



Departament d'Informàtica

Problemas de la asignatura
13042 – Matemáticas para la Computación

Marta Pla i Castells
Ignacio García Fernández

15 de mayo de 2009



Índice general

1. Problemas preliminares	7
1.1. Derivadas elementales.	7
1.2. Derivadas parciales	8
1.3. Ejercicios	8
2. Problemas sobre cálculo de errores	11
2.1. Conceptos teóricos	11
2.1.1. Errores	11
2.1.2. Propagación del error	12
2.1.3. Error de una función	12
2.2. Ejercicios	13
3. Problemas de polinomios e interpolación	19
3.1. Interpolación polinómica	19
3.2. Ejercicios	19
4. Sistemas de ecuaciones lineales	27
4.1. Resolución de sistemas ecuaciones lineales	27
4.2. Ejercicios	28
5. Problemas de cálculo de ceros de funciones	47
5.1. Métodos iterativos	47
5.2. Ejercicios	47
6. Integración numérica	55
6.1. Métodos de integración y diferenciación numérica	55
6.2. Ejercicios	56



7. Problemas de ecuaciones diferenciales	63
7.1. Ejercicios	63
7.2. Ejercicios adicionales	90
7.2.1. E.D.O. de variables separables	90
7.2.2. E.D.O. homogéneas	90
7.2.3. E.D.O. exactas	91
7.2.4. E.D.O. reducibles a exactas	91
7.2.5. Ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes cons- tantes	91
8. Números complejos	93
8.1. Ejercicios	93
9. Análisis de Fourier	99
9.1. Desarrollo en serie de Fourier	99
9.2. Transformada discreta de fourier	99
9.3. Ejercicios	100
10.Resolución numérica de ecuaciones diferenciales	117
10.1. Ejercicios	117
11.RSA	125
12.Ejercicios de Matlab	129



Nota

El material que se presenta a continuación es una colección de ejercicios recopilada a lo largo de varios cursos académicos de la asignatura Matemáticas para la Computación. Se han incluido ejercicios de todos los temas impartidos a lo largo de las diferentes ediciones del curso. Dado que el temario a sufrido cambios en diversas ocasiones, es posible que algunos temas no pertenezcan al temario del presente curso. No obstante, se ha decidido mantenerlos.

Entre los ejercicios recogidos se encuentran problemas de examen. En estos casos, se indica la fecha de la convocatoria.

Algunos de los problemas han sido elaborados por los profesores J. Domingo, W. Díaz y S. Moreno, a los que queremos agradecer su autorización para incorporarlos a esta colección de problemas.



CAPÍTULO 1

Problemas preliminares

1.1. Derivadas elementales.

La derivada de una función A continuación se indica un conjunto de derivadas elementales

- | | | | |
|-----|----------------------------|---------------|--|
| 1. | $f(x) = a$ | $\Rightarrow$ | $f'(x) = 0$ |
| 2. | $f(x) = x$ | $\Rightarrow$ | $f'(x) = 1$ |
| 3. | $f(x) = ax$ | $\Rightarrow$ | $f'(x) = a$ |
| 4. | $f(x) = u(x) + v(x)$ | $\Rightarrow$ | $f'(x) = u'(x) + v'(x)$ |
| 5. | $f(x) = \sin(x)$ | $\Rightarrow$ | $f'(x) = \cos(x)$ |
| 6. | $f(x) = \cos(x)$ | $\Rightarrow$ | $f'(x) = -\sin(x)$ |
| 7. | $f(x) = u(x)v(x)$ | $\Rightarrow$ | $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ |
| 8. | $f(x) = x^n$ | $\Rightarrow$ | $f'(x) = nx^{n-1}$ |
| 9. | $f(x) = \frac{1}{x}$ | $\Rightarrow$ | $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ |
| 10. | $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ | $\Rightarrow$ | $f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2}$ |

Recuérdese también la **Regla de la Cadena**:

Si $f(x)$ puede expresarse como $f(x) = g(h(x))$, entonces, la derivada de f puede calcularse como

$$f'(x) = g'(h(x))h'(x).$$



1.2. Derivadas parciales

Una función cuyo valor depende de varias variables $f(x_1, \dots, x_n)$, permite el cálculo de derivadas respecto a cada una de sus variables. El valor de la derivada parcial respecto a una variable indica la tasa de variación de la función si hacemos variar dicha variables dejando las demás constantes.

La derivada parcial de f respecto a una de sus variables x_i , se expresa como

$$\frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i}$$

y se calcula considerando el resto de variables como constantes o parámetros de la función, y aplicando las reglas ordinarias de derivación de funciones de una variable.

$$f(x, y) = \frac{x}{y}; \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{1}{y}; \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}$$

1.3. Ejercicios

Ejercicio 1:

Representar por medio de matlab cada una de las funciones anteriores en el intervalo $[0, 6]$, junto con su derivada.

Ejercicio 2:

Calcular $f'(x)$ para las siguientes funciones $f(x)$:

1. $f(x) = \tan(x)$



2. $f(x) = 5x^3$

3. $f(x) = 3x^2 + 2x - 2$

4. $f(x) = \frac{1}{x^2}$

5. $f(x) = \frac{\sin(x)}{2x+3}$

6. $f(x) = \sin(x^2)$

7. $f(x) = \sin(\cos(x))$

8. $f(x) = \sin(\alpha); \alpha(x) = 2x^3 + 2$

9. $f(x) = \sin\left(\frac{\cos(x)}{2x}\right)$

Ejercicio 3:

Contestar a las siguientes cuestiones:

1. Demostrar la fórmula de las derivadas elementales 9. y 10. a partir de las derivadas elementales anteriores. Es decir, demostrar que

$$f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2}; \quad f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2}$$

2. Demostrar que si $f(x) = \sqrt{x}$, entonces $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
-
-



Ejercicio 4:

Calcular todas las derivadas parciales de las siguientes funciones:

1. $f(x, y) = \tan(x + y)$

2. $f(x, y) = 5x^3 + 2y$

3. $f(x, y) = 3x^2 + 2xy - 1$

4. $f(x, y) = \frac{y}{x^2}$

5. $f(x, y) = \frac{\sin(xy)}{2x+3y}$

6. $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

CAPÍTULO 2

Problemas sobre cálculo de errores

2.1. Conceptos teóricos

2.1.1. Errores

Cuando se realizan mediciones o cálculos de forma numérica se obtiene una aproximación del resultado. A la diferencia entre el resultado numérico obtenido y el resultado exacto se la denomina *error absoluto* de la medición.

El *error absoluto* de una medición x se define como

$$e_a(x) = \bar{x} - x$$

donde $\bar{x}$ es el valor correcto.

El *error relativo* de una medición x se define como

$$e_r(x) = \frac{e_a(x)}{\bar{x}}; \quad \bar{x} \neq 0$$

ó

$$e_r(x) = \frac{e_a(x)}{x}; \quad x \neq 0$$

si no se dispone del valor exacto $\bar{x}$.

Dado que el error absoluto de una medición o del resultado de una operación generalmente no se puede saber (¡si sabemos el error absoluto, conocemos el valor exacto!), se trabaja con cotas para el error absoluto. Una cota para el error absoluto es un valor $\varepsilon_a(x)$ que sabemos que es mayor que el módulo de dicho error

$$|e_a(x)| \leq \varepsilon_a(x)$$



De forma análoga, una cota para el error relativo es un valor $\varepsilon_r(x)$ que sabemos que es mayor que el módulo de dicho error

$$|e_r(x)| \leq \varepsilon_r(x)$$

2.1.2. Propagación del error

Si un cálculo consiste en una sucesión de operaciones numéricas, cada operación trabajará con los resultados aproximados de la operación anterior.

Por tanto, es muy importante conocer la manera en que el error de cada operación influye en el resultado final.

Para ello disponemos de diferentes relaciones que permiten obtener una cota para el error del resultado de una operación, a partir de las cotas del error de cada uno de los datos de entrada de la misma.

$$\varepsilon_a(x_1 + x_2) = \varepsilon_a(x_1) + \varepsilon_a(x_2) \quad (2.1)$$

$$\varepsilon_a(x_1 - x_2) = \varepsilon_a(x_1) + \varepsilon_a(x_2) \quad (2.2)$$

$$\varepsilon_r(x_1 x_2) = \varepsilon_r(x_1) + \varepsilon_r(x_2) \quad (2.3)$$

$$\varepsilon_r\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \varepsilon_r(x_1) + \varepsilon_r(x_2) \quad (2.4)$$

En realidad, los resultados anteriores pueden obtenerse a partir de la siguiente regla general para la acotación del error absoluto de una función de n variables a partir de los errores absolutos de los datos de entrada.

2.1.3. Error de una función

El error absoluto de una cantidad, y que es función de un conjunto de variables, $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

está acotado, en función del error absoluto de las variables $\varepsilon_a(x_i)$, por la expresión

$$\varepsilon_a(y) \leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \varepsilon_a(x_i) = \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| \varepsilon_a(x_1) + \dots + \left| \frac{\partial f}{\partial x_n} \right| \varepsilon_a(x_n)$$



2.2. Ejercicios

Ejercicio 5:

En la siguiente tabla aparece una serie de medidas $\bar{x}$, junto con el valor exacto x . Calcular el error absoluto y el error relativo de cada una de ellas.

$\bar{x}$	x	e_a	e_r
3.5m	3.52m	3.5m - 3.52m = - 0.02m	- 0.02m / 3.52m = - 0.00568
13.5m	13.52m		
2345mm	2342mm		
2.345m	2m		
13568m	13560m		
13568m	13670m		

La cuarta medición corresponde a la longitud de una pared, con el fin de construir una estantería que la cubra. La quinta a la distancia entre dos poblaciones, con el fin de señalar una carrera ciclista.

¿En cuál de las dos mediciones es mayor el error absoluto (expresálos ambos en metros, para poder comparar) y el error relativo? ¿Cuál de las dos mediciones crees que es más (o menos) útil debido al error cometido?

Ejercicio 6:

Calcular las siguiente cotas de error:

1. $\varepsilon_a(x_1x_2)$
2. $\varepsilon_a(\frac{x_1}{x_2})$
3. $\varepsilon_a(ax_1)$
4. $\varepsilon_a(ax_1 + bx_2)$
5. $\varepsilon_a(\sin(x_1))$
6. $\varepsilon_a(\frac{ax_1^3}{x_2^2} + x_2)$



Ejercicio 7:

Resolver el ejercicio adicional 1 del tema 1

Ejercicio 8:

Resolver el ejercicio adicional 2 del tema 1

Ejercicio 9: Septiembre de 2006.

Un modelo macroeconómico sencillo para el crecimiento de la renta a un año, permite calcular este indicador como

$$r = \frac{G + 5E}{c}$$

donde r indica la renta, G el gasto público, E la exportación y c un indicador del consumo. El valor de c es un valor entre 0 y 1, $c \in [0, 1]$.

Con el fin de incluir este modelo en una aplicación de economía para una entidad bancaria, se debe implementar dicha fórmula.

- Obtener la fórmula para la cota del error absoluto que se comete en el cálculo de r , $\varepsilon_a(r)$, a partir del error absoluto de cada una de las tres variables que aparecen en la fórmula, $\varepsilon_a(G)$, $\varepsilon_a(E)$ y $\varepsilon_a(c)$.
 - Calcular r , y los errores absoluto y relativo para los siguientes valores de las variables: $G = 1000 \pm 10$, $E = 200 \pm 5$ y $c = 0,45 \pm 0,02$.
 - El departamento de inversiones necesita los resultados del modelo con un error relativo menor que 0.025. ¿Qué errores debemos exigir al departamento de estadísticas para poder cubrir estas especificaciones?
 - Para reducir la propagación de errores, ¿qué variables deberían exigirse con menor error absoluto?
-



Ayuda 1: El error absoluto de una cantidad, y que es función de un conjunto de variables, $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

está acotado, en función del error absoluto de las variables $\epsilon_a(x_i)$, por la expresión

$$\epsilon_a(y) \leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \epsilon_a(x_i) = \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| \epsilon_a(x_1) + \dots + \left| \frac{\partial f}{\partial x_n} \right| \epsilon_a(x_n)$$

Ayuda 2: Las derivadas parciales de la función

$$f(x, y, z) = \frac{x + 5y}{z}$$

son

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{z}; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{5}{z}; \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{x + 5y}{z^2}.$$

Ejercicio 10: Junio de 2007.

(1 punto) Una ojiva nuclear en órbita baja terrestre ($R = 6428000$ m) que tiene una masa $m = 1$ Kg y se mueve a una velocidad $v = 7800$ m/s está sometida a una fuerza centrífuga que viene dada por:

$$F = \frac{mv^2}{R}$$

Calcule esta fuerza en Newton y el error asociado teniendo en cuenta que todas las cantidades dadas vienen afectadas por un error relativo del 1 %.

Respuestas

Respuesta al Ejercicio 9



- La expresión para la cota del error será

$$\varepsilon_a(r) \leq \frac{1}{c}\varepsilon_a(G) + \frac{5}{c}\varepsilon_a(E) + \left| \frac{G + 5E}{c^2} \right| \varepsilon_a(c)$$

- A partir de la fórmula del modelo, con los datos proporcionados

$$r = \frac{G + 5E}{c} = \frac{1000 + 5 \cdot 200}{0,45} = 4444, \bar{4}$$

Por otra parte, una cota del error absoluto para r vendrá dada por

$$\begin{aligned} \varepsilon_a(r) &\leq \frac{1}{c}\varepsilon_a(G) + \frac{5}{c}\varepsilon_a(E) + \left| \frac{G + 5E}{c^2} \right| \varepsilon_a(c) \\ &= \frac{1}{0,45}10 + \frac{5}{0,45}5 + \frac{1000 + 5 \cdot 200}{0,2025}0,02 \\ &= 22, \bar{2} + 55, \bar{5} + 197, 5309 = 275, 3086 \end{aligned}$$

La estimación de r que obtenemos a partir de los datos proporcionados es $r = 4444, \bar{4} \pm 275, 3086$. Esto da una cota para el error relativo de 0,062.

- Para poder conseguir un error relativo menor de 0,025 es necesario que el error absoluto sea menor de $111, \bar{1}$. La cota del error absoluto debido a la variable c ya es superior a dicho valor. Por tanto, es necesario reducir el error absoluto de la variable c por debajo de dicho valor. Para reducir este valor hasta $33, \bar{3}$ será necesario que $\varepsilon_a(c) \leq 0,00337$ ó, de forma equivalente, $\varepsilon_r(c) \leq 0,0075$.
- De acuerdo con la cota, la influencia del error de c puede ser mucho mayor que la de G o E . Especialmente para valores grandes de estas dos últimas variables. Por tanto, es especialmente importante controlar el error de la variable c .

Respuesta al Ejercicio 10

Teniendo en cuenta que todas las magnitudes dadas vienen expresadas en unidades del sistema internacional, la fuerza se puede calcular directamente como:

$$F = \frac{mv^2}{R} = \frac{1 \text{ Kg}(7800 \text{ m/s})^2}{642800 \text{ m}} = 9,4648413 \text{ Nw}$$



Para el cálculo del error utilizaremos la expresión general para el cálculo del error de una función que depende de más de una variable, que desarrollada conduce a:

$$\begin{aligned}\varepsilon_a(F) &= \left| \frac{\partial}{\partial m} \left(\frac{mv^2}{R} \right) \right| \varepsilon_a(m) + \left| \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{mv^2}{R} \right) \right| \varepsilon_a(v) + \left| \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{mv^2}{R} \right) \right| \varepsilon_a(R) = \\ &= \left| \frac{v^2}{R} \right| \varepsilon_a(m) + \left| \frac{2mv}{R} \right| \varepsilon_a(v) + \left| -\frac{mv^2}{R^2} \right| \varepsilon_a(R) = \frac{v^2}{R} \varepsilon_a(m) + \frac{2mv}{R} \varepsilon_a(v) + \frac{mv^2}{R^2} \varepsilon_a(R)\end{aligned}$$

Dividiendo la ecuación anterior por $F = mv^2/R$, obtenemos:

$$\frac{\varepsilon_a(F)}{F} = \frac{v^2/R}{mv^2/R} \varepsilon_a(m) + \frac{2mv/R}{mv^2/R} \varepsilon_a(v) + \frac{mv^2/R^2}{mv^2/R} \varepsilon_a(R) = \frac{\varepsilon_a(m)}{m} + 2 \frac{\varepsilon_a(v)}{v} + \frac{\varepsilon_a(R)}{R}$$

Teniendo en cuenta la definición error relativo: $\varepsilon_r(X) = \varepsilon_a(X)/X$, podemos reescribir la ecuación anterior en la forma:

$$\varepsilon_r(F) = \varepsilon_r(m) + 2\varepsilon_r(v) + \varepsilon_r(R)$$

Como el error relativo de todas las magnitudes dadas es 0,01, sustituyendo en la expresión anterior obtenemos:

$$\varepsilon_r(F) = 0,01 + 2 \cdot 0,01 + 0,01 = 0,04$$

por lo que el error absoluto, será:

$$\varepsilon_a(F) = F \cdot \varepsilon_r(F) = 9,4648413 \text{ Nw} \cdot 0,04 = 0,3786 \text{ Nw}$$

y el resultado final, redondeado de acuerdo con el error obtenido a una sola cifra decimal, resulta ser:

$$F = (9,5 \pm 0,4) \text{ Nw}$$



CAPÍTULO 3

Problemas de polinomios e interpolación

3.1. Interpolación polinómica

El polinomio de interpolación de Lagrange de grado 3 viene dado por la expresión:

$$p_3(x) = \sum_{i=0}^3 y_i l_i(x)$$

en donde las funciones cardinales $l_i(x)$ ($0 \leq i \leq 3$) se calculan como:

$$l_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^3 \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

3.2. Ejercicios

Ejercicio 11:

Dado el polinomio $p(x) = x^3 - 2x - 4$



1. Calcular su valor en los puntos $x = 0$, $x = 2$ y $x = 4$.
 2. Calcular su derivada en dichos puntos.
 3. ¿Qué vale $p(x)/(x-2)$?
-

Ejercicio 12:

Dado el polinomio $p(x) = x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 4x + 5$

1. Calcular su valor en los puntos $x = 0$, $x = 0,2$, $x = 0,4$, $x = 0,6$, $x = 0,8$ y $x = 1,0$.
 2. Interpolar la tabla obtenida, utilizando el polinomio interpolador de Lagrange de orden 5.
 3. Interpolar la tabla obtenida, utilizando splines cúbicos.
 4. Comparar los resultados evaluando la interpolación en el punto $x = 0,5$, o representando gráficamente las tres funciones. ¿Cuál de los dos métodos de interpolación da mejores resultados? ¿Por qué?
-

Ejercicio 13:

Dado el polinomio $p(x) = x^3 - 2x - 4$

1. Calcular su valor en los puntos $x = 0$, $x = 2$ y $x = 4$.
 2. Calcular su derivada en dichos puntos.
 3. ¿Qué vale $p(x)/(x-2)$?
-

Ejercicio 14:

Dado el polinomio $p(x) = x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 4x + 5$

1. Calcular su valor en los puntos $x = 0$, $x = 0,2$, $x = 0,4$, $x = 0,6$,
-



$x = 0,8$ y $x = 1,0$.

2. Interpoliar la tabla obtenida, utilizando el polinomio interpolador de Lagrange de orden 5.
3. Interpoliar la tabla obtenida, utilizando splines cúbicos.
4. Comparar los resultados evaluando la interpolación en el punto $x = 0,5$, o representando gráficamente las tres funciones. ¿Cuál de los dos métodos de interpolación da mejores resultados? ¿Por qué?

Ejercicio 15:

En un video-juego de conducción, el modelo del vehículo da información sobre la velocidad en km/h una vez por segundo

t	0	1	2	3	4
v	85	112	98	145	187

Para representar el velocímetro en el panel de mandos es necesario interpoliar esta información.

1. Utiliza el polinomio interpolador de Lagrange para determinar la velocidad en el instante de tiempo $t = 3,7s$.
2. A medida que el tiempo transcurre, la tabla va creciendo. ¿Qué consecuencias tiene esto en la interpolación que se obtiene? ¿Qué estrategia seguirías para evitar el error debido a polinomios de orden muy grande?

Ejercicio 16:

Obtener el valor de la siguiente función tabulada en el punto $x = 2,4$

x	0	0,7	1,4	2,1	2,8
$f(x)$	0,01	0,01	-0,02	-0,01	0,0

1. utilizando el polinomio interpolador de Lagrange.



2. utilizando splines.

Ejercicio 17:

Teniendo en cuenta la siguiente función tabulada:

x_I	1	2	4	5
y_i	2	3	8	13

calcule el valor de la función en el punto $x = 3$ mediante un polinomio de interpolación de Lagrange de grado 3 (interpolación de 4 puntos).

Ejercicio 18:

Dada la siguiente tabla de la función $e^{-2\pi x^2}$:

x	-1.0	-0.75	-0.5	-0.25	0.0	0.25	0.5	0.75	1
y	0.00187	0.02918	0.20788	0.67523	1.0	0.67523	0.20788	0.02918	0.00187

1. Obtener el polinomio de interpolación de Lagrange correspondiente. Calcule el valor de la función en los puntos $x = 0,4$ y $x = 0,9$.
 2. Con ayuda de MATLAB, representar la función tabulada y las aproximaciones obtenidas. ¿Cuál de las dos aproximaciones a la función de parece más acertada? ¿A qué se debe la diferencia?
-

Ejercicio 19:

Para la próxima edición de la Copa América, que se celebrará en nuestra ciudad, una cadena de televisión local ha pedido una aplicación que permita representar la evolución de la carrera con gráficos 3D.



Para representar la velocidad del viento se obtienen datos a razón de diez veces por segundo. Pero para obtener una representación correcta son necesarios más datos. A partir de la siguiente tabla de velocidades del viento

t	0	0,1	0,2	0,3	0,4
$v(t)$	0	1,2	0,4	1,4	1,0

- a) Interpoliar los datos por medio de splines cúbicos.
b) Repetir el ejercicio, añadiendo el punto $t = 0,5$, $v(t) = 1,6$.

Ejercicio 20: Junio de 2004.

Teniendo en cuenta la siguiente función tabulada:

x_i	1	2	4	5
y_i	2	3	8	13

calcule el valor de la función en el punto $x = 3$ mediante un polinomio de interpolación de Lagrange de grado 3 (interpolación de 4 puntos).

Ejercicio 21: Junio de 2005.

Teniendo en cuenta la siguiente función tabulada:

x_i	0.0000	0.5000	1.0000	1.5000
y_i	2.0000	2.3750	2.0000	1.6250

calcule la función en el punto $x = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$ mediante un polinomio de interpolación de Lagrange de grado 3 (interpolación de 4 puntos).

Respuestas

Respuesta al Ejercicio 19



- a) Se trata de una tabla con $n = 4$, por lo que, para resolver el problema, debemos encontrar los valores de los parámetros h_i , b_i , u_i y ν_i . En primer lugar se calculan los valores de h_i y de b_i para $i = 0, 1, 2, 3$. Denotaremos por t_i , $i = 0, 1, 2, 3, 4$, al i -ésimo punto de la tabla, y por y_i al valor de $v(t_i)$.

$$\begin{aligned}
 i = 0 & \begin{cases} h_0 = (t_1 - t_0) = 0,1 \\ b_0 = 6(y_1 - y_0)/h_0 = 6(1,2 - 0)/0,1 = 72 \end{cases} \\
 i = 1 & \begin{cases} h_1 = (t_2 - t_1) = 0,1 \\ b_1 = 6(y_2 - y_1)/h_1 = 6(0,8 - 1,2)/0,1 = -24 \end{cases} \\
 i = 2 & \begin{cases} h_2 = (t_3 - t_2) = 0,1 \\ b_2 = 6(y_3 - y_2)/h_2 = 6(1,4 - 0,8)/0,1 = 36 \end{cases} \\
 i = 3 & \begin{cases} h_3 = (t_4 - t_3) = 0,1 \\ b_3 = 6(y_4 - y_3)/h_3 = 6(1,0 - 1,4)/0,1 = -24 \end{cases}
 \end{aligned}$$

A continuación, se deben obtener los valores de u_i y de ν_i para $i = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned}
 i = 1 & \begin{cases} u_1 = 2(h_0 + h_1) = 0,4 \\ \nu_1 = b_1 - b_0 = -24 - 72 = -96 \end{cases} \\
 i = 2 & \begin{cases} u_2 = 2(h_2 + h_1) - h_1^2/u_1 = 0,4 - 0,01/0,4 = 0,375 \\ \nu_2 = b_2 - b_1 - h_1\nu_1/u_1 = 60 + 9,6/0,4 = 84 \end{cases} \\
 i = 3 & \begin{cases} u_3 = 2(h_3 + h_2) - h_2^2/u_2 = 0,4 - 0,01/0,375 = 0,37\bar{3} \\ \nu_3 = b_3 - b_2 - h_2\nu_2/u_2 = -60 - 8,4/0,375 = -82,4 \end{cases}
 \end{aligned}$$

A partir de estos coeficientes, y tomando $z_0 = 0$ y $z_4 = 0$, puede calcularse el valor de los coeficientes z_i a partir del sistema lineal de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} u_1 & h_1 & 0 \\ h_1 & u_2 & h_2 \\ 0 & h_2 & u_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}$$

que podemos resolver por eliminación gaussiana básica. En nuestro caso

$$\begin{pmatrix} 0,4 & 0,1 & 0 \\ 0,1 & 0,375 & 0,1 \\ 0 & 0,1 & 0,37\bar{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -96 \\ 84 \\ -82,4 \end{pmatrix}$$



- b) La tabla ampliada tiene $n = 5$, pero no es necesario calcular de nuevo todos los valores, ya que podemos aprovechar los parámetros utilizados en el apartado anterior. Para ampliar la tabla con un nuevo punto, deberán calcularse, en primer lugar, h_4 y b_4 , para obtener a continuación u_4 y ν_4

$$i = 4$$

$$\begin{cases} h_4 = (t_5 - t_4) = 0,1 \\ b_4 = 6(y_5 - y_4)/h_0 = 6(1,6 - 1,0)/0,1 = 36 \\ \begin{cases} u_4 = 2(h_4 + h_3) - h_3^2/u_3 = 0,4 - 0,01/0,37\bar{3} = 0,37321 \\ \nu_4 = b_4 - b_3 - h_3\nu_3/u_3 = 60 + 8,24/0,37\bar{3} = 82,07143 \end{cases} \end{cases}$$

A partir de estos coeficientes, se obtiene el sistema lineal de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 0,4 & 0,1 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0,375 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0,37\bar{3} & 0,1 \\ 0 & 0 & 0,1 & 0,37321 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -96 \\ 84 \\ -82,4 \\ 82,1 \end{pmatrix}$$

que podemos resolver por eliminación gaussiana básica para obtener los coeficientes z_i .

Respuesta al Ejercicio 20

Primero calculamos las funciones cardinales en el punto $x = 3$:

$$l_0 = \prod_{j=0, j \neq 0}^3 \frac{(3 - x_j)}{(1 - x_j)} = \frac{(3 - 2)(3 - 4)(3 - 5)}{(1 - 2)(1 - 4)(1 - 5)} = \frac{(1)(-1)(-2)}{(-1)(-3)(-4)} = -\frac{2}{12} = -\frac{1}{6}$$

$$l_1 = \prod_{j=0, j \neq 1}^3 \frac{(3 - x_j)}{(2 - x_j)} = \frac{(3 - 1)(3 - 4)(3 - 5)}{(2 - 1)(2 - 4)(2 - 5)} = \frac{(2)(-1)(-2)}{(1)(-2)(-3)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$l_2 = \prod_{j=0, j \neq 2}^3 \frac{(3 - x_j)}{(4 - x_j)} = \frac{(3 - 1)(3 - 2)(3 - 5)}{(4 - 1)(4 - 2)(4 - 5)} = \frac{(2)(1)(-2)}{(3)(2)(-1)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$l_3 = \prod_{j=0, j \neq 3}^3 \frac{(3 - x_j)}{(5 - x_j)} = \frac{(3 - 1)(3 - 2)(3 - 4)}{(5 - 1)(5 - 2)(5 - 4)} = \frac{(2)(1)(-1)}{(4)(3)(1)} = -\frac{2}{12} = -\frac{1}{6}$$



El polinomio de Lagrange resulta ser:

$$\begin{aligned} p_3(x) &= \sum_{i=0}^3 l_i(x)y_i = l_0y_0 + l_1y_1 + l_2y_2 + l_3y_3 = -\frac{1}{6}2 + \frac{2}{3}3 + \frac{2}{3}8 - \frac{1}{6}13 \\ &= -\frac{2}{6} + \frac{6}{3} + \frac{16}{3} - \frac{13}{6} = \frac{-2 + 12 + 32 - 13}{6} = \frac{29}{6} = 4,8333 \end{aligned}$$

CAPÍTULO 4

Sistemas de ecuaciones lineales

4.1. Resolución de sistemas ecuaciones lineales

La factorización de Doolittle obtiene los términos de las matrices L y U mediante la siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned}l_{kk} &= 1 & (1 \leq k \leq n) \\u_{kk} &= a_{kk} - \sum_{s=1}^{k-1} l_{ks} u_{sk} & (1 \leq k \leq n) \\u_{kj} &= (a_{kj} - \sum_{s=1}^{k-1} l_{ks} u_{sj}) / l_{kk} & (k+1 \leq j \leq n) \\l_{ik} &= (a_{ik} - \sum_{s=1}^{k-1} l_{is} u_{sk}) / u_{kk} & (k+1 \leq i \leq n)\end{aligned}$$

en donde n es el número de filas o columnas de la matriz A .

El método iterativo de Jacobi obtiene los elementos del vector en la iteración (k) a partir de los elementos del vector de la iteración anterior $(k-1)$ empleando la siguiente fórmula:

$$x_i^{(k)} = (b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} x_j^{(k-1)}) / a_{ii}$$

El método iterativo de Gauss-Seidel obtiene los elementos del vector en la iteración (k) a partir de los elementos del vector de la iteración anterior $(k-1)$ empleando la siguiente fórmula:

$$x_i^{(k)} = \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k-1)} \right) / a_{ii}$$



En el método QR, la matriz de Givens (G) que hace cero el elemento a_{ij} de una matriz A ($A' = GA$) es una matriz identidad con los siguientes elementos modificados:

$$\begin{aligned}g_{jj} &= g_{ii} = \cos(\theta) = \frac{a_{jj}}{\sqrt{a_{jj}^2 + a_{ij}^2}} \\g_{ij} &= -g_{ji} = \sin(\theta) = -\frac{a_{ij}}{\sqrt{a_{jj}^2 + a_{ij}^2}}\end{aligned}$$

4.2. Ejercicios

Ejercicio 22:

Considerar la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calcula Ax , para los siguientes vectores x

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad x_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad x_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad x_5 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Considerando cada vector como un punto, representa, por medio de papel cuadriculado o milimetrado cada vector x , y su imagen Ax .

2. ¿Qué observas respecto al valor de la segunda componente?
3. ¿De qué manera puedes aprovechar el comportamiento observado para resolver un sistema de la forma $Ax = b$?
4. Obtén la descomposición QR de la matriz

$$A_0 = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{3} - \frac{1}{2} \\ 1 & 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$



5. Resuelve el sistema de ecuaciones dado por $A_0x = b_0$, donde

$$b_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Ejercicio 23:

Obtener la descomposición LU de las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 24: Septiembre de 2004.

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{pmatrix} 1,0 & 0,2 & 0,4 \\ 0,0 & 1,0 & 0,2 \\ 0,0 & 0,0 & 1,0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,0 \\ 0,0 \\ 0,0 \end{pmatrix}$$

mediante el método iterativo de Jacobi. Realice como máximo 3 iteraciones.

- Utilice el vector $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ como estimación inicial de la solución.

Ejercicio 25: Septiembre de 2004.



Sea el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

1. Resuelva este sistema mediante el método de eliminación gaussiana básica, reduciendolo a un sistema triangular superior equivalente y fácil de resolver.
2. Obtenga la descomposición LU de la matriz de coeficientes aprovechando los pivotes utilizados en el proceso de eliminación gaussiana.

Ejercicio 26: Junio de 2004.

Obtenga la descomposición QR de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 27: Septiembre de 2007.

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones lineales mediante el método de Gauss-Jordan:

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$$



Ejercicio 28: Junio de 2008.

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones lineales mediante el método iterativo de Gauss-Seidel. Realice como máximo 3 iteraciones.

$$\begin{cases} 6x_1 + 2x_2 + x_3 &= 22 \\ -x_1 + 8x_2 + 2x_3 &= 30 \\ x_1 - x_2 + 6x_3 &= 23 \end{cases}$$

- Utilice el vector $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ como estimación inicial de la solución.

Ejercicio 29: Septiembre de 2008.

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones lineales mediante el método iterativo de Gauss-Seidel. Realice como máximo 3 iteraciones.

$$\begin{cases} 8x_1 + x_2 + x_3 &= 10 \\ x_1 + 8x_2 + x_3 &= 10 \\ x_1 + x_2 + 8x_3 &= 10 \end{cases}$$

- Utilice el vector $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ como estimación inicial de la solución.

Ejercicio 30: Junio de 2007.

Sea el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 6 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$$



1. Resuelva este sistema mediante el método de eliminación gaussiana básica, reduciéndolo a un sistema triangular superior equivalente y fácil de resolver.
 2. Obtenga una descomposición LU de la matriz de coeficientes aprovechando los pivotes utilizados en el proceso de eliminación gaussiana.
-

Ejercicio 31:

Obtener la descomposición LU de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 6 & -4 & 3 & 5 \\ 9 & -39 & 27 & 9 \\ 6 & -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

y resolver el sistema de ecuaciones lineales determinado por $Ax = b$, donde b es el vector:

$$b = \begin{pmatrix} 12 \\ 17 \\ 91 \\ -38 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 32:

Resolver el problema anterior, utilizando descomposición QR

Ejercicio 33:

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones, utilizando los métodos de



descomposició LU y de descomposició QR

$$A = \begin{pmatrix} 16 & 8 & 4 \\ 8 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 16 \\ 4 & 1 & 4 \\ 16 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 16 \\ 32 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 34:

Resolver los sistemas del Problema 33 por medio de los métodos iterativos de Jacobi y de Gauss-Seidel.

Ejercicio 35:

Resolver por medio de los métodos iterativos de Jacobi y de Gauss-Seidel el siguiente sistema

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$



Ejercicio 36: Junio de 2005.

Obtenga la descomposición $A = LU$ de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -2 & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{8}{3} & -\frac{1}{3} & -6 \end{pmatrix}$$

mediante la factorización de Doolittle.

Ejercicio 37: Septiembre de 2005.

Obtenga la descomposición $A = QR$ de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -2 & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{8}{3} & -\frac{1}{3} & -6 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 38: Junio de 2006.

Obtenga la descomposición $A = QR$ de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 60 & 48 & -61 \\ 45 & 161 & 173 \\ 100 & 55 & 115 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 39: Septiembre de 2006.

Obtenga la descomposición $A = LU$ de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$



mediante la factorización de Doolittle.

Ejercicio 40: Febrero de 2007.

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{pmatrix} 10 & 2 & 4 \\ 0 & 10 & 2 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mediante el método iterativo de Jacobi. Realice como máximo 3 iteraciones.

Ejercicio 41: Junio de 2007.

Obtenga la descomposición $A = QR$ de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 6 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 42: Septiembre de 2007.

Obtenga la descomposición $A = QR$ de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$



Ejercicio 43: Junio de 2008.

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones $Ax = b$, mediante la descomposición LU (Doolittle) de la matriz de coeficientes A :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 44: Septiembre de 2008.

Obtenga la descomposición $A = QR$ de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Respuestas

Respuesta al Ejercicio 24

Primero escribimos el sistema de ecuaciones de la siguiente forma:

$$\left. \begin{array}{l} 1,0x_1 + 0,2x_2 + 0,4x_3 = 1,0 \\ 0,0x_1 + 1,0x_2 + 0,2x_3 = 0,0 \\ 0,0x_1 + 0,0x_2 + 1,0x_3 = 0,0 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1 = (1,0 - 0,2x_2 - 0,4x_3)/1,0 \\ x_2 = (0,0 - 0,0x_1 - 0,2x_3)/1,0 \\ x_3 = (0,0 - 0,0x_1 - 0,0x_2)/1,0 \end{array} \right\}$$

Partiendo ahora del vector inicial $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = 0,0$, tenemos:

Iteración 1:

$$\left. \begin{array}{l} x_1^{(1)} = (1,0 - 0,2 \cdot 0,0 - 0,4 \cdot 0,0)/1,0 = 1,0 \\ x_2^{(1)} = (0,0 - 0,0 \cdot 0,0 - 0,2 \cdot 0,0)/1,0 = 0,0 \\ x_3^{(1)} = (0,0 - 0,0 \cdot 0,0 - 0,0 \cdot 0,0)/1,0 = 0,0 \end{array} \right\}$$

**Iteración 2:**

$$\left. \begin{aligned} x_1^{(2)} &= (1,0 - 0,2 \cdot 0,0 - 0,4 \cdot 0,0)/1,0 = 1,0 \\ x_2^{(2)} &= (0,0 - 0,0 \cdot 1,0 - 0,2 \cdot 0,0)/1,0 = 0,0 \\ x_3^{(2)} &= (0,0 - 0,0 \cdot 1,0 - 0,0 \cdot 0,0)/1,0 = 0,0 \end{aligned} \right\}$$

Como el vector ya ha convergido, no es necesario realizar más iteraciones. La solución del sistema de ecuaciones lineales es:

$$x_1 = 1,0$$

$$x_2 = 0,0$$

$$x_3 = 0,0$$

Respuesta al Ejercicio 25

Hacemos cero los elementos por debajo de la diagonal multiplicando la fila j por el pivote $P_{ij} = a_{ij}/a_{jj}$ y restandola a la fila i . Aplicamos el mismo proceso también al vector columna de términos independientes:

■ Fila 1:

- $P_{21} = \frac{0}{3} = 0$.

- $P_{31} = \frac{1}{3}$:

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1/3 & -2/3 & -1/3 \\ \hline 0 & 0 & 8/3 & 1/3 & -1/3 \end{array}$$

- $P_{41} = -\frac{1}{3}$:

$$\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 0 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & 1/3 & 2/3 & 1/3 \\ \hline 0 & 1 & 1/3 & -7/3 & 13/3 \end{array}$$

■ Fila 2:

- $P_{32} = \frac{0}{1} = 0$.

- $P_{42} = \frac{1}{1} = 1$:

$$\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1/3 & -7/3 & 13/3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 4/3 & -4/3 & 4/3 \end{array}$$



■ Fila 3:

• $P_{43} = \frac{4/3}{8/3} = \frac{1}{2}$:

$$\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 4/3 & -4/3 & 4/3 \\ 0 & 0 & -4/3 & -1/6 & 1/6 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -3/2 & 3/2 \end{array}$$

El sistema queda en la forma:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 8/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & -3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1/3 \\ 3/2 \end{pmatrix}$$

que se resuelve por substitución regresiva para dar:

$$x_4 = -1 \quad x_3 = 0 \quad x_2 = 2 \quad x_1 = 1$$

La matriz L se construye utilizando los pivotes y resulta:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1 & 0 \\ -1/3 & 1 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Respuesta al Ejercicio 26

Primer paso. Construimos la matriz de Givens que hace cero el elemento $a_{21} = -\sqrt{2}$:

$$\cos(\theta) = \frac{a_{11}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{2})^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin(\theta) = -\frac{a_{21}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2}} = -\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{(\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{2})^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$G_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Multiplicando G_1 por A , obtenemos:

$$A_1 = G_1 A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{2}} \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Segundo paso. Puesto que el elemento a_{21} ya es cero, construimos la matriz de Givens que hace cero el elemento $a_{32} = -1$ de A_1 :

$$\begin{aligned} \cos(\theta) &= \frac{a_{22}}{\sqrt{a_{22}^2 + a_{32}^2}} = \frac{2/\sqrt{2}}{\sqrt{(2/\sqrt{2})^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \sin(\theta) &= -\frac{a_{32}}{\sqrt{a_{22}^2 + a_{32}^2}} = -\frac{-1}{\sqrt{(2/\sqrt{2})^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ G_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Multiplicando G_2 por A_1 , obtenemos:

$$A_2 = G_2 A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{2}} \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{\sqrt{12}} & \frac{2}{\sqrt{12}} \\ 0 & 0 & \frac{4}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = R$$

Para obtener Q , multiplicamos las matrices de Givens traspuestas:

$$Q = G_1^T G_2^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

Respuesta al Ejercicio 30

- (a) Aplicamos el método de eliminación gaussiana básica. Elegimos el primer pivote $p_{21} = a_{21}/a_{11} = 6/3 = 2$, multiplicamos la fila 2 por el pivote y restamos el resultado a la fila 1. Después multiplicamos la fila



3 por el pivote $p_{31} = a_{31}/a_{11} = 3/3 = 1$, y restamos el resultado a la fila 1,

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 6 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Ahora multiplicamos la fila 3 por el pivote $p_{32} = a_{32}/a_{22} = 2/1 = 2$ y restamos el resultado a la fila 2,

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 6 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Aplicando ahora el procedimiento de sustitución regresiva, obtenemos:

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(b) La matriz U es:

$$U = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 6 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

y la matriz L es:

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ p_{21} & 1 & 0 \\ p_{31} & p_{32} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Respuesta al Ejercicio 36

Utilizando las fórmulas de la factorización de Doolittle, construimos la siguiente tabla:



$k = 1$	$l_{11} = 1$ $u_{11} = a_{11} = 4$ $j = 2$ $u_{12} = a_{12}/l_{11} = 1/1 = 1$ $i = 2$ $l_{21} = a_{21}/u_{11} = -2/4 = -1/2$ $j = 3$ $u_{13} = a_{13}/l_{11} = -1/1 = -1$ $i = 3$ $l_{31} = a_{31}/u_{11} = (8/3)/4 = 2/3$
$k = 2$	$l_{22} = 1$ $u_{22} = (a_{22} - l_{21}u_{12})/l_{22} = (5/2 - (-1/2)1)/1 = 3$ $j = 3$ $u_{23} = (a_{23} - l_{21}u_{13})/l_{22} = (-3/2 - (-1/2)(-1))/1 = -2$ $i = 3$ $l_{32} = (a_{32} - l_{31}u_{12})/u_{22} = ((-1/3) - (2/3)1)/3 = -1/3$
$k = 3$	$l_{33} = 1$ $u_{33} = (a_{33} - l_{31}u_{13} - l_{32}u_{23})/l_{33} = (-6 - (2/3)(-1) - (-1/3)(-2))/1 = -6$

Ahora sólo queda construir las matrices utilizando los términos calculados:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}; \quad U = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

Respuesta al Ejercicio 37

1. Hacemos cero el elemento $a_{21} = -2,000000$:

$$G_1(2, 1, \theta) = \begin{pmatrix} 0,894427 & -0,447214 & 0,000000 \\ 0,447214 & 0,894427 & 0,000000 \\ 0,000000 & 0,000000 & 1,000000 \end{pmatrix}$$

De donde:

$$A_1 = G_1 A = \begin{pmatrix} 0,894427 & -0,447214 & 0,000000 \\ 0,447214 & 0,894427 & 0,000000 \\ 0,000000 & 0,000000 & 1,000000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ q & -2 & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{8}{3} & -\frac{1}{3} & -6 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 4,472136 & -0,223607 & -0,223607 \\ 0,000000 & 2,683282 & -1,788854 \\ 2,666667 & -0,333333 & -6,000000 \end{pmatrix}$$



2. Hacemos cero el elemento $a_{31} = 2,666667$:

$$G_2(3, 1, \theta) = \begin{pmatrix} 0,858898 & 0,000000 & 0,512148 \\ 0,000000 & 1,000000 & 0,000000 \\ -0,512148 & 0,000000 & 0,858898 \end{pmatrix}$$

De donde:

$$A_2 = G_2 A_1 = \begin{pmatrix} 5,206833 & -0,362771 & -3,264940 \\ 0,000000 & 2,683282 & -1,788854 \\ 0,000000 & -0,171780 & -5,038865 \end{pmatrix}$$

3. Hacemos cero el elemento $a_{32} = 2,666667$:

$$G_3(2, 3, \theta) = \begin{pmatrix} 1,000000 & 0,000000 & 0,000000 \\ 0,000000 & 0,997957 & -0,063888 \\ 0,000000 & 0,063888 & 0,997957 \end{pmatrix}$$

De donde:

$$A_3 = G_3 A_2 = \begin{pmatrix} 5,206833 & -0,362771 & -3,264940 \\ 0,000000 & 2,688774 & -1,463279 \\ 0,000000 & 0,000000 & -5,142857 \end{pmatrix} = R$$

4. Por último calculamos Q como:

$$Q = G_1^T G_2^T G_3^T = \begin{pmatrix} 0,768221 & 0,475566 & -0,428571 \\ -0,384111 & 0,877967 & 0,285714 \\ 0,512148 & -0,054873 & 0,857143 \end{pmatrix}$$

Respuesta al Ejercicio 38

Llevaremos a cabo la descomposición QR siguiendo los siguientes pasos:

1. Construimos la matriz de Givens que hace cero el elemento a_{21} rotando alrededor del elemento a_{11} :

$$G(2, 1, \theta) = \begin{pmatrix} 0,800 & 0,600 & 0,000 \\ -0,600 & 0,800 & 0,000 \\ 0,000 & 0,000 & 1,000 \end{pmatrix}$$



Con esta matriz calculamos:

$$R_1 = G(2, 1, \theta)A = \begin{pmatrix} 75,000 & 135,000 & 55,000 \\ 0,000 & 100,000 & 175,000 \\ 100,000 & 55,000 & 115,000 \end{pmatrix}$$

$$Q_1 = G(2, 1, \theta)^* = \begin{pmatrix} 0,800 & -0,600 & 0,000 \\ 0,600 & 0,800 & 0,000 \\ 0,000 & 0,000 & 1,000 \end{pmatrix}$$

2. Construimos la matriz de Givens que hace cero el elemento a_{31} rotando alrededor del elemento a_{11} :

$$G(3, 1, \theta) = \begin{pmatrix} 0,600 & 0,000 & 0,800 \\ 0,000 & 1,000 & 0,000 \\ -0,800 & 0,000 & 0,600 \end{pmatrix}$$

Con esta matriz calculamos:

$$R_2 = G(3, 1, \theta)R_1 = \begin{pmatrix} 125,000 & 125,000 & 125,000 \\ 0,000 & 100,000 & 175,000 \\ 0,000 & -75,000 & 25,000 \end{pmatrix}$$

$$Q_2 = Q_1G(3, 1, \theta)^* = \begin{pmatrix} 0,480 & -0,600 & -0,640 \\ 0,360 & 0,800 & -0,480 \\ 0,800 & 0,000 & 0,600 \end{pmatrix}$$

3. Por último, hacemos cero el elemento a_{23} rotando alrededor del elemento a_{22} :

$$G(3, 2, \theta) = \begin{pmatrix} 1,000 & 0,000 & 0,000 \\ 0,000 & 0,800 & -0,600 \\ 0,000 & 0,600 & 0,800 \end{pmatrix}$$

Con esta matriz calculamos:

$$\underline{R} = G(3, 2, \theta)R_2 = \begin{pmatrix} 125,000 & 125,000 & 125,000 \\ 0,000 & 125,000 & 125,000 \\ 0,000 & 0,000 & 125,000 \end{pmatrix}$$

$$\underline{Q} = Q_2G(3, 2, \theta)^* = \begin{pmatrix} 0,480 & -0,096 & -0,872 \\ 0,360 & 0,928 & 0,096 \\ 0,800 & -0,360 & 0,480 \end{pmatrix}$$

**Respuesta al Ejercicio 39**

$(k = 1)$		$l_{11} = 1$ $u_{11} = a_{11} - \sum_{s=1}^0 l_{1s}u_{s1} = 2$ $(j = 2) \quad u_{12} = (a_{12} - \sum_{s=1}^0 l_{1s}u_{s2})/l_{11} = \frac{a_{12}}{l_{11}} = \frac{1}{1} = 1$ $(j = 3) \quad u_{13} = (a_{13} - \sum_{s=1}^0 l_{1s}u_{s3})/l_{11} = \frac{a_{13}}{l_{11}} = \frac{0}{1} = 0$ $(i = 2) \quad l_{21} = (a_{21} - \sum_{s=1}^0 l_{2s}u_{s1})/u_{11} = \frac{a_{21}}{u_{11}} = \frac{0}{2} = 0$ $(i = 3) \quad l_{31} = (a_{31} - \sum_{s=1}^0 l_{3s}u_{s1})/u_{11} = \frac{a_{31}}{u_{11}} = \frac{2}{2} = 1$
$(k = 2)$		$l_{22} = 1$ $u_{22} = a_{22} - \sum_{s=1}^1 l_{2s}u_{s2} = a_{22} - l_{21}u_{12} = 3 - 0 \cdot 1 = 3$ $(j = 3) \quad u_{23} = a_{23} - \sum_{s=1}^1 l_{2s}u_{s3} = a_{23} - l_{21}u_{13} = 1 - 0 \cdot 0 = 1$ $(i = 3) \quad l_{32} = (a_{32} - \sum_{s=1}^1 l_{3s}u_{s2})/u_{22} = \frac{a_{32} - l_{31}u_{12}}{u_{22}} = \frac{4 - 1 \cdot 1}{3} = 1$
$(k = 3)$		$l_{33} = 1$ $u_{33} = a_{33} - \sum_{s=1}^2 l_{3s}u_{s3} = a_{33} - l_{31}u_{13} - l_{32}u_{23} = 5 - 1 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = 4$

Por lo que finalmente tenemos:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Respuesta al Ejercicio 41

Llevaremos a cabo la descomposición QR siguiendo los siguientes pasos:

1. Construimos la matriz de Givens que hace cero el elemento a_{21} rotando alrededor del elemento a_{11} :

$$G(2, 1, \theta_1) = \begin{pmatrix} 0,4472 & 0,8944 & 0,0000 \\ -0,8944 & 0,4472 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 1,0000 \end{pmatrix}$$

Con esta matriz calculamos:

$$R_1 = G(2, 1, \theta_1)A = \begin{pmatrix} 6,7082 & 3,1305 & -0,4472 \\ 0,0000 & 0,4472 & 0,8944 \\ 3,0000 & 3,0000 & 5,0000 \end{pmatrix}$$



2. Construimos la matriz de Givens que hace cero el elemento a_{31} rotando alrededor del elemento a_{11} :

$$G(3, 1, \theta_2) = \begin{pmatrix} 0,9129 & 0,0000 & 0,4082 \\ 0,0000 & 1,0000 & 0,0000 \\ -0,4082 & 0,0000 & 0,9129 \end{pmatrix}$$

Con esta matriz calculamos:

$$R_2 = G(3, 1, \theta_2)R_1 = \begin{pmatrix} 7,3485 & 4,0825 & 1,6330 \\ 0,0000 & 0,4472 & 0,8944 \\ 0,0000 & 1,4606 & 4,7469 \end{pmatrix}$$

3. Por último, hacemos cero el elemento a_{32} rotando alrededor del elemento a_{22} :

$$G(3, 2, \theta_3) = \begin{pmatrix} 1,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,2928 & 0,9562 \\ 0,0000 & -0,9562 & 0,2928 \end{pmatrix}$$

Con esta matriz calculamos:

$$\boxed{R} = G(3, 2, \theta_3)R_2 = \begin{pmatrix} 7,3485 & 4,0825 & 1,6330 \\ 0,0000 & 1,5275 & 4,8008 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,5345 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{Q} = G(2, 1, \theta_1)^* \cdot G(3, 1, \theta_2)^* \cdot G(3, 2, \theta_3)^* = \begin{pmatrix} 0,4082 & -0,4364 & 0,8018 \\ 0,8165 & -0,2182 & -0,5345 \\ 0,4082 & 0,8729 & 0,2673 \end{pmatrix}$$



CAPÍTULO 5

Problemas de cálculo de ceros de funciones

5.1. Métodos iterativos

El método iterativo de Steffensen se basa en la siguiente fórmula de recurrencia:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{[f(x_n)]^2}{f(x_n + f(x_n)) - f(x_n)}$$

El método iterativo de Newton se basa en la siguiente fórmula de recurrencia:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

5.2. Ejercicios

Ejercicio 45:

Sea la función:

$$f(x) = \frac{e^x}{x} - 4x$$



1. Dibuja aproximadamente la gráfica en el intervalo $[0, 2]$.
 2. Obtén la raíz de $f(x)$ en ese intervalo con un error absoluto menor de 0,05, utilizando el método de la bisección.
 3. Obtén una aproximación a la raíz con el método de Steffensen, utilizando como iterado inicial $x_o = 0$.
 4. Obtén una aproximación a la raíz con el método de Steffensen, utilizando como iterado inicial $x_o = 2$.
 5. ¿Qué diferencia observas en las dos sucesiones de aproximaciones?
-

Ejercicio 46:

Utilizando el método iterativo de Newton, encontrar la única raíz real del polinomio

$$p(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 2$$

partiendo del punto $x_o = 0$. Realiza sólo las tres primeras iteraciones, y calcula la convergencia (el valor absoluto de la función $|p(x_i)|$ en cada punto obtenido) en cada iteración.

Ejercicio 47:

Utilizando el método iterativo de Steffensen, encontrar la única raíz real del polinomio

$$p(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 2$$

partiendo del punto $x_o = 0,5$. Realiza sólo las tres primeras iteraciones, y calcula la convergencia (el valor absoluto de la función $|p(x_i)|$ en cada punto obtenido) en cada iteración.



A partir de los resultados del ejercicio anterior ¿te parece razonable el comportamiento de este método?

Ejercicio 48:

Completa la tabla con las del método iterativo de Newton, para encontrar una raíz real de las siguientes funciones

- $f(x) = x^2$
- $f(x) = x^4$
- $f(x) = \sin(\pi/4x)$

partiendo en todos ellos del punto $x_o = 1$. Realiza sólo las tres primeras iteraciones, y calcula la convergencia (el valor absoluto de la función $|p(x_i)|$ en cada punto obtenido) en cada iteración.

i	x_i	x_i^2	x_i	x_i^4	x_i	$\sin(x_i)$
1	1	1	1	1	1	$\sqrt{2}/2$
2						
3						
4						
5						
6						
7						
8						
9						
10						

En todos los casos ¿la convergencia tiene la misma velocidad?

Ejercicio 49:



El tiempo que el monoplaza de Fernando Alonso tarda en dar una vuelta al circuito de Indianapolis, con neumáticos nuevos y 25 kg de gasolina, depende de la carga aerodinámica del mismo. Si la carga aerodinámica es muy alta, el rozamiento le frena, aumentando su tiempo por vuelta. Por otra parte, si la carga aerodinámica es baja, el coche pierde tracción en la parte lenta del circuito, obligándole a conducir más despacio. Fernando Alonso tarda en dar una vuelta 1m9.027s más una penalización P que depende del coeficiente de carga aerodinámica $c > 0$, que viene dada por la expresión

$$P(c) = 3,14c^3 - 2,98c + 2,165$$

Es decir, el tiempo en segundos que tarda Alonso en dar la vuelta es

$$t = 69,027 + P(c) = 69,027 + 3,14c^3 - 2,98c + 2,165$$

Con el fin de decidir el mejor valor de c , los ingenieros de McLaren calculan el valor en el que $P(c)$ es mínimo. Para ello, calculan la derivada de $P(c)$,

$$P'(c) = 9,42c^2 - 2,98$$

y averiguan en que punto c_o se anula:

$$P'(c_o) = 0$$

En ese punto $P(c)$ alcanza un valor mínimo (si $P'(c_o) > 0$) o máximo (si $P'(c_o) < 0$).

1. Utilizando el método de Newton, determina el valor óptimo de la carga aerodinámica.
2. ¿Podrá Alonso mejorar el tiempo del circuito conseguido por Rubens Barrichello en 2004, fijado en 1m 10.399s?

Ejercicio 50:

Considérese la función $f(x) = x^2 + \frac{x}{3} - 1$ en el intervalo $[0, 3]$,



1. Por medio del método de la bisección, encontrar una sucesión de intervalos, con longitud decreciente, que contenga un punto x_o que cumpla que $f(x_o) = 0$. Dar una estimación del valor del punto x_o con un error absoluto menor que 0.02.
2. Por medio del método de Steffensen, determinar el valor de la misma raíz con un error absoluto menor que 0.001. Utilizar como iterado inicial $x = 3$.

Ejercicio 51: Sept. 2003.

Sea la función:

$$f(x) = \frac{e^x}{x} - 4x$$

- Dibuje aproximadamente la gráfica en el intervalo $[0, 2]$.
- Obtenga la raíz de $f(x)$ en ese intervalo con un error absoluto menor de 0,05 usando el método de la bisección.

Ejercicio 52: Junio de 2005.

Utilizando el método iterativo de Newton, encuentre la única raíz real del polinomio $p(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 2$ partiendo del punto $x_0 = 0$. Realice sólo las tres primeras iteraciones y calcule la convergencia en cada punto.

Ejercicio 53: Septiembre de 2005.

Utilizando el método iterativo de Steffensen, encuentre la única raíz real del polinomio $p(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 2$ partiendo del punto $x_0 = 0,5$. Realice



sólo las tres primeras iteraciones ($0 \leq n \leq 3$) y calcule la convergencia en cada punto.

Ejercicio 54: Septiembre de 2006.

Encuentre la única raíz real de la función $f(x) = xe^x - 1$ mediante el método iterativo de Newton. En el proceso iterativo utilice el valor inicial $x_0 = 0$ y realice sólo las primeras cinco iteraciones.

Ejercicio 55: Septiembre de 2007.

Utilizando el método iterativo de Newton, encuentre la única raíz real del polinomio $p(x) = x^3 - 2x^2 + x + 2$ partiendo del punto $x_0 = \frac{3}{2}$. Realice sólo las cuatro primeras iteraciones y calcule la convergencia en cada punto.

Ejercicio 56: Junio de 2008.

Utilizando el método iterativo de Newton, encuentre la única raíz de la ecuación:

$$f(x) = M + e \sin(x) - x$$

en donde $M = 1,2$ y $e = 0,205635$ partiendo del punto $x_0 = M$. Itere hasta que el valor absoluto de $f(x)$ sea inferior a 10^{-8} .

Ejercicio 57: Septiembre de 2008.

Utilizando el método iterativo de Newton, encuentre la única raíz del



polinomio:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$$

partiendo del punto $x_0 = 0$. Realice sólo las cuatro primeras iteraciones y calcule la convergencia en cada punto.

Respuestas

Respuesta al Ejercicio 52

De acuerdo con la fórmula de Newton y teniendo en cuenta que $p'(x) = 3x^2 - 6x + 2$, tenemos:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{p(x_n)}{p'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^3 - 3x_n^2 + 2x_n + 2}{3x_n^2 - 6x_n + 2}$$

La convergencia en un punto n de la iteración se obtiene como $|f(x_n)|$ (valor absoluto de la función en el punto de iteración).

Por tanto, y partiendo del punto $n = 0$ con $x_0 = 0$, podemos construir la siguiente tabla:

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	x_{n+1}	$ f(x_{n+1}) $
0	0.0000	2.0000	2.0000	-1.0000	4.0000
1	-1.0000	-4.0000	11.0000	-0.6364	0.7453
2	-0.6364	-0.7453	7.0331	-0.5304	0.0539
3	-0.5304	-0.0539	6.0263	-0.5214	0.0004

Respuesta al Ejercicio 53

De acuerdo con el método de Steffensen, construimos la siguiente tabla:

i	x_i	$f(x_0)$	$f(x_0 + f(x_0))$	x_{i+1}	$ f(x_{i+1}) $
0	0.500000	2.375000	6.716797	-0.799145	2.02
1	-0.799145	-2.024551	-50.081240	-0.713854	1.32
2	-0.713854	-1.320243	-22.897044	-0.633071	0.72
3	-0.633071	-0.722200	-8.710134	-0.567776	0.29



CAPÍTULO 6

Integración numérica

6.1. Métodos de integración y diferenciación numérica

La **regla del trapecio** utiliza la siguiente expresión para obtener un valor aproximado de la integral definida entre dos puntos a y b :

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)]$$

Si el intervalo de integración $[a, b]$ está subdividido en n subintervalos $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ equiespaciados, entonces la **regla compuesta del trapecio** toma la forma:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2} \left[f(a) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b) \right]$$

en donde $h = (b - a)/n$ es la separación entre dos puntos consecutivos.

El **método de Simpson** utiliza la siguiente expresión para obtener un valor aproximado de la integral definida entre dos puntos a y b :

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \frac{b-a}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right]$$

en donde $f(\frac{a+b}{2})$ es el valor de la función en el punto medio entre a y b .



Si el intervalo de integraci3n $[x_0, x_n]$ se divide en un nùmero par, n , de subintervalos equiespaciados (de anchura h), la **regla compuesta de Simpson** utiliza la siguiente expresi3n para obtener un valor aproximado de la integral definida en dicho intervalo:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx \simeq \frac{h}{3} \left[f(x_0) + 2 \sum_{i=2}^{n/2} f(x_{2i-2}) + 4 \sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i-1}) + f(x_n) \right]$$

La derivaci3n numérica de una funci3n $f(x)$ en un punto x_0 mediante la extrapolaci3n de Richardson se basa en el càlculo recursivo del término:

$$D(n, k) = \frac{4^k}{4^k - 1} D(n, k - 1) - \frac{1}{4^k - 1} D(n - 1, k - 1)$$

siendo:

$$D(n, 0) = \varphi\left(\frac{h}{2^n}\right)$$

y

$$\varphi(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}$$

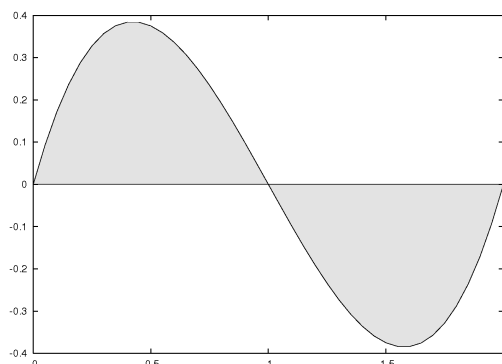
6.2. Ejercicios

Ejercicio 58:

Considérese la siguiente tabla

x	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0
$f(x)$	0.0	0.375	0.0	-0.375	0.0

con valores de una funci3n $f(x)$, cuya gràfica se muestra a continuaci3n



Calcular el área sombreada por medio de la regla de Simpson, teniendo en cuenta que el área bajo la gráfica de una función en un intervalo $[a, b]$, viene dada por la integral

$$A = \int_a^b |f(x)| dx$$

Ejercicio 59: Septiembre de 2004.

Teniendo en cuenta la siguiente función tabulada:

i	x_i	$f(x_i)$	i	x_i	$f(x_i)$
0	0.0000	1.0000	6	3.0000	0.7285
1	0.5000	1.1505	7	3.5000	0.4516
2	1.0000	1.2517	8	4.0000	0.2083
3	1.5000	1.2655	9	4.5000	0.0473
4	2.0000	1.1743	10	5.0000	0.0011
5	2.5000	0.9852			

calcule mediante la regla compuesta del trapecio la integral $\int_a^b f(x) dx$ (con $a = x_0$ y $b = x_{10}$).

Ejercicio 60: Junio de 2005.



Obtenga la derivada del polinomio $p(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 2$ en el punto $x_0 = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}$ mediante el método de diferenciación numérica de Richardson calculando el término $D(3, 2)$ y utilizando un valor del paso $h = 0,05$. Compare el resultado con el valor $p'(1 + \frac{1}{\sqrt{3}})$ obtenido utilizando la derivada analítica del polinomio $p(x)$.

Ejercicio 61: Septiembre de 2005.

Teniendo en cuenta la siguiente función tabulada:

i	x_i	$f(x_i)$	i	x_i	$f(x_i)$
0	0.00	0.00	11	1.10	0.11
1	0.10	-0.09	12	1.20	0.24
2	0.20	-0.16	13	1.30	0.39
3	0.30	-0.21	14	1.40	0.56
4	0.40	-0.24	15	1.50	0.75
5	0.50	-0.25	16	1.60	0.96
6	0.60	-0.24	17	1.70	1.19
7	0.70	-0.21	18	1.80	1.44
8	0.80	-0.16	19	1.90	1.71
9	0.90	-0.09	20	2.00	2.00
10	1.00	0.00			

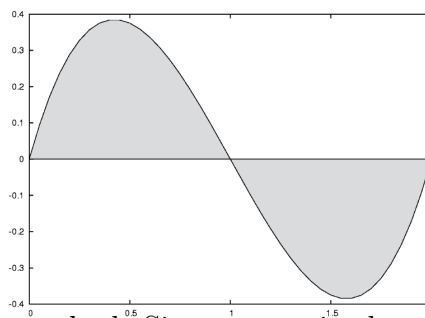
calcule mediante la regla compuesta del trapecio la integral $\int_a^b f(x)dx$ (con $a = x_0$ y $b = x_{20}$).

Ejercicio 62: Junio de 2006.

Considérese la siguiente tabla con valores de una función $f(x)$ y su representación gráfica



x	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0
$f(x)$	0.0	0.375	0.0	-0.375	0.0



Calcule el área sombreada por medio de la regla de Simpson, teniendo en cuenta que el área bajo la gráfica de una función en un intervalo $[a, b]$, viene dada por la integral

$$A = \int_a^b |f(x)| dx$$

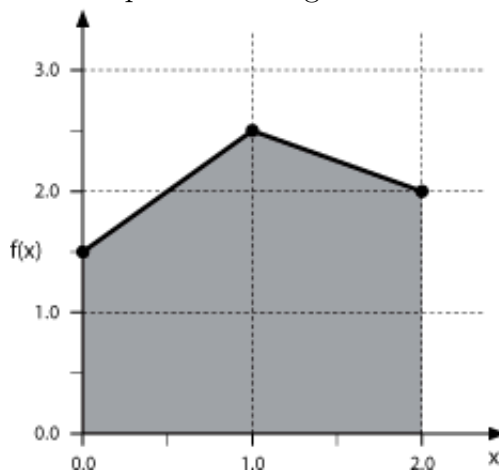
Ejercicio 63: Septiembre de 2003.

A partir de la siguiente función tabulada:

x	0.0	1.0	2.0
$f(x)$	1.5	2.5	2.0

calcule numéricamente la integral definida $I = \int_0^2 f(x) dx$ empleando la regla del trapecio y la regla de Simpson.

Teniendo en cuenta la representación gráfica de la función $f(x)$:





justifique cuál de los dos métodos utilizados en el apartado anterior es más exacto.

Respuestas

Respuesta al Ejercicio 59

De acuerdo con los datos tabulados, el número de subintervalos es $n = 10$ y $h = 0,5$, por lo que podemos escribir:

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx &\simeq \frac{0,5}{3} \left[f(x_0) + 2 \sum_{i=2}^5 f(x_{2i-2}) + 4 \sum_{i=1}^5 f(x_{2i-1}) + f(x_{10}) \right] = \\ &= \frac{0,5}{3} [f(x_0) + 2(f(x_2) + f(x_4) + f(x_6) + f(x_8)) + \\ &\quad + 4(f(x_1) + f(x_3) + f(x_5) + f(x_7) + f(x_9)) + f(x_{10})] = \\ &= \frac{0,5}{3} [1,0000 + 2(1,2517 + 1,1743 + 0,7285 + 0,2083) + \\ &\quad + 4(1,1505 + 1,2655 + 0,9852 + 0,4516 + 0,0473) + 0,0011] = \\ &= \frac{0,5}{3} [1,0000 + 2 \cdot 3,3628 + 4 \cdot 3,9001 + 0,0011] = 3,8878\end{aligned}$$

Respuesta al Ejercicio 60

De acuerdo con la expresión recursiva utilizada en la extrapolación de Richardson, podemos escribir:

$$D(3, 2) = \frac{4^2}{4^2 - 1} D(3, 1) - \frac{1}{4^2 - 1} D(2, 1) = \frac{16}{15} D(3, 1) - \frac{1}{15} D(2, 1) \quad (6.1)$$

Para calcular los términos $D(3, 1)$ y $D(2, 1)$ volvemos a utilizar la expresión de Richardson:

$$\begin{aligned}D(3, 1) &= \frac{4^1}{4^1 - 1} D(3, 0) - \frac{1}{4^1 - 1} D(2, 0) = \frac{4}{3} D(3, 0) - \frac{1}{3} D(2, 0) \\ D(2, 1) &= \frac{4^1}{4^1 - 1} D(2, 0) - \frac{1}{4^1 - 1} D(1, 0) = \frac{4}{3} D(2, 0) - \frac{1}{3} D(1, 0)\end{aligned} \quad (6.2)$$



Ahora sólo queda calcular los términos $D(N, 0)$ para $N = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned} D(1, 0) &= \varphi\left(\frac{h}{2^1}\right) = \frac{p(x_0+h/2)-p(x_0-h/2)}{2h/2} = \left\{ \begin{array}{l} p\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{0,05}{2}\right) = 1,61619798 \\ p\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{0,05}{2}\right) = 1,61616673 \end{array} \right\} = \\ &= \frac{(1,61619798-1,61616673)}{0,05} = 6,2500 \cdot 10^{-4} \\ D(2, 0) &= \varphi\left(\frac{h}{2^2}\right) = \frac{p(x_0+h/4)-p(x_0-h/4)}{2h/4} = \left\{ \begin{array}{l} p\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{0,05}{4}\right) = 1,61537241 \\ p\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{0,05}{4}\right) = 1,61536850 \end{array} \right\} = \\ &= \frac{(1,61537241-1,61536850)}{0,05/2} = 1,5625 \cdot 10^{-4} \\ D(3, 0) &= \varphi\left(\frac{h}{2^3}\right) = \frac{p(x_0+h/8)-p(x_0-h/8)}{2h/8} = \left\{ \begin{array}{l} p\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{0,05}{8}\right) = 1,61516772 \\ p\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{0,05}{8}\right) = 1,61516723 \end{array} \right\} = \\ &= \frac{(1,61516772-1,61516723)}{0,05/4} = 3,9200 \cdot 10^{-5} \end{aligned}$$

Sustituyendo valores en (6.2), obtenemos:

$$\begin{aligned} D(3, 1) &= \frac{4}{3}D(3, 0) - \frac{1}{3}D(2, 0) = \frac{4}{3}(3,9063 \cdot 10^{-5}) - \frac{1}{3}(1,5625 \cdot 10^{-4}) = 1,8333 \cdot 10^{-7} \\ D(2, 1) &= \frac{4}{3}D(2, 0) - \frac{1}{3}D(1, 0) = \frac{4}{3}(1,5625 \cdot 10^{-4}) - \frac{1}{3}(6,2500 \cdot 10^{-4}) = 0,0000 \end{aligned}$$

Por último, sustituyendo en (6.1), obtenemos:

$$D(3, 2) = \frac{16}{15}D(3, 1) - \frac{1}{15}D(2, 1) = \frac{16}{15}(1,8333 \cdot 10^{-7}) - \frac{1}{15}(0,0000) = \underline{1,9555 \cdot 10^{-7}}$$

Utilizando la expresión analítica para la derivada del polinomio $p(x)$, obtenemos:

$$p'(x) = 3x^2 - 6x + 2 \quad (6.3)$$

y sustituyendo $x_0 = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}$ en la ecuación (6.3), obtenemos:

$$\begin{aligned} p'(x_0) &= 3\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - 6\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + 2 = 3\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{2}{\sqrt{3}}\right) - 6\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + 2 = \\ &= 3 + \frac{3}{3} + \frac{6}{\sqrt{3}} - 6 - \frac{6}{\sqrt{3}} + 2 = 6 - 6 = \underline{0} \end{aligned}$$

Resultado del que se deduce que el término $D(3, 2)$ de la extrapolación de Richardson con $h = 0,05$ proporciona una estimación de la derivada del polinomio en el punto x_0 con un error $\epsilon < 10^{-6}$.

Respuesta al Ejercicio 61



De acuerdo con la fórmula de la regla compuesta del trapecio, calculamos:

$$\begin{aligned}f(a) = f(x_0) &= 0,00 \\f(b) = f(x_{20}) &= 2,00 \\ \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) &= 5,70\end{aligned}$$

y sustituyendo, tenemos:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2} \left[f(a) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b) \right] = \frac{0,1}{2} [0,00 + 2,0 \cdot 5,70 + 2,00] = 0,67$$

Respuesta al Ejercicio 62

A partir de los datos de la tabla, sabemos que $n = 4$ y $h = 0,5$, por lo que podemos escribir:

$$\begin{aligned}\int_a^b |f(x)|dx &\simeq \frac{0,5}{3} [|f(a)| + 2 \sum_{i=2}^2 |f(x_{2i-2})| + 4 \sum_{i=1}^2 |f(x_{2i-1})| + |f(b)|] = \\&= \frac{0,5}{3} [|f(a)| + 2(|f(x_2)|) + 4(|f(x_1)| + |f(x_3)|) + |f(b)|] = \\&= \frac{0,5}{3} [0,000 + 2(0,000) + 4(0,375 + 0,375) + 0,000] = 0,5000\end{aligned}$$

CAPÍTULO 7

Problemas de ecuaciones diferenciales

7.1. Ejercicios

Ejercicio 64:

Resolver la siguiente ecuación diferencial

$$(4xy + 2y)y' + (2x + 2y^2) = 0$$

¿Cuál es la solución si $y(0) = 2$?

¿Y si $y(0) = -2$?

Ejercicio 65:

Contestar a las siguientes cuestiones:

1. Resolver la siguiente ecuación diferencial

$$y^{(4)} - y = 2e^x(\cos x - \sin x)$$



Posible ayuda: Desarrollar el polinomio $p(t) = (x - 1)(x + 1)(x - i)(x + i)$.

2. Resolver el siguiente problema de condiciones iniciales

$$y' - 2yx = 0; \quad y(0) = 1$$

3. Dada una ecuación diferencial lineal de segundo orden homogénea, ¿qué hace falta para que la función $y(x) = x^2 e^x$ forme parte de la solución general? Razone su respuesta.
4. NO RESUELVA LA SIGUIENTE ECUACIÓN DIFERENCIAL. Sólo diga si es una ecuación diferencial homogénea.

$$(x^2 + y^2)dx + x^2 y^2 dy = 0$$

Ejercicio 66:

Contestar a las siguientes cuestiones:

1. Resolver la siguiente ecuación diferencial

$$y''' - 3y' + 2y = 6x - 2x^2$$

Posible ayuda: Desarrollar el polinomio $p(t) = (x + 2)(x - 1)^2$.

2. Resolver el siguiente problema de condiciones iniciales

$$(x + y)dy - ydx = 0; \quad y(0) = 1$$

3. Dada una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes homogénea, ¿es posible que la función $y(x) = x^2 e^{-x}$ forme parte de la solución general? ¿Qué debe cumplir la ecuación diferencial? Razone adecuadamente su respuesta.



4. **NO RESUELVA LA SIGUIENTE ECUACIÓN DIFERENCIAL.** Sólo indique, razonadamente, si es una ecuación diferencial exacta.

$$(3x^2y + x + y)dx + (x^3 + y^2 + x)dy = 0$$

Ejercicio 67:

Contestar a las siguientes cuestiones:

1. Compruebe que si la función $y(x)$ es solución de la ecuación homogénea

$$y''(x) - 6y'(x) + 9y(x) = 0$$

y $\varphi(x)$ es solución de la ecuación no homogénea

$$y''(x) - 6y'(x) + 9y(x) = f(x),$$

entonces $\phi(x) = y(x) + \varphi(x)$ también es solución de la ecuación no homogénea.

2. Resuelva la siguiente ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes no homogénea:

$$y'' - 6y' + 9y = e^{2x}.$$

Posible ayuda: El polinomio $p(t) = t^2 - 6t + 9$ puede factorizarse como $p(t) = (t - 3)^2$.

3. **NO RESUELVA LA SIGUIENTE ECUACIÓN DIFERENCIAL.** Sólo indique, razonadamente, si es una ecuación diferencial exacta. Indique también si es una ecuación diferencial homogénea.

$$(3x^2y + x^3)dx + (x^3)dy = 0$$

Ejercicio 68:

Contestar a las siguientes cuestiones:



1. Compruebe lo siguiente: si la función $y(x)$ es solución de la ecuación homogénea

$$y''(x) + y'(x) = 0$$

y $\varphi(x)$ es solución de la ecuación no homogénea

$$y''(x) + y'(x) = x,$$

entonces $\phi(x) = y(x) + \varphi(x)$ también es solución de la ecuación no homogénea.

2. Resuelva la siguiente ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes no homogénea:

$$y'' + 4y = x.$$

Ejercicio 69: Sept. 2003.

Resuelva la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + 2\frac{d^2 y}{dx^2} - 4 = 0$$

Ejercicio 70: Junio de 2004.

Resuelva la siguiente ecuación diferencial:

$$y' + 2y = e^{-x}$$

Ejercicio 71: Septiembre de 2004.



Resuelva la siguiente ecuación diferencial:

$$xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}$$

Nota: Las siguientes integrales primitivas pueden resultar útiles:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x} &= \ln x + \mathcal{C} \\ \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} &= \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm 1} \right| + \mathcal{C}\end{aligned}$$

Ejercicio 72: Junio de 2005.

Resuelva la siguiente ecuación diferencial:

$$(y - x)dx + (y + x)dy = 0$$

Ejercicio 73: Septiembre de 2005.

Resuelva la siguiente ecuación diferencial:

$$y'' + 2y' + y = 0$$

Ejercicio 74: Junio de 2006.

Resuelva la siguiente ecuación diferencial:

$$(4xy + 2y)y' + (2x + 2y^2) = 0$$

¿Cuál es la solución particular si $y(0) = 2$? ¿Y si $y(0) = -2$?



Ejercicio 75: Septiembre de 2006.

Resuelva la siguiente ecuación diferencial:

$$y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$$

Ejercicio 76: Febrero de 2007.

Resuelva la siguiente ecuación diferencial:

$$xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}$$

Nota: Las siguientes integrales primitivas pueden resultar útiles:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x} &= \ln x + C \\ \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} &= \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm 1} \right| + C\end{aligned}$$

Ejercicio 77: Junio de 2007.

Resuelva la siguiente ecuación diferencial:

$$y^{(4)} - y = 2e^x(\cos x - \sin x)$$

1. Desarrolle el polinomio $p(t) = (x-1)(x+1)(x-i)(x+i)$ (en donde i es el número complejo $\sqrt{-1}$).
2. Para obtener una solución particular de la ecuación, pruebe con una función de la forma $y_{\text{part}}(x) = e^x(A \cos x + B \sin x)$.



Ejercicio 78: Junio de 2007.

Responda a las siguientes cuestiones.

1. Resuelva el siguiente problema de condiciones iniciales

$$y' - 2yx = 0; \quad y(0) = 1$$

2. Dada una ecuación diferencial lineal de segundo orden homogénea, ¿Qué hace falta para que la función $y(x) = x^2 e^x$ forme parte de la solución general? Razone su respuesta.
3. NO RESUELVA LA ECUACIÓN DIFERENCIAL. Sólo razone si la siguiente ecuación diferencial es o no una ecuación homogénea.

$$(x^2 + y^2)dx + x^2 y^2 dy = 0$$

Ejercicio 79: Septiembre de 2007.

Resuelva la siguiente ecuación diferencial

$$y''' - 3y' + 2y = 6x - 2x^2$$

Posible ayuda: Desarrollar el polinomio $p(t) = (x + 2)(x - 1)^2$.

Ejercicio 80: Septiembre de 2007.

(2 puntos) Conteste a las siguientes cuestiones:

1. (1.0 punto) Resuelva el siguiente problema de condiciones iniciales

$$(x + y)dy + ydx = 0; \quad y(0) = 1$$



2. Dada una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes homogénea, ¿es posible que la función $y(x) = x^2e^{-x}$ forme parte de la solución general? ¿Qué debe cumplir la ecuación diferencial? Razone adecuadamente su respuesta.

3. **NO RESUELVA LA SIGUIENTE ECUACIÓN DIFERENCIAL.** Sólo indique, razonadamente, si es una ecuación diferencial exacta.

$$(3x^2y + x + y)dx + (x^3 + y^2 + x)dy = 0$$

Ejercicio 81: Junio de 2008.

Resuelva la siguiente ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes no homogénea:

$$y'' - 6y' + 9y = e^{2x}.$$

Posible ayuda: El polinomio $p(t) = t^2 - 6t + 9$ puede factorizarse como $p(t) = (t - 3)^2$.

Ejercicio 82: Junio de 2008.

NO RESUELVA LA SIGUIENTE ECUACIÓN DIFERENCIAL. Sólo indique, razonadamente, si es una ecuación diferencial exacta. Indique también si es una ecuación diferencial homogénea.

$$(3x^2y + x^3)dx + (x^3)dy = 0$$

Ejercicio 83: Septiembre de 2008.



Resuelva la siguiente ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes no homogénea:

$$y'' + 4y = x.$$

Ejercicio 84:

Compruebe lo siguiente: si la función $y(x)$ es solución de la ecuación homogénea

$$y''(x) + y'(x) = 0$$

y $\varphi(x)$ es solución de la ecuación no homogénea

$$y''(x) + y'(x) = x,$$

entonces $\phi(x) = y(x) + \varphi(x)$ también es solución de la ecuación no homogénea.

Respuestas

Respuesta al Ejercicio 64

Reescribimos la ecuación como

$$(2x + 2y^2)dx + (4xy + 2y)dy = 0,$$

y llamamos $M(x, y) = 2x + 2y^2$ y $N(x, y) = 4xy + 2y$.

Dado que la ecuación diferencial no es separable, y que $M(x, y)$ y $N(x, y)$ no son funciones homogéneas, debemos buscar la solución como ecuación exacta. Como

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = 4y,$$

por el teorema de Schwarz existe una función $F(x, y)$ que cumple que

$$M(x, y)dx = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} \quad (7.1)$$

$$N(x, y)dy = \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \quad (7.2)$$



y que

$$dF(x, y) = M(x, y)dx + N(x, y)dy = (2x + 2y^2)dx + (4xy + 2y)dy \quad (7.3)$$

A partir de (7.8), integrando respecto a x , podemos obtener una expresión para F :

$$F(x, y) = \int \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} dx = \int M(x, y) dx = x^2 + 2xy^2 + \varphi(y) \quad (7.4)$$

donde $\varphi(y)$ es la constante de integración, que puede depender de y .

Por tanto, de (7.11) obtenemos que la función $F(x, y)$ es de la forma

$$F(x, y) = x^2 + 2xy^2 + \varphi(y) \quad (7.5)$$

Para averiguar la expresión de la función $\varphi(y)$ calculamos la derivada parcial de $F(x, y)$ respecto de y

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = 4xy + \varphi'(y)$$

y utilizando (7.9), tenemos que

$$N(x, y)dx = 4xy + 2y = 4xy + \varphi'(y)$$

de donde obtenemos una ecuación diferencial para $\varphi(y)$

$$\varphi'(y) = 2y$$

que podemos resolver separando variables e integrando

$$\frac{d\varphi}{dy} = 2y \Rightarrow d\varphi = 2ydy$$

$$\int d\varphi = \int 2ydy$$

$$\varphi(y) = y^2 + C$$

Por lo tanto, a partir de (7.12) y de $\varphi(y)$ tenemos que

$$F(x, y) = x^2 + 2xy^2 + y^2 + C \quad (7.6)$$



Por último, teniendo en cuenta que a partir de (7.10) y de la ecuación diferencial se cumple que $dF(x, y) = 0$, entonces la función $F(x, y)$ debe ser constante, con lo que obtenemos que

$$F(x, y) = x^2 + 2xy^2 + y^2 + C = K,$$

expresión de la que podemos obtener la solución para la ecuación diferencial

$$y(x) = \pm \sqrt{\frac{K - x^2}{2x + 1}} \quad (7.7)$$

Si debe cumplirse que $y(0) = 2$, entonces, sustituyendo en (7.14),

$$y(0) = \pm \sqrt{\frac{K - 0}{0 + 1}} = \pm \sqrt{K} = 2$$

obtenemos que el signo de la raíz cuadrada debe ser positivo, y que el valor de K debe ser 4.

Si por el contrario, $y(0) = -2$, entonces $K = 4$ igualmente, pero el signo de la raíz cuadrada ha de ser negativo.

Respuesta al Ejercicio 65

1. La ecuación diferencial es lineal de cuarto orden, por lo que debemos encontrar, en primer lugar una solución para la ecuación homogénea, y a continuación una solución particular de la no homogénea. La solución de la ecuación será la suma de ambas.

Para encontrar una solución para la ecuación homogénea, planteamos el polinomio característico de la ecuación

$$p(t) = t^4 - 1$$

que puede factorizarse como $p(t) = (t^2 + 1)(t^2 - 1)$. Las raíces del polinomio serán

$$\lambda_1 = 1; \quad \lambda_2 = -1; \quad \lambda_3 = i; \quad \lambda_4 = -i$$

y la solución de la ecuación homogénea vendrá dada por

$$y_0 = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x$$



La ecuación no homogénea debe tener una solución particular de la forma

$$\varphi(x) = e^x (A \cos x + B \sin x)$$

Para obtener los valores de A y B , derivaremos φ y los elegiremos de forma que se cumpla

$$\varphi^{(4)}(x) - \varphi(x) = 2e^x(\cos x - \sin x).$$

Si calculamos la primera derivada, observamos que

$$\varphi'(x) = e^x ((A + B) \cos x + (B - A) \sin x),$$

fórmula que podemos aplicar para calcular las derivadas sucesivas:

$$\varphi''(x) = 2e^x (B \cos x - A \sin x)$$

$$\varphi'''(x) = 2e^x ((B - A) \cos x - (A + B) \sin x)$$

$$\varphi^{(4)}(x) = -4e^x (A \cos x + B \sin x) = -4\varphi(x)$$

Si sustituimos en la ecuación obtenemos que debe cumplirse que

$$\varphi^{(4)}(x) - \varphi(x) = 2e^x(\sin x - \cos x)$$

$$-4\varphi(x) - \varphi(x) = 3\varphi(x) = 2e^x(\sin x - \cos x)$$

que, sustituyendo la expresión para φ da lugar a

$$-5e^x (A \cos x + B \sin x) = 2e^x(\cos x - \sin x)$$

de donde obtenemos que A y B deben valer

$$A = -2/5; \quad B = 2/5.$$

La solución de la ecuación diferencial es:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x + \frac{2}{5} e^x (\sin x - \cos x)$$



2. La solución de la ecuación viene dada por

$$\int \frac{dy}{y} = 2 \int x dx$$

de donde se obtiene que

$$\ln(y) = x^2 + C$$

$$y = e^{x^2+C}$$

Si sustituimos las condiciones iniciales obtenemos que

$$y(0) = e^C = 1$$

por lo que $C = 0$.

3. Haría falta que $\lambda = 1$ fuera raíz con multiplicidad 3 del polinomio característico. Pero eso no es posible, ya que la ecuación es de orden 2.
4. No es homogénea, ya que, aunque las dos funciones son homogéneas, no son del mismo grado.

Respuesta al Ejercicio 66

1. La ecuación diferencial es lineal de tercer orden, por lo que debemos encontrar, en primer lugar una solución para la ecuación homogénea, y a continuación una solución particular de la no homogénea. La solución de la ecuación será la suma de ambas.

Para encontrar una solución para la ecuación homogénea, planteamos el polinomio característico de la ecuación

$$p(t) = t^3 - 3t + 2$$

que puede factorizarse como $p(t) = (t + 2)(t - 1)^2$. Las raíces del polinomio serán

$$\lambda_1 = -2; \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 1$$



y la soluci3n de la ecuaci3n homogénea vendrá dada por

$$y_0 = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x + C_3 x e^x$$

Una soluci3n particular para la ecuaci3n no homogénea es un polinomio de grado 3 de la forma

$$\varphi(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

Para obtener los valores de A y B , derivaremos φ y los elegiremos de forma que se cumpla

$$\varphi'''(x) - 3\varphi'(x) + 2\varphi(x) = 6x - 2x^2$$

Calculamos las derivadas

$$\varphi'(x) = 3Ax^2 + 2Bx + C; \quad \varphi''(x) = 6Ax + 2B; \quad \varphi'''(x) = 6A$$

de forma que debe cumplirse

$$\begin{aligned} \varphi'''(x) - 3\varphi'(x) + 2\varphi(x) &= 6A - 3(3Ax^2 + 2Bx + C) + 2(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) \\ &= 2Ax^3 + (2B - 9A)x^2 + (2C - 6B)x + 2D - 3C + 6A \\ &= 6x - 2x^2 \end{aligned}$$

Esta ecuaci3n nos permite igualar los coeficientes, obteniendo el sistema

$$\begin{aligned} 2A &= 0 \\ 2B - 9A &= -2 \\ 2C - 6B &= 6 \\ 2D - 3C + 6A &= 0 \end{aligned}$$

dando como soluci3n

$$A = 0; \quad B = -1; \quad C = 0; \quad D = 0$$

y como soluci3n particular de la ecuaci3n no homogénea

$$\varphi(x) = -x^2$$

La soluci3n de la ecuaci3n diferencial es:

$$y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x + C_3 x e^x - x^2$$



2. Se trata de una ecuación diferencial homogénea de orden 1, ya que

$$M(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x + \lambda y) = \lambda(x + y) = \lambda M(x, y),$$

$$N(\lambda x, \lambda y) = \lambda y = \lambda N(x, y).$$

Por tanto, haciendo del cambio de variable $y = ux$, $dy = du x + u dx$ podemos convertirla en separable:

$$x(1 - u)du + u^2 dx = 0$$

$$\frac{(1 - u)}{u^2} du + \frac{dx}{x} = \frac{1}{u^2} du - \frac{1}{u} du + \frac{dx}{x} = 0$$

Integrando esta última expresión, obtenemos que

$$-\frac{1}{u} - \log u + \log x + C = 0$$

y deshaciendo el cambio de variable

$$-\frac{x}{y} - \log y + 2 \log x + C = 0$$

El problema de condiciones iniciales se resuelve sustuyendo en la solución anterior $x = 0$ e $y = 1$

$$-\frac{0}{1} - \log 1 + 2 \log 0 + C = 0$$

que no tiene solución, salvo en el caso del límite de C tendiendo a infinito.

3. Es necesario y suficiente que $\lambda = -1$ sea raíz con multiplicidad 3 del polinomio caraterístico.
4. Es exacta, puesto que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3x^2 + 1 = \frac{\partial N}{\partial x}$$

**Respuesta al Ejercicio 70**

Caso A. Considerando que se trata de una ecuación exacta o reducible a exacta. Reescribimos:

$$\frac{dy}{dx} + 2y - e^{-x} = 0; \quad (2y - e^{-x})dx + dy = 0;$$

Comprobemos si se trata de una exacta:

$$\left. \begin{array}{l} M(x, y) = 2y - e^{-x}; \quad \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = 2; \\ N(x, y) = 1; \quad \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = 0; \end{array} \right\} \text{ No!}$$

Veamos ahora si existe un factor integrante $h(x)$:

$$\frac{\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}}{N(x, y)} = \frac{2 - 0}{1} = 2$$

por tanto:

$$h(x) = 2; \quad \mu(x) = e^{\int h(x)dx} = e^{2 \int dx} = e^{2x}$$

La ecuación reducida a exacta queda como:

$$(2y - e^{-x})e^{2x}dx + e^{2x}dy = 0$$

que si es exacta:

$$\left. \begin{array}{l} \overline{M}(x, y) = (2y - e^{-x})e^{2x}; \quad \frac{\partial \overline{M}(x, y)}{\partial y} = 2e^{2x}; \\ \overline{N}(x, y) = e^{2x}; \quad \frac{\partial \overline{N}(x, y)}{\partial x} = 2e^{2x}; \end{array} \right\} \text{ Si!}$$

Ahora sólo queda resolver como una exacta:

$$\begin{aligned} R(x, y) &= \int \overline{M}(x, y)dx = \int (2y - e^{-x})e^{2x}dx = 2y \int e^{2x}dx - \int e^{-x}e^{2x}dx = \\ &= 2y \int e^{2x}dx - \int e^x dx = 2y \frac{1}{2}e^{2x} - e^x = ye^{2x} - e^x \\ \varphi(y) &= \int \left[\overline{N}(x, y) - \frac{\partial R(x, y)}{\partial y} \right] dy = \\ &= \int \left[e^{2x} - \frac{\partial}{\partial y}(ye^{2x} - e^x) \right] dy = \int [e^{2x} - e^{2x}] dy = \int 0 dy = C \end{aligned}$$



de donde obtenemos:

$$F(x, y) = R(x, y) + \varphi(y) = ye^{2x} + e^x + C = 0;$$

y despejando y :

$$y = Ce^{-2x} + e^{-x}$$

Caso B. Considerando que se trata de una ecuación lineal de primer orden del tipo $y' + P(x)y = Q(x)$ (ecuación de Bernouilli). Por tanto:

$$P(x) = 2; \quad Q(x) = e^{-x}$$

con lo que sólo queda aplicar la fórmula general:

$$y = e^{-\int P(x)dx} \left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C \right]$$

es decir,

$$\begin{aligned} \int P(x)dx &= 2 \int dx = 2x \\ y &= e^{-2x} \left[\int e^{-x} e^{2x} dx + C \right] = e^{-2x} \left[\int e^x dx + C \right] = e^{-2x} e^x + Ce^{-2x} = Ce^{-2x} + e^{-x} \end{aligned}$$

Caso C. Considerando que es una ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes de grado 1. Primero obtenemos la solución la ecuación homogénea $y' + 2y = 0$ construyendo y resolviendo el polinomio característico:

$$t + 2 = 0; \quad t = -2$$

por lo que la solución es:

$$y_{\text{homog}}(x) = Ce^{-2x}$$

Ahora obtenemos la solución particular, que será de la forma:

$$y_{\text{part}}(x) = e^{\alpha x} Q(x) = e^{-x}(A_1 x + A_0)$$

Para obtener los valores de A_1 y A_0 , derivamos $y_{\text{part}}(x)$:

$$y'_{\text{part}}(x) = -e^{-x}(A_1 x + A_0) + A_1 e^{-x}$$



y sustituímos en la ecuación original:

$$\begin{aligned}A_1 e^{-x} - e^{-x}(A_1 x + A_0) + 2e^{-x}(A_1 x + A_0) &= e^{-x} \\A_1 - A_1 x - A_0 + 2A_1 x + 2A_0 &= 1\end{aligned}$$

de donde, igualando potencias iguales de x obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned}-A_1 + 2A_1 &= 0 \\A_1 - A_0 + 2A_0 &= 1\end{aligned} \right\} A_1 = 0; A_0 = 1$$

y la solución particular se reduce a:

$$y_{\text{part}}(x) = e^{-x}(A_1 x + A_0) = e^{-x}(0x + 1) = e^{-x}$$

por lo que finalmente obtenemos que:

$$y = y_{\text{homog}}(x) + y_{\text{part}}(x) = Ce^{-2x} + e^{-x}$$

Respuesta al Ejercicio 71

Primero, reescribimos la ecuación en la forma $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$:

$$\begin{aligned}x \frac{dy}{dx} &= y + \sqrt{y^2 - x^2} \\x dy &= (y + \sqrt{y^2 - x^2})dx \\(y + \sqrt{y^2 - x^2})dx - x dy &= 0\end{aligned}$$

por lo que identificando, tenemos:

$$\begin{aligned}M(x, y) &= y + \sqrt{y^2 - x^2} \\N(x, y) &= -x\end{aligned}$$

Ahora es necesario comprobar si ambas ecuaciones son homogéneas del mismo grado, es decir, cumplen la propiedad:

$$\begin{aligned}M(\lambda x, \lambda y) &= \lambda^r M(x, y) \\N(\lambda x, \lambda y) &= \lambda^r N(x, y)\end{aligned}$$



por tanto:

$$\begin{aligned}\lambda y + \sqrt{(\lambda y)^2 - (\lambda x)^2} &= \lambda(y + \sqrt{y^2 - x^2}) \\ -\lambda x &= \lambda(-x)\end{aligned}$$

es decir, ambas funciones son homogéneas de grado $r = 1$. Para resolver la ecuación diferencial, realizamos el cambio:

$$\begin{aligned}y &= ux \\ dy &= udx + xdu\end{aligned}$$

y obtenemos:

$$\begin{aligned}(ux + \sqrt{(ux)^2 - x^2})dx - x(udx + xdu) &= 0 \\ (ux + x\sqrt{u^2 - 1})dx - xudx - x^2du &= 0 \\ xudx + x\sqrt{u^2 - 1}dx - xudx - x^2du &= 0 \\ x\sqrt{u^2 - 1}dx &= x^2du \\ \sqrt{u^2 - 1}dx &= xdu \\ \frac{dx}{x} &= \frac{du}{\sqrt{u^2 - 1}}\end{aligned}$$

Una vez separadas las variables, sólo queda integrar:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x} &= \int \frac{du}{\sqrt{u^2 - 1}} \\ \ln(x) &= \ln(u + \sqrt{u^2 - 1}) + \ln C \\ \ln(x) &= \ln(C(u + \sqrt{u^2 - 1})) \\ x &= C(u + \sqrt{u^2 - 1})\end{aligned}$$

y deshaciendo el cambio ($u = y/x$):

$$\begin{aligned}x &= C\left(\frac{y}{x} + \sqrt{\frac{y^2}{x^2} - 1}\right) \\ x &= C\left(\frac{y}{x} + \frac{1}{x}\sqrt{y^2 - x^2}\right) \\ x^2 &= Cy + C\sqrt{y^2 - x^2}\end{aligned}$$

Respuesta al Ejercicio 72



Podemos escribir la ecuación en la forma:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

de modo que:

$$M(x, y) = (y - x)$$

$$N(x, y) = (y + x)$$

- **Solución 1:** Comprobamos que las funciones $M(x, y)$ y $N(x, y)$ son homogéneas de grado 1:

$$M(\lambda x, \lambda y) = (\lambda y - \lambda x) = \lambda(y - x) = \lambda^1 M(x, y)$$

$$N(\lambda x, \lambda y) = (\lambda y + \lambda x) = \lambda(y + x) = \lambda^1 N(x, y)$$

Por lo que procedemos a hacer el cambio $y = ux$ y $dy = udx + xdu$ y obtenemos:

$$(ux - x)dx + (ux + x)(udx + xdu) = 0;$$

$$x(u - 1)dx + x(u + 1)(udx + xdu) = 0;$$

$$x(u - 1)dx + xu(u + 1)dx + x^2(u + 1)du = 0;$$

$$x(u^2 + 2u - 1)dx + x^2(u + 1)du = 0$$

que es una ecuación de la forma $F(x)G(u)dx + H(x)P(u)du = 0$ (variables separables) con:

$$F(x) = x; \quad G(u) = u^2 + 2u - 1$$

$$H(x) = x^2; \quad P(u) = u + 1$$

Para resolver la ecuación, dividimos por $H(x)G(u)$ y separamos las variables:

$$\frac{x(u^2 + 2u - 1)}{x^2(u^2 + 2u - 1)}dx + \frac{x^2(u + 1)}{x^2(u^2 + 2u - 1)}du = 0;$$

$$\frac{1}{x}dx + \frac{(u + 1)}{(u^2 + 2u - 1)}du = 0;$$

$$\frac{1}{x}dx = -\frac{(u + 1)}{(u^2 + 2u - 1)}du$$

e integrando:

$$\int \frac{1}{x}dx = -\int \frac{(u + 1)}{(u^2 + 2u - 1)}du;$$

$$\ln(x) = -\frac{1}{2}\ln(u^2 + 2u - 1) + \ln(K);$$

$$\ln(x) = \ln\left(K(u^2 + 2u - 1)^{-\frac{1}{2}}\right);$$

$$x = \frac{K}{\sqrt{u^2 + 2u - 1}};$$

$$x^2(u^2 + 2u - 1) = K^2$$



Por último, haciendo $K^2 = C$ y deshaciendo el cambio $u = y/x$:

$$\begin{aligned}x^2\left(\frac{y^2}{x^2} + 2\frac{y}{x} - 1\right) &= C; \\ \underline{y^2 + 2xy - x^2} &= C\end{aligned}$$

- **Solución 2:** Comprobamos si se trata de una ecuación diferencial exacta:

$$\left. \begin{aligned}\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} &= \frac{\partial(y-x)}{\partial y} = 1 \\ \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} &= \frac{\partial(y+x)}{\partial x} = 1\end{aligned} \right\} \text{ Si!}$$

Por tanto, la solución general será de la forma:

$$R(x, y) + \varphi(y) = K$$

en donde:

$$\begin{aligned}R(x, y) &= \int M(x, y) dx \\ \varphi(y) &= \int \left[N(x, y) - \frac{\partial R(x, y)}{\partial y} \right] dy\end{aligned}$$

Resolviendo:

$$\begin{aligned}R(x, y) &= \int (y - x) dx = y \int dx - \int x dx = yx - \frac{x^2}{2} \\ \varphi(y) &= \int \left[(y + x) - \frac{\partial(yx - x^2/2)}{\partial y} \right] dy = \int (y + x - x) dy = \int y dy = \frac{y^2}{2}\end{aligned}$$

La solución general es, por tanto:

$$yx - \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = K$$

y multiplicando por 2 y haciendo $2K = C$, tenemos:

$$\underline{y^2 + 2xy - x^2 = C}$$

Respuesta al Ejercicio 73



Se trata de una ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes homogénea. Comenzaremos resolviendo el polinomio característico de la ecuación diferencial $P(t) = t^2 + 2t + 1$:

$$\lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4}}{2} = -1$$

que es una raíz real múltiple con multiplicidad 2. Las soluciones particulares serán por tanto de la forma:

$$\begin{aligned}y_1(x) &= e^{\lambda x} = e^{-x} \\y_2(x) &= xe^{\lambda x} = xe^{-x}\end{aligned}$$

y la solución general toma la forma:

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = e^{-x}(C_1 + C_2 x)$$

Respuesta al Ejercicio 74

Reescribimos la ecuación como

$$(2x + 2y^2)dx + (4xy + 2y)dy = 0,$$

y llamamos $M(x, y) = 2x + 2y^2$ y $N(x, y) = 4xy + 2y$.

Dado que la ecuación diferencial no es separable, y que $M(x, y)$ y $N(x, y)$ no son funciones homogéneas, debemos buscar la solución como ecuación exacta. Como

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = 4y,$$

por el teorema de Schwarz existe una función $F(x, y)$ que cumple que

$$M(x, y)dx = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} \tag{7.8}$$

$$N(x, y)dy = \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \tag{7.9}$$

y que

$$dF(x, y) = M(x, y)dx + N(x, y)dy = (2x + 2y^2)dx + (4xy + 2y)dy \tag{7.10}$$



A partir de (7.8), integrando respecto a x , podemos obtener una expresión para F :

$$F(x, y) = \int \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} dx = \int M(x, y) dx = x^2 + 2xy^2 + \varphi(y) \quad (7.11)$$

donde $\varphi(y)$ es la constante de integración, que puede depender de y .

Por tanto, de (7.11) obtenemos que la función $F(x, y)$ es de la forma

$$F(x, y) = x^2 + 2xy^2 + \varphi(y) \quad (7.12)$$

Para averiguar la expresión de la función $\varphi(y)$ calculamos la derivada parcial de $F(x, y)$ respecto de y

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = 4xy + \varphi'(y)$$

y utilizando (7.9), tenemos que

$$N(x, y)dx = 4xy + 2y = 4xy + \varphi'(y)$$

de donde obtenemos una ecuación diferencial para $\varphi(y)$

$$\varphi'(y) = 2y$$

que podemos resolver separando variables e integrando

$$\frac{d\varphi}{dy} = 2y \Rightarrow d\varphi = 2ydy$$

$$\int d\varphi = \int 2ydy$$

$$\varphi(y) = y^2 + C_1$$

Por lo tanto, a partir de (7.12) y de $\varphi(y)$ tenemos que

$$F(x, y) = x^2 + 2xy^2 + y^2 + C_1 \quad (7.13)$$

Por último, teniendo en cuenta que a partir de (7.10) y de la ecuación diferencial se cumple que $dF(x, y) = 0$, entonces la función $F(x, y)$ debe ser constante, con lo que obtenemos que

$$F(x, y) = x^2 + 2xy^2 + y^2 + C_1 = C_2,$$



expresión de la que podemos obtener la solución para la ecuación diferencial

$$y(x) = \pm \sqrt{\frac{K - x^2}{2x + 1}} \quad (7.14)$$

en donde hemos hecho $K = C_2 - C_1$.

Si debe cumplirse que $y(0) = 2$, entonces, sutituyendo en (7.14),

$$y(0) = \pm \sqrt{\frac{K - 0}{0 + 1}} = \pm \sqrt{K} = 2$$

obtenemos que el signo de la raíz cuadrada debe ser positivo, y que el valor de K debe ser 4.

Si por el contrario, $y(0) = -2$, entonces $K = 4$ igualmente, pero el signo de la raíz cuadrada ha de ser negativo.

Respuesta al Ejercicio 75

Caso A. Considerando que se trata de una ecuación diferencial exacta o reducible a exacta.

1. Primero la reescribimos en la forma $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} + 2xy &= 2xe^{-x^2}; & \frac{dy}{dx} &= 2x(e^{-x^2} - y); \\ \frac{dy}{dx} + 2x(y - e^{-x^2}) &= 0; & 2x(y - e^{-x^2})dx + dy &= 0 \end{aligned}$$

de donde:

$$M(x, y) = 2x(y - e^{-x^2}); N(x, y) = 1$$

2. Comprobamos si se trata de una ecuación diferencial exacta:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} &= 2x \\ \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{No!}$$

3. Veamos si se trata de una ecuación reducible a exacta. Primero buscaremos un factor integrante que sólo sea función e x :

$$h(x) = \frac{\partial M(x, y)/\partial y - \partial N(x, y)/\partial x}{N(x, y)} = \frac{2x - 0}{1} = 2x$$

por tanto:

$$\mu(x) = e^{\int h(x)dx} = e^{\int 2x dx} = e^{x^2}$$



4. Multiplicamos $M(x, y)$ y $N(x, y)$ por el factor integrante:

$$\begin{aligned}\mu(x)M(x, y) &= 2x(y - e^{-x^2})e^{x^2} = 2x(ye^{x^2} - 1) \\ \mu(x)N(x, y) &= e^{x^2}\end{aligned}$$

y comprobamos que ahora se trata de una ecuación exacta:

$$\left. \begin{aligned}\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} &= 2xe^{x^2} \\ \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} &= 2xe^{x^2}\end{aligned} \right\} \text{Si!}$$

5. Resolvemos la ecuación exacta:

$$\begin{aligned}R(x, y) &= \int M(x, y)dx = \int 2xye^{x^2}dx - \int 2xdx = ye^{x^2} - x^2 \\ \varphi(y) &= \int \left[N(x, y) - \frac{\partial R(x, y)}{\partial y} \right] dy = \int [e^{x^2} - e^{x^2}] dy = \int 0dy = C\end{aligned}$$

y por último:

$$F(x, y) = 0 = ye^{x^2} - x^2; ye^{x^2} = x^2 + C;$$

$$\underline{y = e^{-x^2}(x^2 + C)}$$

Caso B. Considerando que se trata de una ecuación diferencial lineal de primer orden, de fórmula general:

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

por lo que identificando:

$$\left. \begin{aligned}P(x) &= 2x \\ Q(x) &= 2xe^{-x^2}\end{aligned} \right\}$$

y aplicando la solución general:

$$\begin{aligned}y &= e^{-\int P(x)dx} \left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C \right] = e^{-\int 2xdx} \left[\int 2xe^{-x^2}e^{\int 2xdx}dx + C \right] = \\ &= e^{-x^2} \left[\int 2xe^{-x^2}e^{x^2}dx + C \right] = e^{-x^2} \left[\int 2xdx + C \right] = \underline{e^{-x^2}(x^2 + C)}\end{aligned}$$

**Respuesta al Ejercicio 77**

La ecuaci3n diferencial es lineal de cuarto orden, por lo que debemos encontrar, en primer lugar una soluci3n para la ecuaci3n homogénea, y a continuaci3n una soluci3n particular de la no homogénea. La soluci3n de la ecuaci3n serà la suma de ambas.

- Para encontrar una soluci3n para la ecuaci3n homogénea, planteamos el polinomio característico de la ecuaci3n

$$p(t) = t^4 - 1$$

que puede factorizarse como $p(t) = (t^2 + 1)(t^2 - 1) = (x - 1)(x + 1)(x - i)(x + i)$ (ver punto (a) de la ayuda). Las raíces del polinomio serán, por tanto

$$\lambda_1 = 1; \quad \lambda_2 = -1; \quad \lambda_3 = i; \quad \lambda_4 = -i$$

y la soluci3n de la ecuaci3n homogénea vendrà dada por

$$y_0 = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x$$

- La ecuaci3n no homogénea debe tener una soluci3n particular de la forma

$$\varphi(x) = e^x (A \cos x + B \sin x)$$

Para obtener los valores de A y B , derivaremos φ y los elegiremos de forma que se cumpla

$$\varphi^{(4)}(x) - \varphi(x) = 2e^x (\cos x - \sin x).$$

Si calculamos la primera derivada, observamos que

$$\varphi'(x) = e^x ((A + B) \cos x + (B - A) \sin x),$$

f3rmula que podemos aplicar para calcular las derivadas sucesivas:

$$\begin{aligned} \varphi''(x) &= 2e^x (B \cos x - A \sin x) \\ \varphi'''(x) &= 2e^x ((B - A) \cos x - (A + B) \sin x) \\ \varphi^{(4)}(x) &= -4e^x (A \cos x + B \sin x) = -4\varphi(x) \end{aligned}$$



Si sustituimos en la ecuación obtenemos que debe cumplirse que

$$\begin{aligned}\varphi^{(4)}(x) - \varphi(x) &= 2e^x(\sin x - \cos x) \\ -4\varphi(x) - \varphi(x) &= 5\varphi(x) = 2e^x(\sin x - \cos x)\end{aligned}$$

que, sustituyendo la expresión para φ da lugar a

$$-5e^x(A \cos x + B \sin x) = 2e^x(\cos x - \sin x)$$

de donde obtenemos que A y B deben valer

$$A = -\frac{2}{5}; \quad B = \frac{2}{5}.$$

- La solución de la ecuación diferencial es:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x - \frac{2}{5} e^x (\cos x - \sin x)$$

Respuesta al Ejercicio 78

- (a) La solución de la ecuación, que es de variables separables, viene dada por

$$\int \frac{dy}{y} = 2 \int x dx$$

de donde se obtiene que

$$\begin{aligned}\ln(y) &= x^2 + C \\ y &= e^{x^2+C}\end{aligned}$$

Si sustituimos las condiciones iniciales obtenemos que

$$y(0) = e^C = 1$$

por lo que $C = 0$.

- (b) Haría falta que $\lambda = 1$ fuera raíz con multiplicidad 3 del polinomio característico. Pero eso no es posible, ya que la ecuación es de orden 2.



- (c) No es homogénea, ya que, aunque las dos funciones son homogéneas, no lo son del mismo grado.

7.2. Ejercicios adicionales

7.2.1. E.D.O. de variables separables

Num.	Ecuació	Solució
1	$(1 + y^2)dx + (1 + x^2)dy = 0$	$x + y = C(1 - xy)$
2	$x\sqrt{1 + y^2} + yy'\sqrt{1 + x^2} = 0$	$\sqrt{1 + x^2} + \sqrt{1 + y^2} = C$
3	$e^y(1 + x^2)dy - 2x(1 + e^y)dx = 0$	$1 + e^y = C(1 + x^2)$
4	$(x + y)^2 y' = a^2$	$x + y = \tan(C + \frac{y}{a})$ (Ayuda: hacer cambio $x + y = t$)
5	$xy^2(xy' + y) = a^2$	$2x^3y^3 = 3a^2x^2 + C$ (Ayuda: hacer cambio $xy = t$)
6	$y - xy' = a(1 + x^2y')$	$y = a + \frac{Cx}{x+1}$
7	$y' + \sin \frac{x+y}{2} = \sin \frac{x-y}{2}$	$\ln \tan \frac{y}{4} = C - 2 \sin \frac{x}{2}$

7.2.2. E.D.O. homogéneas

Num.	Ecuació	Solució
8	$xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}$	$2Cy = C^2x^2 + 1$
9	$y' = \frac{2xy}{3x^2 - y^2}$	$C(y^2 - x^2) = y^3$
10	$xy' = \sqrt{y^2 - x^2}$	$y + \sqrt{y^2 - x^2} = Cx^3$
11	$(y - xy')^2 = x^2 + y^2$	$C^2x^2 = 1 + 2Cy$



7.2.3. E.D.O. exactas

Num.	Ecuació	Solució
12	$x(2x^2 + y^2) + y(x^2 + 2y^2)y' = 0$	$x^4 + x^2y^2 + y^4 = 0$
13	$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)dx + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}\right)dy = 0$	$\sqrt{x^2 + y^2} + \ln(xy) + \frac{x}{y} = C$
14	$(3x^2 - 2x - y)dx + (2y - x + 3y^2)dy = 0$	$x^3 + y^3 - x^2 - xy - y^2 = C$
15	$\frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{xdy-ydx}{x^2} = 0$	$\sqrt{x^2 + y^2} + \frac{y}{x} = C$
16	$\frac{2xdx}{y^3} + \frac{(y^2-3x^2)}{y^4}dy = 0$	$y = x$ (si $y(1) = 1$)

7.2.4. E.D.O. reducibles a exactas

Num.	Ecuació	Solució
17	$(1 - x^2y)dx + x^2(y - x)dy = 0$	$xy^2 - 2x^2y - 2 = Cx$
18	$(x^2 + y)dx - xdy = 0$	$x - \frac{y}{x} = C$
19	$(x^4 \ln x - 2xy^3)dx + 3x^2y^2dy = 0$	$y^3 + x^3(\ln x - 1) = Cx^2$
20	$(2xy^2 - 3y^3)dx + (7 - 3xy^2)dy = 0$	$x^2 - \frac{7}{y} - 3xy = C$

7.2.5. Ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes

E.D.L.C.C. homogéneas

Num.	Ecuació	Solució
21	$y'' - y = 0$	$y = C_1e^x + C_2e^{-x}$
22	$y'' + 2y' + y = 0$	$y = e^{-x}(C_1 + C_2x)$
23	$y''' - 8y = 0$	$y = C_1e^{2x} + e^{-x}(C_2 \cos \sqrt{3}x + C_3 \sin \sqrt{3}x)$
24	$y''' + 2y'' - y' - 2y = 0$	$y = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3e^{-2x}$
25	$2y''' - 3y'' + y' = 0$	$y = C_1 + C_2e^x + C_3e^{x/2}$



E.D.L.C.C. no homogènees

Num.	Ecuaci3	Soluci3
26	$5y''' - 7y'' - 3 = 0$	$y = C_1 + C_2x + C_3e^{7x/5} - \frac{3}{14}x^2$
27	$y'' - 4y' + 4y = x^2$	$(C_1 + C_2x)e^{2x} + \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + \frac{3}{8}$
28	$y'' + 4y' + 4y = 8e^{-2x}$	$y = (C_1 + C_2x)e^{-2x} + 4x^2e^{-2x}$
29	$y'' + 2y' + 2y = 1 + x$	$y = (C_1 \cos x + C_2 \sin x)e^{-x} + \frac{x}{2}$
30	$y'' + 2y' = 4e^x(\sin x + \cos x)$	$y = C_1 + C_2e^{-2x} + \frac{1}{5}(6 \sin x - 2 \cos x)e^x$

Ejercicios adicionales

Determine el tipo de las siguientes ecuaciones y resuélvalas.

Num.	Ecuaci3	Soluci3
31	$(x + \sin x + \sin y)dx + \cos y dy = 0$	$2e^x \sin y + 2e^x(x-1) + e^x(\sin x - \cos x) = C$
32	$e^{-y}(1 + y') = 1$	$e^x = C(1 - e^{-y})$
33	$(x^3 + xy^2)dx + (x^2y + y^3)dy = 0$	$x^4 + 2(xy)^2 + y^4 = C$
34	$x^2y' \cos y + 1 = 0$	$y = \arcsin(\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{x}) + C$
35	$y'' + 5y' + 6y = 10(1 - x)e^{-2x}$	$y = C_1e^{-3x} + C_2e^{-2x}$
36	$(2x^2y + 2y + 5)dx + (2x^3 + 2x)dy = 0$	$5 \arctan x + 2xy = C$
37	$y''' + 6y'' + 11y' + 6y = 0$	$y = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x} + C_3e^{-3x}$
38	$2x^2y' = x^2 + y^2$	$2x = (x - y) \ln(Cx)$
39	$(4x - 3y)dx + (2y - 3x)dy = 0$	$y^2 - 3xy - 2x^2 = C$
40	$(x - 2y - 1)dx + (3x - 6y + 2)dy = 0$	$x + 3y - \ln x - 2y = C$
41	$y''' - 3y' - 2y = 0$	$y = e^{-x}(C_1 + C_2x) + C_3e^{2x}$
42	$(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0$	$x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C$
43	$\left(2x + \frac{x^2+y^2}{x^2y}\right)dx = \left(\frac{x^2+y^2}{xy^2}\right)dy$	$x^3y + x^2 - y^2 = Cxy$
44	$(x + y^2)dx - 2xydy = 0$	$x \ln x - y^2 = Cx$
45	$y' = \sin(x - y)$	$x + C = \cot(\frac{y-x}{2} + \frac{\pi}{4})$
46	$\frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{xdy-ydx}{x^2} = 0$	$\sqrt{x^2 + y^2} + \frac{y}{x} = C$
47	$y'' + 3y' = 3xe^{-3x}$	$y = C_1 + C_2e^{-3x} - \left(\frac{x^2}{x} + \frac{x}{3}\right)e^{-3x}$

CAPÍTULO 8

Números complejos

8.1. Ejercicios

Ejercicio 85: Septiembre de 2004.

(2 puntos) Sean los números complejos:

$$a = 1 + i$$

$$b = 1 + \sqrt{3}i$$

$$c = 1_{\angle 90^\circ}$$

$$d = 2_{\angle 45^\circ}$$

Realice las siguientes operaciones:

1. $c \cdot d$

2. $a \cdot b$

3. $c \cdot d + \frac{\sqrt{2}a}{c}$

4. b^3



Ejercicio 86: Junio de 2006.

Conteste a las siguientes cuestiones:

1. Compruebe que $\frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2} = \cos(\alpha)$ usando la fórmula de Euler.
2. Sean $a = 4 + 3i$ y $b = 2e^{\frac{\pi}{4}i}$, calcule:
 - $c = a + b$.
 - $d = a \cdot b$.
 - $e = bb^*$.
 - $f = \frac{e^b}{aa^*}$.
3. Razone los posibles valores del armónico puro $e^{(n+\frac{1}{2})\pi i}$ en función del valor del entero n .

Ejercicio 87: Septiembre de 2006.

Sean los siguientes números complejos: $a = 4 + 3i$, $b = 2_{\angle 45^\circ}$ y $c = \frac{3}{2}e^{\frac{\pi}{2}i}$, calcule:

- $a + b^2$.
- $bc + a$.
- c^2b .
- $b + c$.

Ejercicio 88: Febrero de 2007.



Sean los números complejos:

$$\begin{aligned}a &= 1 + i \\b &= 1 + \sqrt{3}i \\c &= 2_{\angle 90^\circ} \\d &= 1_{\angle 45^\circ}\end{aligned}$$

Realice las siguientes operaciones:

1. $c \cdot d$
2. $a \cdot b$
3. $c \cdot d + \frac{\sqrt{2}a}{c}$
4. b^3

Ejercicio 89: Sept. 2003.

Sean $a = -j$ y $b = 3 + 2j$, calcule $a - (1/b)$ y ae^b en sus formas binómica y polar.

Respuestas

Respuesta al Ejercicio 85

$$\begin{aligned}c \cdot d &= 1_{\angle 90^\circ} \cdot 2_{\angle 45^\circ} = (1 \cdot 2)_{\angle (90+45)^\circ} = 2_{\angle 135^\circ} \\a \cdot b &= (1 + i) \cdot (1 + \sqrt{3}i) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot \sqrt{3}i + i \cdot 1 + \sqrt{3} \cdot i^2 = (1 - \sqrt{3}) + (1 + \sqrt{3})i \\c \cdot d + \frac{\sqrt{2}a}{c} &= i \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{2}i) + \frac{\sqrt{2}(1 + i)}{i} = \sqrt{2}i - \sqrt{2} - \sqrt{2}i \cdot (1 + i) = \\&= \sqrt{2}i - \sqrt{2} - \sqrt{2}i + \sqrt{2} = 0 \\b^3 &= (1 + \sqrt{3}i) \cdot (1 + \sqrt{3}i) \cdot (1 + \sqrt{3}i) = -8\end{aligned}$$

**Respuesta al Ejercicio 86**

- (a) Teniendo en cuenta que $e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i \sin(\alpha)$, $e^{-i\alpha} = \cos(-\alpha) + i \sin(-\alpha)$ y sustituyendo en la expresión, tenemos:

$$\begin{aligned}\frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2} &= \frac{\cos(\alpha) + i \sin(\alpha) + \cos(-\alpha) + i \sin(-\alpha)}{2} = \\ &= \frac{\cos(\alpha) + \cos(-\alpha) + i(\sin(\alpha) + \sin(-\alpha))}{2} = \\ &= \frac{2 \cos(\alpha) + i(\sin(\alpha) - \sin(\alpha))}{2} = \frac{2 \cos(\alpha)}{2} = \cos(\alpha)\end{aligned}$$

en donde hemos tenido en cuenta que el coseno es una función *par* ($\cos(\alpha) = \cos(-\alpha)$) y que el seno es una función *impar* ($\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$).

- (b) Primero escribimos a en forma exponencial y b en forma binómica:

$$\begin{aligned}a &= 5e^{0,643501i} \\ b &= \sqrt{2} + \sqrt{2}i\end{aligned}$$

$$0.02565741846250 + 0.16251714606014i$$

- $c = a + b = (4 + 3i) + (\sqrt{2} + \sqrt{2}i) = 5,4142 + 4,4142i$
- $d = a \cdot b = 5e^{0,643501i} \cdot 2e^{\frac{\pi}{4}i} = 10e^{1,712693i}$
- $e = b \cdot b^* = 2e^{\frac{\pi}{4}i} \cdot 2e^{-\frac{\pi}{4}i} = 4$
- $f = \frac{e^b}{a \cdot a^*} = \frac{e^{\sqrt{2} + \sqrt{2}i}}{25} = \frac{e^{\sqrt{2}}}{25} \cdot e^{\sqrt{2}i} = 0,164530e^{\sqrt{2}i}$

- (c)

$$e^{(n+\frac{1}{2})\pi i} = \begin{cases} +i & n \in \{0, 2, 4, 6, \dots\} \\ -i & n \in \{1, 2, 3, 4, \dots\} \end{cases}$$

Respuesta al Ejercicio 87

Primero reescribimos los números b y c en forma binomial:

$$\begin{aligned}b &= 2 \cos(45^\circ) + 2i \sin(45^\circ) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + 2i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\frac{\sqrt{2}}{2} + 2i\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} + i\sqrt{2} \\ c &= \frac{3}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{3}{2}i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 + \frac{3}{2}i\end{aligned}$$



1. $a + b^2$.

$$\begin{aligned}\underline{a + b^2} &= (4 + 3i) + (\sqrt{2} + \sqrt{2}i) \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{2}i) = \\ &= (4 + 3i) + 2 + 2i + 2i + 2i^2 = (4 + 3i) + 4i = \underline{4 + 7i}\end{aligned}$$

2. $bc + a$.

$$\begin{aligned}\underline{bc + a} &= (\sqrt{2} + \sqrt{2}i)\left(\frac{3}{2}i\right) + (4 + 3i) = \frac{3\sqrt{2}}{2}i - \frac{3\sqrt{2}}{2} + (4 + 3i) = \\ &= \left(4 - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right) + 3\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)i = \underline{1,8787 + 5,1231i}\end{aligned}$$

3. c^2b .

$$\begin{aligned}\underline{c^2b} &= \left(\frac{3}{2}i\right)\left(\frac{3}{2}i\right)(\sqrt{2} + \sqrt{2}i) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 i^2 (\sqrt{2} + \sqrt{2}i) = \\ &= -\frac{9}{4}(\sqrt{2} + \sqrt{2}i) = -\frac{9\sqrt{2}}{4} - \frac{9\sqrt{2}}{4}i = \underline{-3,1820 - 3,1820i}\end{aligned}$$

4. $b + c$.

$$\underline{b + c} = (\sqrt{2} + \sqrt{2}i) + \frac{3}{2}i = \sqrt{2} + \left(\sqrt{2} + \frac{3}{2}\right)i = \underline{1,4142 + 2,9142i}$$



CAPÍTULO 9

Análisis de Fourier

9.1. Desarrollo en serie de Fourier

Cualquier función periódica $f_p(t)$ con periodo T_0 se puede escribir mediante la siguiente **ecuación de síntesis**:

$$f_p(t) = \frac{a_0}{T_0} + \frac{2}{T_0} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\omega_n t) + \frac{2}{T_0} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\omega_n t) = \frac{1}{T_0} \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{j\omega_n t}$$

en donde los coeficientes vienen dados por las siguientes ecuaciones (**ecuaciones de análisis**):

$$\begin{aligned} a_0 &= \int_0^{T_0} f_p(t) dt; \\ a_n &= \int_0^{T_0} f_p(t) \cos(\omega_n t) dt; \\ b_n &= \int_0^{T_0} f_p(t) \sin(\omega_n t) dt; \\ c_n &= \int_0^{T_0} f_p(t) e^{-j\omega_n t} dt; \end{aligned}$$

9.2. Transformada discreta de fourier

La transformada de Fourier de una secuencia periódica $\{f_k\}_{k=0}^{\infty}$ es otra sucesión $\{c_l\}_{l=0}^{\infty}$, cada uno de cuyos términos es un número complejo calculado como:

$$c_l = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N f_n e^{-\frac{2\pi j}{N} nl}$$



que es la ecuación de análisis para secuencias periódicas de periodo N . La ecuación de síntesis correspondiente viene dada por:

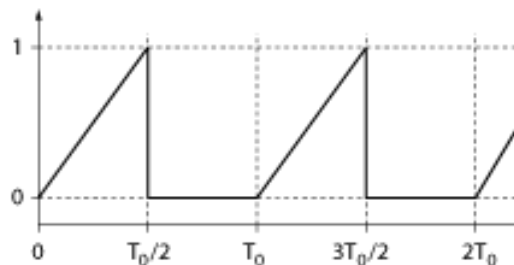
$$f_k = \sum_{l=0}^{N-1} c_l e^{\frac{2\pi j}{N} kl}$$

9.3. Ejercicios

Ejercicio 90: Junio de 2004.

(2 puntos) Calcule los coeficientes de la serie de Fourier de la función periódica de periodo $T_0 = 1$ definida como:

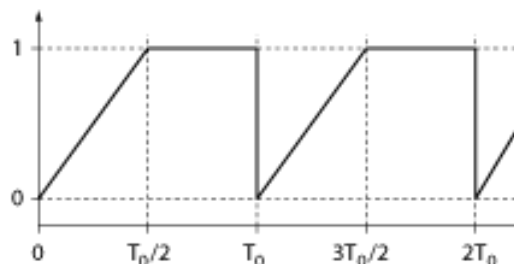
$$f(x) = \begin{cases} 2t & 0 \leq t \leq \frac{T_0}{2} \\ 0 & \frac{T_0}{2} < t < T_0 \end{cases}$$



Ejercicio 91: Septiembre de 2004.

(2 puntos) Calcule los coeficientes de la serie de Fourier de la función periódica de periodo $T_0 = 1$ definida como:

$$f(x) = \begin{cases} 2t & 0 \leq t \leq \frac{T_0}{2} \\ 1 & \frac{T_0}{2} < t < T_0 \end{cases}$$

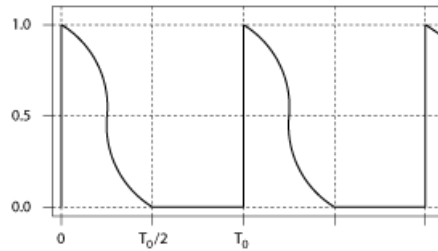




Ejercicio 92: Junio de 2005.

(2 puntos) Calcule los coeficientes de la serie de Fourier de la función periódica de periodo $T_0 = 1$ definida como:

$$f_p(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 + \cos(2\pi t)) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}T_0 \\ 0 & \frac{1}{2}T_0 < t < T_0 \end{cases}$$



Las siguientes expresiones pueden ser de utilidad:

$$\cos(\alpha) = \frac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2};$$

$$\begin{aligned} \cos(\alpha)\cos(\beta) &= \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)); \\ \sin(\alpha)\cos(\beta) &= \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)); \end{aligned}$$

Ejercicio 93: Septiembre de 2005.

(2 puntos) Calcule la transformada discreta de Fourier (DFT) de la secuencia periódica:

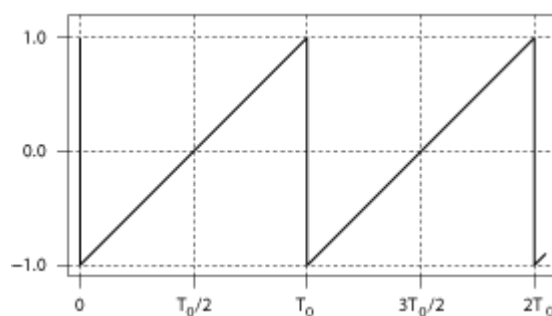
$$\{f_k\} = \{0, 0, 1, 1, \dots\}$$

Ejercicio 94: Junio de 2006.



(2 puntos) Calcule los coeficientes de la serie de Fourier y construya la ecuación de síntesis de la función periódica de periodo $T_0 = 1$ definida como:

$$f_p(t) = 2t - 1 \quad (0 \leq t \leq T_0)$$



Ejercicio 95: Septiembre de 2006.

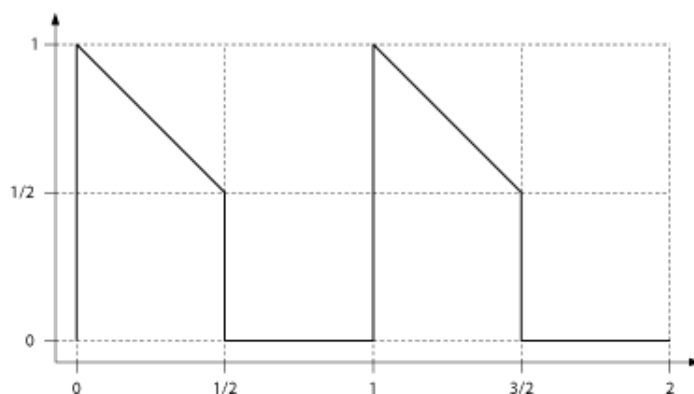
(2 puntos) Calcule los coeficientes de la serie de Fourier y construya la ecuación de síntesis de la función periódica de periodo $T_0 = 2\pi$ definida como:

$$f_p(t) = -(t - \pi)^2, \quad t \in [0, 2\pi]$$

Ejercicio 96: Junio de 2007.

(2 puntos) Calcule los coeficientes de la serie de Fourier y construya la ecuación de síntesis de la función periódica de periodo $T_0 = 1$ definida como:

$$f_p(t) = \begin{cases} (1 - t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 0, & \frac{1}{2} < t < 1 \end{cases}$$



Ejercicio 97: Junio de 2007.

(1 punto) Calcule la transformada discreta de Fourier (DFT) de la secuencia periódica:

$$\{f_k\} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, 0, 0, 1, \frac{1}{2}, 0, 0, 1, \frac{1}{2}, 0, 0, \dots \right\}$$

Ejercicio 98: Septiembre 2003

(2 puntos) Calcule la transformada discreta de Fourier (DFT) de la secuencia periódica:

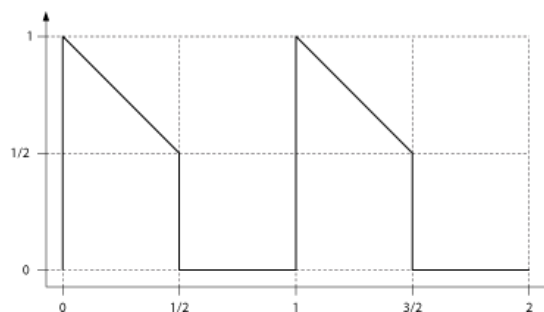
$$\{f_k\} = \{0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \dots\}$$

Ejercicio 99: Septiembre de 2007.



(**2 punts**) Calcule los coeficientes de la serie de Fourier y construya la ecuación de síntesis de la función periódica de periodo $T_0 = 1$ definida como:

$$f_p(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ t, & \frac{1}{2} < t < 1 \end{cases}$$



Ejercicio 100: Septiembre de 2007.

(**1 punt**) Calcule la transformada discreta de Fourier (DFT) de la secuencia periódica:

$$\{f_k\} = \left\{ 0, 0, \frac{1}{2}, 1, 0, 0, \frac{1}{2}, 1, 0, 0, \frac{1}{2}, 1, \dots \right\}$$

La transformada de Fourier de una secuencia periódica $\{f_k\}_{k=0}^{\infty}$ es otra sucesión $\{c_l\}_{l=0}^{\infty}$, en donde cada uno de los términos es un número complejo calculado como:

$$c_l = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-\frac{2\pi j}{N} nl}$$

que es la ecuación de análisis para secuencias periódicas de periodo N . La ecuación de síntesis correspondiente viene dada por:

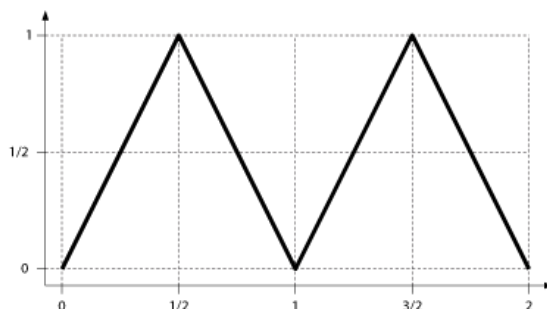
$$f_k = \sum_{l=0}^{N-1} c_l e^{\frac{2\pi j}{N} kl}$$



Ejercicio 101: Junio de 2008.

(2.0 punts) Calcule los coeficientes de la serie de Fourier y construya la ecuación de síntesis de la función periódica de periodo $T_0 = 1$ definida como:

$$f_p(t) = \begin{cases} 2t, & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 2 - 2t, & \frac{1}{2} < t < 1 \end{cases}$$



Ejercicio 102: Junio de 2008.

(1.5 punts) Calcule la transformada discreta de Fourier (DFT) de la secuencia periódica:

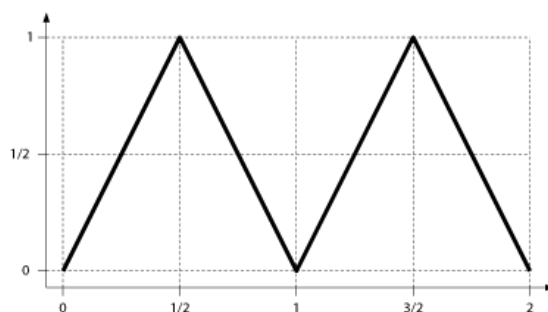
$$\{f_k\} = \left\{ 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, \dots \right\}$$

Ejercicio 103: Septiembre de 2008.

(2.0 punts) Calcule los coeficientes de la serie de Fourier y construya la ecuación de síntesis de la función periódica de periodo $T_0 = 1$ definida como:



$$f_p(t) = \begin{cases} 2t, & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{2} < t < 1 \end{cases}$$



Ejercicio 104: Septiembre de 2008.

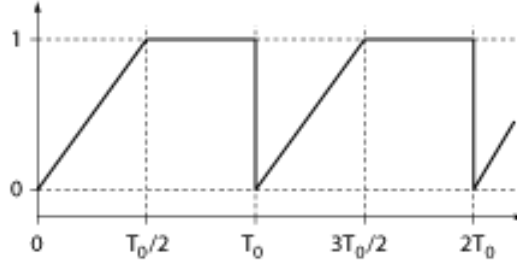
(1.5 punts) Calcule la transformada discreta de Fourier (DFT) de la secuencia periódica:

$$\{f_k\} = \{0, 2, 0, -2, 0, 2, 0, -2, \dots\}$$

Ejercicio 105: Febrero de 2007.

(2 puntos) Calcule los coeficientes de la serie de Fourier de la función periódica de periodo $T_0 = 1$ definida como:

$$f(x) = \begin{cases} 2t & 0 \leq t \leq \frac{T_0}{2} \\ 1 & \frac{T_0}{2} < t < T_0 \end{cases}$$



Respuestas

Respuesta al Ejercicio 90

Caso A. Utilizando la forma real de las ecuaciones de Fourier:

$$a_0 = \int_0^{T_0} f_p(t) dt = \int_0^{1/2} 2t dt + \int_{1/2}^1 0 dt = 2 \left[\frac{1}{2} t^2 \right]_0^{1/2} = \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \int_0^{T_0} f_p(t) \cos(\omega_n t) dt = \int_0^{1/2} 2t \cos(\omega_n t) dt + \int_{1/2}^1 0 \cos(\omega_n t) dt = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} u = t; \quad du = dt \\ dv = \cos(\omega_n t) dt; \quad v = \frac{1}{\omega_n} \sin(\omega_n t) \end{array} \right\} = \left[\frac{2t}{\omega_n} \sin(\omega_n t) \right]_0^{1/2} - \frac{2}{\omega_n} \int_0^{1/2} \sin(\omega_n t) dt = \\ &= \frac{2}{\omega_n} [t \sin(\omega_n t)]_0^{1/2} + \frac{2}{\omega_n^2} [\cos(\omega_n t)]_0^{1/2} = \frac{2}{\omega_n} \left(\frac{1}{2} \sin(\omega_n/2) - 0 \sin(0) \right) + \frac{2}{\omega_n^2} (\cos(\omega_n/2) - \cos(0)) = \\ &= \frac{1}{\pi n} \left(\frac{1}{2} \underbrace{\sin(n\pi)}_{=0} \right) + \frac{1}{2\pi^2 n^2} \left(\underbrace{\cos(n\pi)}_{=(-1)^n} - 1 \right) = \frac{1}{2\pi^2 n^2} ((-1)^n - 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \int_0^{T_0} f_p(t) \sin(\omega_n t) dt = \int_0^{1/2} 2t \sin(\omega_n t) dt + \int_{1/2}^1 0 \sin(\omega_n t) dt = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} u = t; \quad du = dt \\ dv = \sin(\omega_n t) dt; \quad v = -\frac{1}{\omega_n} \cos(\omega_n t) \end{array} \right\} = \left[-\frac{2t}{\omega_n} \cos(\omega_n t) \right]_0^{1/2} + \frac{2}{\omega_n} \int_0^{1/2} \cos(\omega_n t) dt = \\ &= -\frac{2}{\omega_n} [t \cos(\omega_n t)]_0^{1/2} + \frac{2}{\omega_n^2} [\sin(\omega_n t)]_0^{1/2} = -\frac{2}{\omega_n} \left(\frac{1}{2} \cos(\omega_n/2) - 0 \cos(0) \right) + \frac{2}{\omega_n^2} (\sin(\omega_n/2) - \sin(0)) = \\ &= -\frac{1}{\pi n} \left(\frac{1}{2} \underbrace{\cos(n\pi)}_{=(-1)^n} \right) + \frac{1}{2\pi^2 n^2} \left(\underbrace{\cos(n\pi)}_{=0} - 0 \right) = -\frac{(-1)^n}{2\pi n} \end{aligned}$$



Por último, sustituyendo en la ecuación de síntesis, obtenemos:

$$\begin{aligned} f_p(t) &= \frac{1}{4} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi^2 n^2} ((-1)^n - 1) \cos(2\pi n t) - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2\pi n} \sin(2\pi n t) \\ &= \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\pi^2 n^2} ((-1)^n - 1) \cos(2\pi n t) - \frac{(-1)^n}{\pi n} \sin(2\pi n t) \right] \end{aligned}$$

Caso B. Utilizando la forma compleja de los coeficientes de la transformada de Fourier:

$$\begin{aligned} C_n &= \int_0^{T_0} f_p(t) e^{-j\omega_n t} dt = 2 \int_0^{1/2} t e^{-j\omega_n t} dt + \int_{1/2}^1 0 e^{-j\omega_n t} dt = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} u = t; \quad du = dt \\ dv = e^{-j\omega_n t} dt; \quad v = -\frac{1}{j\omega_n} e^{-j\omega_n t} \end{array} \right\} = 2 \left[-\frac{t}{j\omega_n} e^{-j\omega_n t} \right]_0^{1/2} + \frac{2}{j\omega_n} \int_0^{1/2} e^{-j\omega_n t} dt = \\ &= -\frac{2}{j\omega_n} [e^{-j\omega_n t}]_0^{1/2} - \frac{2}{j^2 \omega_n^2} [e^{-j\omega_n t}]_0^{1/2} = \frac{2j}{\omega_n} [e^{-j\omega_n t}]_0^{1/2} + \frac{2}{\omega_n^2} [e^{-j\omega_n t}]_0^{1/2} = \\ &= \frac{2j}{\omega_n} \left(\frac{1}{2} e^{-j\omega_n/2} - 0 e^0 \right) + \frac{2}{\omega_n^2} (e^{-j\omega_n/2} - e^0) = \frac{2j}{2\pi n} \left(\frac{1}{2} \underbrace{e^{-j\pi n}}_{=(-1)^n} \right) + \frac{2}{4\pi^2 n^2} (\underbrace{e^{-j\pi n}}_{=(-1)^n} - 1) = \\ &= \frac{(-1)^n}{2\pi n} j + \frac{1}{2\pi^2 n^2} ((-1)^n - 1) \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $C_n = a_n + jb_n$, podemos escribir:

$$a_n = \frac{1}{2\pi^2 n^2} ((-1)^n - 1) \quad \text{y} \quad b_n = \frac{(-1)^n}{2\pi n}$$

Finalmente, sustituyendo en la ecuación de síntesis real y teniendo en cuenta que $a_0 = 1/4$ como ya habíamos calculado, obtenemos:

$$\begin{aligned} f_p(t) &= \frac{1}{4} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi^2 n^2} ((-1)^n - 1) \cos(2\pi n t) - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2\pi n} \sin(2\pi n t) \\ &= \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\pi^2 n^2} ((-1)^n - 1) \cos(2\pi n t) - \frac{(-1)^n}{\pi n} \sin(2\pi n t) \right] \end{aligned}$$

Respuesta al Ejercicio 91



$$a_0 = \int_0^{T_0} f_p(t) dt = \int_0^{1/2} 2t dt + \int_{1/2}^1 1 dt = 2 \left[\frac{1}{2} t^2 \right]_0^{1/2} + [t]_{1/2}^1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

Utilizando la forma compleja de los coeficientes de la transformada de Fourier, calculamos:

$$\begin{aligned} C_n &= \int_0^{T_0} f_p(t) e^{-j\omega_n t} dt = \underbrace{2 \int_0^{1/2} t e^{-j\omega_n t} dt}_{I_1} + \underbrace{\int_{1/2}^1 e^{-j\omega_n t} dt}_{I_2} \\ I_1 &= \left\{ \begin{array}{l} u = t; \quad du = dt \\ dv = e^{-j\omega_n t} dt; \quad v = -\frac{1}{j\omega_n} e^{-j\omega_n t} \end{array} \right\} = 2 \left[-\frac{t}{j\omega_n} e^{-j\omega_n t} \right]_0^{1/2} + \frac{2}{j\omega_n} \int_0^{1/2} e^{-j\omega_n t} dt = \\ &= -\frac{2}{j\omega_n} [e^{-j\omega_n t}]_0^{1/2} - \frac{2}{j^2 \omega_n^2} [e^{-j\omega_n t}]_0^{1/2} = \frac{2j}{\omega_n} [e^{-j\omega_n t}]_0^{1/2} + \frac{2}{\omega_n^2} [e^{-j\omega_n t}]_0^{1/2} = \\ &= \frac{2j}{\omega_n} \left(\frac{1}{2} e^{-j\omega_n/2} - 0e^0 \right) + \frac{2}{\omega_n^2} (e^{-j\omega_n/2} - e^0) = \frac{2j}{2\pi n} \left(\frac{1}{2} \underbrace{e^{-j\pi n}}_{=(-1)^n} \right) + \frac{2}{4\pi^2 n^2} (\underbrace{e^{-j\pi n}}_{=(-1)^n} - 1) = \\ &= \frac{(-1)^n}{2\pi n} j + \frac{1}{2\pi^2 n^2} ((-1)^n - 1) \\ I_2 &= -\frac{1}{j\omega_n} [e^{-j\omega_n t}]_{1/2}^1 = -\frac{1}{j\omega_n} (e^{-j\omega_n} - e^{-j\omega_n/2}) = \frac{j}{\omega_n} (e^{-j\omega_n} - e^{-j\omega_n/2}) = \\ &= \frac{j}{2\pi n} (\underbrace{e^{-j2\pi n}}_{=1} - \underbrace{e^{-j\pi n}}_{=(-1)^n}) = \frac{(1 - (-1)^n)}{2\pi n} j \end{aligned}$$

Por tanto:

$$C_n = I_1 + I_2 = \frac{1}{2\pi^2 n^2} ((-1)^n - 1) + \frac{j}{2\pi n} (-1)^n + \frac{j}{2\pi n} (1 - (-1)^n) = \frac{1}{2\pi^2 n^2} ((-1)^n - 1) + \frac{j}{2\pi n}$$

Teniendo en cuenta que $C_n = a_n - jb_n$, podemos escribir:

$$a_n = \frac{1}{2\pi^2 n^2} ((-1)^n - 1) \quad \text{y} \quad b_n = -\frac{1}{2\pi n}$$

Finalmente, sustituyendo en la ecuación de síntesis real, obtenemos:

$$\begin{aligned} f_p(t) &= \frac{3}{4} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi^2 n^2} ((-1)^n - 1) \cos(2\pi n t) - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi n} \sin(2\pi n t) \\ &= \frac{3}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\pi^2 n^2} ((-1)^n - 1) \cos(2\pi n t) - \frac{1}{\pi n} \sin(2\pi n t) \right] \end{aligned}$$



Respuesta al Ejercicio 92

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \int_0^{T_0} f_p(t) dt = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} (1 + \cos(2\pi t)) dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 0 dt = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} dt + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \cos(2\pi t) dt = \\
 &= \frac{1}{2} [t]_0^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi} [\sin(2\pi t)]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 0 \right) + \frac{1}{4\pi} \left(\underbrace{\sin(\pi)}_{=0} - \underbrace{\sin(0)}_{=0} \right) = \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

Utilizando la forma compleja de los coeficientes de la transformada de Fourier, calculamos primero C_1 :

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \int_0^1 f_p t e^{-j\omega_0 t} dt = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} (1 + \cos(2\pi t)) e^{-j\omega_0 t} dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 0 e^{-j\omega_0 t} dt = \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-j2\pi t} dt + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \cos(2\pi t) e^{-j2\pi t} dt = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-j2\pi t} dt + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{e^{j2\pi t} + e^{-j2\pi t}}{2} e^{-j2\pi t} dt = \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-j2\pi t} dt + \frac{1}{4} \int_0^{\frac{1}{2}} e^{j2\pi t} e^{-j2\pi t} dt + \frac{1}{4} \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-j2\pi t} e^{-j2\pi t} dt = \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-j2\pi t} dt + \frac{1}{4} \int_0^{\frac{1}{2}} e^0 dt + \frac{1}{4} \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-j4\pi t} dt = -\frac{1}{j4\pi} [e^{-j2\pi t}]_0^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4} [t]_0^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{j16\pi} [e^{-j4\pi t}]_0^{\frac{1}{2}} = \\
 &= \frac{j}{4\pi} (e^{-j\pi} - e^0) + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} - 0 \right) + \frac{j}{16\pi} (e^{-j2\pi} - e^0) = \frac{j}{4\pi} ((-1) - 1) + \frac{1}{8} + \frac{j}{16\pi} (1 - 1) = \\
 &= \frac{1}{8} - \frac{1}{2\pi} j
 \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $C_1 = a_1 - b_1 j$, podemos escribir:

$$a_1 = \frac{1}{8}; \quad b_1 = \frac{1}{2\pi}$$



Del mismo modo, calculamos C_n :

$$\begin{aligned}
 C_n &= \int_0^1 f_p t e^{-j w_n t} dt = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} (1 + \cos(2\pi t)) e^{-j w_n t} dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 0 e^{-j w_n t} dt = \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-j 2\pi n t} dt + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \cos(2\pi t) e^{-j 2\pi n t} dt = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-j 2\pi n t} dt + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{e^{j 2\pi t} + e^{-j 2\pi t}}{2} e^{-j 2\pi n t} dt = \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-j 2\pi n t} dt + \frac{1}{4} \int_0^{\frac{1}{2}} e^{j 2\pi t} e^{-j 2\pi n t} dt + \frac{1}{4} \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-j 2\pi t} e^{-j 2\pi n t} dt = \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-j 2\pi n t} dt + \frac{1}{4} \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-j 2\pi(n-1)t} dt + \frac{1}{4} \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-j 2\pi(n+1)t} dt = \\
 &= -\frac{1}{j 4\pi n} [e^{-j 2\pi n t}]_0^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{j 8\pi(n-1)} [e^{-j 2\pi(n-1)t}]_0^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{j 8\pi(n+1)} [e^{-j 2\pi(n+1)t}]_0^{\frac{1}{2}} = \\
 &= \frac{j}{4\pi n} (e^{-j \pi n} - e^0) + \frac{j}{8\pi(n-1)} (e^{-j \pi(n-1)} - e^0) + \frac{j}{8\pi(n+1)} (e^{-j \pi(n+1)} - e^0) = \\
 &= \frac{j}{4\pi n} ((-1)^n - 1) + \frac{j}{8\pi(n-1)} ((-1)^{n-1} - 1) + \frac{j}{8\pi(n+1)} ((-1)^{n+1} - 1) = \\
 &= \frac{j}{4\pi} \left[\frac{1}{n} ((-1)^n - 1) + \left(\frac{1}{2(n-1)} + \frac{1}{2(n+1)} \right) ((-1)^{n+1} - 1) \right]
 \end{aligned}$$

Para n par, tenemos:

$$\begin{aligned}
 C_n &= \frac{j}{4\pi} \left[\frac{1}{n} 0 - 2 \left(\frac{1}{2(n-1)} + \frac{1}{2(n+1)} \right) \right] = -\frac{j}{2\pi} \left(\frac{n}{n^2 - 1} \right) \\
 b_n &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{n}{n^2 - 1} \right)
 \end{aligned}$$

mientras que para n impar, obtenemos:

$$\begin{aligned}
 C_n &= \frac{j}{4\pi} \left[\frac{1}{n} (-2) + \left(\frac{1}{2(n-1)} + \frac{1}{2(n+1)} \right) 0 \right] = -\frac{j}{2\pi n} \\
 b_n &= \frac{1}{2\pi n}
 \end{aligned}$$

Finalmente, sustituyendo en la ecuación real de síntesis, tenemos:

$$f_p(t) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cos(2\pi t) + \frac{1}{\pi} \sin(2\pi t) + \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2i+1} \sin(2\pi(2i+1)t) + \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(2i)}{(2i)^2 - 1} \sin(2\pi(2i)t)$$

**Respuesta al Ejercicio 93**

Se trata de una secuencia periódica de periodicidad 4, por lo que calculamos los coeficientes c_l del siguiente modo:

$$\begin{aligned}
 c_0 &= \frac{1}{4}(0 \cdot e^{\frac{-2\pi j}{4}0 \cdot 0} + 0 \cdot e^{\frac{-2\pi j}{4}1 \cdot 0} + 1 \cdot e^{\frac{-2\pi j}{4}2 \cdot 0} + 1 \cdot e^{\frac{-2\pi j}{4}3 \cdot 0}) = \frac{1}{4}(0 + 0 + 1 + 1) = \frac{1}{2} \\
 c_1 &= \frac{1}{4}(0 \cdot e^{\frac{-2\pi j}{4}0 \cdot 1} + 0 \cdot e^{\frac{-2\pi j}{4}1 \cdot 1} + 1 \cdot e^{\frac{-2\pi j}{4}2 \cdot 1} + 1 \cdot e^{\frac{-2\pi j}{4}3 \cdot 1}) = \\
 &= \frac{1}{4}(0 + 0 + \underbrace{e^{-\pi j}}_{-1} + \underbrace{e^{-\frac{3}{2}\pi j}}_{-j}) = \frac{1}{4}(-1 + j) \\
 c_2 &= \frac{1}{4}(0 \cdot e^{\frac{-2\pi j}{4}0 \cdot 2} + 0 \cdot e^{\frac{-2\pi j}{4}1 \cdot 2} + 1 \cdot e^{\frac{-2\pi j}{4}2 \cdot 2} + 1 \cdot e^{\frac{-2\pi j}{4}3 \cdot 2}) = \\
 &= \frac{1}{4}(0 + 0 + \underbrace{e^{-2\pi j}}_{1} + \underbrace{e^{-3\pi j}}_{-1}) = \frac{1}{4}(-1 + 1) = 0 \\
 c_3 &= \frac{1}{4}(0 \cdot e^{\frac{-2\pi j}{4}0 \cdot 3} + 0 \cdot e^{\frac{-2\pi j}{4}1 \cdot 3} + 1 \cdot e^{\frac{-2\pi j}{4}2 \cdot 3} + 1 \cdot e^{\frac{-2\pi j}{4}3 \cdot 3}) = \\
 &= \frac{1}{4}(0 + 0 + \underbrace{e^{-3\pi j}}_{-1} + \underbrace{e^{-\frac{9}{2}\pi j}}_{-j}) = \frac{1}{4}(-1 - j)
 \end{aligned}$$

Respuesta al Ejercicio 94

Primero calculamos el coeficiente a_0 :

$$a_0 = \int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 (2t - 1)dt = \int_0^1 2tdt - \int_0^1 dt = [t^2]_0^1 - [t]_0^1 = 0$$

Ahora vamos a calcular el término complejo C_n ya que resulta algo más sencillo:

$$C_n = \int_0^1 f(t)e^{-i\omega_n t}dt = \int_0^1 (2t - 1)e^{-i\omega_n t}dt = 2 \underbrace{\int_0^1 te^{-i\omega_n t}dt}_{(A)} - \underbrace{\int_0^1 e^{-i\omega_n t}dt}_{(B)} \quad (9.1)$$

Resolvemos cada una de las integrales anteriores por separado:



(A) Integramos por partes ($\int u dv = uv - \int v du$):

$$\begin{aligned}
 (A) &= \int_0^1 t e^{-i\omega_n t} dt = \left\{ \begin{array}{l} u = t; \quad du = dt \\ dv = e^{-i\omega_n t}; \quad v = -\left(\frac{1}{i\omega_n}\right) e^{-i\omega_n t} \end{array} \right\} = \\
 &= \left[-\left(\frac{1}{i\omega_n}\right) t e^{-i\omega_n t} \right]_0^1 - \left(-\frac{1}{i\omega_n} \right) \int_0^1 e^{-i\omega_n t} dt = \\
 &= \left[-\left(\frac{1}{i\omega_n}\right) t e^{-i\omega_n t} \right]_0^1 - \left(-\frac{1}{i\omega_n} \right)^2 [e^{-i\omega_n t}]_0^1 \quad (9.2)
 \end{aligned}$$

teniendo en cuenta que en este caso $\omega_n = 2\pi n$ y sustituyendo en (9.2), tenemos:

$$\begin{aligned}
 &\left[-\left(\frac{1}{i2\pi n}\right) t e^{-i2\pi n t} \right]_0^1 - \left(-\frac{1}{i2\pi n} \right)^2 [e^{-i2\pi n t}]_0^1 = \\
 &= -\left(\frac{1}{i2\pi n}\right) (1 \underbrace{e^{-i2\pi n}}_1) - \left(-\frac{1}{i2\pi n} \right)^2 (\underbrace{e^{-i2\pi n}}_1 - 1) = -\frac{1}{i2\pi n} = \frac{i}{2\pi n}
 \end{aligned}$$

(B) Esta integral es inmediata:

$$(B) = \int_0^1 e^{-i\omega_n t} dt = -\left(\frac{1}{i\omega_n}\right) [e^{-i\omega_n t}]_0^1 = -\left(\frac{1}{i2\pi n}\right) (\underbrace{e^{-i2\pi n}}_1 - \underbrace{e^0}_1) = 0$$

Sustituyendo las integrales (A) y (B) en (9.1), tenemos:

$$C_n = 2 \frac{i}{2\pi n} = \frac{i}{\pi n}$$

Teniendo en cuenta que $C_n = a_n - b_n i$, podemos identificar:

$$\begin{cases} a_n = 0 \\ b_n = -\frac{1}{\pi n} \end{cases}$$

por lo que sustituyendo en la ecuación de síntesis, tenemos:

$$\begin{aligned}
 f_p(t) &= \frac{a_0}{T_0} + \frac{2}{T_0} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\omega_n t) + \frac{2}{T_0} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\omega_n t) = \\
 &= 0 + \frac{2}{1} \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{\pi n} \right) \sin(\omega_n t) = -\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(2\pi n t)
 \end{aligned}$$

**Respuesta al Ejercicio 95**

Primero calculamos el coeficiente a_0 como:

$$\begin{aligned} a_0 &= \int_0^{T_0} f_p(t) dt = - \int_0^{2\pi} (t - \pi)^2 dt = -\frac{1}{3} [(t - \pi)^3]_0^{2\pi} = \\ &= -\frac{1}{3} ((2\pi - \pi)^3 - (0 - \pi)^3) = -\frac{1}{3} (\pi^3 + \pi^3) = -\frac{2}{3} \pi^3 \end{aligned}$$

Ahora calculamos el término C_n de acuerdo a la expresión:

$$C_n = \int_0^{T_0} f_p(t) e^{-i\omega_n t} dt = - \underbrace{\int_0^{2\pi} (t - \pi)^2 e^{-i\omega_n t} dt}_{(I)} \quad (9.3)$$

Para resolver la integral (I) aplicaremos integración por partes ($\int_a^b u dv = [uv]_a^b - \int_a^b v du$):

$$\begin{aligned} (I) &= \left\{ \begin{array}{l} u = (t - \pi)^2; \quad du = 2(t - \pi) dt \\ dv = e^{-i\omega_n t}; \quad v = -\frac{1}{i\omega_n} e^{-i\omega_n t} \end{array} \right\} = \\ &= \underbrace{\left[\frac{(t - \pi)^2}{i\omega_n} e^{-i\omega_n t} \right]_0^{2\pi}}_{(A)} + \frac{2}{i\omega_n} \underbrace{\int_0^{2\pi} (t - \pi) e^{-i\omega_n t} dt}_{(B)} \quad (9.4) \end{aligned}$$

El término (A) es fácilmente calculable teniendo en cuenta que $T_0 = 2\pi$, $\omega_0 = \frac{T_0}{2\pi} = 1$, $\omega_n = n\omega_0 = n$, por lo que sustituyendo:

$$(A) = \left[\frac{(t - \pi)^2}{in} e^{-int} \right]_0^{2\pi} = \left(\frac{(2\pi - \pi)^2}{in} \underbrace{e^{-i2\pi n}}_{=1} - \frac{(0 - \pi)^2}{in} \underbrace{e^0}_{=1} \right) = \left(\frac{\pi^2}{in} - \frac{\pi^2}{in} \right) = 0$$

Para resolver la integral (B) volvemos a aplicar integración por partes:

$$\begin{aligned} (B) &= \left\{ \begin{array}{l} u = (t - \pi); \quad du = dt \\ dv = e^{-i\omega_n t}; \quad v = -\frac{1}{i\omega_n} e^{-i\omega_n t} \end{array} \right\} = - \left[\frac{(t - \pi)}{i\omega_n} e^{-i\omega_n t} \right]_0^{2\pi} + \frac{1}{i\omega_n} \int_0^{2\pi} e^{-i\omega_n t} dt = \\ &= - \left[\frac{(t - \pi)}{i\omega_n} e^{-i\omega_n t} \right]_0^{2\pi} - \left(\frac{1}{i\omega_n} \right)^2 [e^{-i\omega_n t}]_0^{2\pi} \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta de nuevo que en este caso $\omega_n = n$ y sustituyendo, tenemos:

$$\begin{aligned} (B) &= - \left[\frac{(t - \pi)}{in} e^{-int} \right]_0^{2\pi} - \left(\frac{1}{in} \right)^2 [e^{-int}]_0^{2\pi} = \\ &= - \left[\frac{(2\pi - \pi)}{in} \underbrace{e^{-i2\pi n}}_{=1} - \frac{(0 - \pi)}{in} \underbrace{e^0}_{=1} \right] - \left(\frac{1}{in} \right)^2 \left[\underbrace{e^{-i2\pi n}}_{=1} - \underbrace{e^0}_{=1} \right] = \\ &= - \left[\left(\frac{\pi}{in} \right) - \left(\frac{-\pi}{in} \right) \right] - 0 = -\frac{2\pi}{in} \end{aligned}$$



Sustituyendo los valores de (A) y (B) en la ecuación 9.4, obtenemos:

$$(I) = 0 + \left(\frac{2}{in}\right) \left(-\frac{2\pi}{in}\right) = -\frac{4\pi}{i^2 n^2} = \frac{4\pi}{n^2}$$

en donde hemos tenido en cuenta que $i^2 = -1$. Finalmente tenemos:

$$\underline{C_n = \frac{4\pi}{n^2}}$$

Si ahora recordamos que $C_n = a_n - ib_n$ e identificamos, obtenemos:

$$\begin{cases} a_n = \frac{4\pi}{n^2} \\ \underline{b_n = 0} \end{cases}$$

por lo que sustituyendo en la ecuación de síntesis tenemos:

$$f_p(t) = \frac{a_0}{T_0} + \frac{2}{T_0} \sum_{i=1}^{\infty} a_n \cos(\omega_n t) = -\frac{2/3\pi^3}{2\pi} + \frac{2}{2\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{4\pi}{n^2} \cos(nt) = \underline{-\frac{1}{3}\pi^2 + 4 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos(nt)}$$

Respuesta al Ejercicio 96

Teniendo en cuenta que en este caso $T_0 = 1$, calculamos el coeficiente a_0 como

$$\begin{aligned} a_0 &= \int_0^1 f_p(t) dt = \int_0^{\frac{1}{2}} (1-t) dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 0 dt = \int_0^{\frac{1}{2}} dt - \int_0^{\frac{1}{2}} t dt = [t]_0^{\frac{1}{2}} - \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \\ &= \left(\frac{1}{2} - 0\right) - \left(\frac{1/4}{2} - \frac{0}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \boxed{\frac{3}{8}} \end{aligned}$$

Ahora calculamos el término C_n de acuerdo con la expresión

$$C_n = \int_0^1 f_p(t) e^{-i\omega_n t} dt = \int_0^{\frac{1}{2}} (1-t) e^{-i\omega_n t} dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 0 e^{-i\omega_n t} dt = \underbrace{\int_0^{\frac{1}{2}} (1-t) e^{-i\omega_n t} dt}_I$$



Podemos resolver la ecuación I por partes:

$$\begin{aligned} I &= \left[\begin{array}{l} u = (1-t); \quad du = -dt \\ dv = e^{-i\omega_n t} dt; \quad v = \left(-\frac{1}{i\omega_n}\right) e^{-i\omega_n t} \end{array} \right] = \left(-\frac{1}{i\omega_n}\right) [(1-t)e^{-i\omega_n t}]_0^{\frac{1}{2}} - \left(-\frac{1}{i\omega_n}\right) \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-i\omega_n t} (-dt) = \\ &= \left(-\frac{1}{i\omega_n}\right) [(1-t)e^{-i\omega_n t}]_0^{\frac{1}{2}} + \left(-\frac{1}{i\omega_n}\right) \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-i\omega_n t} dt = \left(-\frac{1}{i\omega_n}\right) [(1-t)e^{-i\omega_n t}]_0^{\frac{1}{2}} + \left(-\frac{1}{i\omega_n}\right)^2 [e^{-i\omega_n t}]_0^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Haciendo ahora el cambio $\omega_n = 2\pi n$ y operando,

$$\begin{aligned} I &= \left(-\frac{1}{i2\pi n}\right) [(1-t)e^{-i2\pi nt}]_0^{\frac{1}{2}} + \left(-\frac{1}{i2\pi n}\right)^2 [e^{-i2\pi nt}]_0^{\frac{1}{2}} = \left(-\frac{1}{i2\pi n}\right) \left((1-\frac{1}{2})e^{-i2\pi n \frac{1}{2}} - (1-0)e^{-i2\pi n 0}\right) + \\ &+ \left(\frac{1}{4\pi^2 n^2}\right) (e^{-i2\pi n \frac{1}{2}} - e^{-i2\pi n 0}) = \frac{i}{2\pi n} \left(\frac{1}{2} \underbrace{e^{-i\pi n}}_{(-1)^n} - \underbrace{e^0}_1\right) + \frac{1}{4\pi^2 n^2} \left(\underbrace{e^{-i\pi n}}_{(-1)^n} - \underbrace{e^0}_1\right) = \\ &= \frac{(-1)^n - 1}{4\pi^2 n^2} + \frac{\frac{1}{2}(-1)^n - 1}{2\pi n} i \end{aligned}$$

Si ahora tenemos en cuenta que $C_n = a_n - ib_n$, podemos escribir,

$$\boxed{a_n = \frac{(-1)^n - 1}{4\pi^2 n^2}} \quad \boxed{b_n = -\frac{\frac{1}{2}(-1)^n - 1}{2\pi n}}$$

Con lo que la ecuación se síntesis se puede escribir en la forma:

$$\boxed{f_p(t) = \frac{3}{8} + \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \cos(2\pi nt) - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}(-1)^n - 1}{n} \sin(2\pi nt)}$$

Respuesta al Ejercicio 97

Se trata de una secuencia periódica de periodicidad $N = 4$, por lo que calculamos los coeficientes c_l del siguiente modo:

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{4}(1 \cdot e^{\frac{-2\pi i}{4} 0 \cdot 0} + \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{-2\pi i}{4} 1 \cdot 0} + 0 \cdot e^{\frac{-2\pi i}{4} 2 \cdot 0} + 0 \cdot e^{\frac{-2\pi i}{4} 3 \cdot 0}) = \frac{1}{4}(1 + \frac{1}{2} + 0 + 0) = \boxed{\frac{3}{8}} \\ c_1 &= \frac{1}{4}(1 \cdot e^{\frac{-2\pi i}{4} 0 \cdot 1} + \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{-2\pi i}{4} 1 \cdot 1} + 0 \cdot e^{\frac{-2\pi i}{4} 2 \cdot 1} + 0 \cdot e^{\frac{-2\pi i}{4} 3 \cdot 1}) = \frac{1}{4}(1 + \frac{1}{2} \underbrace{e^{-\frac{1}{2}\pi i}}_{-i} + \underbrace{e^{-\pi i}}_{-1} + \underbrace{e^{-\frac{3}{2}\pi i}}_{-i}) = \boxed{\frac{1}{4} - \frac{1}{8}i} \\ c_2 &= \frac{1}{4}(1 \cdot e^{\frac{-2\pi i}{4} 0 \cdot 2} + \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{-2\pi i}{4} 1 \cdot 2} + 0 \cdot e^{\frac{-2\pi i}{4} 2 \cdot 2} + 0 \cdot e^{\frac{-2\pi i}{4} 3 \cdot 2}) = \frac{1}{4}(1 + \frac{1}{2} \underbrace{e^{-\pi i}}_{-1} + 0 \underbrace{e^{-2\pi i}}_1 + 0 \underbrace{e^{-3\pi i}}_{-1}) = \boxed{\frac{1}{8}} \\ c_3 &= \frac{1}{4}(1 \cdot e^{\frac{-2\pi i}{4} 0 \cdot 3} + \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{-2\pi i}{4} 1 \cdot 3} + 0 \cdot e^{\frac{-2\pi i}{4} 2 \cdot 3} + 0 \cdot e^{\frac{-2\pi i}{4} 3 \cdot 3}) = \frac{1}{4}(1 + \frac{1}{2} \underbrace{e^{-\frac{3}{2}\pi i}}_i + \underbrace{e^{-3\pi i}}_{-1} + \underbrace{e^{-\frac{9}{2}\pi i}}_{-i}) = \boxed{\frac{1}{4} + \frac{1}{8}i} \end{aligned}$$

CAPÍTULO 10

Resolución numérica de ecuaciones diferenciales

10.1. Ejercicios

Cuando se aborda la resolución numérica de una ecuación diferencial por medio de un método como el de Euler, es necesario conocer la expresión de la derivada $y'(t) = f(t, y)$ para poder realizar la integración numérica. Sin embargo hay situaciones en las que esto no es posible. Este puede ser el caso de ecuaciones implícitas en las que no sea sencillo despejar la derivada y' , o en el caso de ecuaciones algebráico-diferenciales, en las que además de la resolución de la ecuación diferencial es necesario que las variables cumplan una relación determinada.

En este ejercicio vamos a ver cómo podemos utilizar las herramientas numéricas de las que disponemos hasta el momento.

Ejercicio 106:

La variación de cierta cantidad con el tiempo t cumple la siguiente ecuación

$$y - t(y')^2 = 2(1 + t^2 y') \quad (10.1)$$

La ecuación (10.1) proporciona una relación entre la función $y(t)$, la va-



riable t , que representa el tiempo, y la derivada de la función $y'(t, y)$, que representa la tasa de variación de y en cada instante de tiempo t y para cada valor de y .

El objetivo es obtener numéricamente la evolución de $y(t)$, $t > 1$, sabiendo que $y(1) = 3$. Para ello vamos a utilizar el método de Euler, con un paso de integración de $h = \Delta t = 0,05$.

Para resolver numéricamente el problema, necesitaremos conocer el valor de $y'(t, y)$ para cada instante de tiempo. Sin embargo, la expresión (10.1) no nos proporciona de forma explícita el valor de la derivada. Por lo tanto, para cada instante de tiempo t_n , aplicaremos el método de Steffensen. Veamos de que manera podemos hacerlo.

En cada instante de tiempo t_n , para poder calcular $y(t_{n+1})$ debemos conocer $y(t_n)$, para aplicar el método de Euler (en este caso, para iniciar el método se nos indica que $t_0 = 1$ y que $y(t_0) = 3$). Si utilizamos la ecuación diferencial, sustituyendo los valores conocidos de t_n e $y(t_n)$, obtenemos

$$y(t_n) - t_n(y'(t_n))^2 = 2(1 + t_n^2 y'(t_n)) \quad (10.2)$$

En la ecuación (10.2), todos los valores son conocidos, salvo $y'(t_n)$, por lo que podemos escribir una ecuación en la que la única variable es $y'(t_n)$. Si operamos para dejar todos los términos a la izquierda de la igualdad, y para agrupar los coeficientes que afectan a la variable, obtenemos:

$$2 - y(t_n) + t_n^2 y'(t_n) + t_n(y'(t_n))^2 = 0 \quad (10.3)$$

o, lo que es lo mismo

$$F(y'(t_n)) = A + B y'(t_n) + C y'(t_n)^2 = 0 \quad (10.4)$$

donde

$$A = 2 - y(t_n); \quad B = t_n^2; \quad C = t_n$$

Por tanto, a cada paso de tiempo, será necesario en primer lugar obtener una aproximación a $y'(t_n)$, resolviendo la ecuación (10.4) por medio del método de Steffensen, y una vez calculada esta aproximación, obtener el valor de $y(t_{n+1})$, por medio del método de Euler:

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + h * y'(t_n)$$

De esta manera, a cada paso de tiempo obtenemos un nuevo valor para la función $y(t_n)$, lo que nos da una nueva función para aplicar el método de Steffensen.



Para iniciar el método de Steffensen, utilizaremos como iterado inicial para calcular $y'(t_n)$ el valor de la derivada en el paso anterior, $y'(t_{n-1})$. En el primer caso, dado que no disponemos de una aproximación anterior, utilizaremos como primer iterado para Steffensen $y'(t_0)_0 = 1,61$. En cada caso, calcularemos sólo dos pasos del método de Steffensen.

Calcular dos pasos del método de Euler para este problema, completando las tablas:

n	t_n	$y(t_n)$	$F(y'(t_n))$	$y'(t_n)$
$n = 0$	$t_0 = 1,0$	$y(t_0) = y(1) = 3,0$	$F(y'(t_0)) = -1 + y'(t_0) + y'(t_0)^2$	
$n = 1$	$t_1 = 1,05$			
$n = 2$	$t_2 = 1,1$		—	—

Método de Euler

k	$y'(t_0)_k$	$F(y'(t_0)_k)$	$F(y'(t_0)_k + F(y'(t_0)_k))$	$F(y'(t_0)_k)^2$
$k = 0$	1,61			
$k = 1$				
$k = 2$		—	—	—

Método de Steffensen, para la función F , en el instante de tiempo t_0

k	$y'(t_1)_k$	$F(y'(t_1)_k)$	$F(y'(t_1)_k + F(y'(t_1)_k))$	$F(y'(t_1)_k)^2$
$k = 0$	$y'(t_0)$			
$k = 1$				
$k = 2$		—	—	—

Método de Steffensen, para la función F , en el instante de tiempo t_1

Ejercicio 107:

Escribir un conjunto de funciones en Matlab para resolver numéricamente el problema anterior.

Ejercicio 108: Junio de 2004.



El crecimiento de una población de helechos del jurásico se rige por el siguiente modelo logístico:

$$p' = \frac{dp}{dt} = p(a - bp)$$

en donde $a = 3,25 \cdot 10^{-3}$, $b = 6,50 \cdot 10^{-8}$ y el tiempo t se mide en años. Sabiendo que $p(0) = 1000$, calcule mediante el método de Runge-Kutta de cuarto orden la solución numérica de dicha ecuación en el intervalo $t = [0, 1000]$ años para $n = 10$ puntos (calcule sólo los cuatro primeros puntos).

Ejercicio 109: Septiembre de 2005.

El coche de Fernando Alonso tiene las siguientes características: Potencia $P = 671130$ vatios (900CV), peso $m = 750$ Kg y coeficiente de rozamiento $K = 71$ Nw·m/s. En el momento de arrancar, $t = 0$, la velocidad v es 0. La aceleración es constante e igual a 10 m/s² desde $t = 0$ hasta $t = 5,78$ segundos, momento en que la velocidad es de $57,8$ m/s (lo que, multiplicando por $3,6$ da la velocidad de 208 Km/h). Desde $t = 5,78$ segundos, y con $v = 57,8$ m/s, la aceleración sigue la siguiente ecuación:

$$v' = \frac{P - Kv^2}{mv}$$

hasta que el bólido alcanza la velocidad máxima. Teniendo en cuenta todos estos datos, integre mediante el método de Heun la ecuación anterior desde $t_0 = 5,78$ segundos y $v_0 = 57,8$ m/s hasta $t_f = 5,78 + 2$ segundos utilizando incrementos de $0,2$ segundos ¿Cuál es la velocidad del vehículo en ese instante?

El método de Heun resuelve ecuaciones diferenciales mediante:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}[f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, z_{k+1})]$$

en donde:

$$z_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k)$$

para $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$.



Ejercicio 110: Junio de 2006.

El crecimiento de una población de bacterias se rige por el siguiente modelo logístico:

$$p' = p(a - bp)$$

en donde p es la población de bacterias en un instante dado, $p' = \frac{dp}{dt}$, es la velocidad de cambio de la población, $a = 3,25$, $b = 5,00 \cdot 10^{-4}$ y el tiempo t se mide en horas. Sabiendo que $p(0) = 30$ bacterias, calcule mediante el método de Heun la solución numérica de dicha ecuación en el intervalo $t = [0, 3]$ horas empleando paso $h = 1$ hora.

El método de Heun resuelve ecuaciones diferenciales mediante:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}[f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, z_{k+1})]$$

en donde:

$$z_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k)$$

para $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$.

Ejercicio 111: Junio de 2008.

Se supone que la curva de población $P(t)$ de una determinada ciudad obedece a la ecuación diferencial logística:

$$P' = P - t^2 + 1$$

Sea t el tiempo transcurrido en siglos y P el número de habitantes en millones. Calcule la población a lo largo de 2 siglos utilizando el método de integración de Heun partiendo de $P(0) = 0,5$ y empleando un paso $h = 1/2$ siglo. ¿Cuál sería el número de habitantes al cabo de 2 siglos?

El método de Heun resuelve ecuaciones diferenciales mediante:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}[f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, z_{k+1})]$$



en donde:

$$z_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k)$$

para $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$.

Ejercicio 112: Septiembre de 2008.

La formula que da la aceleracion de un Formula 1 que acelera a toda potencia es:

$$v' = \frac{P - Kv^2}{mv}$$

donde v es la velocidad, m es la masa del coche, P es la potencia, y K es la constante de rozamiento.

Supongamos el Renault 25 de Fernando Alonso en el 2005 (por recordar tiempos mejores), que tiene $P = 671130w$, $m = 750Kgr$ y $K = 71Nwm/s$. Suponiendo que acelera a toda potencia en $t = 0s$, calcular la velocidad del coche durante los proximos 5 segundos utilizando el metodo de integracion de Heun partiendo de $v(0) = 60m/s$ ($216Km/h$) empleando un paso $h = 1s$. Diga cual seria la velocidad del coche en $t = 5s$

El método de Heun resuelve ecuaciones diferenciales mediante:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}[f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, z_{k+1})]$$

en donde:

$$z_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k)$$

para $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$.

Ejercicio 113: Septiembre de 2007.

Se sabe que la velocidad de propagación de una epidemia es proporcional al número de individuos infectados multiplicado por el número de individuos no infectados. Si denotamos por $I(t)$ el número de individuos enfermos en el



tiempo t , la dinámica de la infección viene dada por:

$$I'(t) = kI(t)(P - I(t))$$

en donde k es la tasa de propagación, y P indica la población inicial total. Teniendo en cuenta el modelo descrito y sabiendo que tan sólo un pollo contagiado (es decir, $I(0) = 1$) entra en una granja de 100000 aves ($P = 100000$), calcule mediante el método de Heun la solución numérica de esta ecuación en el intervalo $t = [0, 6]$ días empleado un paso $h = 2$ días. La tasa de propagación de la gripe aviar asiática es de $k = 3,148 \cdot 10^5$.

El método de Heun resuelve ecuaciones diferenciales mediante:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}[f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, z_{k+1})]$$

en donde:

$$z_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k)$$

para $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$.

Respuestas

Respuesta al Ejercicio 108

- Hemos de calcular 10 valores (en realidad 4) de la función integrada a intervalos:

$$h = (t_f - t_i)/n = (1000 - 0)/10 = 100.$$

- $k = 0$: calculamos la función en el punto $x_1 = x_0 + h = 0 + 100 = 100$:

$$m_1 = hf(x_0, y_0) = \left\{ \begin{array}{l} x_0 = 0, y_0 = 1000 \\ f(x_0, y_0) = 1000(3,25 \cdot 10^{-3} - 1000 \cdot 6,50 \cdot 10^{-8}) \end{array} \right\} = 100*$$

Respuesta al Ejercicio 118

De acuerdo con las ecuaciones del método de Heun, construimos la siguiente tabla:



i	t_i	v_i	$f(t_i, v_i)$	z_{i+1}	$f(t_{i+1}, z_{i+1})$	v_{i+1}
0	5.78	57.80000	10.00993	59.80199	9.30213	59.73121
1	5.98	59.73121	9.32656	61.59652	8.69631	61.53349
2	6.18	61.53349	8.71715	63.27692	8.15143	63.22035
3	6.38	63.22035	8.16944	64.85424	7.65818	64.80311
4	6.58	64.80311	7.67390	66.33789	7.20914	66.29142
5	6.78	66.29142	7.22299	67.73602	6.79835	67.69355
6	6.98	67.69355	6.81066	69.05568	6.42097	69.01671
7	7.18	69.01671	6.43197	70.30311	6.07295	70.26721
8	7.38	70.26721	6.08285	71.48378	5.75095	71.45059
9	7.58	71.45059	5.75991	72.60257	5.45214	72.57179
10	7.78	72.57179				

CAPÍTULO 11

RSA

Ejercicio 114: Junio de 2004.

Sean tres números primos $p = 7$, $q = 11$ y $e = 13$ que se van a utilizar para implementar un sistema de criptografía RSA, responda a las siguientes cuestiones:

- Calcule el número $n = pq$ y la función multiplicativa de Euler $\phi(n)$.
- Demuestre que el número e tiene inversa en $Z_{\phi(n)}$.
- Teniendo en cuenta que la clave pública es (e, n) , calcule la clave privada (d, n) .
- Codifique mediante la clave pública (e, n) el número $x = 3$ y descodifíquelo utilizando la clave privada (d, n) .

Respuestas

Respuesta al Ejercicio 114



- Cálculo de n y $\phi(n)$:

$$\begin{aligned}n &= pq = 7 \cdot 11 = 77 \\ \phi(n) &= (p-1)(q-1) = (7-1)(11-1) = 6 \cdot 10 = 60\end{aligned}$$

- Demostrar que e tiene inversa en $Z_{\phi(n)}$: basta con demostrar que e y $\phi(n)$ son primos relativos, es decir, $\text{mcd}(e, \phi(n)) = 1$. Para ello aplicamos el algoritmo de Euclides:

$$\begin{aligned}60 &= 13 \cdot 4 + 8 \\ 13 &= 8 \cdot 1 + 5 \\ 8 &= 5 \cdot 1 + 3 \\ 5 &= 3 \cdot 1 + 2 \\ 3 &= 2 \cdot 1 + 1 \\ 2 &= 2 \cdot \underline{1} + 0\end{aligned}$$

- El número d se escoge como el inverso en $Z_{\phi(n)}$ de e . Por tanto, se debe cumplir que:

$$(13)_{60} \cdot (d)_{60} = (1)_{60}$$

Podemos encontrar el valor por varios métodos:

- Buscando el grado de e :

$$\begin{aligned}(13^2)_{60} &= (13 \cdot 13)_{60} = (169)_{60} = [49]_{60} \\ (13^3)_{60} &= (13 \cdot 13 \cdot 13)_{60} = (2197)_{60} = [37]_{60} \\ (13^4)_{60} &= (13 \cdot 13 \cdot 13 \cdot 13)_{60} = (28561)_{60} = [1]_{60}\end{aligned}$$

Por tanto:

$$(13^4)_{60} = [13]_{60} \cdot (13^3)_{60} = [13]_{60} \cdot (2197)_{60} = [13]_{60} \cdot [37]_{60} = [1]_{60}$$

de donde se deduce que $d = 37$.

- Por prueba y error.



- Codificar y descodificar:

$$\text{Enc}(x) = (x^e)_n = (3^{13})_{77} = (1594323)_{77} = [38]_{77} = y$$

Para descodificar, es necesario utilizar el algoritmo “multiplicar y elevar” (ver apuntes):

$$\begin{aligned}\text{Desc}(y) &= (38^{37})_{77} = 38^1(38^0(38^1(38^0(38^0(38^1)^2)^2)^2)^2 = \\ &= 38(1(38(1(1(38)^2)^2)^2)^2 = 3\end{aligned}$$



CAPÍTULO 12

Ejercicios de Matlab

Ejercicio 115: Junio de 2004.

Escriba una función en **MATLAB** para encontrar la raíz, mediante el método de la secante, de la ecuación

$$f(x) = e^{-x^2} - x$$

La función, de prototipo $[x, m, f_{max}] = \text{secante}(x_0, x_1, M, F_{max})$, admitirá como argumentos:

- Los dos puntos de partida del método iterativo x_0 y x_1 .
- El número máximo de iteraciones M .
- El criterio de convergencia F_{max} .

y devolverá

- La raíz de la función x .
- El número de iteraciones realizadas m .
- La convergencia alcanzada: f_{max} .



Ejercicio 116: Septiembre de 2004.

Escriba una función en **MATLAB** para interpolar mediante polinomios de Lagrange cúbicos (interpolación de cuatro puntos). La función, de prototipo:

$$[p] = \text{lagrange}(t, y, x)$$

admitirá como argumentos:

- Los vectores t y y , ambos de cuatro elementos, con los valores tabulados de la función a interpolar.
- El punto x en el cual se desea calcular la función.

y devolverá

- El valor interpolado de la función p en el punto x .
-

Ejercicio 117: Junio de 2005.

Escriba una función en **Matlab** que reconstruya la función $f_p(t) = |\sin(\pi t)|$ a partir de la descomposición de dicha función en series de Fourier:

$$f_p(t) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-4n^2} \cos(2\pi nt)$$

La función, de prototipo $y = \text{ftseno}(t, N)$, admitirá como argumentos:

- El vector t con los valores $t(i)$ para los que hay que calcular la función $f_p(t)$ reconstruida.
- El número N de armónicos a utilizar en la ecuación de síntesis.

y devolverá:

- El vector y con el valor de la función reconstruida para cada punto $t(i)$ del vector t .
-



Ejercicio 118: Septiembre de 2005.

La siguiente función de Matlab implementa el método iterativo de Jacobi para resolver sistemas de ecuaciones lineales:

```
%*****  
%* [x,conv,k] = jacobi(a,b,Delta,M) *  
%* Entrada: a :      Matriz de coeficientes. *  
%*      b :      Matriz columna de términos independientes. *  
%*      Delta : Criterio de convergencia. *  
%*      M :      Numero maximo de iteraciones. *  
%* Salida: x :      Matriz columna de soluciones. *  
%*      conv : Convergencia alcanzada. *  
%*      k :      Número de iteraciones. *  
%*****  
function [x,conv,k] = jacobi(a,b,Delta,M)  
% Dimension del sistema de ecuaciones.  
filas=size(a,1);  
% Inicialización de los vectores columna r y x.  
r=zeros(filas,1);  
x=zeros(filas,1);  
u=zeros(filas,1);  
for k=1:M      % Contador de iteraciones  
    for i=1:filas  
        u(i)=b(i);  
        for j=1:filas  
            if (i ~= j)  
                u(i)=u(i)-a(i,j)*x(j);  
            end;  
        end;  
        u(i) = u(i) / a(i,i);  
    end;  
  
    r=u-x;  
    x=u;  
    % Calculo de la convergencia.  
    conv = norm(r) / norm(x);  
    if ( conv<=Delta )
```



```
        break; % Salir del bucle
    end;
end;
```

Utilizando como base el código anterior, **escriba** la función, **seidel**, que implementa el método iterativo de Gauss-Seidel.

Ejercicio 119: Junio de 2006.

Encuentre y corrija los errores del siguiente *script* de MATLAB que debería calcular la raíz de la función $f(x) = e^{-x^2} - x$:

```
r = -3.0;           % Aproximación inicial a la raíz.      1
M = 100;            % Número máximo de iteraciones.       2
delta = 1.0e-8;     % Criterio de convergencia.           3
%                                                           4
% Iteracion de Newton.                                     5
for m=1:M,                                                  6
    %                                                       7
    % Calcula f(x) y f'(x) de la función f(x) = e^(-x^2)-x. 8
    fx = exp(-r*r)-r;                                       9
    fp = -2*exp(-r*r)-1;                                    10
    %                                                       11
    % Calcula el nuevo valor de la raíz.                    12
    r = r - fp/fx;                                          13
    %                                                       14
    % Calcula la convergencia.                              15
    fr = abs(exp(-r*r)-r);                                  16
    if (fr >= delta),                                       17
        break;                                             18
    end;                                                    19
end;                                                        20
%                                                           21
% Imprime los resultados finales y aquí no está el error. 22
fprintf(' Raíz: %15s %4f\n', r);                             23
fprintf(' Iteración: %15s %4f\n', m);                         24
fprintf(' Convergencia: %15s %4f\n', fr);                     25
```



Ejercicio 120: Septiembre de 2006.

Complete el código del siguiente *script* de **Matlab** que implementa el método de Gauss-Jordan para resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 6 & -2 \\ 4 & -3 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

```
% *****
% *
%* Algoritmo de eliminacion de Gauss-Jordan.
% *
% *****
% Matriz de coeficientes (a):
a = [ 2 -1 0; 1 6 -2; 4 -3 8];
% Vector de términos independientes (b):
b = [ 2; -4; 5];

%*** Construccion de la matriz ampliada
filas = size(a,1); % Numero de filas
cols = size(a,2)+1; % Numero de columnas
c = [ a , b ];

%*** Algoritmo de eliminación gaussiana básica
for k = 1:cols-1, for i = k+1:filas ,
    z = c(i,k)/c(k,k); c(i,k) = 0; for j = k+1:cols ,
        c(i,j) = c(i,j) - z*c(k,j); end;
    end; end;

%*** Algoritmo de Jordan

%*** Ahora queda un sistema diagonal facil de resolver.
for i = 1:cols-1, x(i) = c(i,cols) / c(i,i)
end;
```



Ejercicio 121: Junio de 2007.

El siguiente *script* de MATLAB calcula la raíz de la función $f(x) = e^{-x^2} - x$:

```
1  r = -3.0;           % Aproximación inicial a la raíz.
2  M = 100;            % Número máximo de iteraciones.
3  delta = 1.0e-8;     % Criterio de convergencia.
4  %
5  % Iteracion de Newton.
6  for m=1:M,
7      %
8      % Calcula f(x) y f'(x) de la función f(x) = e^(-x^2)-x.
9      fx = exp(-r*r)-r;
10     fp = -2*r*exp(-r*r)-1;
11     %
12     % Calcula el nuevo valor de la raíz.
13     r = r - fx/fp;
14     %
15     % Calcula la convergencia.
16     fr = abs(exp(-r*r)-r);
17     if (fr <= delta),
18         break;
19     end;
20 end;
21 %
22 % Imprime los resultados finales y aquí no está el error.
23 fprintf('Raíz: %15s %4f\n', r);
24 fprintf('Iteración: %15s %4d\n', m);
25 fprintf('Convergencia: %15s %4f\n', fr);
```

Utilizando como base el código anterior, escriba un procedimiento Matlab que realice este mismo cálculo pero mediante el método iterativo de Steffensen.

El método iterativo de Steffensen se basa en la siguiente fórmula de recurrencia:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{[f(x_n)]^2}{f(x_n + f(x_n)) - f(x_n)}$$



Respuestas

Respuesta al Ejercicio 115

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%  Calcula la raiz de una funcion mediante el metodo          %
%%  de la secante.                                             %
%%      [r, m, fr] = secante(x0, x1, M, Fmax)                  %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
function [r,m,fr] = secante(x0,x1,M,Fmax)

for m = 1:M,
    fx0 = exp(-x0*x0) - x0;
    fx1 = exp(-x1*x1) - x1;
    %
    % Calcula el nuevo termino
    r = x0 - (x1 - x0) * fx0 / (fx1 - fx0);
    x0 = x1;
    x1 = r;
    % Comprobacion de la convergencia
    fr = abs(exp(-r*r)-r);
    if (fr <= Fmax),
        break;
    end;
end;
```

Respuesta al Ejercicio 116

```
%*****
%*
%*      MATEMATICAS PARA LA COMPUTACION      *
%*      Interpolacion cubica de Lagrange      *
```



```
%*                                     *
%*  f = lagrange(t,y,x)               *
%*  Entrada:                         *
%*    t : Vector tabulado de valores de x.      *
%*    y : Vector tabulado de valores de f(x) (y). *
%*    x : Punto para el que se calculara la funcion. *
%*  Salida:                           *
%*    p : Valor interpolado de f(x).            *
%*                                     *
%*****
function p = lagrange(t,y,x)
% Numero de elementos que contiene la tabla
n = length(t);
% Contruye las funciones cardinales
for i = 1:n,
    l(i) = 1.0;
    for j = 1:n,
        if ( i ~= j )
            l(i) = l(i) * ( x - t(j) ) / ( t(i) - t(j) );
        end;
    end;
end;
% Calcula el valor de p
p = 0.0;
for i = 1:n,
    p = p + y(i) * l(i);
end;
```

Respuesta al Ejercicio 118

Una solución es la siguiente:

```
%*****
%* [x,conv,k] = seidel(a,b,Delta,M) *
%* Entrada: a :      Matriz de coeficientes. *
%*          b :      Matriz columna de términos independientes. *
%*          Delta : Criterio de convergencia. *
%*          M :      Numero maximo de iteraciones. *
%*****
```




```
%* Salida: x :      Matriz columna de soluciones.      *
%*            conv :    Convergencia alcanzada.      *
%*            k :      Número de iteraciones.      *
%*****
function [x,conv,k] = seidel(a,b,Delta,M)
% Dimension del sistema de ecuaciones.
filas=size(a,1);
% Inicialización de los vectores columna r y x.
r=zeros(filas,1);
x=zeros(filas,1);
u=zeros(filas,1);
for k=1:M            % Contador de iteraciones
    for i=1:filas
        x(i)=b(i);
        for j=1:filas
            if (i ~= j)
                x(i)=x(i)-a(i,j)*x(j);
            end;
        end;
        x(i) = x(i) / a(i,i);
    end;

    r=u-x;
    u=x;
    % Calculo de la convergencia.
    conv = norm(r) / norm(x);
    if ( conv<=Delta )
        break; % Salir del bucle
    end;
end;
```

Respuesta al Ejercicio 121

Una solución podría ser:

<code>r = -3.0;</code>	<code>% Aproximación inicial a la raíz.</code>	1
<code>M = 100;</code>	<code>% Número máximo de iteraciones.</code>	2
<code>delta = 1.0e-8;</code>	<code>% Criterio de convergencia.</code>	3
<code>%</code>		4
<code>% Iteracion de Newton.</code>		5



```
for m=1:M, 6
    % 7
    % Calcula  $f(x)$  y  $f(x+f(x))$ . 8
    fx = exp(-r*r)-r; 9
    rf = r + fx; 10
    fxfx = exp(-rfx*rfx)-r; 11
    % 12
    % Calcula el nuevo valor de la raíz. 13
    r = r - (fx*fx) / (fxfx - fx); 14
    % 15
    % Calcula la convergencia. 16
    fr = abs(exp(-r*r)-r); 17
    if (fr <= delta), 18
        break; 19
    end; 20
end; 21
% 22
% Imprime los resultados finales y aquí no está el error. 23
fprintf('Raíz:_____r= %.4f\n',r); 24
fprintf('Iteraci3n:_____m= %i\n',m); 25
fprintf('Convergencia:_| f(r)|= %.4f\n', fr); 26
```