 15 son los múltiplos de 3 y 5 a la vez.
- b. Los múltiplos de 8 son los múltiplos de 2 y 4 a la vez.
- c. Un múltiplo de 50 es múltiplo de 5 y de 10.
- d. Un múltiplo de 10 y de 5 es múltiplo de 50.
- e. Los múltiplos de 50 son los múltiplos de 25 que son pares.

2.3.4 Problemas que relacionan máximo común divisor y mínimo común múltiplo

57. Sabemos que $mcd(63,45)$ es 9. ¿Puedes deducir de esto el $mcd(630,450)$?
58. Pon un ejemplo de dos números naturales cuya suma es 120 y su mcd es 15.
59. ¿Qué posibilidades tenemos para dos números naturales cuyo mcd es 12 y el mcm es 2160?
60. Encuentra dos números naturales sabiendo que su producto es 5850 y su mcd es 15.
61. Encuentra dos números naturales sabiendo que su mcd es 65, su mcm es 9100, y un número intermedio entre ellos es 270.
62. Encuentra dos números naturales cuya suma es 176 y su mcd es 11.
63. Encuentra dos números naturales cuyo mcd sea 70 y cuyo mcm sea 1050.
64. Encuentra todas las posibilidades de pares de números naturales a y b que verifican que $mcd(a, b) = 15$ y $mcm(a, b) = 1500$.
65. Encuentra todas las posibilidades de pares de números naturales a y b que verifican que $a \times b = 4320$ y $mcd(a, b) = 12$.
66. Encuentra todas las posibilidades de pares de números naturales a y b que verifican que $mcd(a, b) = 14$ y $mcm(a, b) = 2310$.

2.4 Propiedades de divisibilidad, criterios de divisibilidad y cuestiones sobre restos

2.4.1 Ejercicios sencillos de aplicación de los criterios de divisibilidad.

67. Entre los siguientes números: 405, 316, 814, 1085 y 340:
 - a. ¿Hay alguno que sea divisible por 3?
 - b. ¿Qué es divisible por 4?
 - c. ¿Cuáles tienen el divisor a 5?
68. Sin hacer operaciones, digamos si el número 30360 es divisible por 2, 3, 5, 9 o 10. Explica por qué.
69. Un número está formado por 3 dígitos que suman 24. Razona si se trata de un número primo o compuesto.
70. Determina cuáles de los siguientes números son divisibles por 2, 3, 5, 11. Utiliza los criterios de divisibilidad y haz los cálculos mentalmente: 8100, 242, 1234567, 20305010.

71. ¿Qué valores puede tomar x para que el número $114x$ sea múltiplo de 6?
72. Sustituye x por la cifra que hace que el número $7x3$ sea múltiplo de 3.
73. Escribe tres números de 4 dígitos que sean divisibles por 9 y 2 al mismo tiempo. Explica por qué lo son.
74. ¿Qué valores se pueden sustituir x para que el número $5x6$ sea múltiplo de 4?
75. ¿Por qué valores puede sustituir x para que el número $234x6$ sea múltiplo de 8?
76. ¿Qué valores se pueden sustituir x para que el número $x52$ sea múltiplo de 7?
77. Determinar, en cada caso, el valor de las cifras x y y de manera que el número:
- $2xy31$ es divisible por 9.
 - $123xy$ es divisible por 25
 - $2x45y$ es divisible por 11.
78. Determina los posibles valores de x de manera que:
- $12x4$ es múltiplo de 12.
 - $5x6x$ es múltiplo de 4.
 - $xx1x$ es múltiplo de 9.
 - $x274$ es múltiplo de 7.
 - $23xx$ es múltiplo de 8.
79. Determina (razonadamente y citando las propiedades o criterios que utilizas) los valores de las cifras x y que hacen que el siguiente número sea divisible por 55:
- $$2x \overbrace{0 \cdots 0}^{30 \text{ zeros}} 1237y.$$
80. Calcula el valor de la cifra a para que se verifiquen las condiciones indicadas en cada apartado (quizás la solución no sea única):
- El número $72a$ sea divisible por 5.
 - El número $9aa$ sea múltiplo de 3 y de 5.
 - 11 sea divisor del número $768a$.
 - 2 y 3 sean divisores del número $432a$.
 - El número $a0$ tenga al menos tres divisores propios.
 - El número $7a8a5a$ sea múltiplo de 11.
81. Determina si:
- a) 230151 es divisible por 2, 5, 3 y 11.
 - b) 723 es divisible por 2, 5, 3 y 11.
 - c) 7542 es divisible por 2, 5, 3 y 11.
 - d) 396 es divisible por 2, 5, 3 y 11.
 - e) 6 776 es divisible por 2, 5, 3 y 11.

82. Razona qué valores pueden tomar las cifras x e y para que el número $x1xxy$ sea divisible por 15.

83. Deduce los criterios de divisibilidad para el 20 y el 55 y justifica por qué funcionan.

2.4.2 Cuestiones teóricas

84. Sabemos que dividiendo el número a por 3 el resto es 2, y que dividiendo el número b por 3 el resto también es 2. ¿Cuál es el resto de dividir el número $a + b$ por 3?

85. La suma de tres números pares consecutivos es siempre múltiplo de 3. ¿Es verdad siempre, a veces, o nunca?

86. Si cuando se divide un número natural A por otro, D , el resto es 3. ¿Qué pasa cuando se divide la $A - 3$ por D ?

87. Sean A , B y C tres múltiplos de 7 consecutivos. ¿Se puede averiguar cuál será el valor del resto dividiendo $A + B + C$ por 3?

88. Si dividimos un número N entre 8 el resto es 5. Determina razonadamente cuáles son los dos números más cercanos a N que son divisibles entre 8.

89. Sean a , b y c tres números impares consecutivos.

- a. ¿Cuándo es cierto que la suma de esos tres números es un número par?
- b. ¿Cuándo es cierto que la suma de esos tres números es un múltiplo de 3?
- c. ¿Cuándo es cierto que la suma de esos tres números es un múltiplo de 9?

90. Dividiendo un número por 30 el resto es 8. ¿Cuánto hay que añadir al número para hacerlo múltiplo de 6?

91. Estoy tratando de hacer paquetes iguales para guardar el material que ha sobrado este curso para el año que viene. He probado hacer paquetes de 25 bolígrafos, pero me sobran 2.

- a. ¿Si hiciera paquetes de 50 bolígrafos conseguiría que no me sobrara ninguno?
- b. ¿Y si hiciera paquetes de 5 bolígrafos?
- c. Estoy ya desesperada, ¿podrías decirme cómo se me quedaría si hiciera paquetes de 3 a 3?
- d. Con los lápices me he vuelto a desesperar, lo he intentado distribuir en paquetes de 15 lápices, pero me sobran 4. Estoy tan desesperada que cogeré lápices nuevos para añadirlos y que me cuadren los paquetes. ¿Cuántos lápices nuevos necesito?

92. Si agrupo los bolis que tengo de 2 a 2, me sobra 1; si lo hago de 3 a 3 también sobra 1 y si lo hago de 5 a 5 pasa lo mismo. Sé que tengo entre 30 y 40 bolis. ¿Cuántos había?

93. ¿Cuáles son los números de tres dígitos que tienen resto 2 cuando hago la división por 4, por 5 o por 9?

94. En una división se conoce el resto que es 19. Al ser una división entera, si sabemos que el dividendo es menor que 350 y que el cociente por exceso es 14, ¿qué valores puede tomar el divisor?
95. Pedro tiene un jardín enorme y trata de dar toques de color. Quiere plantar unas plantas que tiene formando grupos para que quede más bonito. Observa que si agrupa las plantas de tres en tres le falta una y si las agrupa de siete en siete le sobra una. Si sabes que tiene más de 150 plantas y menos de 167, ¿cuántas plantas tiene?

3. Fracciones y proporcionalidad

3.1 Fundamentos de fracciones

3.1.1 Identificar fracciones

¿Qué son las fracciones?

Utilizamos las fracciones para representar partes de un todo. El número inferior, el denominador, nos informa de en cuántas partes hemos dividido el todo. El número superior, el numerador, nos informa de cuántas de esas partes representa la fracción.

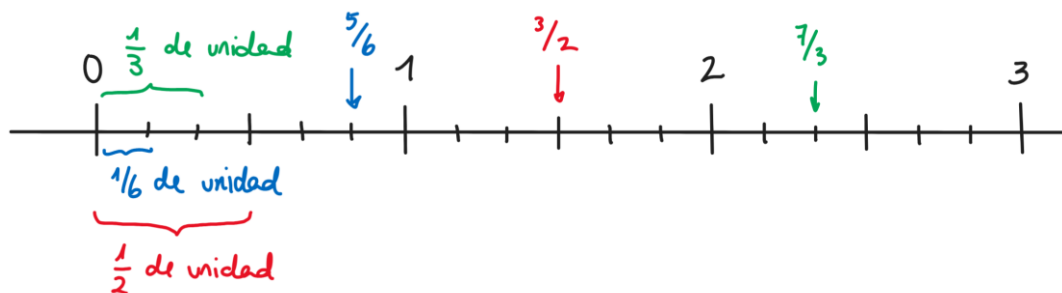
Las fracciones representan números racionales, números que no son enteros. Las fracciones propias son aquellas en las que el numerador es menor que el denominador, y por tanto el número que representan es menor a una unidad. Las fracciones impropias son aquellas en las que el numerador es mayor que el denominador, y por tanto representan más de una unidad. Las fracciones impropias también se pueden representar como un número entero más una fracción propia. Por ejemplo, $\frac{5}{3} = 1 + \frac{2}{3}$, como se ve en la imagen:



Podemos representar en la recta real los números racionales que representan las fracciones dibujando un segmento que represente una unidad y dividiéndolo en tantas partes como indique el denominador. Para ubicar los números racionales representados por fracciones impropias en la recta real, repetimos este segmento dividido a continuación las veces que sean necesarias.

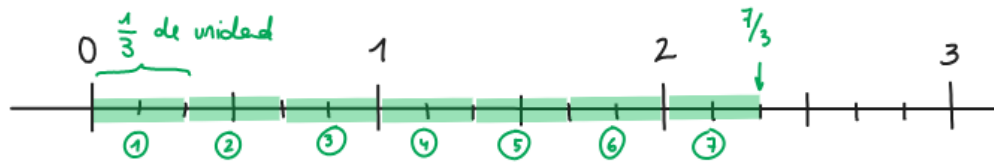
Para representar fracciones con diferente numerador, hemos de buscar una partición del segmento unidad que nos permita representar todas ellas. Para ello, buscaremos un múltiplo común de todos los denominadores. Este proceso se conoce como buscar un común denominador.

Ejemplo: Representa en la recta real las fracciones $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{2}$ y $\frac{7}{3}$.

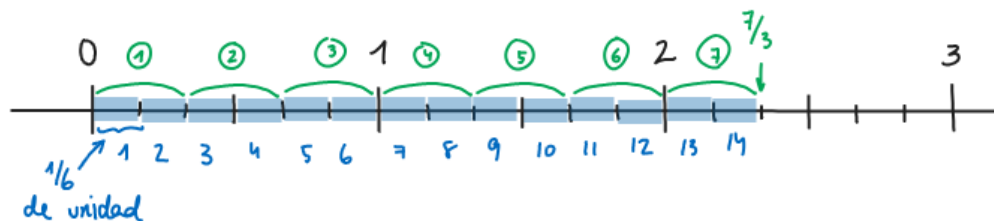


Fracciones con diferente numerador y denominador pueden representar el mismo número racional. En ese caso las llamamos fracciones equivalentes. Por ejemplo, las fracciones $\frac{7}{3}$ y $\frac{14}{6}$ son equivalentes. Veamos por qué.

Para representar $\frac{7}{3}$ en la recta real, dividimos el intervalo unidad en 3 intervalos de la misma longitud, que tendrán longitud $\frac{1}{3}$. Repitiendo esta división a lo largo de la recta, podemos contar 7 de estos intervalos de longitud $\frac{1}{3}$ para llegar hasta la posición correspondiente al $\frac{7}{3}$.



Si ahora dividimos cada uno de estos intervalos de longitud $\frac{1}{3}$ en dos subintervalos iguales, obtenemos intervalos de longitud $\frac{1}{6}$, pues nos caben 6 en el intervalo unidad. Esto es así porque al dividir 3 intervalos por la mitad obtenemos el doble de 3, es decir, 6. Lo mismo ocurre con los intervalos que representa el numerador: ahora tenemos el doble porque hemos dividido cada uno en dos, y el doble de 7 es 14.



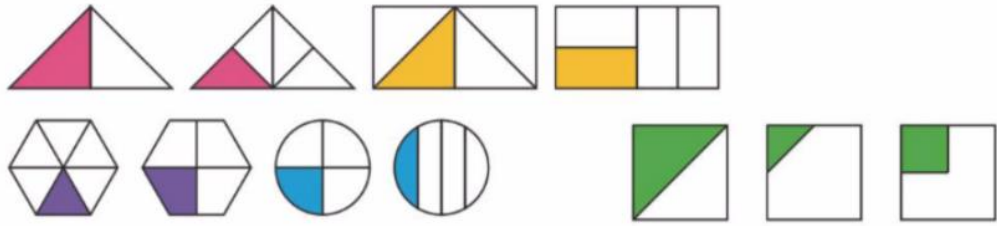
También podemos hacer este proceso a la inversa. Si partimos de la fracción $\frac{14}{6}$, podemos agrupar dos intervalos azules de longitud $\frac{1}{6}$ en uno de longitud $\frac{1}{3}$, dividiendo entre dos tanto los intervalos que representa el numerador como aquellos representados por el denominador.

En la práctica, el proceso de encontrar fracciones equivalentes sigue esta lógica:

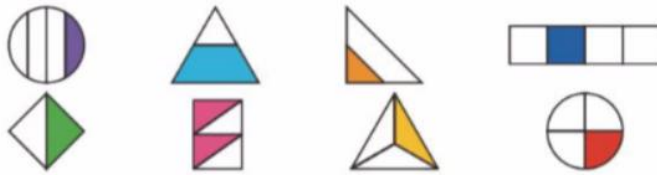
- Para amplificar una fracción, dividimos las partes que representan numerador y denominador en partes más pequeñas de igual medida. Como resultado obtenemos más partes, así que hemos de multiplicar numerador y denominador por el número de partes más pequeñas en las que hemos dividido cada una de las partes más grandes. En el ejemplo, dividimos cada segmento de longitud $\frac{1}{3}$ en dos, por lo que multiplicamos numerador y denominador de $\frac{7}{3}$ por dos para llegar a $\frac{14}{6}$.
- Para simplificar una fracción, agrupamos partes, y por tanto dividimos numerador y denominador por el tamaño de estas agrupaciones. En el ejemplo, para simplificar $\frac{14}{6}$, agrupamos partes de dos en dos, dividiendo numerador y denominador por dos para llegar a la fracción $\frac{7}{3}$.

1. Resuelve las siguientes actividades:

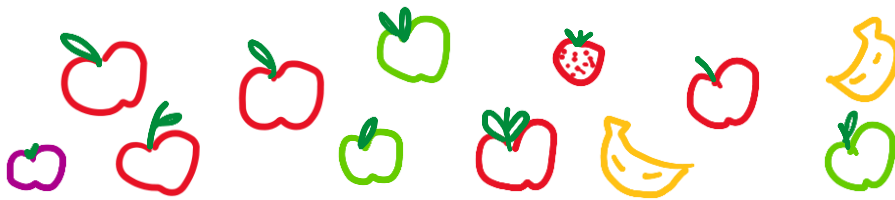
1 ¿Qué figuras están divididas en cuartos?



3 ¿Qué figuras representan $\frac{1}{2}$ o $\frac{1}{4}$? Rodea con diferentes colores.

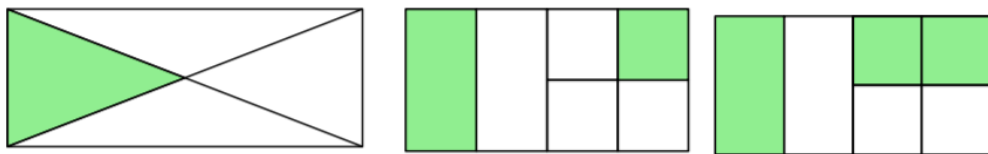


2. En la siguiente imagen:



- ¿Qué fracción del total representan las manzanas?
- ¿Qué fracción del total representan las manzanas rojas?
- ¿Qué fracción del total representan las manzanas verdes?
- ¿Qué fracción de las manzanas representan las manzanas rojas?

3. ¿Qué fracción está representada en cada una de estas imágenes?



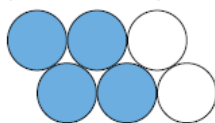
4. Representa las siguientes fracciones en el contexto discreto que se presenta a continuación, entendiendo el número total de círculos como una unidad:

a. $\frac{2}{3}$ ○ ○ ○ ○ ○ ○

b. $\frac{3}{4}$ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○

5. Escribe e indica qué significado tienen los números racionales que aparecen en los siguientes enunciados:

- De un grupo de 7 amigas, 3 son pelirrojas.
- Escribe la fracción que representa la parte coloreada de la figura



- ¿Qué fracción representa el número marcado en la recta real como A?



- Para el cumpleaños de mi madre, le hemos regalado una caja de bombones y nos hemos comido las tres cuartas partes.
6. En un concurso de pintura al aire libre se presentaron 90 participantes y 15 obtuvieron algún premio. ¿Qué fracción representan los ganadores?
7. De los 24 alumnos de una clase, 8 son chicos, 12 tienen el pelo negro y a 6 les gusta el fútbol.
- ¿Qué fracción representa a las chicas de la clase?
 - ¿Qué fracción representa a los alumnos con el pelo negro?
 - Si sólo $\frac{1}{3}$ de los estudiantes a los que les gusta el fútbol son chicas, ¿a cuántas chicas les gusta el fútbol?
8. Queremos repartir una herencia de forma que el mayor de los hijos obtenga un tercio del total, el mediano obtenga un cuarto, y el pequeño un quinto. ¿En cuántas partes debemos partir la herencia? ¿Cuántas de esas partes daremos a cada hermano? ¿Y cuántas sobran?
9. Etiqueta la siguiente recta numérica y sitúa las siguientes fracciones de forma que todas ellas queden en alguna marca vertical: $\frac{3}{4}, \frac{3}{2}, \frac{7}{3}$.



10. Representa en la recta real los siguientes números racionales:

$$\frac{4}{3} \quad \frac{-2}{5} \quad \frac{9}{2} \quad \frac{3}{7} \quad \frac{-4}{6} \quad \frac{-7}{4}$$

3.1.2 Fracciones equivalentes

11. Halla fracciones equivalentes por amplificación y simplificación de los siguientes números racionales:

$$\text{a. } \frac{18}{24} \quad \text{b. } \frac{36}{48} \quad \text{c. } \frac{15}{45} \quad \text{d. } \frac{30}{40}$$

12. Comprueba si los siguientes pares de fracciones son equivalentes:

a. $\frac{12}{10} = \frac{6}{5}$ b. $\frac{34}{54} = \frac{12}{23}$ c. $\frac{3}{45} = \frac{2}{30}$ d. $\frac{34}{18} = \frac{43}{25}$

13. Halla el elemento desconocido de las siguientes equivalencias:

a. $\frac{x}{10} = \frac{34}{5}$ b. $\frac{34}{46} = \frac{x}{23}$ c. $\frac{3}{x} = \frac{10}{30}$ d. $\frac{21}{18} = \frac{42}{x}$

14. Reduciendo a común denominador, ordena las siguientes fracciones de mayor a menor (apartados a y b) y de menor a mayor (apartados c y d):

a. $\frac{3}{4}, \frac{-4}{5}, \frac{7}{6}, -2, \frac{8}{20}, \frac{-9}{4}$

b. $\frac{-7}{15}, \frac{20}{18}, \frac{7}{6}, 2, \frac{-8}{20}, \frac{-9}{4}$

c. $\frac{3}{6}, \frac{34}{40}, \frac{7}{15}, 1, \frac{-45}{20}, \frac{-3}{4}$

d. $\frac{7}{4}, \frac{-5}{2}, \frac{7}{6}, -1, \frac{18}{20}, \frac{-9}{7}$

15. Jaime y Lydia hacen una competición de gorditos. Jaime sabe que gana seguro, porque se ha comido $\frac{15}{8}$ de pizza, pero Lydia dice que gana ella, que se ha comido $\frac{23}{12}$. ¿Quién gana de ambos? ¿Podrías explicarlo en términos sencillos, sin recurrir a cálculos?

16. Para cada una de las siguientes parejas de fracciones, razona cuál es la más grande sin recurrir a un denominador común o a la representación como número decimal.

a. $\frac{3}{13}$ y $\frac{8}{13}$

b. $\frac{3}{7}$ y $\frac{3}{5}$

c. $\frac{157}{17}$ y $\frac{157}{18}$

d. $\frac{19}{17}$ y $\frac{23}{21}$

e. $\frac{15}{34}$ y $\frac{19}{42}$

f. $\frac{13}{38}$ y $\frac{14}{43}$

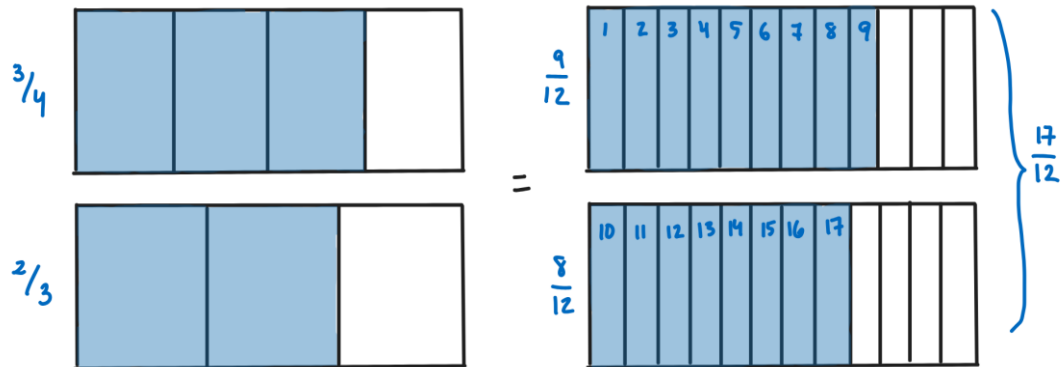
3.2 Operaciones con fracciones

3.2.1 ¿Cómo operamos con fracciones?

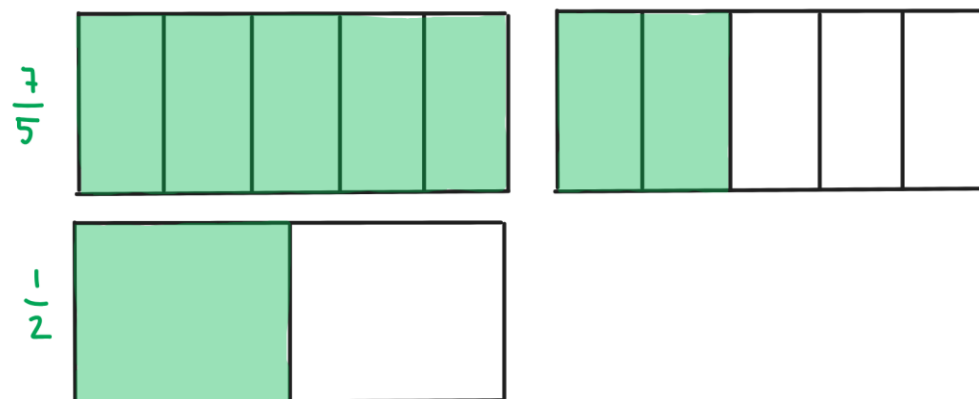
Suma y resta de fracciones

Para sumar y restar fracciones necesitamos poder comparar las partes que cada una de ellas representa para poder añadir unas a otras o sustraer unas de otras. Para ello, hemos de buscar un denominador común.

Ejemplo: Realiza las operaciones $\frac{3}{4} + \frac{2}{3}$ y $\frac{7}{5} - \frac{1}{2}$.



$$\frac{3}{4} + \frac{2}{3} = \frac{9}{12} + \frac{8}{12} = \frac{17}{12} = 1 + \frac{5}{12}$$

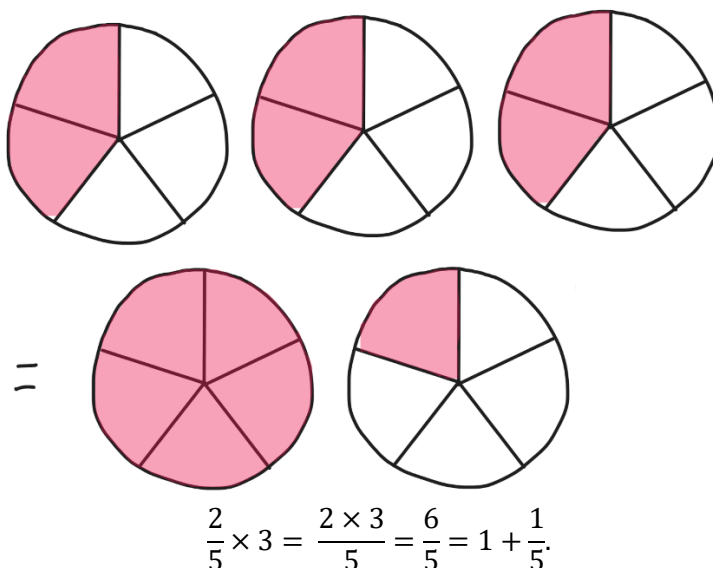


$$\frac{7}{5} - \frac{1}{2} = \frac{14}{10} - \frac{5}{10} = \frac{9}{10}$$

Multiplicación de fracciones por un número natural

La multiplicación de fracciones por un número natural funciona igual que la de números naturales: se realiza una suma repetida donde el número de repeticiones viene marcado por el multiplicador. Una fracción representa unas partes de un todo, así que al multiplicar una fracción por un número natural (es decir, al hacer una suma repetida), el resultado será también una fracción. Siguiendo con esta idea de la suma repetida, es fácil ver que el denominador del resultado será el mismo que el de la fracción y que el numerador será el resultado de multiplicar el numerador de la fracción por el número natural.

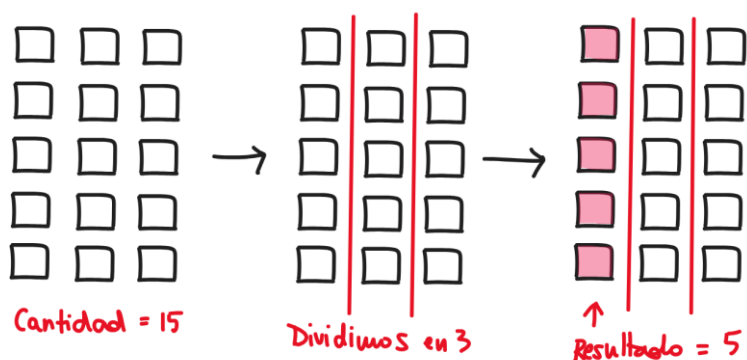
Ejemplo: Realiza la operación $\frac{2}{5} \times 3$



Multiplicación de cantidades por una fracción unitaria: fracción de una cantidad

Llamamos fracción unitaria a una fracción cuyo denominador es un 1, indicando que solo cogemos una de las partes del total que indica el denominador. Cuando multiplicamos por una fracción unitaria, la consideramos como un multiplicador que actúa como operador, lo que quiere decir que la aplicamos sobre la cantidad a la que multiplica, el multiplicando, siguiendo su definición: dividimos aquello a lo que multiplica según las partes que indica el denominador y tomamos una de ellas.

Ejemplo: Realiza la operación $15 \times \frac{1}{3}$

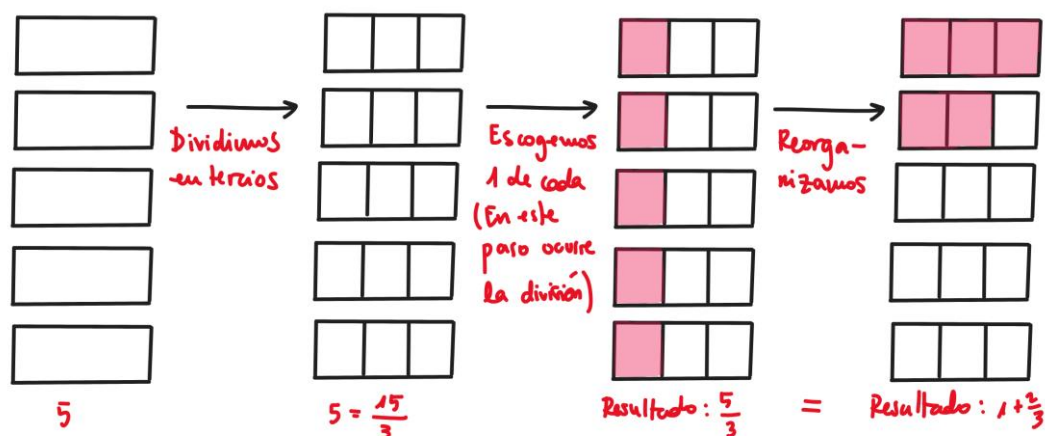


$$15 \times \frac{1}{3} = 15 \div 3 = 5.$$

Cuando la cantidad no es divisible entre el denominador de la fracción unitaria no basta con realizar el reparto que indica la división de números naturales porque obtenemos un resto. En otras palabras, no podemos repartir las unidades que tenemos en tantos grupos como indica el denominador de la fracción unitaria por la que estamos multiplicando. Para solventar este problema, dividiremos las unidades en partes, según indique este denominador, y luego repartiremos estas partes.

Ejemplo: Realiza la operación $5 \times \frac{1}{3}$.

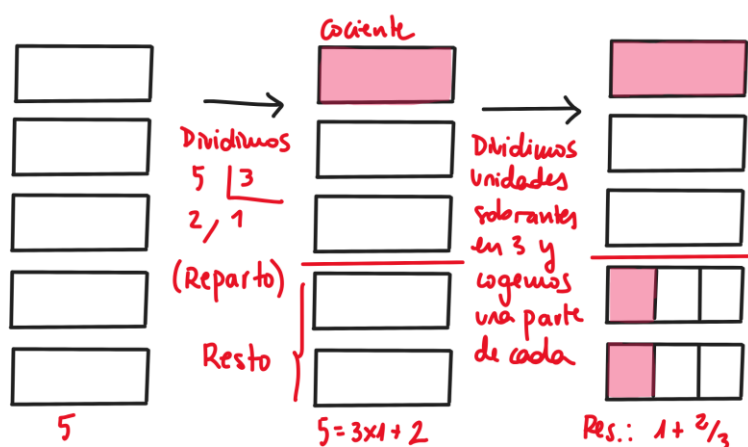
Utilizando la estrategia de la división de la cantidad total en partes:



$$5 \times \frac{1}{3} = 5 \div 3 = \frac{5}{3}.$$

En este sentido, la fracción $\frac{5}{3}$ se interpreta como la solución de un problema de reparto o división. Este es otro de los significados que pueden tener las fracciones, además de partes de un todo, representación de un número racional o fracción que actúa como operador.

Otra manera de afrontar el reparto de 5 unidades entre 3 sería repartir primero las unidades enteras que sí se pueden repartir, y luego dividir las restantes para repartir las partes resultantes de esta división. Utilizando esta estrategia:



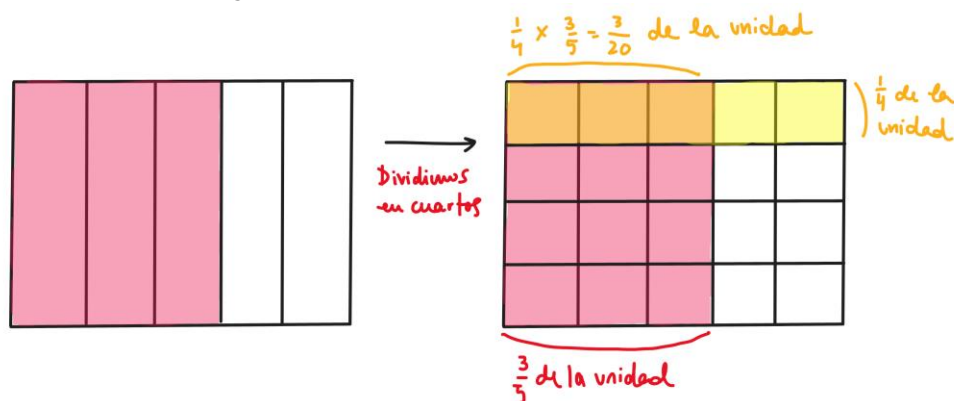
$$5 \times \frac{1}{3} = (3 + 2) \times \frac{1}{3} = 3 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{3} = 1 + 2 \div 3 = 1 + \frac{2}{3}.$$

Ambas estrategias producen el mismo resultado, pero expresado de formas diferentes: o bien con una fracción impropia, o bien como una cantidad entera más una fracción propia.

Multiplicación de fracciones por una fracción unitaria

En este caso seguimos viendo la fracción unitaria como el multiplicador que actúa como operador, pero ahora sobre una fracción que actúa como multiplicando. Para realizar la multiplicación, dividimos las partes del multiplicando en subpartes, tantas como indica el denominador del multiplicador, y escogemos, en cada parte, una de estas nuevas partes las pequeñas.

Ejemplo: Realiza la operación $\frac{3}{5} \times \frac{1}{4}$.



$$\frac{3}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{12}{20} \times \frac{1}{4} = \frac{12}{20} \div 4 = \frac{3}{20}.$$

Al dividir los tres quintos en cuartos obtenemos 12 partes de las 20 en las que está dividido el total. Al coger una de cada de estas partes más pequeñas correspondientes a cada uno de los quintos del multiplicando obtenemos 3 partes de 20, por lo que el resultado es $\frac{3}{20}$.

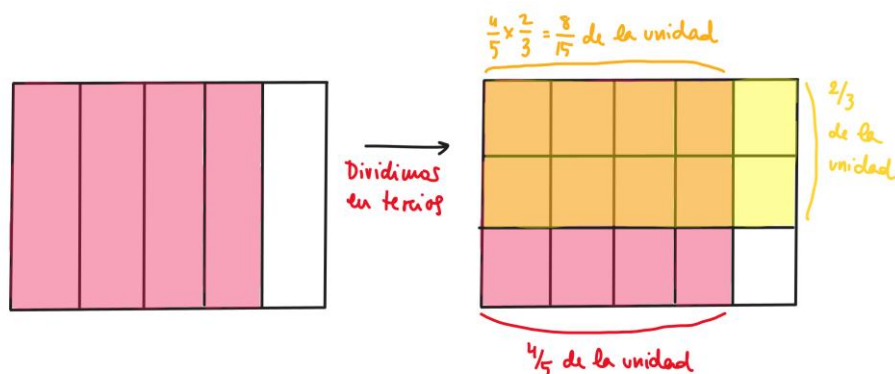
También podemos entenderlo pensando en fracciones equivalentes: si buscamos una fracción equivalente del multiplicando por amplificación cuyo numerador sea divisible entre el denominador del multiplicador, podremos hacer el reparto de las nuevas partes más pequeñas. En el ejemplo, como $\frac{3}{5}$ y $\frac{12}{20}$ son fracciones equivalentes, podemos utilizar la fracción $\frac{12}{20}$ para representar el multiplicando y podemos repartir 12 partes en 4 grupos de 3, por lo que el resultado de la multiplicación es 3 partes de 20, es decir, $\frac{3}{20}$.

Multiplicación de fracciones: caso general

Para abordar el caso general podemos seguir la misma estrategia de los casos anteriores: entender la fracción que escogemos como multiplicador como un operador que actúa sobre la otra, dividiendo de nuevo en partes según indique el denominador del multiplicador y escogiendo tantas en cada una de las partes del multiplicando como indique el numerador del multiplicador. Esto, en la práctica, es lo mismo que coger tantas partes como indica el producto de los numeradores, de un total de partes indicado por el producto de los denominadores. Es decir, esta manera de entender el producto de fracciones justifica el funcionamiento de la regla tradicional para el producto de fracciones: numerador por numerador y denominador por denominador. Veámoslo con un ejemplo.

Ejemplo: Realiza la operación $\frac{4}{5} \times \frac{2}{3}$.

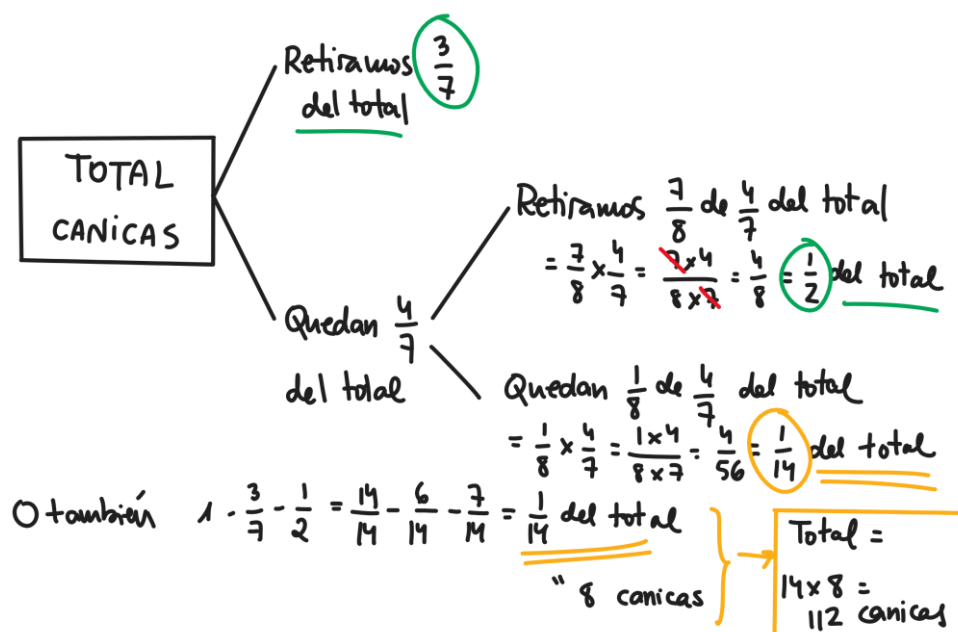
$$\frac{4}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{12}{15} \times \frac{2}{3} = \frac{12}{15} \div 3 \times 2 = \frac{4}{15} \times 2 = \frac{8}{15} = \frac{4 \times 2}{5 \times 3}.$$



Como decíamos, a partir de este ejemplo es fácil entender por qué es correcta la regla tradicional para el aprendizaje de la multiplicación de fracciones: para multiplicar dos fracciones, multiplicamos numerador por numerador y denominador por denominador, ya que el producto de los denominadores indica en cuántas partes hemos dividido el total tras realizar la multiplicación, y el producto de los numeradores indica cuántas de estas partes representa el resultado de la multiplicación.

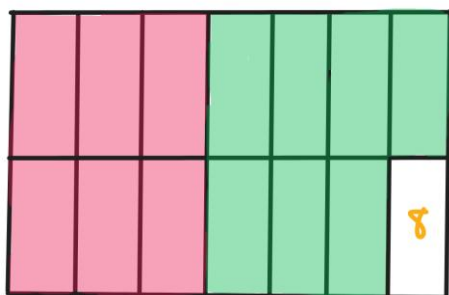
Ejemplo: Dos amigos han cogido canicas de una bolsa. Uno ha cogido los $\frac{3}{7}$ de las canicas de la bolsa, y el otro ha cogido los $\frac{7}{8}$ de las canicas que quedaban en la bolsa. Al final han quedado en la bolsa sólo 8 canicas. ¿Cuántas canicas había en la bolsa?

Este problema se puede realizar directamente si sabemos qué operaciones hay que realizar. Primero, como se retiran $\frac{3}{7}$ de las canicas, nos quedan $\frac{4}{7}$ ($\frac{7}{7} - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$). Después, como retiramos $\frac{7}{8}$ de los $\frac{4}{7}$ que quedaban (la preposición “de” nos indica que la fracción actúa como un operador, por lo que debemos hacer una multiplicación), y como $\frac{7}{8} \times \frac{4}{7} = \frac{1}{2}$, retiramos $\frac{1}{2}$ de las canicas de la bolsa y nos quedan $\frac{4}{7} - \frac{1}{2} = \frac{8}{14} - \frac{7}{14} = \frac{1}{14}$. Por último, si una parte de 14 son 8 canicas, entonces el total está hecho de 8 partes de 14 canicas, es decir, $14 \times 8 = 112$ canicas. Esta información se puede organizar mejor en un diagrama de árbol:



Sin embargo, muchas veces la principal dificultad que encontramos a la hora de resolver problemas aritméticos es entender qué operaciones hay que hacer. Los diagramas de barras nos permiten visualizar qué operaciones son las adecuadas en el contexto del problema de forma intuitiva y facilitan en gran medida la resolución:

① Representamos el total



② Retiramos $\frac{3}{7}$ del total

③ Dividimos el sobrante en octavos

④ Retiramos $\frac{3}{8}$ del sobrante

⑤ Asignamos el valor de 8 canicas al sobrante final, 1 parte de 14.

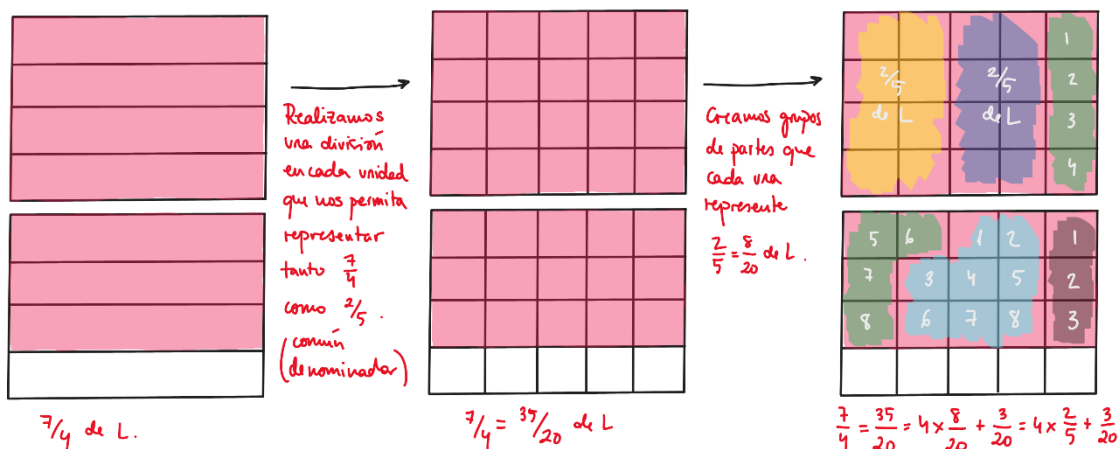
⑥ Total = 14 partes de 8 canicas cada una = $14 \times 8 = 112$ canicas.

División de fracciones

Para entender el funcionamiento de la regla para la división de fracciones, a veces llamada regla del aspa, regla de la cruz o regla del caramelo, plantearemos una división de fracciones desde el contexto del reparto.

Ejemplo: Queremos repartir $\frac{7}{4}$ de litro de agua en botellas de $\frac{2}{5}$ de litro. ¿Cuántas botellas podemos llenar?

Primero realizamos una representación en diagrama de barras de la fracción $\frac{7}{4}$. Para poder repartir estos cuartos en grupos de $\frac{2}{5}$ de litro, necesitamos una representación que también integre la división en quintos. En la práctica estamos buscando un denominador común para las fracciones $\frac{7}{4}$ y $\frac{2}{5}$. Como el mínimo común múltiplo de ambos denominadores es 20, escogemos este número de divisiones para la unidad.



$$\frac{7}{4} = \frac{35}{20} = \frac{8 \times 4 + 3}{20} = \frac{8}{20} \times 4 + \frac{3}{20} \rightarrow \frac{7}{4} \div \frac{2}{5} = \frac{35}{20} \div \frac{8}{20} = 4 + \frac{3}{20}.$$

Con este modelo es fácil ver que el resultado es 4 botellas completas y sobran 3 partes. Es importante interpretar bien este sobrante recordando el concepto de fracción: el numerador indica cuántas partes están representadas por la fracción de un total de partes indicado por el denominador. Si relacionamos las 3 partes sobrantes con las 20 que forman una unidad (un litro de agua en el contexto del problema) entonces el sobrante es $\frac{3}{20}$ de litro de agua. Sin embargo, si relacionamos las 3 partes sobrantes con 8 que forman una botella podemos decir que sobran $\frac{3}{8}$ de botella de $\frac{2}{5}$ de litro, que quedarían en una quinta botella parcialmente llena.

Este modelo nos permite entender la estrategia de pasar a común denominador: al representar $\frac{7}{4}$ como $\frac{35}{20}$ y $\frac{2}{5}$ como $\frac{8}{20}$, el denominador común 20 indica el número de partes en las que hemos dividido una unidad (un litro de agua) y solo queda repartir 35 partes en grupos de 8 partes, dando 4 grupos ($4 \times 8 = 32$) y 3 partes sobrantes. Por tanto, el resultado de la división es $4 + \frac{3}{8} = \frac{35}{8}$.

Pensemos ahora en cómo explicar a partir de este modelo la regla tradicional del cálculo de la división de fracciones. Primero recordemos que la regla del caramelo o del aspa nos dice que multipliquemos en cruz las fracciones para realizar la división:

$$\frac{7}{4} \div \frac{2}{5} = \frac{7 \times 5}{4 \times 2} = \frac{35}{8}$$

Fijémonos también en que, para hallar común denominador, podemos amplificar cada fracción: para representar $\frac{7}{4}$ como $\frac{35}{20}$ multiplicamos numerador y denominador por 5, y para representar $\frac{2}{5}$ como $\frac{8}{20}$ multiplicamos numerador y denominador por 4.

$$\frac{7}{4} = \frac{7 \times 5}{4 \times 5} = \frac{35}{20}; \quad \frac{2}{5} = \frac{2 \times 4}{5 \times 4} = \frac{8}{20} \rightarrow \frac{7}{4} \div \frac{2}{5} = \frac{35}{20} \div \frac{8}{20} = 35 \div 8 = \frac{35}{8}$$

Fijémonos también en que, al multiplicar en cruz la fracción usando la regla del caramelo, en la práctica lo que estamos haciendo es calcular los numeradores de las fracciones equivalentes a las de la operación y colocándolos en su lugar correspondiente en la fracción resultado.

Esta regla, como tantas otras, es útil para el cálculo rápido del resultado, pero al aplicarla instrumentalmente se pierde la capacidad de entender en qué consiste y como interpretar la división de fracciones. Sin embargo, utilizar un modelo de barras nos puede ayudar a visualizar la división como un reparto y a interpretar correctamente el resultado en el contexto del problema. En el ejemplo, $\frac{35}{8}$ no nos dice mucho sobre la respuesta al problema, pero 4 botellas y 3 partes sobrantes, de 8 que forman una botella o de 20 que forman un litro, dan una respuesta completa y clara.

3.2.2 Problemas aritméticos sencillos para introducir los diagramas de barras

17. Lucía tiene 43 cromos, que son 9 más que los que tiene Juan. ¿Cuántos cromos tiene Juan? ¿Cuántos cromos tienen entre los dos?
18. Sandra abrió su hucha y se gastó la mitad del dinero en un libro. Luego compró una caja de rotuladores que le costaron 4 euros. Si le sobraron 3 euros, ¿cuánto dinero había en la hucha al principio?
19. Juan pesa 5 veces más que su perro, si entre los 2 pesan 42kg, ¿cuánto pesa cada uno?

3.2.3 Problemas sencillos de fracciones para resolver con diagramas de barras

20. En una cesta había 125 huevos, se han vendido $\frac{7}{25}$ del total. ¿Cuántos huevos quedan en la cesta?
21. De un paquete de folios hemos gastado 150, que representan $\frac{2}{5}$ del total. ¿Cuántos folios tenía el paquete?
22. En un depósito caben 1.200 litros de aceite. Si se han llenado $\frac{21}{30}$ del depósito, ¿cuántos litros de aceite faltan para completarlo?
23. De un tonel se han sacado 75 litros y todavía quedan $\frac{3}{15}$ del total. ¿Cuántos litros contenía el tonel?
24. Tenía ahorrados 18€. Para comprarme un juguete he sacado $\frac{4}{9}$ del dinero de mi hucha. ¿Cuánto me ha costado el juguete?
25. En un bidón caben 45 litros, pero para estar lleno le faltan todavía $\frac{7}{10}$ de su capacidad. ¿Cuántos litros de agua hay en dicho bidón?
26. Una colección de libros cuesta 1678,75 euros. Si pagamos $\frac{9}{17}$ del total en un pago inicial y el resto en 10 mensualidades, ¿cuánto pagaremos cada mes?
27. La redacción de Sonia tiene 164 palabras. Si escribe $\frac{3}{4}$ más de las palabras ya escritas habrá escrito las mismas que José. ¿Cuántas palabras habrá escrito José?
28. Amanda y Basilio compran un regalo para su amiga Celeste. Sabemos que Amanda puso 10€ más que Basilio, y que Basilio puso $\frac{2}{5}$ del total. ¿Cuánto costó el regalo?
29. Luis y Nuria hicieron tarjetas durante dos días. El sábado Nuria hizo 19 tarjetas más que Luis. El domingo, Nuria hizo 20 tarjetas, y Luis hizo 15. Al acabar los dos días, comprobamos que Nuria hizo $\frac{3}{5}$ del total de las tarjetas. ¿Cuántas tarjetas hizo Luis?

3.2.4 Problemas de operaciones con fracciones

30. Marta leyó la mitad del libro el lunes, el martes leyó $\frac{1}{3}$ de lo que le faltaba, y el miércoles terminó el libro. Si el miércoles leyó 48 páginas, ¿cuántas páginas tenía el libro?
31. He preparado una sangría poniendo 3 vasos de zumo, 2 vasos de vino (con $\frac{1}{8}$ parte de alcohol) y 1 vaso de ginebra (con $\frac{1}{5}$ parte de alcohol). ¿Qué fracción de sangría es alcohol?
32. Si repartimos 4 pizzas y $\frac{2}{3}$ de otra pizza entre 7 amigos, ¿qué cantidad de pizza recibe cada uno?
33. ¿Cuántas botellas de $\frac{3}{4}$ de litro podemos llenar con $\frac{17}{5}$ de litro?
34. Un visitador médico tarda $\frac{3}{4}$ de hora en hacer una visita, y necesita media hora para desplazarse de una visita a otra. Cuando empieza su jornada laboral de 8 horas diarias, el visitador ya se ha desplazado hasta la localización de su primera visita. ¿Cuántas visitas podrá hacer en una semana, en su jornada de 40 horas?
35. De una tarta sólo queda la mitad. Llega Pedro y come las tres cuartas partes. Más tarde el gato se comió los $\frac{3}{5}$ de lo que quedaba. ¿Qué fracción de la tarta quedó?
36. Un paseante recorre en la primera hora $\frac{3}{7}$ del camino; en la segunda, $\frac{1}{4}$ del camino, y en la tercera hora el resto. ¿En cuál de las tres horas ha caminado más deprisa?
37. En una clase, $\frac{5}{6}$ de los alumnos han aprobado un control de matemáticas. Si $\frac{1}{5}$ de los aprobados tienen calificación de notable,
a. ¿Qué fracción del total son notables?
b. ¿Cuántos han obtenido notable si la clase tiene 30 alumnos?
38. De un depósito de agua se saca primero la cuarta parte y, después, la sexta parte del resto, quedando aún 40 litros ¿Cuál es la capacidad del depósito?
39. Del dinero de una cuenta bancaria, retiramos primero los $\frac{3}{8}$ y, después los $\frac{7}{10}$ de lo que quedaba. Si el saldo actual es 1893€, ¿cuánto había al principio?
40. Tengo el tiempo limitado para hacer todos los trabajos este fin de semana. Me propuse trabajar 8 horas el sábado y 7 el domingo, porque tengo mucho trabajo. Necesito la tercera parte del tiempo para el trabajo de ciencias, una quinta parte de lo que me queda para hacer problemas de matemáticas y una cuarta parte de lo que resta para leer el temario para el examen de la semana próxima. Si el resto de las horas las dedico a pasar a limpio los apuntes de la semana, ¿cuántas horas me quedan para pasar apuntes?

41. Tengo un presupuesto de 600€ para gastar en decoración y muebles para mi piso. Había pensado gastar un tercio en el comedor, la mitad de lo que queda en la cocina, una cuarta parte de lo restante en el baño y lo demás en el dormitorio. Si el espejo que quiero comprar vale 90€, la mesita vale $\frac{2}{3}$ partes de lo que vale el espejo y la mantita vale $\frac{2}{5}$ partes de lo que vale la mesita, ¿podría comprarlo todo para el dormitorio? ¿Qué podría comprar para aprovechar al máximo el presupuesto?
42. Un joven gastó $\frac{1}{4}$ de su paga semanal en ir al cine. Después gastó $\frac{2}{5}$ de lo que le quedaba en el transporte semanal. Al final de la semana compró un libro que le costó 6 euros y consiguió ahorrar $\frac{1}{5}$ de su paga semanal, ¿cuál es el importe de su paga semanal?
43. En una cafetería hay cuatro tipos de bocadillos. $\frac{1}{5}$ de los bocadillos son de lomo, $\frac{1}{4}$ de los bocadillos son de queso y $\frac{1}{3}$ de pollo. El resto son vegetales. Si hay menos de 20 bocadillos vegetales, ¿cuántos bocadillos han preparado con cada ingrediente?
44. Juan leyó $\frac{2}{5}$ de las páginas de un libro el lunes, el martes estaba ocupado y sólo pudo leer la tercera parte que el lunes, y el miércoles, que tenía más tiempo, terminó el libro leyendo 140 páginas. ¿Cuántas páginas tenía el libro?
45. Es hora de crear un huerto escolar. En principio sólo se plantarán patatas y zanahorias y se quiere utilizar todo el terreno que mide 10 metros cuadrados. Las clases que participarán son 3 clases de primero y 2 clases de segundo. Los metros cuadrados del huerto se distribuirán de manera equitativa para cada clase. Los de primero quieren dedicar la mitad del huerto a zanahorias y la otra mitad a patatas. Sin embargo, los de segundo, después de hacer una votación en la que había mucho fan de las patatas deciden que quieren dos tercios del terreno dedicado a las patatas. Si necesitamos 25 semillas de zanahoria por cada metro cuadrado, ¿cuántas semillas de zanahoria necesitaremos para ambos cursos? Resuélvelo apoyándote en un modelo de barras.
46. Pedimos unas pizzas y tenemos suerte porque sobran (mejor, para mañana para desayunar). Yo he cenado $\frac{3}{4}$ partes de una pizza, mi hermana se ha comido $\frac{2}{3}$ de una pizza, y su novio ha sido el que más ha comido: $\frac{1}{2}$ pizza de la de pepperoni y $\frac{2}{3}$ de la de 4 quesos. Si habíamos comprado 4 pizzas, ¿cuánta pizza hemos comido y cuánta nos ha sobrado?
47. El profesor de matemáticas debe organizar las reuniones con los padres de los alumnos. Si cada reunión dura 20 minutos,
- ¿cuántas reuniones puede organizar en 3 horas?
 - ¿cuántas reuniones puede organizar en dos horas y media?
 - El profesor debe atender a los padres de 24 alumnos. ¿Cuántas horas necesita para poder atenderlos a todos?

48. Mi presupuesto para las compras del Black Friday es de 300€ (he estado dando muchas clases particulares y me quema el dinerito en el bolsillito). He decidido gastarme $\frac{2}{3}$ de mi presupuesto en ropa para el invierno y la $\frac{3}{4}$ de lo que me quede en un nuevo videojuego para entretenerme en las vacaciones. Con lo que me sobre me daré algún caprichito.
- ¿Cuánto me he gastado en ropa?
 - ¿Cuánto me he gastado en el videojuego?
 - ¿Cuánto me queda para los caprichitos?
 - ¿Qué fracción del presupuesto representa el precio del videojuego?
 - ¿Qué fracción del presupuesto representa el dinero que me queda para caprichos?
49. He comido $\frac{1}{3}$ de los bombones de una caja y me quedan 12 bombones. ¿Cuántos bombones tenía la caja?
50. Tenemos dos tortillas de patatas y media, y queremos repartirlas en 8 raciones iguales para hacer *tuppers*. ¿Cuál es la fracción de tortilla que toca a cada ración?
51. Tenemos $\frac{7}{4}$ de litro de agua, y botellas de $\frac{2}{3}$ de litro. ¿Cuántas botellas podremos llenar? Interpreta la división $\frac{7}{4} \div \frac{2}{3}$ en este contexto.
52. Un tercio de los chicos del grupo A han llevado fruta para comer. Un cuarto de las chicas del grupo A han llevado fruta para comer. Si sabemos que $\frac{2}{5}$ de los alumnos son chicos, y el resto chicas, ¿qué fracción del total de los estudiantes (chicos y chicas) del grupo A han traído fruta para la comida?
53. Tres quintas partes de las alumnas de una clase hacen el camino en coche o en autobús, las otras van caminando. Tres cuartas partes de las alumnas que van en vehículo hacen el viaje en coche y 9 alumnas utilizan el autobús. ¿Cuántas alumnas hay en clase?
54. Entre tres hermanos se repartirán 120 euros. El primero se lleva $\frac{7}{15}$ del total, el segundo $\frac{5}{12}$ del total y el tercero el resto. ¿Qué fracción del total se lleva el tercero?
55. En un quiosco se han vendido a lo largo de la mañana los $\frac{2}{3}$ de los periódicos. Por la tarde se han vendido la mitad de los que han quedado. ¿Qué fracción del total de diarios representan los vendidos por la tarde? Si son dos periódicos los que no se han vendido, ¿cuántos había al empezar la venta?
56. Hacemos una fiesta de tortillas de patatas para decidir quién es el mejor chef, y luego decidimos repartirlas entre todos los asistentes para cenar todos juntos. Si tenemos 7 tortillas y vamos a dar a cada invitado $\frac{3}{8}$ de tortilla, ¿cuántas raciones nos salen?

57. Quiero repartir una bebida que he comprado en botellas de $\frac{3}{4}$ de litro en botellitas de $\frac{1}{5}$ de litro, que es una ración más razonable para una persona. Si tenemos tres botellas grandes,
- ¿Cuántas botellas pequeñas podemos llenar por completo?
 - Si queremos repartir toda la bebida, ¿cuántas botellitas pequeñas necesitaremos?
 - ¿Cuál es el volumen de bebida que ha quedado en la botella que no está completamente llena?
 - Una vez calculado el volumen del apartado anterior, ¿Cuál es la fracción de botellita pequeña que lo representa?
 - ¿Y cuál es la fracción de botella grande que lo representa?
58. Voy a hacer una recogida de dinero para hacer un regalo a un amigo que cumple 30 años. Mi mejor amiga pondrá el doble que yo (porque también pone dinero para su pareja), y el grupo de amigos de la universidad pondrán, entre todos, el triple que mi amiga. En total empleamos la mitad para comprar unos zapatos, una tercera parte de lo que queda para comprar un reloj, y un tercio de lo que queda lo gastamos por una chaqueta. Con los 40€ que sobran reservamos un masaje. ¿Cuánto dinero he puesto yo?
59. Tenemos la casa llena de botellas y garrafas de agua que hemos llenado en la fuente del pueblo, y vamos a aprovecharlas para regar. Después de regar todas las plantas, repartimos el agua que nos queda en botellas de $\frac{2}{5}$ de litro. Si nos quedaban 3 garrafas y media de 3 litros y 2 botellas y media de $\frac{1}{2}$ litro. ¿Cuántas botellas de $\frac{2}{5}$ de litro necesitaremos?
60. Mi abuela me ha dado dinero por mi cumple y me ha dicho: "¡no te lo gastes todo de una vez!", así que me he gastado $\frac{1}{3}$ parte de las estrenas en cartas de Pokémon, la mitad de lo que me quedaba en invitar a mi amigo a merendar, $\frac{2}{5}$ partes de lo que me quedaba después de la merienda en entradas para el cine y el resto en chuches. Si me he gastado 12€ en chuches:
- ¿qué fracción del total de estrenas representa lo que me he gastado en chuches?
 - ¿cuántas estrenas me ha dado mi abuela?
 - ¿cuánto me he gastado en las cartas de Pokémon?
61. Decidimos romper la hucha para hacer un viaje, y gastamos un tercio en el transporte y dos quintas partes en reservar el hotel. Por suerte nos hacen una oferta a la agencia de viajes y nos devuelven una sexta parte de lo gastado.
- ¿Qué fracción de los ahorros nos queda disponible para gastar durante el viaje?
 - Si durante el viaje nos hemos gastado $\frac{6}{11}$ partes de lo que nos gastamos reservando con la agencia, y a la vuelta del viaje nos quedan 2000€ ¿cuál ha sido el presupuesto total del viaje?

62. La herencia para repartir entre tres hermanos consiste en una farmacia, unas propiedades inmobiliarias y unos campos de naranjas. El notario nos ha dicho que los campos de naranjas se cotizan a $\frac{1}{5}$ parte del valor de la farmacia, y las propiedades inmobiliarias en total están tasadas a $\frac{2}{5}$ partes de la herencia. El reparto se hace de la siguiente manera: la herencia se reparte en tres lotes, uno para cada hermano, de forma que cada hermano se lleva la mitad de uno de los activos y $\frac{1}{4}$ parte de cada uno de los demás. Así todo queda repartido y los hermanos están obligados a compartir (esto de las últimas voluntades para mantener a la familia unida acaba siempre en problemas, pero las últimas voluntades hay que respetarlas). Sabiendo que la farmacia está valorada en medio millón de euros ¿Cuál sería el lote de mayor valor y cuál sería ese valor?

63. Mi gata es un poquito caprichosa cuando hablamos de su comida. Cuando la llaman a comer viene con hambre y se come la mitad de la latita. Un poquito más tarde se come un tercio de lo que le quedaba, y al final volvía más tarde y se come $\frac{1}{4}$ parte de la latita. Si luego aparece mi gato y se come el resto, ¿qué fracción de la latita se come el gato?

64. Mi hermana se ha cansado de su carrera de historiadora del arte y ha decidido hacerse fotógrafa de bodas. Como regalo especial para los invitados de cada boda siempre oferta una polaroid de recuerdo. El papel de la polaroid está de oferta por tiempo limitado, así que mi hermana ha decidido comprarlo todo de golpe. El papel se vende en pedidos de una cantidad fija de hojas de papel fotográfico, así que va a intentar deducir cuántos pedidos tiene que hacer. Después de hacer los cálculos, estas son sus conclusiones:

- Gasta aproximadamente $\frac{1}{4}$ parte de cada pedido para boda de tamaño medio.
- En temporada alta hace dos bodas por semana.
- Aproximadamente $\frac{2}{3}$ partes de las bodas contratan el servicio de la polaroid de recuerdo.
- La temporada alta dura unas 18 semanas.

Vamos a echarle un cable (HDMI) a mi hermana ¿Cuántos pedidos de papel debe hacer si quiere aproximar la cantidad de papel que necesitará para toda la temporada?

65. Realiza las siguientes operaciones con fracciones obteniendo la fracción irreducible:

a.
$$\frac{\frac{1}{3} \div \left(2 + \frac{2}{5} \cdot \frac{25}{8}\right)}{\left(-\frac{2}{5} + \frac{1}{3} \div 2\right) \cdot \frac{25}{8}}$$

b.
$$\frac{\frac{1}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{25}{6} - 2 \div \frac{4}{9}}{\frac{4}{9} \left(\frac{1}{5} - 2\right) - \frac{1}{3}}$$

c.
$$\frac{\left[\left(\frac{1}{7} - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right] \cdot \frac{2}{5} - 3}{\frac{1}{7} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \div \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} - 3}$$

d.
$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}$$

3.3 Razón y proporción

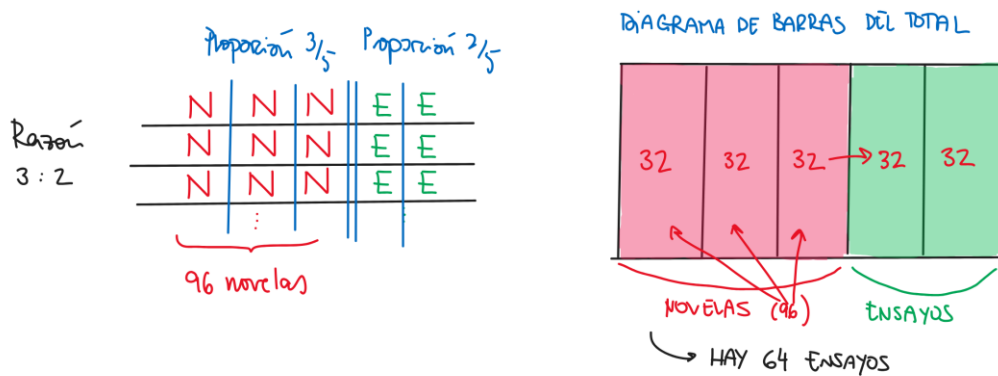
3.3.1 Introducción al concepto de razón

Ejemplo: En mi librería, por cada 3 novelas hay 2 ensayos, expresa esta relación usando un modelo gráfico y, en base a esa representación contesta la siguiente cuestión: si en mi librería hay 96 novelas, ¿cuántos ensayos tengo?

En este problema se nos da una relación entre dos cantidades (número de novelas y número de ensayos) que forman parte de un total conjunto. A estas relaciones las llamamos **razones**, mientras que las relaciones entre una parte y el total al que pertenece esa parte las llamamos **proporciones**.

Solemos representar las proporciones con fracciones, pues el denominador representa el total y el numerador la parte. Para las razones, utilizamos expresiones como “por cada 3 novelas hay 2 ensayos” o “la razón entre novelas y ensayos es de 3 a 2”, y lo expresamos con la notación 3:2. También podríamos usar las fracciones para representar razones, es decir, una relación multiplicativa entre dos cantidades, pero utilizaremos esta nueva notación para las razones para diferenciarlas mejor de las proporciones.

Como, del total de libros, por cada 3 novelas hay 2 ensayos, eso quiere decir que podemos agrupar todos los libros en paquetitos de 5 libros, con 3 novelas y 2 ensayos cada uno. Por tanto, de cada 5 libros, 3 son novelas y 2 son ensayos. Es decir, podemos transformar la razón novelas a ensayos 3:2 en proporciones: $\frac{3}{5}$ de los libros son novelas y $\frac{2}{5}$ de los libros son ensayos. Esto lo podemos hacer porque los únicos dos tipos de libros que hay en la librería son novelas y ensayos. Con un diagrama de barras podemos visualizar esta transformación de razón a proporción y terminar el problema:



Como el total está dividido en $\frac{3}{5}$ que son novelas y $\frac{2}{5}$ que son ensayos, cada $\frac{1}{5}$ del total es del mismo tamaño, y si $\frac{3}{5}$ son 96 libros, entonces $\frac{1}{5}$ son 32 libros y $\frac{2}{5}$ son 64 libros.

66. Se ha encargado a un orfebre el diseño y la fabricación de un trofeo que debe pesar 5 kg y debe estar fabricado con una aleación que contenga tres partes de oro, tres de plata y dos de cobre. ¿Qué cantidad se necesita de cada metal?
67. El perímetro de un campo de fútbol es de 432 metros. La razón entre la anchura y la longitud del campo es de 5:7. ¿Cuánto mide cada lado?

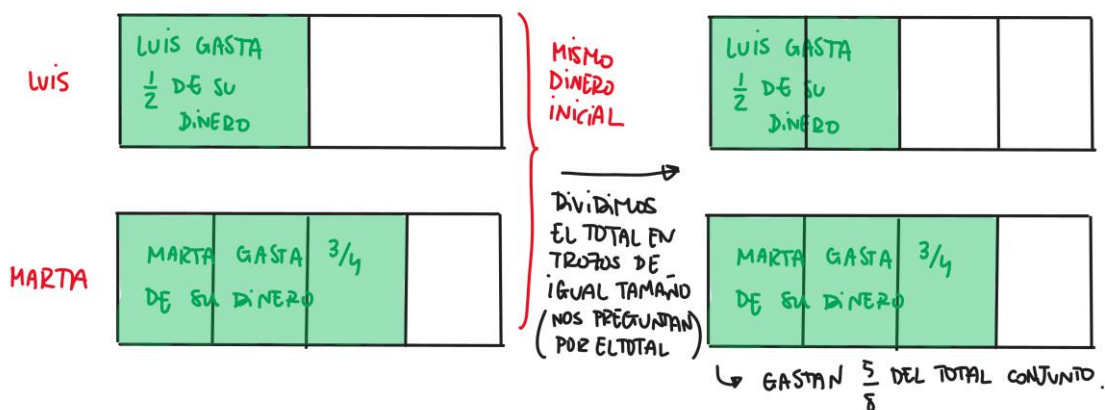
3.3.2 Problemas que combinan razones y proporciones de un total.

Ejemplo: Luis y Marta tienen la misma cantidad de dinero. Organizan una fiesta juntos, y Luis gasta la mitad de su dinero en organizarla. Como Marta ha invitado a más amigos, ella gasta $\frac{3}{4}$ de su dinero en la organización. ¿Qué fracción del total del dinero que tenían entre los dos han gastado en organizar la fiesta?

Algunos problemas introducen varias cantidades y las relacionan. Intentar pensar en todas las cantidades que involucra el problema y las posibles relaciones entre ellas nos puede servir para orientar su resolución. En este problema, las cantidades explícitas de las que se habla son:

- el dinero total que tiene Luis,
- el dinero total que tiene Marta,
- el dinero que gasta Luis en la organización de la fiesta y
- el dinero que gasta Marta en la organización de la fiesta.

Sin embargo, hay muchas más que podríamos considerar de las que no se habla explícitamente: el dinero conjunto, el dinero total gastado, la diferencia entre el dinero de Luis y el de Marta, la diferencia entre lo gasta por Luis y lo gastado por Marta, etc. Este problema no nos da ningún valor para alguna de estas cantidades desconocidas, pero sí nos da una relación entre dos de ellas que puede orientar el planteamiento de un modelo: Luis y Marta tienen la misma cantidad de dinero. Como estas cantidades son partes diferentes de un total conjunto, se trata de una **razón** 1:1. Suele ser recomendable empezar a dibujar un diagrama de barras a partir de estas razones, pues nos permiten construir un modelo del total que sea acorde a las condiciones del problema:



Una vez completamos el modelo con el resto de información que nos da el problema, basta completar el modelo con una división del total en partes de igual tamaño para poder observar que 5 de 8 partes iguales han sido gastadas en la organización de la fiesta, por lo que la respuesta es: $\frac{5}{8}$ del total conjunto se gastó en la organización.

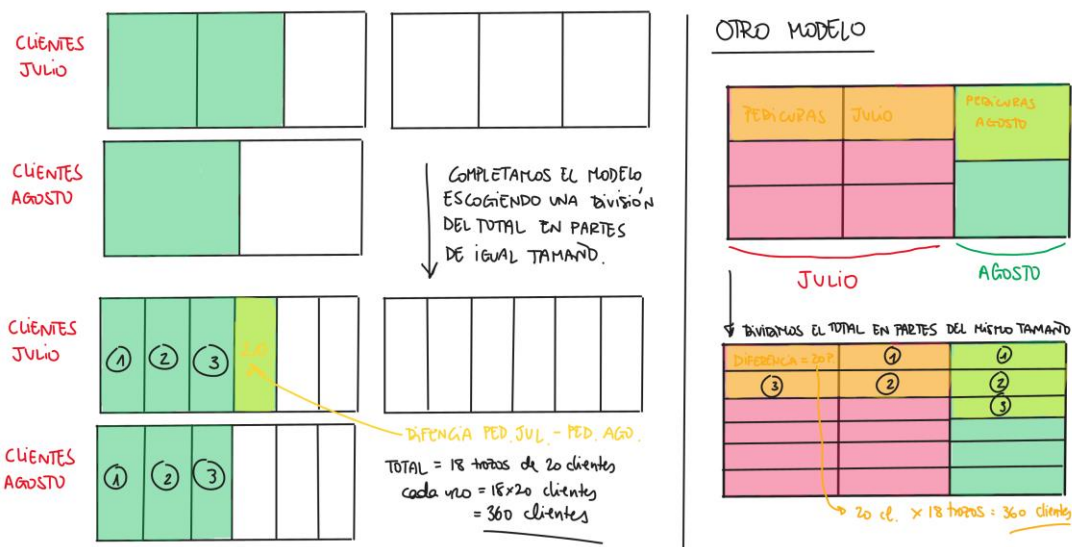
68. Luis y Marta organizan una fiesta juntos, y Luis gasta la mitad de su dinero en organizarla. Como Marta ha invitado a más amigos, ella gasta $\frac{3}{4}$ de su dinero en la organización. Si se han gastado la misma cantidad de dinero, ¿Qué fracción del total del dinero que tenían entre los dos han gastado en organizar la fiesta?

Ejemplo: En los salones de uñas el trabajo aumenta mucho en verano porque todo el mundo quiere ir bien colorido y lucir manicura y pedicura. A un renombrado salón, en julio acudieron el doble de clientes que en agosto. De los que acudieron en julio, $\frac{1}{3}$ se hizo la pedicura. De los que acudieron en agosto, la mitad se hizo la pedicura. Si en total se hicieron en julio 50 pedicuras más que en agosto, ¿cuántos clientes acudieron al salón durante ambos meses de verano?

En este problema se habla de varias cantidades desconocidas: el número de clientes que acudieron en julio, el número de clientes que acudieron en agosto, el número total de clientes, el número de pedicuras contratadas en julio, el número de pedicuras contratadas en agosto y la diferencia entre estas últimas. Aunque sólo se asigna un valor a una de ellas, tenemos varias relaciones entre el resto:

- En julio acudieron el doble de clientes que en agosto.
- Un tercio de los clientes de julio se hicieron la pedicura.
- La mitad de los clientes de agosto se hicieron la pedicura.

Estas dos últimas relaciones son proporciones: relacionan una parte con un todo al que esa parte pertenece. Sin embargo, la primera es una razón: una relación entre dos partes de un todo (los clientes de julio y los clientes de agosto son dos partes del conjunto total de clientes). Para empezar a dibujar el diagrama, es importante empezar por la razón, pues nos permite construir un modelo del total que sea acorde a la relación que se nos da entre sus partes. Empezaremos, por tanto, dibujando el doble de clientes en julio que en agosto. Damos dos maneras de construir el modelo, ambas correctas:



69. Una barra de 108 cm de largo se centró en dos piezas. Si sabemos que $\frac{3}{5}$ del trozo más grande miden lo mismo que $\frac{3}{4}$ del trozo más pequeño, ¿cuál es la longitud de cada uno de los trozos?

70. De mi colección de novelas, $\frac{1}{3}$ son de fantasía. De las de mi hermana, $\frac{2}{5}$ son de fantasía. Si mi hermana tiene el doble de novelas de fantasía que yo, y yo tengo 60 novelas en total, ¿cuántas novelas tiene mi hermana?

Ejemplo: En mi estantería tengo libros de arte, de cocina y novelas. La razón de libros de arte y libros de cocina en mi estantería es 7:2. La proporción de novelas es 13/40.

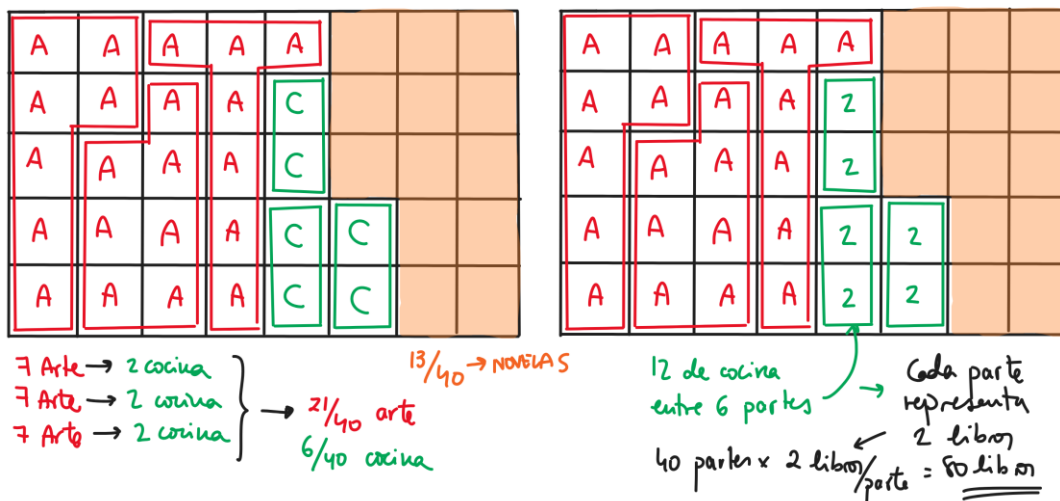
- ¿Cuál es la razón entre libros de arte y novelas?
- Si tengo 12 libros de cocina, ¿Cuántos libros tengo?

Este problema introduce diferentes relaciones entre varias cantidades desconocidas, tanto razones como proporciones. Para construir un modelo del total, debemos tener en cuenta que los libros de artes y los de novelas no son todos los libros que tenemos, también hay novelas. Por tanto, para poder usar la razón es práctico en este caso separar los libros en novelas y no novelas:

- 13 de cada 40 libros son novelas.
- 27 de cada 40 (el resto) no son novelas, y de ellos, por cada 7 libros de arte hay 2 de cocina. Si transformamos la razón a proporciones, $7/9$ de los libros que no son novelas son de arte y $2/9$ de los libros que no son novelas son de cocina.

Ahora podemos trabajar solo con las proporciones para dividir el total en las tres categorías de libros, pero será más intuitivo si incluimos toda esta información en un diagrama de barras:

TOTAL : 40 PARTES



Una vez sabemos que 27/40 del total no son novelas, podemos empezar a repartirlas según la razón arte a cocina de 7:2. Fácilmente podemos contar cuántas partes corresponden a cada categoría, y transformar este resultado en razón: como 21 de cada 40 son libros de arte y 13 de cada 40 son novelas, por cada 21 libros de arte hay 13 novelas y la razón arte a novelas es 21:13.

Para completar el último apartado basta comprobar que 12 libros de cocina están representados por 6 partes del total, por lo que cada una de las 40 partes (del mismo tamaño) del total representa 2 libros, y en total hay $40 \times 2 = 80$ libros.

- Hemos comprado una mesa y seis sillas, y hemos pagado un total de 770€. Si el precio de cada silla es la quinta parte del precio de la mesa, ¿cuál es el precio de una silla?

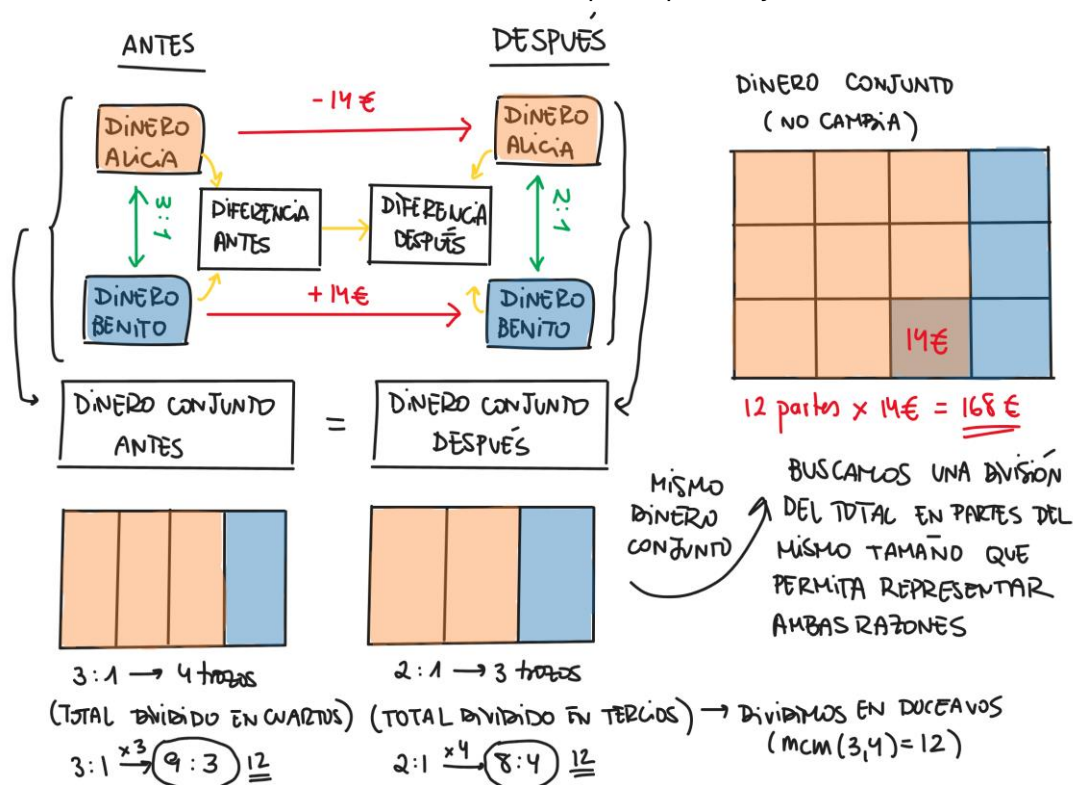
72. En el grupo A de Matemáticas por cada 5 alumnos aprobados ha habido 2 alumnos suspensos, y en el grupo B por cada 7 alumnos aprobados ha habido 3 alumnos suspensos. Si sabemos que 3 de cada 5 alumnos matriculados van al grupo A, y el resto al grupo B, ¿qué fracción de alumnos matriculados ha superado la asignatura?
73. Voy a comprar muebles nuevos para mi casa, y he encontrado tantas cosas que me gustan que he tenido que aumentar el presupuesto. El nuevo presupuesto es una vez y media el anterior. Pensaba que iba a ser suficiente, pero al final he pensado en poner plantas por todas partes, y tengo que aumentar el presupuesto en una tercera parte del presupuesto revisado. ¿Cuánto es el presupuesto final en comparación con el presupuesto final?
74. Entre los tres hermanos se reparten todas las estrenas de navidades. El menor sólo se lleva una tercera parte de lo que se lleva el mediano, y el mayor tiene una vez y media de lo que tienen los otros dos hermanos juntos. Si al mayor le dan 45 €, ¿cuánto reciben el medio y el menor?
75. Llegó la Navidad y los abuelos nos han dado estrenas a los primos. Pero claro, no llueve a gusto de todos y no es ningún misterio que eso que dice la abuela que quiere a todos sus nietos por igual es mentira. A Lucrecio, que es el pequeño, le dan $\frac{2}{3}$ de lo que le han dado a Mauricio. Mauricio sólo se ha llevado $\frac{2}{3}$ de lo que Amancio ha recibido, y Amancio sólo ha conseguido $\frac{2}{3}$ de lo que ha recibido Bonifacio. Si a Mauricio le han dado 12 €, ¿cuánto han desembolsado los abuelos?
76. De mi colección de videojuegos, la razón entre JRPGs y WRPGs es 3:2, y los juegos de acción representan $\frac{1}{5}$ parte del total.
- Si sólo tengo juegos de esos géneros, ¿cuál es la razón entre los juegos de acción y los JRPGs?
 - Si tengo entre 30 y 65 videojuegos, ¿cuántos tengo de cada tipo?
77. Un pintor tarda 3 horas en pintar una valla, otro pintor tarda 5 horas en hacer el mismo trabajo. Si trabajan juntos...
- ¿Cuánto tiempo tardan en pintar la valla?
 - ¿Qué fracción de valla pinta cada uno?
78. Mi hermana tarda 5 horas en limpiar toda la casa, de arriba abajo, mientras que yo tardo solo 4 horas, porque ya tengo más experiencia y voy más rápido. Si nos repartimos el trabajo eficientemente, ¿cuánto tardaremos en limpiar toda la casa los dos juntos?
79. Repasando las fotos de mi viaje, 5 de cada 17 son de paisajes, y por cada selfie hay 3 fotos de grupo.
- ¿Cuál es la razón entre fotos de grupo y fotos de paisaje?
 - Si tengo 36 fotos de grupo, ¿cuántas fotos he hecho en el viaje?

3.3.3 Problemas con varias razones.

80. La razón entre mujeres y hombres adultos en un parque es de 3 a 2. La razón entre mujeres adultas y niños en el parque es 4 a 7.
- Halla la razón entre el número de hombres y número de niños en el parque.
 - ¿Qué fracción del total de personas son mujeres adultas?
 - Si hay 21 niños, ¿cuántas personas hay en el parque?
81. En mi lista de Netflix, la razón entre películas de animación y dramas es 5:3. Por otra parte, la razón entre las películas de animación y las películas de acción es de 7:2. ¿Cuál es la razón entre los dramas y las películas de acción?

Ejemplo: Alicia tiene el triple de dinero que Benito. Si Alicia le diera a Benito 14 euros, entonces sólo tendría el doble. ¿Cuánto dinero tiene entre ambos?

En este problema se nos presenta una relación entre dos cantidades que cambian, modificándose la relación entre ellas. Podemos diseñar un modelo más completo del problema si consideramos todas las cantidades por separado y sus relaciones:

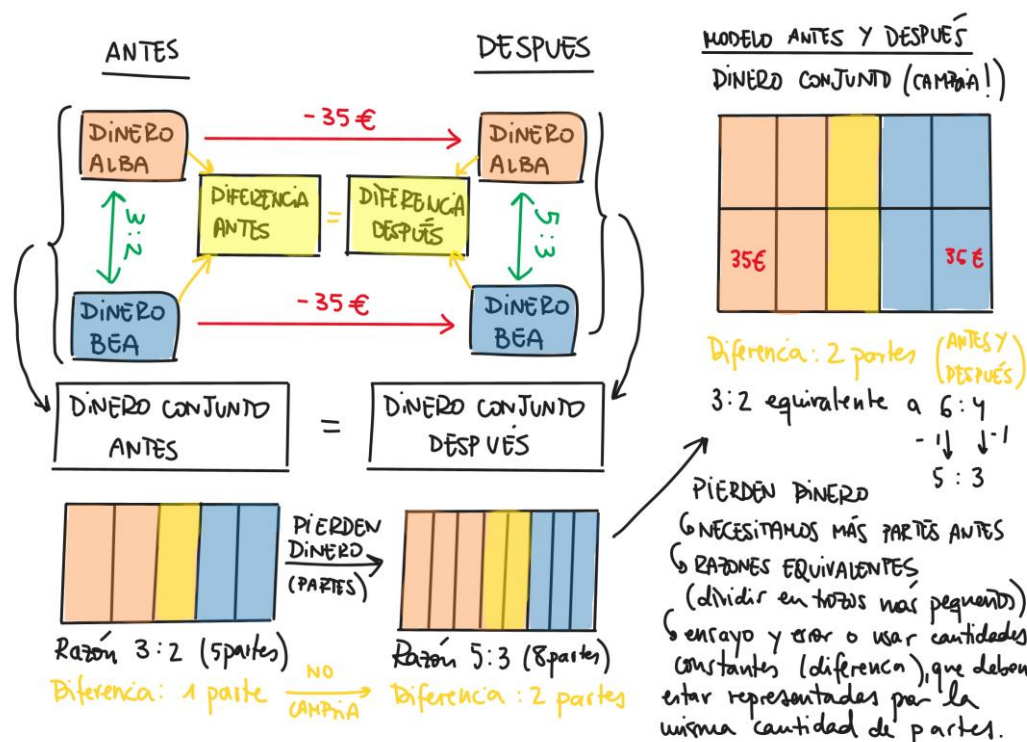


De todas las cantidades que podemos definir para este problema, el dinero conjunto, sobre el que nos preguntan, no cambia. Por tanto, podemos diseñar un diagrama de barras que permita representar tanto la división de este total en partes que corresponde a la primera razón, 3:1, como la división que corresponde a la segunda razón, 2:1. Para ello, tenemos que construir un modelo del total que se pueda dividir tanto en 4 como en 3 partes, por lo que podemos representar el total dividido en 12 partes. Ahora, basta representar ambas divisiones en el modelo y observar la diferencia para interpretarla en el contexto del problema y deducir que una de las 12 partes se corresponde a los 14€ que Alicia da a Benito, por lo que el total conjunto será de $12 \text{ partes} \times 14€ = 168€$.

El proceso de encontrar en cuántas partes dividir el total es en realidad una búsqueda de **razones equivalentes** que sean compatibles con el contexto del problema. Dos razones equivalentes representan la misma relación entre cantidades, como las razones 3:1 y 9:3; en ambas la primera cantidad es el triple de la segunda. Este procedimiento se puede hacer por ensayo y error, pero encontrar qué cantidades se mantienen constantes puede orientar la búsqueda de un modelo compatible con ambas razones, ya que una cantidad que no cambia tiene que estar representada por el mismo número de partes en el antes y el después en un modelo compatible con ambos.

Ejemplo: Las cantidades de dinero que tenían dos amigas, Alba y Bea, cumplían la razón 3:2. Cuando cada amiga se gastó 35 euros la razón pasó a ser 5:3. ¿Cuánto dinero tenían las amigas al principio en total?

En este problema también se nos presentan cantidades que cambian, cambiando la relación entre ellas. Hagamos un modelo completo como en el ejemplo anterior:



Como ambas amigas pierden dinero, para poder construir un modelo que permita representar ambas relaciones (entre las cantidades antes de gastar los 35€ y entre las cantidades después de gastarlos) necesitamos una división del dinero conjunto que tenga más partes antes que después, pues al gastar el mismo dinero cada una se pierden el mismo número de trozos en cada lado del diagrama. Podemos ir dividiendo la representación del dinero conjunto inicial (buscar razones equivalentes) por ensayo y error hasta encontrar un caso en el que al quitar los mismos trozos a cada lado obtengamos una razón 5:3, o también podemos utilizar que, como la cantidad de dinero que tiene Alba más que Bea no cambia, en un modelo que permita representar el antes y el después esta cantidad tiene que estar compuesta del mismo número de partes en el antes y en el después. Así, podemos observar que, dividiendo el total en 10 partes y eliminado una de cada amiga, pasamos de una razón 6:4 a una razón 5:3, por lo que cada parte representa 35€ y en total tenían 10 partes $\times$ 35€ = 350€.

82. Luis y Marta tienen cierta cantidad de dinero cada uno. Si Luis se gasta 38 euros, la razón de la cantidad de dinero que tiene Luis con respecto al dinero que tiene Marta sería 2:5. Si Marta se gastara 38 euros, la razón sería 8:13. ¿Cuánto dinero tiene cada amigo al principio?
83. Mi madre nos ha dado la paga. Yo tengo el doble que mi hermana por ser el mayor, pero quiero ayudarle a ahorrar, así que le doy 5€ y ahora tenemos la misma cantidad. ¿Cuánto tenemos entre los dos?
84. Tengo el doble de libros que mi hermana, pero después de que me regalara dos de los suyos, paso a tener el triple. ¿Cuántos libros tenemos entre ambos?
85. Mi colección de plantitas está creciendo, aunque mi madre tiene muchas más que yo. Ella tiene el triple que yo, por me ha dado dos, y ahora yo tengo dos quintas partes de lo que tiene ella. ¿Cuántas tiene ella más que yo después del regalo?
86. Arturo y Blanca están ahorrando para hacer un viaje a la nieve juntos. Al principio Arturo tiene $\frac{3}{4}$ partes más del dinero que tiene Blanca, pero decide comprarse un snowboard para probarlo en las pistas que le cuesta 300€, y ahora solo tiene $\frac{3}{8}$ más del dinero que Blanca había ahorrado. Los padres de Blanca quieren ayudarle a financiar su viaje. ¿Cuánto dinero tendrían que darle para que tuviera la misma cantidad ahorrada que Arturo?
87. Yo tenía el triple de videojuegos que mi hermano, pero como me voy a estudiar fuera le he dado 5 para que pueda jugar él cuando yo no esté. Ahora sólo tiene la mitad que yo. ¿Cuántos tenemos ahora cada uno?
88. Iba a romper la hucha porque quería hacer un viaje, pero mi hermana quiere un móvil nuevo y he pensado ayudarle a comprarlo. Yo solo tenía $\frac{2}{3}$ partes más que ella en cuanto a ahorros, pero he decidido darle 20€, de forma que ella ahora tiene $\frac{2}{3}$ partes de lo que yo tengo. ¿Cuántos ahorros tiene ella ahora para comprarse el móvil?
89. Dos hermanos, Aurora y Bono, reciben estrenas por Navidad. Antes de recibirlas Aurora tenía $\frac{1}{3}$ menos de dinero que Benito, pero después de recibir las estrenas Benito tiene $\frac{3}{8}$ más del dinero que tiene Aurora. Si han recibido 20€ cada uno, ¿Cuánto dinero tienen entre los dos después de recibir las estrenas?
90. Abraham y Begoña coleccionan relojes de arena. Han visto un modelo que les gusta mucho en la web de una tienda de decoración, así que deciden ir a comprarlo juntos. Antes de ir a la tienda Begoña tenía el doble de relojes que Abraham, pero en la tienda Abraham decide comprar dos relojes más que añadir a su colección, además del modelo que ya habían visto. Después de las compras Begoña solo tiene $\frac{2}{7}$ más de los relojes que tiene Abraham. ¿Cuántos relojes tendría que comprar Abraham, además de los que ya ha comprado, para tener los mismos que Begoña?

3.4 Números decimales

3.4.1 Lectura y escritura de números decimales.

91. Escribe los números:

- a. Doce unidades y cuatrocientas cincuenta y cuatro milésimas.
- b. Cinco centenas, dos decenas, cincuenta centésimas y treinta décimas.
- c. Setenta unidades, catorce décimas y ochenta milésimas.
- d. Setenta y tres centenas, veinte unidades y treinta y seis milésimas.
- e. Veintidós miles y trescientas diezmilésimas.
- f. Cinco centenes, seis unidades y diez centésimas.
- g. Doscientas cuarenta y cinco unidades y ciento treinta y cinco cienmilésimas.

92. Escribe verbalmente los números siguientes:

- a. 430,00208
- b. 4300,00208
- c. 403,208
- d. 43,208

93. Escribe los números:

- a. Trece unidades y doscientas treinta y cuatro milésimas
- b. Dos centenes, tres decenas, cincuenta centésimas y veinte décimas
- c. Cuarenta unidades, doce décimas y cincuenta y siete milésimas
- d. Setenta y dos centenes, noventa unidades, cincuenta y dos décimas y veintitrés milésimas
- e. Diez miles y ciento diezmilésimas
- f. Nueve centenes, nueve unidades y nueve centésimas
- g. Ciento veintisiete unidades y ciento veintisiete diezmilésimas.

94. Escribe verbalmente los números siguientes:

- a. 250,00107
- b. 2500,00107
- c. 205,107
- d. 25,107

3.4.2 Transformación de unidades decimales

95. Completa:

- a. 220 décimas son ... centésimas
- b. 6.300 décimas son ... decenas
- c. 32 decenas son ... centésimas
- d. 3.200.000 diezmilésimas son ... unidades
- e. 17 centenes son ... décimas

96. Completa:

- a. 410 décimas son ... centésimas
- b. 5.200 décimas son ... decenas
- c. 41 decenas son ... centésimas
- d. 1.000.000 diezmilésimas son ... unidades
- e. centenes son ... décimas

3.4.3 Fracción generatriz

97. Obtén la fracción generatriz de los siguientes números reales:

- a. $2,34\overline{5}$
- b. $1,121212 \dots$
- c. $3,7\overline{6}$
- d. $2,\overline{3}$
- e. $-7,2525 \dots$
- f. $1,12\overline{3}$

98. Obtén la fracción generatriz de los siguientes números reales:

- a. $1,052929\dots$
- b. $0,89\overline{5}$
- c. $-7,606162\dots$
- d. $120,8$
- e. $-98,99100101\dots$
- f. $13,126666\dots$
- g. $-1001,034034\dots$
- h. $-1,73\overline{2}$

99. Escribe las fracciones generatrices de los siguientes números decimales:

- a. $0,\overline{2}$
- b. 0.25
- c. $0.2\overline{5}$
- d. $0.\overline{25}$
- e. $0.2\overline{52}$
- f. $0.2\overline{5\overline{2}}$

100. Realiza las siguientes operaciones obteniendo previamente la fracción generatriz de los números:

- a. $0,48 + 1,4\overline{3}$
- b. $10,45 + 10,\overline{4}$
- c. $18,\overline{35} - 10,3\overline{2}$
- d. $3,4 \cdot 2,1\overline{23}$
- e. $4,222 \dots \div 1,3\overline{4}$

101. ¿Verdadero o falso?

- a. $0,\overline{9} = 1$
- b. $1,\overline{12} > 1,12$
- c. $2.\overline{2} < 2,\overline{22}$
- d. $0,\overline{3} < \frac{1}{3}$

102. ¿Verdadero o falso?

- a. $1,\overline{9} < 2$
- b. $3,\overline{01} > 3,01$
- c. $2.\overline{2} = 2,\overline{22}$
- d. $0,\overline{6} < \frac{2}{3}$

3.4.4 Clasificación de números decimales

103. Indica justificando la respuesta si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas:
- Toda fracción elevada a exponente negativo dará como resultado un valor negativo.
 - Todo número racional es un número entero.
 - Todo número entero es racional.
 - La suma de dos números periódicos puros da como resultado otro número periódico puro.
 - Todo número decimal es racional.
 - Todo número en forma de raíz es irracional.
 - $\sqrt{49}$ es real pero también es irracional.
104. Si una fracción tiene un 3 como denominador y el numerador no es múltiplo de 3, ¿qué tipo de número decimal representa?
105. Si una fracción tiene un 100 como denominador, ¿qué tipo de número decimal representa?
106. Si una fracción irreducible tiene un 35 como denominador, ¿qué tipo de número decimal representa?
107. Si una fracción tiene un 6 como denominador, ¿qué tipo de número decimal representa?
108. Si una fracción tiene un 120 como denominador y el máximo común divisor del denominador y el numerador es 6, ¿qué tipo de número decimal representa?
109. Si una fracción irreducible tiene un 99 como denominador, ¿qué tipo de número decimal representa?

3.4.5 Aproximación de números decimales

110. En una carrera de 100 metros, Juan emplea 13,18 segundos y Ángel emplea 13,08 segundos. El tiempo que se le da a Juan es 13,2 segundos y a Ángel 13,1 segundos. ¿Qué aproximación te parece más adecuada? Justifica la respuesta.
111. Al aproximar el peso de un gusano de 2,1236 g hemos cometido un error absoluto de 0,0236 g. Y al aproximar el peso de un buey de 824,36 kg hemos cometido un error absoluto de 4,36 Kg. ¿En qué caso hemos cometido mayor error? Justifica la respuesta.
112. Calcula el error absoluto y relativo en los siguientes casos e indica si la aproximación es aceptable:
- Si para el valor $\frac{5}{6}$ tomamos como aproximación 0,75.
 - Si para el valor $3, \hat{2}$ tomamos la aproximación de 3,3.
 - Si para el valor de $-\frac{13}{7}$ tomamos como aproximación -2.

3.5 Porcentajes

¿Qué son los porcentajes y cómo se utilizan?

Un porcentaje es una manera de expresar una proporción en la que el total se divide siempre en 100 partes. Utilizamos el símbolo % para representarlos, precedido por el número de partes (de entre las 100 en las que se divide el total) a las que hace referencia el porcentaje. Por ejemplo, si te hacen un descuento del 20% en un producto, el precio original se divide en 100 partes y el 20% hace referencia a 20 de esas partes.

Calcular un porcentaje de una cantidad

Ejemplo: De un presupuesto de 600€ para un viaje hemos gastado el 30% en los vuelos. ¿Cuánto hemos gastado en los vuelos?

Para calcular el 30% de 600€ dividimos 600€ en 100 partes, que serán de 6€ cada una, y por tanto 30 partes x 6€ cada parte = 180€ en el precio de los vuelos. Esto es lo mismo que calcular una proporción de una cantidad usando la multiplicación de fracciones:

$$30\% \text{ de } 600 \text{ €} = \frac{30}{100} \text{ de } 600 \text{ €} = \frac{30}{100} \times 600 = \frac{30 \times 600}{100} = 180 \text{ €}$$

Recuperar un total conociendo un porcentaje

Ejemplo: Hemos gastado un 30% del presupuesto de un viaje en los vuelos, que nos han costado 180€. ¿Cuál es el presupuesto del viaje?

Que el 30% del presupuesto sea 180€ quiere decir que, si dividimos el presupuesto en 100 partes iguales, 30 de esas partes corresponden a 180€. Por tanto, podemos repartir los 180€ entre esas 30 partes para obtener que a cada parte corresponden 6€, por lo que 100 partes x 6€ cada parte = 600€ de presupuesto inicial.

$$\begin{aligned} \text{El } 30\% \text{ son } 180 \text{ €} &\rightarrow \text{El } 1\% \text{ son } 180 \div 30 = 6 \text{ €} \\ &\rightarrow \text{El } 100\% \text{ son } 100 \times 6 = 600 \text{ €} \end{aligned}$$

Calcular qué porcentaje representa una cantidad de otra

Ejemplo: De un presupuesto de 600€ para realizar un viaje hemos gastado 180€ en los vuelos. ¿Qué porcentaje representa este gasto del presupuesto total?

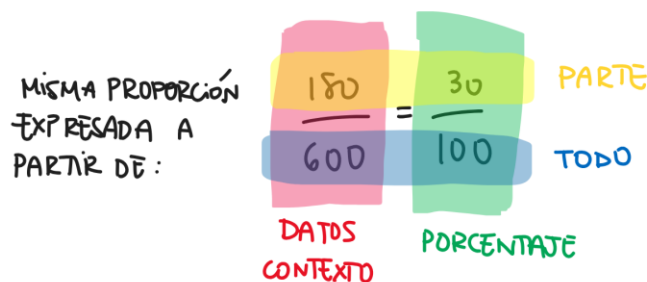
Podemos representar la proporción del presupuesto gastada en los aviones como 180/600. Para dar esta proporción en forma de porcentaje tenemos que transformarla en una fracción equivalente en la que el denominador sea 100. En este caso basta simplificar la fracción dividiendo por 6 numerador y denominador para llegar a la fracción 30/100 = 30%, por lo que el gasto en los vuelos es un 30% del presupuesto.

$$\begin{array}{l} \text{PROPORCIÓN} \\ \text{VUELOS} \end{array} : \quad \frac{180}{600} = \frac{30 \times 6}{100 \times 6} = \frac{30 \cancel{\times 6}}{100 \cancel{\times 6}} = \frac{30}{100} = 30\% \text{ del total}$$

En los ejemplos anteriores aparecen siempre los mismos 4 números, y en cada caso uno es desconocido y los otros tres son conocidos:

- Presupuesto total: 600€.
- Gasto vuelos: 180€.
- Partes correspondientes al gasto: 30 partes.
- Partes totales: 100 partes.

En problemas sencillos de porcentajes podemos utilizar lenguaje algebraico en un procedimiento flexible, aplicable a cada uno de estos casos, para calcular la cantidad desconocida a partir de las otras tres. Para ello, representamos la cantidad desconocida con una incógnita y utilizamos que la proporción entre los datos del problema se puede expresar en términos de un porcentaje. En realidad, se trata del mismo procedimiento de buscar fracciones equivalentes para representar la misma proporción, por un lado, con los datos del contexto del problema y por otro lado con un porcentaje. Es interesante notar aquí que todos los procedimientos aritméticos que hemos trabajado con fracciones definidas a partir de números enteros se pueden extender perfectamente a fracciones con números reales, por lo que podemos incluir números decimales en los numeradores y denominadores de las fracciones que representan la proporción del problema. Veamos cómo utilizar este procedimiento en los ejemplos anteriores.



<u>30% de 600 €</u> $\frac{x}{600} = \frac{30}{100}$ Datos Porcentaje Contexto → $x = \frac{30}{100} \cdot 600 = 180 \text{ €}$	<u>30% de x = 180 €</u> $\frac{180}{x} = \frac{30}{100}$ Datos Porcentaje Contexto → $x \cdot \frac{30}{100} = 180$ → $x = \frac{180 \cdot 100}{30} = 600 \text{ €}$	<u>x% de 600 = 180 €</u> $\frac{180}{600} = \frac{x}{100}$ Datos Contexto → $x = \frac{180}{600} \cdot 100 = 30$ → porcentaje = 30%
--	--	---

Utilizando las reglas de cálculo del álgebra podemos resolver estas ecuaciones de primer grado con una incógnita para hallar la cantidad desconocida a partir de las otras tres. Sin embargo, no es necesario recurrir al álgebra: los procedimientos aritméticos que ya hemos trabajado en la teoría de proporciones son suficientes para resolver cada caso y nos conducen a entender mejor la interpretación de los cálculos y las relaciones entre las cantidades del problema.

3.5.1 Problemas sencillos sobre porcentajes

113. Luis hace limonada con 12 litros de agua y 8 de zumo, ¿cuál es el porcentaje de zumo de la limonada?
114. Una impresora comprada en un país extranjero cuesta 215 € sin impuestos y 249,40€ con impuestos, ¿qué porcentaje de impuestos presenta?
115. Voy a pagar unos nuevos zapatos y me dicen que aplicando la promoción que tienen activa esta semana, me salen por 62€. Si el precio original era de 77,50€, ¿qué descuento me están aplicando?
116. En una granja la peste porcina mata al 18% de los cerdos, quedando 164 vivos. ¿Cuántos han muerto?
117. Completa estas expresiones (línea continua equivale a una fracción, línea discontinua equivale a un porcentaje):
- Algo que valía C aumenta su valor en un 50 %. Ahora vale ____ C.
 - El volumen era V y ahora es $\frac{4}{5}$ V. Ha perdido ____ de su valor. Su valor ha descendido un ____ %.
 - Si un precio P aumenta en $\frac{1}{4}$ de su valor, pasa de ser P a ser ____ P. Su valor ha aumentado un ____ %.
 - Si el precio inicial era P y ahora es $\frac{1}{4}$ P, el precio se ha reducido en un ____ %. P ha perdido ____ de su valor.

3.5.2 Problemas de aplicar porcentajes de forma iterada

118. Una mercancía se encareció un 10% y luego se abarató también un 10%. ¿Cuándo vale menos, antes o después de todo el proceso, o acaso el precio será el mismo?
119. ¡Las rebajas! En la tienda de moda han reducido un 25% los precios de todos los productos.
- Ana ya había fichado una chaqueta monísima antes de las rebajas, costaba 32€, ¿cuánto cuesta en rebajas?
 - En la segunda semana de rebajas, reducen los precios un 25% más. En la tercera semana los reducen de nuevo un 25%. En la cuarta semana los reducen otra vez un 25%. Ana cree que si espera hasta la cuarta semana la chaqueta puede salirle por 0€. Explícale por qué está equivocada.
 - Si Ana compra la chaqueta después de las cuartas rebajas, ¿cuánto pagará? ¿qué porcentaje del precio original se ha ahorrado?
120. El agua aumenta de volumen un 10 % cuando se congela. ¿En qué porcentaje disminuye el volumen del hielo cuando se licúa?
121. Si unas acciones pierden un día el 20% de su valor, y al día siguiente aumentan el valor un 10%, ¿Cuál es la relación porcentual entre los valores antes de la bajada y después de la subida?

122. En IKEA no hacen muchos descuentos, pero tengo una oferta del 4% en compras superiores a 500€ para hacerme la nueva tarjeta IKEA FAMILY. Ahora bien, si me gasto tanto dinero necesitaré que me envíen los muebles a casa, y por compras superiores a 500€ te cobran un 4% de gastos de envío. ¿Al aplicar la oferta y los gastos, pagaré más o menos del valor de la compra?
123. Iba a comprarme una chaqueta que, según la etiqueta, cuesta 48€. Cuando voy a la caja me dicen que tengo un 5% de descuento extra, por ser socio, sobre el descuento que ya tenía la chaqueta. Según la etiqueta, le habían aplicado ya un 20% de descuento, y ahora me aplican el 5%.
- ¿Cuál era el precio original de la chaqueta?
 - ¿Cuánto he pagado finalmente por la chaqueta?
124. Marc ha ido al supermercado. Hay dos cajas, A y B, con manzanas en el interior. Las manzanas de la caja A tienen un 30% de rebaja. Las manzanas de la caja B tienen un 50% de rebaja. El precio base de las manzanas de la caja B es 2 veces el precio de las manzanas de la caja A. Si Marc ha comprado una bolsa de manzanas donde por cada 3 manzanas de la caja A hay una manzana de la caja B, ¿cuál es la rebaja que tendrá sobre el precio que habría pagado sin las ofertas?
125. Compara las siguientes ofertas según sean más interesantes para un consumidor. Justifica que tu decisión es válida para cualquier precio x del producto, no únicamente para un precio concreto.
- Se rebaja un 40% el precio del producto.
 - Se rebaja un 20% el precio del producto, y después el resultado se vuelve a rebajar un 20%.
 - Se rebaja un 20% el precio del producto, y después el resultado se vuelve a rebajar un 25%.
126. La tele que me quiero comprar vale 2.400 €, así que había esperado al día sin IVA para comprármela.
- ¿Cuánto valdrá entonces?
 - Si encuentro una oferta acumulable en la que me hacen el 10% de descuento en caja sobre el precio final, ¿me sale más barata comprarla con esa oferta o en la tienda competidora, en la que me hacen un 25% de descuento?
127. Voy a comprar unos auriculares con cancelación de sonido, que tengo una obra delante de casa y cada día es más insoportable. Los que tengo mirados cuestan 250€ (*top quality, of course*). Si los compre en el día sin IVA y además me aplican un 3% de descuento por ser socio de la tienda, ¿cuánto pagaré al final?
128. En el mes de enero me suben el sueldo un 4% por el aumento de la inflación. En el mes de febrero me conceden un ascenso, por lo que mi sueldo aumenta un 25%. ¿En qué porcentaje ha aumentado mi sueldo en total en estos dos meses?

3.5.3 Problemas de porcentajes y fracciones para resolver con diagramas de barras

129. Mi grupo de amigas y yo hemos vendido lotería para recaudar dinero para ayudar a la ONG del barrio, ¡tenemos un buen fajo de billetes! El 70% de los billetes que hemos recaudado son de 20 euros, $\frac{3}{5}$ del resto de billetes son de 10 euros y el resto son billetes de 5 euros. Hemos contado y tenemos 120 euros en billetes de 5€, ¿cuánto dinero hemos recaudado?
130. En un concierto el 55 % de las entradas se vendieron al precio original y el 40 % de las entradas se vendieron a mitad de precio. Sobraron 20 entradas, que se regalaron. En total, se recaudaron 7200 euros. ¿Cuál fue el precio de venta inicial de las entradas?
131. Bruno tiene el 40 % más de dinero que su amiga Alicia. Cuando Bruno le da a Alicia 90 euros, Alicia tiene el 40 % más de dinero que Bruno. ¿Cuánto dinero tienen entre los dos?
132. Un trabajador ahorra el 20 % de su salario. Cuando le suben el sueldo un 10 % ahorra 36 euros más que antes de la subida. Si sabemos que el porcentaje del sueldo que ahorra no ha cambiado, ¿cuál era su sueldo original?
133. Del presupuesto del mes para gastos extra, he gastado una cuarta parte en pagar una factura que no esperaba, un 20% de lo que quedaba en unos billetes de tren y $\frac{2}{5}$ partes del total en comprarme unos auriculares nuevos. Si todavía me quedan 40€ para gastos inesperados, ¿cuánto era el presupuesto total?
134. Tengo una colección de juegos de mesa que no para de crecer, pero mi amiga Lydia me hace la competencia. Ella se ha comprado un trivial nuevo, y quiere que lo probemos, pero yo pienso que tiene un poquito de obsesión con los trivial, por qué este es el cuarto que se compra. Ella tenía un 60% más de juegos que yo, pero ha decidido darme su trivial antiguo y dos juegos que ya no le gustan, así que he pasado a tener dos terceras partes de los que ella tiene ahora. ¿Cuántos juegos debería comprarme para tener los mismos que ella?
135. He comprado cañizo decorativo para el perímetro de la parcela de mi chalé, que tengo unos vecinos demasiado curiosos. Había comprado 60 metros para recorrer del contorno de la parcela, que es un rectángulo con dos lados largos y dos cortos, donde los largos miden el triple que los cortos. Pensaba que había tenido mucha suerte porque el cañizo venía en paquetes de 10 metros y no me sobraba nada, pero el problema es que miré las medidas en el plano de la parcela y, por algún motivo misterioso, no son las medidas correctas. Con las medidas reales, los lados cortos son un 20% más largos de lo que pensaba, y los largos son un 20% más cortos.
- ¿Tendré que comprar más cañizo para poder recorrer el contorno de la parcela?
 - ¿Cuántos metros necesitaré?

3.6 Proporcionalidad

136. ¿Son directamente proporcionales los radios de dos círculos y sus correspondientes áreas? Si un círculo tiene 20cm^2 de área, ¿qué área tendrá otro círculo cuyo radio mida el doble que el del primero?
137. A partir de la definición de magnitudes directamente proporcionales, justifica por qué el algoritmo de la regla de tres funciona para resolver problemas de proporcionalidad directa de valor perdido.
138. Desde que me compré mi nueva fitband no se me escapa ni un detalle en cuanto hago un poco de ejercicio. Este fin de semana estuve haciendo una ruta en bici, al llegar a huerta he alcanzado una velocidad constante, consiguiendo hacer 2km en 9 minutos. ¿Qué magnitudes intervienen en este enunciado? ¿Cómo se relacionan? Si no varío la velocidad, ¿cuánto tiempo tardaré en llegar desde La Punta a Pinedo si Google Maps me dice que el recorrido tiene 4,6km?
139. En una panadería, con 80 kilos de harina hacen 120 kilos de pan. ¿Cuántos kilos de harina serían necesarios para hacer 99 kilos de pan?
140. En un plano de una ciudad, una calle de 350 metros de longitud mide 2,8 cm. ¿Cuánto medirá sobre este mismo plano otra calle de 200 metros?
141. En una fábrica automovilística, una máquina pone, en total, 15.000 tornillos en las 8 horas de jornada laboral, funcionando de forma ininterrumpida. ¿Cuántos tornillos pondrá en 3 horas?
142. Un coche ha tardado 42 minutos en recorrer 70 km. Suponiendo que va a la misma velocidad, contesta a las siguientes cuestiones:
- ¿Cuánto tardará en recorrer 150 km?
 - ¿Cuántos kilómetros recorrerá en dos horas y tres minutos?
143. Estamos preparando un fiestón para nuestra graduación: hemos pensado alquilar un barco en el puerto y hacer una cena a bordo. El precio de alquiler del barco es fijo. En principio hemos planeado juntarnos 25 amigos, y en la empresa de alquiler nos han dicho que tendremos que pagar 15€ cada uno por el alquiler del barco (la cena corre de nuestra cuenta). Si finalmente hay restricciones con la movilidad, nuestros amigos de Madrid tendrán que celebrar la fiesta por su cuenta, y seremos solo 18 amigos en el barco. ¿Cuánto tendremos que pagar cada uno?
144. Voy a llenar la piscina y usaré el agua para regar el huerto. Para vaciar la piscina usando un bidón de 15 litros necesito llenarlo 200 veces. ¡Estoy harta de hacer tantos viajes al huerto! ¿Cuántos viajes haré si uso un bidón más grande con capacidad de 25 litros?
145. Estoy editando un trabajo de clase de tal forma que en cada página caben 32 líneas, así el trabajo ocupa 70 páginas. Dado que me paso del límite de espacio he pensado que voy a ajustar un poco, ¿cuántas páginas ocupa si coloco 35 líneas por página?

146. En un camión caben 1215 sacos de patatas de 4kg cada uno. En otro camión con la misma capacidad metemos sacos de 5 kg, ¿cuántos sacos caben?
147. Para construir una casa en ocho meses han sido necesarios seis obreros. ¿Cuántos habrían sido necesarios para construir la casa en tan solo tres meses?
148. Hemos decidido reservar una escapada con los novios para este veranito, y nos vamos en total 6 parejas. Hemos cogido un Airbnb en el que cabemos todos para 4 noches, y nos toca pagar 240€ por pareja. Al final una de las parejas no puede venir, pero justamente los que no vienen son los que tenían la agenda más complicada, así que ahora vamos a cambiar la reserva a 6 noches. ¿A cuánto nos sale ahora la estancia a cada pareja?
149. Las condiciones laborales en la empresa a la que trabajo han cambiado. Pasamos de trabajar jornadas de 40 horas semanales a trabajar 35 horas semanales, pero han incrementado el sueldo por hora un 12%. Los sindicatos están preocupados de que la empresa esté intentando camuflar recortes. Semanalmente, ¿los trabajadores cobran más o menos que antes?
150. Pablo estudia en la Universidad de Valencia y se dedica a impartir clases online en su tiempo libre. En 2022 ha impartido 150 sesiones (todas de una hora y con el mismo precio) y ha cobrado 1800 euros. Responde a las preguntas.
- ¿Qué representa la razón 1800:150? Y la razón 150:1800?
 - Explica cuál es la relación entre las magnitudes "euros cobrados" y "sesiones impartidas".
 - En el año 2021, Pablo impartió únicamente 80 sesiones. ¿Cuántos euros ganó Pablo en 2021? ¿Qué porcentaje de incremento de ganancias ha tenido de 2021 a 2022?
 - Si en 2023 quiere cobrar lo mismo que en 2022 pero trabajando un 20% menos, ¿a qué precio tendrá que cobrar las sesiones si quiere mantener la duración de estas? ¿Cuántas sesiones impartirá?