

MANUAL DE L'ASSIGNATURA

ELECTROMAGNETISME I

Prof. Vicente Muñoz Sanjosé

Aquest manual ha estat elaborat per a finalitats acadèmiques. No es permet la distribució, comercialització, reproducció o modificació de tot o part d'aquest text sense autorització prèvia per escrit.

© 2025 Vicente Muñoz Sanjosé

Tots els drets reservats.

Índex

Lliçó 1.....	1
Introducció a l'electromagnetisme	2
1.0. Introducció a l'assignatura Electromagnetisme I.....	2
1.1. La interacció electromagnètica en la Física	3
Bibliografia per a l'apartat 1.1.....	6
1.2. Càrregues i corrents	6
Bibliografia per a l'apartat 1.2.....	10
1.3. La conservació de la càrrega. Equació de continuïtat.....	10
Bibliografia per a l'apartat 1.3.....	12
1.4. Determinació unívoca d'un camp vectorial. Teorema de Helmholtz.....	12
Bibliografia per a l'apartat 1.4.....	19
1.5. Contingut complementari	19
1.5.1. Sistemes d'unitats en Electromagnetisme	19
Sistema Internacional (SI).....	19
Sistema Gaussià (CGS).....	20
Sistemes racionalitzats i no racionalitzats	20
Equacions de Maxwell en diferents sistemes d'unitats	21
Sistema Internacional (SI).....	21
Sistema Gaussià (CGS).....	21
1.5.2. Operadors diferencials	22
1.5.2.1. Gradient	22
1.5.2.2. Divergència.....	23
1.5.2.3. Rotacional.....	25
1.5.3. Integrals de camps vectorials.....	28
1.5.3.1. Integral de línia o circulació.....	28
1.5.3.2. Integral de superfície.....	29
1.5.3.3. Integral de volum	30
1.5.4. Teoremes integrals.....	30
1.5.4.1. Integració entre dos punts. Integral de línia o circulació	30
1.5.4.2. Teorema de Gauss	31
1.5.4.3. Teorema Stokes	32
1.5.5. La funció delta de Dirac (δ)	33
1.5.6. Alguns resultats d'interès per al desenvolupament del curs	34

1.5.6.1. Quant val $\nabla \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right)$?	34
1.5.6.2. Quant val $\nabla \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right)$?	36
1.5.6.3. Quant val $\nabla_x \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right)$?	37
1.5.6.4. Sobre la integració en volum de funcions amb $\frac{1}{R^\alpha}$ on $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$	38
1.5.7. Demostració que les condicions del teorema de Helmholtz impliquen que el camp decreix a l'infinit, si més no, com $\frac{1}{r^2}$	39
1.5.8. Notes històriques. Alguns detalls cronològics	40
Bibliografia per a l'apartat 1.5	42
Bibliografia de la lliçó 1	42
Lliçó 2	43
El camp electroestàtic	44
2.1. Introducció	44
Bibliografia per a l'apartat 2.1	45
2.2. Llei de Coulomb (Coulomb-Cavendish)	45
Bibliografia per a l'apartat 2.2	46
2.3. Camp elèctric. Divergència i rotor del camp electroestàtic	46
Bibliografia per a l'apartat 2.3	49
2.4. Teorema de Gauss o llei de Gauss	49
Bibliografia per a l'apartat 2.4	51
2.5. El potencial electroestàtic. Equacions de Poisson i Laplace	51
2.5.1. El potencial electroestàtic	51
2.5.2. Equacions diferencials per al potencial electroestàtic: Equacions de Poisson i Laplace	54
Bibliografia per a l'apartat 2.5	56
2.6. Contingut complementari	56
2.6.1. Què ocorre si tenim regions en què la densitat de càrrega és constant?	56
2.6.2. Què ocurriria si la llei de Coulomb no fora exactament com $\frac{1}{r^2}$?	59
2.6.3 Comportament del camp electroestàtic i el potencial en travessar una superfície carregada	60
2.6.4. Potencial en una regió de l'espai limitada per una superfície on coneixem el potencial i el camp elèctric	61
Bibliografia de la lliçó 2	63
Lliçó 3	65
Desenvolupament multipolar del potencial electroestàtic	66

3.1. Introducció	66
Bibliografia per a l'apartat 3.1.....	67
3.2. Desenvolupament multipolar del potencial electroestàtic.....	67
Bibliografia per a l'apartat 3.2.....	71
3.3. El potencial i el camp d'un dipol elèctric	71
Bibliografia per a l'apartat 3.3.....	75
3.4. Distribucions de dipols elèctrics	75
Bibliografia per a l'apartat 3.4.....	77
3.5. Contingut complementari	78
3.5.1. Angle sòlid	78
3.5.2. Discontinuitats del potencial.....	78
3.5.3 Integració del camp elèctric en un volum	80
3.5.4. Sobre el càlcul dels moments multipolars d'una distribució de càrrega	85
3.5.5. Demostració de la dependència/independència del tensor quadripolar respecte al sistema de referència.....	88
Bibliografia de la lliçó 3	89
Lliçó 4.....	91
El potencial electroestàtic	92
4.1. Introducció. Conductors en electroestàtica	92
4.1.1. Conductors en equilibri electroestàtic.....	92
4.1.2. Capacitat d'un conductor aïllat	93
4.1.3. Propietats d'un conductor buit	94
4.1.4. Condensadors.....	96
Bibliografia per a l'apartat 4.1.....	97
4.2. Teoremes d'unicitat	97
Bibliografia per a l'apartat 4.2.....	99
4.3. El mètode de les imatges (electroestàtiques).....	99
4.3.1. Pla conductor a potencial zero en presència d'una càrrega puntual	99
4.3.2. Esfera conductora a potencial zero en presència d'una càrrega puntual exterior	101
Bibliografia per a l'apartat 4.3.....	102
4.4. El mètode de separació de variables	103
4.4.1. Equació de Laplace en coordenades cartesianes.....	103
4.4.2. Equació de Laplace en coordenades esfèriques	108
4.4.3. Equació de Laplace en coordenades cilíndriques.....	111
Bibliografia per a l'apartat 4.4.....	116

4.5. Contingut complementari.....	116
4.5.1. Sistema de diversos conductors: coeficients de capacitat i influència	116
Característiques de la matriu dels coeficients c_{ij}	120
4.5.2. Sobre els coeficients de potencial i de capacitat.....	122
4.5.2.1. Simetria de la matriu de coeficients de potencial	122
4.5.2.2. Valor dels coeficients de potencial	123
4.5.2.3. Valor dels coeficients d'influència i de capacitat	123
4.5.3. Mètode de les imatges electroestàtiques en el cas d'un cilindre conductor en les proximitats d'una línia carregada amb densitat lineal λ	124
4.5.4. Sobre l'ortogonalitat de les funcions trigonomètriques i el comportament de les funcions hiperbòliques.....	128
4.5.5. Exemple d'obtenció del potencial en el cas de coordenades esfèriques.....	130
4.5.6. Cas general de separació de variables en coordenades cilíndriques	134
4.5.7. Exemple d'aplicació del mètode de separació de variables en coordenades cilíndriques	138
4.5.8. Una qüestió conceptual sobre conductors.....	141
Bibliografia de la lliçó 4.....	142
Lliçó 5	143
El camp magnetoestàtic	144
5.1. Introducció	144
Bibliografia per a l'apartat 5.1.....	146
5.2. Llei d'Ampère	146
Bibliografia per a l'apartat 5.2.....	149
5.3. Camp Magnètic. Divergència i rotor del camp magnetoestàtic	149
5.3.1. Propietats diferencials del camp magnetoestàtic	149
5.3.2. El potencial escalar magnètic	152
Bibliografia per a l'apartat 5.3.....	152
5.4. Teorema d'Ampère.....	153
Bibliografia per a l'apartat 5.4.....	158
5.5. Potencial vector	158
5.5.1. Obtenció del potencial vector a partir del camp magnètic.....	158
5.5.2. Propietats diferencials i integrals del potencial vector	160
Bibliografia per a l'apartat 5.5.....	165
5.6. La força de Lorentz. Moviment de càrregues	165
Bibliografia per a l'apartat 5.6.....	166
5.7. Contingut complementari.....	167

5.7.1. Comportament del camp magnètic en travessar una superfície per on circula una densitat de corrent superficial	167
5.7.2. Comportament del potencial vector en travessar una superfície per on circula una densitat de corrent superficial	168
Bibliografia de la lliçó 5	169
Lliçó 6.....	171
Desenvolupament multipolar del potencial vector	172
6.1. Introducció	172
Bibliografia per a l'apartat 6.1.....	172
6.2. Desenvolupament multipolar del potencial vector	173
Bibliografia per a l'apartat 6.2.....	177
6.3. Dipol magnètic puntual	177
Bibliografia per a l'apartat 6.3.....	179
6.4. Distribucions de dipols magnètics	179
6.4.1. Potencial escalar associat a un dipol magnètic puntual	179
6.4.2. Densitats de corrent equivalents a la magnetització	180
6.4.3. Potencial escalar magnètic associat a un circuit	182
6.4.4. Densitats fictícies de càrrega magnètica equivalent a la magnetització	183
Bibliografia per a l'apartat 6.4.....	185
6.5. Contingut complementari	185
6.5.1. Demostració de la relació entre el rotacional d'un camp $\vec{F}(\vec{r}')$ en un volum tancat i la integral de $\vec{n} \times \vec{F}(\vec{r}')$ sobre la superfície que envolta el volum.....	185
6.5.2 Integració del camp magnètic en un volum	186
6.5.3. Demostració del valor de $\int_S \frac{\vec{n} dS}{R}$ en la superfície d'una esfera.....	188
6.5.4. Comportament del potencial escalar magnètic en travessar una superfície amb una densitat superficial de càrrega magnètica fictícia.....	189
Bibliografia de la lliçó 6	189
Lliçó 7.....	191
Inducció electromagnètica	192
7.1. Introducció	192
Bibliografia per a l'apartat 7.1.....	193
7.2. La força electromotriu.....	193
Bibliografia per a l'apartat 7.2.....	196
7.3. Llei de Faraday de la inducció electromagnètica	196
Bibliografia per l'apartat 7.3	198

7.4. Inducció en un circuit en moviment i en un circuit deformable	198
7.4.1. Força electromotriu en un circuit rígid en moviment	198
7.4.2. Força electromotriu en un circuit en què canvia la superfície (circuit deformable)	201
Bibliografia per a l'apartat 7.4	204
7.5. Coeficients d'inducció. Autoinducció i inducció mútua	204
7.5.1. Coeficients d'autoinducció	204
7.5.2. Inducció mútua	205
7.5.3. Fórmula de Neumann	206
Bibliografia per a l'apartat 7.5	208
7.6. Contingut complementari	209
7.6.1. Aplicacions de la inducció electromagnètica	209
7.6.2. Els camps no estacionaris i la seua relació amb els potencials	209
7.6.3. El coeficient d'autoinducció a partir de la fórmula de Neumann	210
7.6.4. Matriu de coeficients d'inducció i autoinducció	211
Característiques de la matriu dels coeficients L_{kj}	213
7.6.5. Exemple de càlcul de coeficient d'inducció mútua	214
Bibliografia de la lliçó 7	215
Lliçó 8	217
Equacions de Maxwell. Ones electromagnètiques	218
8.1. Introducció	218
Bibliografia per a l'apartat 8.1	220
8.2. El corrent de desplaçament	220
Bibliografia per a l'apartat 8.2	222
8.3. Equacions de Maxwell en el buit	223
Llei de Gauss per al camp elèctric	223
Llei de Gauss per al camp magnètic	223
Llei de Faraday	223
Llei d'Ampère-Maxwell	223
Bibliografia per a l'apartat 8.3	224
8.4. Equació d'ones. Solució en ones planes	225
8.4.1. Obtenció de l'equació d'ones	225
8.4.2. Solució de l'equació d'ones per a ones electromagnètiques planes	226
Bibliografia per a l'apartat 8.4	232
8.5. Ones planes amb variació temporal harmònica	232
Bibliografia per a l'apartat 8.5	234

8.6. Contingut complementari	235
8.6.1. Equacions de Maxwell en conductors.....	235
Bibliografia de la lliçó 8	236
Epíleg	239
Annex.....	241
A1. Operacions vectorials: Producte escalar i vectorial.....	241
A2. Relacions integrals	242
A.3. Operadors vectorials diferencials.....	242
A.3.1. Coordenades cartesianes.....	242
A.3.1.1. Gradient	242
A.3.1.2. Divergència	242
A.3.1.3. Rotacional	243
A.3.1.4. Laplacà	243
A.3.1.5. Laplacà d'un camp vectorial $\vec{a}$	243
A.3.2. Coordenades cilíndriques	243
A.3.2.1. Gradient	243
A.3.2.2. Divergència	243
A.3.2.3. Rotacional	243
A.3.2.4. Laplacà	243
A.3.2.5. Laplacà d'un camp vectorial $\vec{a}$	244
A.3.3. Coordenades esfèriques	244
A.3.3.1. Gradient	244
A.3.3.2. Divergència	244
A.3.3.3. Rotacional	244
A.3.3.4. Laplacà	244
A.3.3.5. Laplacà d'un camp vectorial $\vec{a}$	244
A.4. Polinomis de Legendre.....	245
A.4.1. Definició	245
A.4.2. Algunes propietats dels polinomis de Legendre	245
Bibliografia general.....	247

Pròleg

Sempre he pensat que els estudiants havien de configurar els seus apunts consultant la bibliografia i discutint sobre els conceptes presentats en el curs, ja que aquesta era una part formativa molt necessària, i per això he estat reticent a la publicació de les meues notes de classe o apunts. Amb l'aparició de la IA, que, d'una banda, podria no estimular la consulta directa dels textos de la bibliografia que es recomana i, de l'altra, demana tenir un criteri acadèmic per a discernir la correcció o la incorrecció de les seues aportacions, he considerat que havia de publicar aquest manual de l'assignatura.

Les notes que es publiquen ací es basen en el plantejament i el contingut original del professor José Luis Lloret Sebastián per a l'assignatura *Electricitat i Magnetisme* (que era com s'anomenava aleshores) de la Llicenciatura en Física de la Universitat de València (UVEG). Aquesta assignatura s'estructurava en diversos blocs, en un dels quals s'abordava el *Camp electromagnètic en el buit*, el que actualment seria, juntament amb part d'un altre dels blocs sobre *Resolució de problemes seleccionats*, l'assignatura Electromagnetisme I, que desenvoluparem en aquest manual de l'assignatura.

L'esquema original del professor Lloret Sebastián, que ha servit de base per a molts dels projectes docents dels membres del departament de Física Aplicada i Electromagnetisme de la UVEG i que va ser integrat (encara que sense citar-ne l'origen) en un manual universitari, serveix com a fonament d'aquest text, que s'ha enriquit amb les converses amb companyes i companys del Departament de Física que al llarg dels anys han impartit l'assignatura, en particular la professora María del Carmen Martínez Tomás.

L'objectiu principal d'aquest manual és oferir un recurs útil per als estudiants del Grau en Física i del Doble Grau en Física i Matemàtiques, que facilite el seguiment de les explicacions impartides a classe.

Cada capítol inclou un apartat titulat "Contingut complementari", en què es recullen demostracions, exemples o temes addicionals que faciliten i donen suport al desenvolupament de la lliçó, però que, per claredat pedagògica, s'han traslladat a aquesta secció separada.

Així mateix, en cada lliçó es proporcionen:

- Alguns exemples i enunciats de problemes, marcats amb trama grisa.
- Una bibliografia específica per apartat, destinada a complementar o aprofundir tant el que s'explicita en aquestes notes com les explicacions de classe.
- Una bibliografia general i altres referències que presenten versions més avançades del contingut tractat.

Els exemples i els enunciats de problemes han estat seleccionats de la col·lecció de problemes que hem anat configurant els diferents professors de l'assignatura al Departament de Física Aplicada i Electromagnetisme; servisca aquest paràgraf com a reconeixement a aquests col·legues. En alguns casos, pot ser que algun problema corresponga a alguna publicació prèvia i demane disculpes per no haver trobat la referència per a citar-la explícitament com correspondria, encara que possiblement estiga continguda en la bibliografia recomanada.

Port de Sagunt, agost de 2025.

Lliçó 1

Introducció a l'electromagnetisme

1.0. Introducció a l'assignatura Electromagnetisme I

1.1. La interacció electromagnètica en la Física

1.2. Càrregues i corrents

1.3. La conservació de la càrrega. Equació de continuïtat

1.4. Determinació unívoca d'un camp vectorial. Teorema de Helmholtz

1.5. Contingut complementari

Bibliografia general

Griffiths, David J. (3a edició), L1, pàgs. 1-53.

Textos avançats:

Panofsky, Wolfgang K.H. & Phillips, Melba

Jackson, John David

Arfken, George B. & Weber, Hans J.

Marsden, Jerrold E. & Tromba, Anthony

➤ Després de cada apartat s'indica la bibliografia específica i les lectures recomanades.

➤ Al final de la lliçó s'inclouen les referències bibliogràfiques completes.

Lliçó 1:

Introducció a l'electromagnetisme

1.0. Introducció a l'assignatura Electromagnetisme I

L'objectiu d'aquesta assignatura és oferir una visió general de la interacció electromagnètica en el buit, plantejada com una teoria de camp.¹ Això suposa la necessitat d'una definició precisa dels camps elèctric i magnètic com a camps vectorials.

Segons el teorema de Helmholtz, per a poder definir unívocament un camp vectorial, cal conèixer les fonts tant de la divergència com del rotacional d'aquest camp i que siguin contínues i integrables en tot l'espai. Això és precisament el que expressen les equacions de Maxwell del camp electromagnètic, el qual també aconsegueix que aquestes fonts són zero en l'infinit així com que el camp tendeix a zero en l'infinit, la qual cosa completa la condició necessària i suficient per a la unicitat que exigeix el teorema de Helmholtz. Obtindrem aquestes equacions a partir de les lleis experimentals de les interaccions bàsiques entre càrregues i corrents, cosa que dona un fonament experimental a la teoria. La relació d'aquesta assignatura amb la resta de les assignatures del Grau en Física queda palesa a través del seu contingut:

- Les conseqüències de la interacció electromagnètica són objecte d'estudi de la Mecànica.
- L'anàlisi de les solucions ondulatòries de les Equacions de Maxwell requereix els coneixements adquirits en Oscil·lacions i Ones i són la base de l'Òptica.
- Les eines matemàtiques necessàries per a resoldre les equacions de Maxwell són objecte d'estudi en els diferents cursos de Mètodes Matemàtics.
- Finalment, l'estudi de la interacció electromagnètica en el buit i les seues conseqüències incideixen directament en l'assignatura de Laboratori d'Electromagnetisme.

¹ El contingut d'aquest apartat correspon a la informació inclosa en la Guia docent de l'assignatura impartida en la Facultat de Física de la Universitat de València en <https://webges.uv.es/uvGuiaDocenteWeb/guia?APP=uvGuiaDocenteWeb&ACTION=MOSTRARGUIA.M&MODULO=34255&CURSOACAD=2019&IDIOMA=V> (curs 2025-2026).

1.1. La interacció electromagnètica en la Física

La Física estudia les interaccions que es produeixen en la naturalesa, és a dir, les forces que sorgeixen per diferents causes. En el nostre entorn quotidià, dues són clarament patents: la interacció gravitatòria i l'electromagnètica. Aquesta última és una de les quatre forces fonamentals, juntament amb la gravitació, la interacció nuclear forta i la interacció nuclear feble.

A diferència de la gravitació, que només actua entre masses, la interacció electromagnètica es manifesta entre partícules amb càrrega elèctrica, siga positiva o negativa, i és responsable d'una àmplia gamma de fenòmens físics, tant en el nivell macroscòpic com en el microscòpic. En el nivell macroscòpic, explica des de l'atracció entre un imant i un objecte metàl·lic amb propietats ferromagnètiques, fins al funcionament de motors elèctrics o la transmissió de senyals per cables. En l'àmbit microscòpic, regeix les forces entre àtoms i molècules; és la base de la química, l'estructura de la matèria i la propagació de la llum, la qual és, de fet, una manifestació d'aquesta interacció en forma d'ones electromagnètiques.

La descripció matemàtica de l'electromagnetisme es fa mitjançant camps: el camp elèctric, que actua sobre les càrregues, i el camp magnètic, que ho fa sobre les càrregues en moviment, és a dir, els corrents. Aquests camps estan interrelacionats i s'unifiquen en la teoria del camp electromagnètic, formulada per James Clerk Maxwell a través de les seues cèlebres equacions, que mostren que electricitat i magnetisme són manifestacions d'una mateixa interacció.

Entre els fenòmens fonamentals que descriuen aquesta interacció hi ha els que s'engloben en les lleis experimentals següents, punt de partida de la nostra formulació:

- La força de Coulomb entre càrregues elèctriques.
- La llei d'Ampère, que descriu la interacció entre corrents elèctrics.
- La llei de Faraday-Lenz, que relaciona la variació dels camps magnètics amb l'aparició de camps elèctrics (inducció electromagnètica).

Des dels dispositius electrònics fins a la comprensió de l'estructura atòmica, la interacció electromagnètica és essencial per a la ciència i la tecnologia. Estudiar les interaccions implica estudiar les forces; en aquest context, el fet de plantejar la interacció com la produïda per un camp (gravitatori, electromagnètic...) sobre les propietats sensibles a aquest (massa, càrrega...) es revela com a molt positiu i fructífer, ja que permet analitzar la interacció com una modificació de les propietats de l'entorn que envolta les fonts i evita alguna de les qüestions paradoxals que han aparegut en la Història de la Ciència. Tanmateix, no és l'única opció, per tal com, històricament, es va plantejar la interpretació d'aquesta interacció a partir d'una teoria basada en l'acció a distància.²

La teoria de l'acció a distància i la teoria de camps són dos enfocaments diferents per a descriure interaccions físiques. L'acció a distància postula que la interacció entre objectes passa instantàniament a través de l'espai, mentre que la teoria de camps descriu la interacció a través d'un camp físic que intervé la interacció.

En la teoria d'acció a distància, els objectes sensibles a la interacció s'influeixen entre si directament i instantàniament, sense necessitat d'un medi o intermediari. Són exemples d'aquesta perspectiva la força de la gravetat entre dues masses, la interacció electroestàtica entre dues càrregues o el magnetisme entre dos imants. Tot i això, l'acció a distància presenta dificultats per a explicar com podria actuar instantàniament la interacció i com es propaga a través de l'espai la informació sobre aquesta interacció.

En contraposició, tenim la teoria de camps, que descriu la interacció mitjançant un camp físic que permea l'espai. Seria el cas del camp gravitatori, el camp elèctric o el camp magnètic. La teoria de camps ofereix una explicació més satisfactòria, completa i coherent de les interaccions físiques, davant de l'acció a distància que postula interaccions instantànies, atès que la informació es transmet a través del camp, i no de manera instantània. Els camps poden ser escalars (una magnitud escalar a cada punt), vectorials (una magnitud vectorial en cada punt) o tensorials (una magnitud tensorial en cada punt).

² Consulteu el capítol 1 de Feynman, Leighton & Sands.

El plantejament que farem de l'assignatura serà justament aquest: el de la teoria de camps centrada, en el nostre cas, en l'estudi de les propietats matemàtiques i dels efectes dels camps elèctric i magnètic, que confluiran finalment en el camp electromagnètic i en la seua formulació amb les equacions de Maxwell.

Des dels primers estudis i descobriments de William Gilbert, Henry Cavendish i Charles Coulomb, passant pels d'Ampère, Oersted, Faraday i Maxwell, la història de l'electromagnetisme és una successió d'idees brillants que culminen en la unificació de l'electricitat, el magnetisme i l'òptica.

Podríem preguntar-nos com unifica l'electromagnetisme el marc teòric de les equacions de Maxwell i si aquestes equacions són suficients per a una descripció completa del camp electromagnètic.

Les equacions de Maxwell en el sistema internacional (SI) són, en forma diferencial i en el buit:³

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

on ρ és la densitat volumètrica de càrrega, ϵ_0 és la permitivitat del buit, μ_0 és la permeabilitat del buit, i $\vec{J}$ és la densitat de corrent elèctric per unitat de superfície.

³ Cal notar que, depenent del sistema d'unitats, aquestes equacions es presenten amb lleugeres variacions, com es mostra en el contingut complementari de l'apartat 1.5.1.

Les equacions de Maxwell estan sustentades en les lleis experimentals de Coulomb, Ampère i Faraday-Lenz, i descriuen unívocament el camp. El teorema de Helmholtz és el que ens permet confirmar aquesta asserció, com veurem en l'apartat 1.4.

Bibliografia per a l'apartat 1.1

Feynman, Richard, Leighton, Robert B. & Sands, Matthew, vol. 2, apartats 1.1, 1.5 i 1.6.

1.2. Càrregues i corrents

Ja hem parlat de la interacció electromagnètica i de com un conjunt de grans científics en els segles XVIII i XIX van establir les bases experimentals i el desenvolupament formal del camp electromagnètic. Hem de tornar a incidir en el fet que aquesta interacció planteja els efectes sobre les càrregues en repòs o moviment. Aquestes càrregues positives (protons) i negatives (electrons) formen part dels constituents de la matèria, però és evident que un tractament realista del problema electromagnètic no pot estar basat en l'anàlisi de l'efecte individual d'aquestes càrregues, mentre siga possible proporcionar resultats de validesa a partir de considerar el comportament mitjà d'un conjunt (ampli) de càrregues individuals. Aquest serà el plantejament que farem en el curs a partir de la definició de densitats de càrrega i de corrent en volum.

Val a dir que, en el context de la física de semiconductors, un forat és l'absència d'un electró en un material semiconductor,⁴ i es comporta com una càrrega positiva efectiva. Quan un electró s'allibera del seu enllaç, deixa una vacant i aquesta vacant es considera un forat. Tot i que no és una partícula física real, el forat, com dèiem, es comporta com una càrrega positiva a causa de la seua capacitat per atraure electrons.

Les fonts del camp electromagnètic són les càrregues i els corrents produïts pel moviment de les càrregues. Podríem resumir les propietats de les càrregues així:

- Hi ha dos tipus de càrregues: positives i negatives.
- La càrrega es conserva.

⁴ El problema és relativament complex i hem preferit no entrar en molts detalls ací. Per a una definició i anàlisi més detallada, es pot consultar el text de Charles Kittel.

- La càrrega està quantitzada: només pot variar de manera discreta, en un nombre de vegades la càrrega de l'electró $e=1.6 \cdot 10^{-19}$ coulombs.⁵
- La càrrega és un invariant relativista, és la mateixa independentment del sistema de referència i la velocitat.

Com hem dit, el plantejament amb què desenvoluparem l'assignatura no serà considerar l'efecte de quantitats ingents de càrregues individuals, cosa que seria matemàticament monstruosa i poc operativa. Considerarem, en comptes d'això, la descripció de la càrrega a través de densitats (funcions de la posició i del temps, quan siga el cas) de càrrega. Així, definirem la densitat de càrrega per unitat de volum $\rho = \frac{dq}{dv}$, d'on es dedueix que la càrrega total en volum V (de vegades, realçarem aquest volum de les càrregues amb una prima):

$$Q = \int_V \rho(\vec{r}') dv'$$

També podem modelitzar unes densitats de càrrega superficials o lineals per a volums reals que es poden idealitzar com a superfícies (és a dir, bidimensionalment) o com a línies (és a dir, monodimensionalment).

En aquests casos, tindrem:

$$\sigma = \frac{dq}{dS} \quad Q = \int_{S'} \sigma(\vec{r}') dS'$$

$$\lambda = \frac{dq}{dl} \quad Q = \int_{L'} \lambda(\vec{r}') dl'$$

D'altra banda, aquestes densitats podran canviar amb la posició, explícitament: $\rho(\vec{r}')$, i també amb el temps: $\rho(\vec{r}', t)$. Això dona lloc a dues situacions diferents: l'electroestàtica

⁵ Un coulomb és la unitat de mesura de la càrrega elèctrica en el sistema internacional (SI) i es defineix com la quantitat de càrrega que flueix en un segon quan el corrent és d'1 ampere (1 coulomb/segon). Per al SI, la unitat fonamental és l'ampere, que és la intensitat d'un corrent constant, que, mantenint-se en dos conductors paral·lels rectilinis de longitud infinita (molt llargs), secció circular negligible i situats a una distància d'un metre l'un de l'altre, produiria una força entre aquests cables igual a 2×10^{-7} newtons/metre de longitud.

$\rho(\vec{r})$, i l'electrodinàmica, $\rho(\vec{r}, t)$, la qual incorpora les variacions temporals de les càrregues a cada punt.

Una consideració que hem de fer és que, quan parlem de càrregues, hem de pensar en matèria, però hem de ser rigorosos i pensar que parlem d'excés de càrrega i no del fet que la matèria tinga electrons (i en la mateixa quantitat, protons), llevat que tinguem un desequilibri i aquesta matèria estiga “carregada”. Si parlem de corrents, haurem de pensar en els conductors i els seus electrons lliures de moure's o electrons de conducció (encara que el conductor en conjunt puga ser neutre). En el cas de semiconductors, hauríem d'incorporar el concepte de forat de què hem parlat abans.

En la taula 1 incloem dades sobre la concentració d'electrons referides a alguns metalls, cosa que ens dona una idea de l'ordre de magnitud d'aquesta concentració.

Taula 1. Concentració d'electrons en alguns metalls

<i>Element</i>	<i>Nombre d'electrons/unitat de volum</i>
Coure (Cu)	$8,47 \cdot 10^{22} / \text{cm}^3$
Plata (Ag)	$5,86 \cdot 10^{22} / \text{cm}^3$
Alumini (Al)	$18,1 \cdot 10^{22} / \text{cm}^3$

Recordem que la conductivitat (capacitat de conduir el corrent elèctric) està determinada no només pel nombre dels electrons de conducció, sinó també per la mobilitat que tenen, la qual, en el cas de la plata, és molt superior a la del coure i per això la seua conductivitat és més gran, malgrat que la concentració de portadors siga lleugerament menor.

En aquest context de càrregues i densitats de càrrega, veiem que la delta de Dirac⁶ ens permet associar a la càrrega puntual una densitat tal que

$$\rho(\vec{r}) = q\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$$

sent $\vec{r}_0$ el punt on hi ha la càrrega puntual, atès que

⁶ Vegeu l'apartat 1.5.5., de contingut complementari.

$$q = \int_0^\infty \rho(\vec{r}) dv' = \int_0^\infty q \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) dv' = q(\vec{r}_0)$$

Si seguim parlant ara de densitats de corrent, les càrregues es poden moure i formar part d'un corrent elèctric: és a dir, un pas de càrrega (dq) a través d'una secció superficial, per unitat de temps, $i = \frac{dq}{dt}$, que podem descriure a partir d'una densitat de corrent $\vec{J}(\vec{r}, t)$, de manera que el corrent a través d'una superfície siga el flux d'aquesta densitat:

$$i = \int_S \vec{J}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{S}$$

En alguna modelització, podríem tenir, o pensar, en la quantitat de càrrega que, per unitat de temps, travessa una línia (corrent superficial). En aquest cas,

$$i = \int_L \vec{K}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{l}$$

on L és la línia travessada per la densitat superficial de corrent $\vec{K}$ i el vector $d\vec{l}$ és perpendicular a L .

Les càrregues en moviment, és a dir, els corrents, són les que generen camps magnètics, juntament amb les variacions del camp elèctric, com veurem més endavant. La magnetoestàtica se centrarà en l'estudi dels camps magnètics produïts per corrents que són constants (estacionaris) o varien molt lentament amb el temps (quasiestacionaris). El cas més general tindrà en compte els corrents que varien amb el temps i donen lloc a la relació entre el camp elèctric i el magnètic: l'electromagnetisme.

Relacionant la densitat de corrent amb la densitat de càrrega que es mou amb una certa velocitat $\vec{v}$, tenim:

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t) \vec{v}(\vec{r}, t)$$

$$di = \vec{J}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{S} = \rho(\vec{r}, t) \vec{v}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{S} = \frac{dq}{dV} \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot d\vec{S} = \frac{dq}{dV} \frac{dV}{dt} = \frac{dq}{dt} \Big|_{d\vec{S}} = di$$

essent dV el volum diferencial on es troba la càrrega dq .

Com ja hem dit, el corrent es mesura en amperes i, consegüentment, la $\vec{J}(\vec{r}, t)$ té unitats d'amperes per unitat de superfície (A/m^2).

De manera equivalent, per a una densitat superficial de corrent

$$\vec{K}(\vec{r}, t) = \sigma(\vec{r}, t) \vec{v}(\vec{r}, t)$$

$$di = \vec{K}(\vec{r}, t) d\vec{l} = \sigma(\vec{r}, t) \vec{v}(\vec{r}, t) d\vec{l} = \frac{dq}{dS} \frac{d\vec{r}}{dt} d\vec{l} = \frac{dq}{dS} \frac{dS}{dt} = \frac{dq}{dt} \Big|_{d\vec{l}} = di$$

Tant en el cas d'una superfície com en el d'una línia que són travessades per unes càrregues, el que importarà serà la ponderació entre les que van en una direcció i les que van en l'oposada.

Bibliografia per a l'apartat 1.2

Panofsky, Wolfgang K. H. & Phillips, Melba, L7 (apartat 7.1).

1.3. La conservació de la càrrega. Equació de continuïtat

Com que la càrrega ni es crea ni es destrueix, en un volum tancat s'haurà d'establir un balanç entre els canvis de densitat local de càrrega i el corrent (càrregues) que entra o ix del volum.

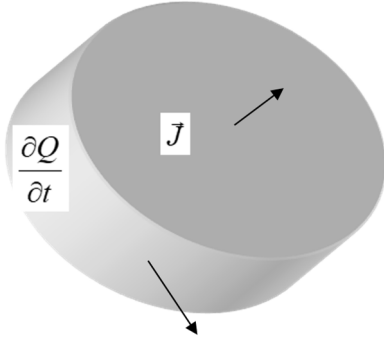
Si dins del volum hi ha una certa densitat de càrrega $\rho(\vec{r}', t)$ i en $t=0$ la càrrega en el volum és:

$$Q_0 = \int_V \rho(\vec{r}', 0) dv'$$

per a $t > 0$, tindrem:

$$Q(t) = \int_V \rho(\vec{r}', t) dv' = Q_0 - Q_{ix}$$

on el vector $d\vec{S}'$ apunta cap a fora del volum (aquest criteri serà el que mantindrem al llarg del curs). Per aplicació del teorema de Gauss (vegeu apartat 1.5.4.2) a la densitat de corrent $\vec{J}(\vec{r}', t)$, tenim que:



$$\frac{\partial Q(t)_{ix}}{\partial t} = \int_S \vec{J}(\vec{r}', t) d\vec{S}' = \int_V \nabla \vec{J}(\vec{r}, t) dv'$$

A més,

$$\frac{\partial Q(t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho(\vec{r}', t) dv' = \int_V \frac{\partial \rho(\vec{r}', t)}{\partial t} dv'$$

i la conservació de la càrrega obliga que

$$\frac{\partial Q(t)}{\partial t} = -\frac{\partial Q_{ix}}{\partial t}$$

Per tant,

$$\frac{\partial Q(t)}{\partial t} = \int_V \frac{\partial \rho(\vec{r}', t)}{\partial t} dv' = -\frac{\partial Q_{ix}}{\partial t} = -\int_V \nabla \vec{J}(\vec{r}, t) dv'$$

i, considerant la igualtat dels dos integrands en cada punt del volum, tindrem que, en els punts en què avaluem la divergència, es complirà:

$$\nabla \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

En el cas estacionari (en què no hi ha variació temporal), l'equació anterior haurà de considerar que

$$\rho(\vec{r}, t) \neq f(t) \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

i, doncs,

$$\nabla \vec{J} = 0$$

Així, $\vec{J}$ és un camp solenoidal, és a dir, les línies de $\vec{J}$ són tancades.

Bibliografia per a l'apartat 1.3

Griffiths, David, J., apartat 8.1.

Marqués, Ricardo, apartat 1.10.

1.4. Determinació unívoca d'un camp vectorial. Teorema de Helmholtz

Podem enunciar el teorema de Helmholtz així: Un camp vectorial $\vec{F}$ en tot l'espai queda unívocament determinat per la seua divergència i el seu rotacional si:

1. La seua divergència i el seu rotacional existeixen i són funcions contínues en tot l'espai.
2. Les fonts de divergència i de rotacional són integrables en tot l'espai.
3. El camp tendeix a zero en l'infinit.

D'aquestes condicions es dedueix, a més, que el camp decreix en l'infinit almenys com $1/r^2$.⁷

Siga un camp vectorial $\vec{F}$ amb les fonts de divergència i rotacional⁸ que s'indiquen:

$$\nabla \vec{F} = S$$

$$\nabla \times \vec{F} = \vec{C}$$

Demostrarem que el camp vectorial amb aquestes fonts serà únic i vindrà donat per

$$\vec{F} = -\nabla \phi + \nabla \times \vec{A}$$

on

⁷ Vegeu apartat 1.5.7, de contingut complementari.

⁸ Perquè l'equació del rotacional relacionada amb les fonts siga autoconsistent, s'ha de complir que $\nabla \cdot \vec{C} = 0$.

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \frac{S(\vec{r}')}{R(\vec{r}, \vec{r}')} dv'$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{C}(\vec{r}')}{R(\vec{r}, \vec{r}')} dv'$$

sent V' la regió en què hi ha les fonts, $\vec{r}'$ i $\vec{r}$ els vectors de posició dels punts on es troben aquestes fonts (punt font) i el punt en què calculem les magnituds (punt camp), respectivament, i on

$$R(\vec{r}, \vec{r}') = |\vec{R}| = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (x_i - x'_i)^2}$$

Abans de començar amb la demostració, hauríem de considerar la informació que ens proporciona la divergència i el rotacional d'un camp vectorial a partir de la definició conceptual d'aquests operadors vectorials.⁹

La divergència en un punt és el flux del camp vectorial a través de la superfície que conté un volum tendent a 0 que envolta aquest punt,

$$\nabla \cdot \vec{F} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta v} \oint \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

on Δv és un volum infinitesimal que conté el punt en què volem determinar la divergència. El rotacional, per la seua banda, es defineix com:

$$(\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \oint \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

on ΔS és una superfície oberta que conté el punt on volem saber el rotacional i $\vec{n}$ és el vector unitari perpendicular a la superfície dirigit segons el sentit de recorregut de la integral de línia (regla de la mà dreta). Aquesta definició ens dona una idea de què ocurriria si posàrem un

⁹ Vegeu contingut complementari dels apartats 1.5.2.2 i 1.5.2.3.

molinet d'aspes l'eix (sensible al camp) del qual està orientat en la direcció del vector $\vec{u}$ i passa pel punt en què avaluem el rotacional.

Demostració del teorema de Helmholtz:

Començarem calculant la divergència del camp per a veure si satisfà la condició de partida.

$$\nabla \vec{F}(\vec{r}) = \nabla(-\nabla\phi + \nabla x \vec{A}) = -\nabla^2 \phi(\vec{r}) + \nabla(\nabla x \vec{A}) = -\frac{1}{4\pi} \nabla_r^2 \int_V \frac{S(\vec{r}')}{R} dv'$$

on hem utilitzat el fet que¹⁰ $\nabla(\nabla x \vec{A}) = 0$ i ∇_r^2 és l'operador laplacià respecte de les variables espacials (x, y, z) associades al vector de posició $\vec{r}$.

El laplacià actua sobre els punts camp (estem veient el que passa allà) i, per tant, pot entrar dins de la integral. Considerant que¹¹

$$\nabla \frac{\vec{r}}{r^3} = -\nabla \left[\nabla \left(\frac{1}{r} \right) \right] = -\nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) = 4\pi \delta(\vec{r})$$

tindrem,

$$\nabla \vec{F}(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int_V S(\vec{r}') \nabla_r^2 \frac{1}{R(\vec{r}, \vec{r}')} dv' = -\frac{1}{4\pi} \int_V S(\vec{r}') [-4\pi \delta(R)] dv' = S(\vec{r})$$

Queda demostrada, doncs, la primera igualtat de la divergència amb les seues fonts, quan els potencials estan definits a partir d'aquestes, tal com s'indica.

Pel que fa al rotacional del camp vectorial, considerant que $\nabla x \nabla \phi = 0$, tindrem

$$\nabla x \vec{F}(\vec{r}) = \vec{C} = \nabla x(-\nabla\phi + \nabla x \vec{A}) = -\nabla x \nabla \phi + \nabla x(\nabla x \vec{A}) = 0 + \nabla(\nabla \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

¹⁰ Vegeu el contingut de l'Annex.

¹¹ Vegeu el contingut complementari de l'apartat 1.5.6.

Recordem que el laplacià aplicat a un camp vectorial és, en coordenades cartesianes, el laplacià de cada component multiplicat pel vector unitari corresponent.

El primer sumand de la igualtat anterior és

$$\nabla(\nabla\vec{A}) = \frac{\nabla_r}{4\pi} \left\{ \int_V \nabla_r \left(\frac{\vec{C}}{R} \right) dv' \right\} = \frac{1}{4\pi} \left\{ \int_V \nabla_r \left[\vec{C} \nabla_r \left(\frac{1}{R} \right) \right] dv' \right\}$$

on ∇_r és l'operador divergència respecte de les variables espacials (x, y, z) associades al vector de posició $\vec{r}$ i

$$\nabla_r \left[\vec{C} \nabla_r \left(\frac{1}{R} \right) \right]$$

és el gradient del producte escalar de dos vectors.¹² Aquest gradient es pot desenvolupar com:

$$\begin{aligned} \nabla_r \left[\vec{C} \nabla_r \left(\frac{1}{R} \right) \right] &= (\vec{C} \nabla_r) \left(\nabla_r \left(\frac{1}{R} \right) \right) + \left(\nabla_r \left(\frac{1}{R} \right) \nabla_r \right) \vec{C}(\vec{r}') + \vec{C} x \left(\nabla_r x \left(\nabla_r \frac{1}{R} \right) \right) \\ &\quad + \nabla_r \left(\frac{1}{R} \right) x (\nabla_r x \vec{C}) = (\vec{C} \nabla_r) \left(\nabla_r \left(\frac{1}{R} \right) \right) + 0 + 0 + 0 \end{aligned}$$

resultat en què el segon i el quart sumand s'anul·len perquè les derivades actuen sobre els punts camp i $\vec{C}$ està definit en els punts font. Finalment, el tercer s'anul·la perquè el rotacional d'un gradient és sempre zero.

Recapitulant:

$$\nabla(\nabla\vec{A}) = \frac{1}{4\pi} \left\{ \int_V (\vec{C} \nabla_r) \left(\nabla_r \left(\frac{1}{R} \right) \right) dv' \right\}$$

Estudiem amb més detall el primer sumand:

¹² $\nabla(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\vec{a} \cdot \nabla) \vec{b} + (\vec{b} \cdot \nabla) \vec{a} + \vec{a} \times (\nabla \times \vec{b}) + \vec{b} \times (\nabla \times \vec{a})$.

$$\frac{1}{4\pi} \left\{ \int_V (\vec{C} \nabla_r) \left(\nabla_r \left(\frac{1}{R} \right) \right) dv' \right\}$$

Si tenim l'operador ∇ que actua sobre funcions que depenen només de R , tenim que $\nabla_r = -\nabla_{r'}$; ¹³ per tant, podem intercanviar els operadors només canviant el signe, quan actuen sobre aquest tipus de funcions.

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \left\{ \int_V (\vec{C} \nabla_r) \left(\nabla_r \left(\frac{1}{R} \right) \right) dv' \right\} &= \frac{1}{4\pi} \left\{ \int_V (-\vec{C} \nabla_{r'}) \left(-\nabla_{r'} \left(\frac{1}{R} \right) \right) dv' \right\} \\ &= \frac{1}{4\pi} \left\{ \int_V (\vec{C} \nabla_{r'}) \left(\nabla_{r'} \left(\frac{1}{R} \right) \right) dv' \right\} \end{aligned}$$

Analitzem l'integrand component a component,

$$(\vec{C} \nabla_{r'}) \left(\frac{\partial}{\partial x'_i} \left(\frac{1}{R} \right) \right)$$

començant per veure el valor de l'expressió següent:

$$\nabla_{r'} \left(\vec{C} \frac{\partial}{\partial x'_i} \left(\frac{1}{R} \right) \right)$$

expressió que és la divergència del producte d'un vector per un escalar.¹⁴

Així doncs,

$$\nabla_{r'} \left(\vec{C} \frac{\partial}{\partial x'_i} \left(\frac{1}{R} \right) \right) = \frac{\partial}{\partial x'_i} \left(\frac{1}{R} \right) (\nabla_{r'} \vec{C}) + \vec{C} \nabla_{r'} \left(\frac{\partial}{\partial x'_i} \left(\frac{1}{R} \right) \right)$$

El segon sumand té l'estructura d'una de les components de l'integrand de la darrera integral, i podem aplicar-hi la integració per parts:

¹³ $\nabla_{r'}$ és l'operador divergència respecte de les variables espacials (x' , y' , z') associades al vector de posició $\vec{r}'$.

¹⁴ $\nabla(\vec{b} a) = a \nabla \vec{b} + \vec{b} \nabla a$.

$$I_i = \frac{1}{4\pi} \left\{ \int_V \vec{C} \nabla_{r'} \left(\frac{\partial}{\partial x'_i} \left(\frac{1}{R} \right) \right) dv' \right\} = |\text{integrant per parts}| =$$

$$\frac{1}{4\pi} \left\{ \int_V \nabla_{r'} \left(\vec{C} \frac{\partial}{\partial x'_i} \left(\frac{1}{R} \right) \right) dv' - \int_V (\nabla_{r'} \vec{C}) \left(\frac{\partial}{\partial x'_i} \left(\frac{1}{R} \right) \right) dv' \right\}$$

Podem aplicar el teorema de Gauss al primer terme amb una superfície que, contenint V , estiga molt lluny (en l'infinit), on les fonts són 0 i, per tant, s'anul·larà. En el segon terme, tenim la divergència de $\vec{C}$, que ahora està definida a partir del $\nabla_x \vec{F}$; en conseqüència, aquest segon sumand també serà zero, ja que $\nabla(\nabla_x \vec{F}) = 0$. En conclusió, la integral per a cada component i -èsima i, per això, la integració global serà:

$$\frac{1}{4\pi} \left\{ \int_V \vec{C} \nabla_{r'} \left(\nabla_{r'} \left(\frac{1}{R} \right) \right) dv' \right\} = 0$$

a la qual cosa haurem d'afegir el laplacià $-\nabla^2 \vec{A}$, per a completar el valor del rotacional.

Pel que fa al laplacià, per a cada component en coordenades cartesianes, tindrem operadors de la forma $(\nabla^2 A_i) \vec{u}_i$

$$\nabla_r^2 A_i(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V C_i(\vec{r}') \nabla_r^2 \left(\frac{1}{R(\vec{r}, \vec{r}') } \right) dv' = \frac{1}{4\pi} \int_V C_i(\vec{r}') (-4\pi \delta(R)) dv' = -C_i(\vec{r})$$

D'aquesta manera,

$$(\nabla^2 A_i) \vec{u}_i = -C_i(\vec{r}) \vec{u}_i$$

i, per tant, sumant les tres components, ens queda:

$$\nabla_r^2 \vec{A}(\vec{r}) = -\vec{C}(\vec{r})$$

i es compleix

$$\nabla_x \vec{F} = \vec{C}$$

com volíem demostrar.

Ens queda per confirmar que aquesta solució és única (unicitat de la solució). Suposem dues solucions amb les mateixes fonts:

$$\nabla \vec{F}_1 = S = \nabla \vec{F}_2$$

$$\nabla \times \vec{F}_1 = \vec{C} = \nabla \times \vec{F}_2$$

Definim un camp vectorial que siga la diferència entre les dues solucions,

$$\vec{W} = \vec{F}_1 - \vec{F}_2$$

que satisfarà

$$\nabla \times \vec{W} = 0 \quad \text{i} \quad \nabla \cdot \vec{W} = 0$$

En conseqüència, tenim:

$$\vec{W} = -\nabla \Psi \quad \text{i} \quad \nabla(-\nabla \Psi) = -\nabla^2 \Psi = 0$$

Si apliquem el teorema de Gauss a la funció (vectorial) $\Psi \nabla \Psi$, que no és més que el producte d'un escalar per un vector, ens queda la igualtat següent:

$$\int_V \nabla(\Psi \nabla \Psi) dv' = \oint_S (\Psi \nabla \Psi) d\vec{S}$$

I, si recordem el valor de la divergència del producte d'un escalar per un vector,¹⁴ tenim:

$$\nabla(\Psi \nabla \Psi) = \Psi(\nabla(\nabla \Psi)) + \nabla \Psi \nabla \Psi = \Psi \nabla^2 \Psi + (\nabla \Psi)^2$$

Si, en l'aplicació del teorema de Gauss, portem la superfície suficientment lluny, on les fonts s'anul·len i $\Psi \rightarrow 0$ almenys com $1/r$, tindrem que la integral de superfície és nul·la i, per tant,

$$\int_V \nabla(\Psi \nabla \Psi) dv' = 0 = \int_V \{\Psi \nabla^2 \Psi + (\nabla \Psi)(\nabla \Psi)\} dv' =$$

$$\int_V (\nabla \Psi)^2 dv' = \int_V (\vec{W} \vec{W}) dv' = 0$$

cosa que implica que $\vec{W} = 0$ i, consegüentment, $\vec{F}_1 = \vec{F}_2$, de manera que queda demostrada la unicitat de la solució.

Bibliografia per a l'apartat 1.4

Panofsky, Wolfgang K. H. & Phillips, Melba, apartat 1.1.

1.5. Contingut complementari

1.5.1. Sistemes d'unitats en electromagnetisme

Per a l'expressió de les magnituds físiques en electromagnetisme, es poden emprar diferents sistemes d'unitats. Els més comuns són el Sistema Internacional d'Unitats (SI), que forma part del sistema MKS (Metro-Kilogram-Segon), i el Sistema Gaussià, que forma part del sistema CGS (Centímetre-Gram-Segon). Aquests sistemes difereixen en les definicions fonamentals, les constants i les conveniències pràctiques, la qual cosa afecta la manera com es presenten i resolen les equacions de l'electromagnetisme.

Sistema Internacional (SI)

El Sistema Internacional (SI) és el sistema d'unitats més utilitzat mundialment. Les seues unitats fonamentals en electromagnetisme inclouen:

- Metre (m) per a la longitud
- Quilogram (kg) per a la massa
- Segon (s) per al temps
- Ampere (A) per al corrent elèctric
- Com a unitats derivades
 - Coulomb (C) per a la càrrega elèctrica

- Volt (V) per a la diferència de potencial
- Ohm (Ω) per a la resistència
- Tesla (T) per al camp magnètic i
- Henry (H) per a la inductància.

Les lleis de l'electromagnetisme, com les equacions de Maxwell, prenen una forma estandarditzada en el SI i usen la permitivitat elèctrica del buit ϵ_0 i la permeabilitat magnètica del buit μ_0 .

Sistema Gaussià (CGS)

El Sistema Gaussià es basa en centímetres, grams i segons (CGS). En aquest sistema, les unitats electromagnètiques es defineixen sense introduir explícitament les constants ϵ_0 i μ_0 . En el seu lloc, la velocitat de la llum c compleix el rol de constant fonamental que relaciona el camp elèctric i el camp magnètic. Això porta a una formulació més simètrica de les equacions de Maxwell, encara que les unitats poden resultar menys intuïtives:

- La càrrega elèctrica es mesura en statcoulombs o franklins (Fr). Un statcoulomb $\approx 3.33564 \times 10^{-10}$ coulombs. La càrrega elemental és 4.803×10^{-10} Fr.
- El camp elèctric es mesura en statvolt/cm. Un statvolt/cm ≈ 300 V/m.
- El camp magnètic es mesura en gauss. Un gauss = 10^{-4} tesla.

En la pràctica, com hem dit, el SI és el sistema adoptat comunament, sobretot en treballs experimentals i aplicacions tecnològiques. Tot i això, el sistema CGS encara es troba en alguns textos teòrics i en alguns treballs de física nuclear a causa de la seua simplicitat en certes formulacions matemàtiques.

Sistemes racionalitzats i no racionalitzats

Els sistemes d'unitats es divideixen, a més, en racionalitzats i no racionalitzats, segons com es manegen els factors geomètrics com 4π en les equacions de l'electromagnetisme.

- En els sistemes racionalitzats (com el SI), les equacions estan formulades perquè els factors 4π apareguen en les expressions de simetria esfèrica, cosa que simplifica les equacions generals.

- En els sistemes no racionalitzats (com el CGS-Gaussià), els factors 4π apareixen explícitament en les equacions de camp, com en la llei de Gauss.

Equacions de Maxwell en diferents sistemes d'unitats

Sistema Internacional (SI)

1. Llei de Gauss per al camp elèctric:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho \, dv$$

2. Llei de Gauss per al camp magnètic:

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

3. Llei de Faraday-Lenz:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

4. Llei d'Ampère-Maxwell:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_S \left(\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}$$

Sistema Gaussià (CGS)

1. Llei de Gauss per al camp elèctric:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi \int_V \rho \, dv$$

2. Llei de Gauss per al camp magnètic:

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

3. Llei de Faraday-Lenz:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

4. Llei d'Ampère-Maxwell:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{c} \int_S \left(4\pi \vec{j} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}$$

1.5.2. Operadors diferencials

A continuació, farem un breu resum de les propietats i les característiques dels operadors diferencials incidint, sobretot, en els aspectes conceptuals que els determinen.

1.5.2.1. Gradient

El gradient és una generalització del concepte de derivada d'una variable, però ara en tres dimensions. Podem demostrar que una funció escalar $f(\vec{r})$, quan ens movem un $d\lambda$ en una certa direcció donada per un vector unitari $\vec{u}$, varia de la forma:

$$\frac{df}{d\lambda} = \nabla f(\vec{r}) \cdot \vec{u}$$

de manera similar a com ho fèiem en una única dimensió.

Corol·lari: La direcció de variació màxima per a la funció $f(\vec{r})$ és quan la direcció és paral·lela al vector gradient, ja que es maximitza el producte escalar. El mòdul del gradient indica com de ràpid canvia en aquesta direcció. Així mateix, el gradient és perpendicular a la superfície de nivell o superfície equipotencial en què la funció és constant, de manera que el producte escalar de la direcció de desplaçament i el gradient de la funció és 0.

Demostració:

Siga un vector $\vec{u}(a, b, c)$ en una certa direcció:

$$\vec{u} = \frac{a}{|\vec{u}|} \vec{u}_x + \frac{b}{|\vec{u}|} \vec{u}_y + \frac{c}{|\vec{u}|} \vec{u}_z$$

Definim la derivada direccional com:

$$D_{\vec{u}}f(\vec{r}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\vec{r} + h \vec{u}) - f(\vec{r})}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\vec{r} + h \left(\frac{a}{|\vec{u}|} \vec{u}_x + \frac{b}{|\vec{u}|} \vec{u}_y + \frac{c}{|\vec{u}|} \vec{u}_z \right)) - f(\vec{r})}{h}$$

Si fem el desenvolupament en sèrie de Taylor de la funció de diverses variables, tenim:

$$f\left(x + h\left(\frac{a}{|\vec{u}|}\right), y + h\left(\frac{b}{|\vec{u}|}\right), z + h\left(\frac{c}{|\vec{u}|}\right)\right) \approx$$

$$f(\vec{r}) + \left(h \frac{a}{|\vec{u}|}\right) \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{h \rightarrow 0} + \left(h \frac{b}{|\vec{u}|}\right) \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{h \rightarrow 0} + \left(h \frac{c}{|\vec{u}|}\right) \frac{\partial f}{\partial z} \Big|_{h \rightarrow 0}$$

Podríem afegir-hi els termes d'ordre superior per a h , però, en considerar el denominador de la definició de derivada direccional, si fem el límit $h \rightarrow 0$, donaria termes que desapareixerien pel fet de ser polinomis amb exponent positiu en h .

En cas que introduïm el desenvolupament en sèrie de Taylor anterior a la definició de derivada direccional, tindrem:

$$D_{\vec{u}}f(\vec{r}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\vec{r} + h \vec{u}) - f(\vec{r})}{h} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\vec{r}) + \left(h \frac{a}{|\vec{u}|}\right) \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{h \rightarrow 0} + \left(h \frac{b}{|\vec{u}|}\right) \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{h \rightarrow 0} + \left(h \frac{c}{|\vec{u}|}\right) \frac{\partial f}{\partial z} \Big|_{h \rightarrow 0} - f(\vec{r})}{h} = \vec{u} \cdot \nabla f(\vec{r})$$

tal com preteníem demostrar.

1.5.2.2. Divergència

La definició operacional de la divergència és ben coneguda:

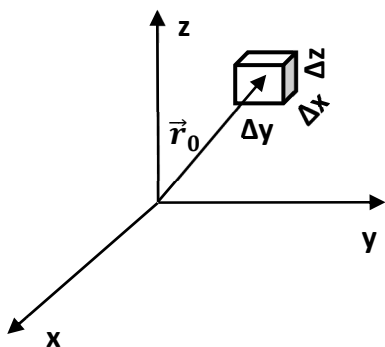
$$\nabla \cdot \vec{F} = \sum_1^3 \frac{\partial F_i}{\partial x_i}$$

Aquesta expressió ens proporciona com a resultat un escalar i les F_i i les x_i són les tres components del camp vectorial i les coordenades cartesianes, respectivament. En altres sistemes de coordenades, les expressions són diferents.¹⁵

Però què vol dir conceptualment la divergència d'un camp vectorial? La definició que ens portarà a la mateixa estructura operacional és:

$$\nabla \cdot \vec{F} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta v} \oint \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

És a dir, la divergència en un punt és el flux del camp vectorial a través de la superfície tancada que conté un volum tendent a 0 que envoltaria aquest punt.



Vegem-ho:

$$\Delta v = \Delta x \Delta y \Delta z$$

Es tracta d'un volum en el centre del qual hi ha el punt (x_0, y_0, z_0) en què avaluem la divergència. En les parets del volum infinitesimal, podem suposar que el camp vectorial està ben representat pel desenvolupament de Taylor.

$$\vec{F}(x, y, z) \approx \vec{F}(x_0, y_0, z_0) + (\pm) \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial \vec{F}}{\partial x} \Big|_{x_0, y_0, z_0} + (\pm) \frac{\Delta y}{2} \frac{\partial \vec{F}}{\partial y} \Big|_{x_0, y_0, z_0} + (\pm) \frac{\Delta z}{2} \frac{\partial \vec{F}}{\partial z} \Big|_{x_0, y_0, z_0}$$

Si, per a simplificar la notació, fem:

$$\vec{F}(x_0, y_0, z_0) = \vec{F}_0$$

podem calcular el flux a través de les sis cares del cub:

¹⁵ Les fórmules operatives per al cas de coordenades cilíndriques o esfèriques es troben en l'Annex.

$$\begin{aligned}
& \left(\vec{F}_o + \frac{\partial \vec{F}}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \vec{u}_x \Delta y \Delta z - \left(\vec{F}_o - \frac{\partial \vec{F}}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \vec{u}_x \Delta y \Delta z + \left(\vec{F}_o + \frac{\partial \vec{F}}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} \right) \vec{u}_y \Delta x \Delta z - \\
& \left(\vec{F}_o - \frac{\partial \vec{F}}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} \right) \vec{u}_y \Delta x \Delta z + \left(\vec{F}_o + \frac{\partial \vec{F}}{\partial z} \frac{\Delta z}{2} \right) \vec{u}_z \Delta x \Delta y - \\
& \left(\vec{F}_o - \frac{\partial \vec{F}}{\partial z} \frac{\Delta z}{2} \right) \vec{u}_z \Delta x \Delta y = \left(\frac{\partial \vec{F}}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial \vec{F}}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial \vec{F}}{\partial z} \vec{u}_z \right) \Delta x \Delta y \Delta z = \nabla \vec{F} \Delta v
\end{aligned}$$

I, per tant, es compleix la identitat que buscàvem, ja que el parèntesi $\left(\frac{\partial \vec{F}}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial \vec{F}}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial \vec{F}}{\partial z} \vec{u}_z \right)$ no és més que la definició operacional de divergència.

Vinculat amb aquest operador, hi ha el laplacà, que és la divergència del gradient d'una funció escalar i que s'escriu:

$$\nabla^2 \phi = \nabla(\nabla \phi)$$

Aquest operador laplacà es pot estendre, en coordenades cartesianes, a les tres components d'un camp vectorial:¹⁶

$$\nabla^2 \vec{F} = \sum_1^3 \nabla^2 F_i \vec{u}_i$$

1.5.2.3. Rotacional

La definició operacional del rotacional és:

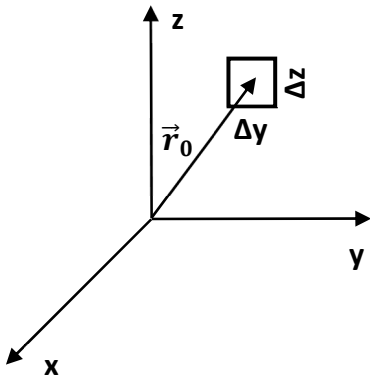
$$\nabla \times \vec{F} = \left\{ \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} \right) - \left(\frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \right\} \vec{u}_x + \left\{ \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} \right) - \left(\frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \right\} \vec{u}_y + \left\{ \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} \right) - \left(\frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \right\} \vec{u}_z$$

o, en forma matricial,

¹⁶ L'expressió en coordenades cilíndriques o esfèriques es pot trobar a l'Annex.

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

Com en el cas de la divergència, les expressions per al rotacional són diferents en altres sistemes de coordenades. ¹⁵



Però què vol dir conceptualment el rotacional d'un camp vectorial? Siga una superfície oberta que conté un punt on volem saber el rotacional la definició del qual és:

$$(\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \oint \vec{F} d\vec{l}$$

on $\vec{n}$ és el vector unitari perpendicular a la superfície, dirigit segons el sentit de recorregut de la integral de línia (regla de la mà dreta).

Demostració:

Qualsevol superfície infinitesimal està formada per les projeccions sobre els tres plans cartesianes. Siga una superfície dS el vector perpendicular de la qual és $\vec{n} = n_x \vec{u}_x + n_y \vec{u}_y + n_z \vec{u}_z$, aleshores,

$$d\vec{S} = (n_x dS) \vec{u}_x + (n_y dS) \vec{u}_y + (n_z dS) \vec{u}_z$$

d'on $dS_x = n_x dS$; $dS_y = n_y dS$; $dS_z = n_z dS$, que són les ombres de l'àrea dS sobre cada pla del sistema de coordenades cartesià.

En la definició de rotacional, tenim:

$$(\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \oint \vec{F} d\vec{l}$$

$$(\nabla \times \vec{F}) \cdot (n_x \vec{u}_x + n_y \vec{u}_y + n_z \vec{u}_z) = (\nabla \times \vec{F}) \cdot \left(\frac{dS_x}{dS} \vec{u}_x + \frac{dS_y}{dS} \vec{u}_y + \frac{dS_z}{dS} \vec{u}_z \right) = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \oint \vec{F} d\vec{l}$$

d'on es dedueix que, per a cada component del vector $\vec{n}$,

$$(\nabla \times \vec{F}) \vec{n}_x = \lim_{\Delta S_x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S_x} \oint \vec{F} d\vec{l}$$

$$(\nabla \times \vec{F}) \vec{n}_y = \lim_{\Delta S_y \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S_y} \oint \vec{F} d\vec{l}$$

$$(\nabla \times \vec{F}) \vec{n}_z = \lim_{\Delta S_z \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S_z} \oint \vec{F} d\vec{l}$$

Estudiem la component $\vec{u}_x$:

$$\begin{aligned} (\nabla \times \vec{F}) \vec{n}_x &= \lim_{\Delta y, \Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta y \Delta z} \oint \vec{F} d\vec{l} = \lim_{\Delta y, \Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta y \Delta z} \left\{ \left(\vec{F}_0 + \frac{\partial \vec{F}}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} \right) \Delta z \vec{u}_z - \right. \\ &\quad \left(\vec{F}_0 - \frac{\partial \vec{F}}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} \right) \Delta z \vec{u}_z - \left(\vec{F}_0 + \frac{\partial \vec{F}}{\partial z} \frac{\Delta z}{2} \right) \Delta y \vec{u}_y + \left(\vec{F}_0 - \frac{\partial \vec{F}}{\partial z} \frac{\Delta z}{2} \right) \Delta y \vec{u}_y \Big\} = \\ &\quad \lim_{\Delta y, \Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta y \Delta z} \left\{ \left(\frac{\partial \vec{F}}{\partial y} \right) \vec{u}_z - \left(\frac{\partial \vec{F}}{\partial z} \right) \vec{u}_y \right\} \Delta y \Delta z = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} \right) - \left(\frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

resultat que coincideix amb el primer terme del rotacional, és a dir, la component $\vec{u}_x$.

Si ho fem per a les altres components amb altres superfícies en els diferents plans, apareixen les altres components operacionals del rotacional i és fàcil demostrar l'equivalència operativa d'aquesta definició amb la coneguda fórmula que defineix operacionalment el rotacional.

$$\nabla \times \vec{F} = \left\{ \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} \right) - \left(\frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \right\} \vec{u}_x + \left\{ \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} \right) - \left(\frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \right\} \vec{u}_y + \left\{ \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} \right) - \left(\frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \right\} \vec{u}_z$$

Podem dir que, si el rotacional és diferent de 0 ($\nabla \times \vec{F} \neq 0$), un molinet, situat en el punt on avaluem el rotacional, podrà girar si $\vec{F}$ és un camp de forces.

Algunes conseqüències de les definicions anteriors són que

$$\nabla \times (\nabla \phi) = 0$$

cosa que es pot demostrar, per exemple, per càlcul directe en coordenades cartesianes.

Per tant, si un camp és irrotacional, es pot obtenir com el gradient d'una funció escalar:

$$\nabla \times \vec{F} = 0 \leftrightarrow \vec{F} = \nabla \phi$$

De vegades, el camp conservatiu es definirà com el gradient negatiu en fer-lo correspondre amb conceptes físics com el potencial del camp gravitatori o del camp electroestàtic. I també, com és obvi per consideració directa de les definicions anteriors, tenim que $\nabla(\nabla \times \vec{F}) = 0$.

1.5.3. Integrals de camps vectorials

1.5.3.1. Integral de línia o circulació

La integral de línia no és més que la suma de les projeccions de $\vec{F}$ sobre el recorregut en què s'avalua.

$$C = \int \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

En el cas que el camí siga tancat, podem dilucidar si el camp és conservatiu, ja que, quan

$$\int \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0 \leftrightarrow \nabla \times \vec{F} = 0 \text{ i també } \vec{F} = \nabla \phi \leftrightarrow \int \nabla \phi \cdot d\vec{l} = 0$$

Seguint, per exemple, la definició de Tom M. Apostol (p. 395), tenim,

$$C = \int \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{F}(\vec{l}(t)) \cdot d\vec{l} = \int_a^b \vec{F}(\vec{l}(t)) \cdot \vec{l}' dt$$

on $\vec{l}$ és la corba oberta sobre la qual cal integrar i els límits de la integral, juntament amb la parametrització, donen el sentit de recorregut. Hem de parar esment al fet que els vectors unitaris no cartesianes podrien dependre del paràmetre de parametrització (com és el cas, o pot ser-ho, en coordenades esfèriques o cilíndriques). Si sempre considerem que els límits de la integral, juntament amb la parametrització estableixen el sentit de recorregut, no tindrem dubtes respecte del signe de dt , que sempre serà positiu.

- Com a aplicació dels conceptes anteriors, discutiu la integració del camp vectorial

$$\vec{E} = k \frac{z}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \vec{u}_z$$

des de l'infinit fins a un punt z_0 de l'eix z i demostreu que el resultat coincideix amb el valor d'una funció potencial

$$\vec{E} = -\nabla\phi$$

$$\phi = k \frac{1}{(z^2 + a^2)^{1/2}}$$

1.5.3.2. Integral de superfície

Depenent de si avaluem aquesta integral de superfície sobre un camp vectorial o sobre un camp escalar, tenim:

- el flux del camp vectorial, que pot ser a través una superfície tancada o oberta,

$$\Phi = \int \vec{F} d\vec{S}$$

- la integració (sumatori) de la densitat superficial, per exemple, d'una densitat de massa o càrrega sobre una superfície determinada

$$Q = \int_{S'} \sigma(\vec{r}') dS'$$

on hem introduït la variable amb prima per a indicar que aquesta serà la variable d'integració i que el que importa són els valors de σ sobre la superfície S' .

- Com a exemple, demostreu que el flux d'un camp $\vec{A} = f(r)\vec{r}$ a través d'un casquet esfèric de semiamplitud θ_0 i radi a és

$$\Phi = f(a)a^3 2\pi(1 - \cos\theta_0)$$

- Així mateix, demostreu que és el camp $\vec{A} = f(r)\vec{r}$ és conservatiu per a qualsevol funció $f(r)$.

1.5.3.3. Integral de volum

En aquest cas, ens interessa l'avaluació de les fonts (densitat volúmica), o bé la suma de les components vectorials d'un camp, dins d'un volum tancat.

$$Q = \int_{V'} \rho(\vec{r}') dv' \quad ; \quad \vec{D} = \int_{V'} \vec{A}(\vec{r}') dv'$$

La indicació prima (') té el mateix significat que en el cas de la superfície, és a dir, que es refereix als valors de la densitat de càrrega, o les components del camp, en els punts del volum V' .

1.5.4. Teoremes integrals

A continuació, analitzarem alguns dels teoremes, corol·laris i aspectes més significatius de les integracions de línia, superfície i volum que solen aparèixer en el context de l'electromagnetisme.¹⁷

1.5.4.1. Integració entre dos punts. Integral de línia o circulació

L'avaluació de la integral d'una certa funció entre dos punts quan estem en un problema monodimensional és:

$$\int_a^b \left(\frac{df}{dx} \right) dx = f(b) - f(a)$$

Aquesta mateixa estructura es manté en tres dimensions, però ara amb el gradient:

$$\int_{\vec{a}}^{\vec{b}} (\nabla \phi) d\vec{r} = \phi(\vec{b}) - \phi(\vec{a})$$

No oblidem que

¹⁷ Vegeu la demostració d'aquests teoremes, per exemple, en Marsden & Tromba, L8, p. 461 i següents.

$$\nabla\phi d\vec{r} = d\phi_x + d\phi_y + d\phi_z = d\phi$$

Com veiem, el resultat de la integral és independent del camí i, per tant, si el camí és tancat

$$\oint \nabla\phi d\vec{r} = 0$$

1.5.4.2. Teorema de Gauss

El teorema de Gauss, de la divergència o de Gauss-Ostrogradsky, estableix que

$$\int_V \nabla \vec{F} dv = \oint_S \vec{F} d\vec{S}$$

on $\oint$ indica que és una integral tancada, és a dir, que tenim un volum i una superfície que l'envolta completament. En altres paraules, si sumem totes les fonts de divergència dins d'un volum, el resultat serà el flux del camp a través d'una superfície tancada que conté aquest volum.

Podem obtenir una demostració conceptualment simple i intuïtiva considerant la definició de divergència i dividint el volum V en elements infinitesimals:

$$\int_V \nabla \vec{F} dv = \sum_i \nabla \vec{F} \Delta V_i = \sum_i \left\{ \lim_{\Delta V_i \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V_i} \int \vec{F} d\vec{S}_i \right\} \nabla V_i = \sum_i \left\{ \lim_{\Delta V_i \rightarrow 0} \int \vec{F} d\vec{S}_i \right\}$$

Les superfícies comunes a dos volums infinitesimals contigus donaran un flux total 0, atès que, en un volum, el vector de superfície apuntarà en una direcció perpendicular a la superfície que el conté i en l'altre contigu, en la direcció contrària. En conseqüència, només ens quedaran sense compensar els elements infinitesimals de la superfície exterior:

$$\sum_i \left\{ \lim_{\Delta V_i \rightarrow 0} \int \vec{F} d\vec{S}_i \right\} = \oint_{S_{ext}} \vec{F} d\vec{S}$$

- Com a exemple, comproveu el teorema de Gauss¹⁸ per a un camp vectorial que en coordenades esfèriques està definit per:

$$\vec{A} = r \cos \theta \vec{u}_r + r \sin \theta \vec{u}_\theta + r \sin \theta \cos \varphi \vec{u}_\varphi$$

1.5.4.3. Teorema Stokes

El teorema de Stokes estableix que

$$\int_{S.O.} (\nabla \times \vec{F}) d\vec{S} = \oint_C \vec{F} d\vec{l}$$

on C és el contorn sobre el qual recolza la superfície oberta (S.O). Noteu que la superfície pot tenir qualsevol forma i el resultat serà el mateix per a qualsevol superfície que compartisca el mateix contorn de suport.

Demostració:

A partir de la definició ja vista de rotacional

$$(\nabla \times \vec{F}) \vec{n} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \oint_C \vec{F} d\vec{l}$$

subdividim la superfície oberta S en elements infinitesimals

$$\int_S (\nabla \times \vec{F}) \vec{n} dS = \sum_j \left\{ \lim_{\Delta S_j \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S_j} \oint_{C_j} \vec{F} d\vec{l} \right\} \Delta S_j = \sum_j \left\{ \lim_{\Delta S_j \rightarrow 0} \oint_{C_j} \vec{F} d\vec{l} \right\} = \oint_C \vec{F} d\vec{l}$$

Atès que els diferents contorns de superfícies contigües van en direccions oposades (perquè els vectors de superfície tenen la direcció de la normal exterior), la circulació s'anul·la en cada superfície infinitesimal i al final només ens queda el contorn exterior.

¹⁸ Hem de reiterar que el teorema de Gauss es compleix per a qualsevol volum, considerant les fonts de divergència que s'hi inclouen.

- Comproveu el teorema de Stokes en una semiesfera per a un camp vectorial que en coordenades esfèriques està donat per $\vec{A} = \frac{1}{r} \vec{u}_\varphi$.
- Repetiu l'anàlisi si la superfície fora plana (és a dir, el cercle que sostindria la semiesfera).

1.5.5. La funció delta de Dirac (δ)

Les càrregues (o les masses) puntuals no tenen dimensió espacial, cosa que pot generar singularitats en el punt en què es troben. Per a descriure aquests punts en un marc integral, es fa servir la funció delta de Dirac definida com:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ \infty & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

En el domini integral, això ens condueix a:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

La delta de Dirac no és una funció en sentit usual sinó un límit:¹⁹

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_\varepsilon = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon \sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{\varepsilon^2}}$$

- És un bon exercici representar aquesta funció per a diversos valors de ε (per exemple, amb <https://www.geogebra.org/graphing?lang=ca>)

Algunes propietats de la delta de Dirac són:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0)$$

¹⁹ En la bibliografia, es poden trobar diverses definicions equivalents. Vegeu, per exemple, Arfken & Weber.

En tres dimensions:

$$\delta(\vec{r}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \vec{r} \neq 0 \\ \infty & \text{si } \vec{r} = 0 \end{cases}$$

$$\int_{V \rightarrow \infty} \delta(\vec{r}) dv = 1$$

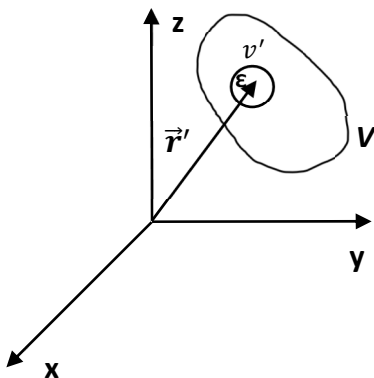
$$\int_{V \rightarrow \infty} f(\vec{r}) \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) dv = f(\vec{r}_0)$$

1.5.6. Alguns resultats d'interès per al desenvolupament del curs

Al llarg del curs ens caldran alguns resultats que ara demostrarem i que en aquest moment plantejem només com a qüestions matemàtiques.

1.5.6.1. Quant val $\nabla \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right)$?

En $\vec{r} \neq 0$ és immediat demostrar per càlcul directe que el resultat és: $\nabla \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right) = 0$.



En $\vec{r} = 0$ resoldrem a continuació la singularitat i en demostrarem el valor. Sigui un volum V que contingui el punt $\vec{r} = 0$ al voltant del qual considerem una esfera de radi ϵ menut (volum v') i apliquem el teorema de Gauss al volum diferència $(V - v')$:

$$\int_{V-v'} \nabla \frac{\vec{r}}{r^3} dv = 0 = \int_S \frac{\vec{r}}{r^3} \vec{n} dS$$

on S són les superfícies que contornegen ambdós volums i $\nabla \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right) = 0$. En conseqüència,

$$\int_{V-v'} \nabla \frac{\vec{r}}{r^3} dv = 0 = \int_{S_V} \frac{\vec{r}}{r^3} \vec{n} dS + \int_{S_{v'}} \frac{\vec{r}}{r^3} \vec{n} dS$$

d'on deduïm que

$$\int_{S_V} \frac{\vec{r} \vec{n}}{r^3} dS = - \int_{S_{v'}} \frac{\vec{r} \vec{n}}{r^3} dS$$

En la superfície interior (corresponent al volum v') $\vec{n} = -\frac{\vec{r}}{r}$, ja que la normal exterior va cap a dins del volum v' :

$$- \int_{S_{v'}} \frac{\vec{r} \vec{n}}{r^3} dS = \int_{S_{v'}} \frac{\vec{r} \vec{r}}{r^4} dS = \int_{S_{v'}} \frac{1}{r^2} dS = \frac{1}{\varepsilon^2} 4\pi \varepsilon^2 = 4\pi$$

d'on deduïm que

$$\int_{S_V} \frac{\vec{r} \vec{n}}{r^3} dS = 4\pi$$

Com podem expressar $\nabla \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right)$ perquè la integració ens done 4π ?

$$\int_V \nabla \frac{\vec{r}}{r^3} dv = \int_{S_V} \frac{\vec{r} \vec{n}}{r^3} dS = 4\pi$$

Si aprofitem la definició de la delta de Dirac, podem dir que, si $\nabla \frac{\vec{r}}{r^3} = 4\pi \delta(\vec{r})$, el resultat de la integració en el volum serà coherent amb el que s'ha demostrat amb la integració en la superfície i, per tant:

$$\nabla \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right) = \begin{cases} 0 & \text{si } \vec{r} \neq 0 \\ 4\pi \delta(\vec{r}) & \text{si } \vec{r} = 0 \end{cases}$$

ja que amb això:

$$\int_V \nabla \frac{\vec{r}}{r^3} dv = \int_V 4\pi \delta(\vec{r}) dv = 4\pi$$

1.5.6.2. Quant val $\nabla^2 \left(\frac{1}{r}\right)$?

Una altra de les expressions que ens apareixeran reiteradament durant el curs és el laplacà, $\nabla^2 \left(\frac{1}{r}\right)$.

Considerem $\vec{r} \neq 0$; si calculem $\nabla \left(\frac{1}{r}\right)$ (en coordenades cartesianes, per exemple), és immediat demostrar que $\nabla \left(\frac{1}{r}\right) = -\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right)$. O, fins i tot més fàcil, en coordenades esfèriques:

$$\nabla \left(\frac{1}{r}\right) = \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r}\right) \vec{u}_r = -\frac{1}{r^2} \vec{u}_r = -\frac{\vec{r}}{r^3}$$

Per tant, el laplacà $\nabla^2 \left(\frac{1}{r}\right) = -\nabla \left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right)$ per a $r \neq 0$, és:

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{r}\right) = 0$$

Per a $\vec{r} = 0$, podem veure que, aprofitant-nos del resultat de l'apartat 1.5.6.1, es pot escriure:

$$\nabla \frac{\vec{r}}{r^3} = -\nabla \left[\nabla \left(\frac{1}{r}\right) \right] = -\nabla^2 \left(\frac{1}{r}\right) = 4\pi\delta(\vec{r})$$

També es pot demostrar aquest resultat sense recórrer al coneixement de la divergència de $\nabla \frac{\vec{r}}{r^3}$. En efecte, avaluem el laplacà exclouint-ne el punt $\vec{r} = 0$, i considerant la funció $\frac{1}{\sqrt{r^2 + \varepsilon^2}}$, la qual, quan $\varepsilon \rightarrow 0$, ens dona el terme $\frac{1}{r}$ del nostre problema.

$$\begin{aligned} \int_{V \rightarrow \infty} \nabla^2 \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + \varepsilon^2}} \right) dv &= \int_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + \varepsilon^2}} \right) \right) dv = \\ \int_{V \rightarrow \infty; \varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \left(\frac{-1}{2} \right) \frac{2r}{(r^2 + \varepsilon^2)^{3/2}} \right) dv &= \int_{V \rightarrow \infty; \varepsilon \rightarrow 0} -\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^3 \frac{1}{(r^2 + \varepsilon^2)^{3/2}} \right) dv = \\ \int_{V \rightarrow \infty} -\left(\frac{3\varepsilon^2}{(r^2 + \varepsilon^2)^{5/2}} \right) dv &= 3\varepsilon^2 \iiint_{V \rightarrow \infty} -\left(\frac{r^2 dr \sin\theta d\theta d\varphi}{(r^2 + \varepsilon^2)^{5/2}} \right) = \frac{-3\varepsilon^2 4\pi}{3\varepsilon^2} = -4\pi \end{aligned}$$

És a dir, la integral té la solució -4π .²⁰ Així mateix, com havíem dit, quan $\varepsilon \rightarrow 0$, tenim que $\frac{1}{\sqrt{r^2 + \varepsilon^2}}$ tendeix a $\frac{1}{r}$ i el valor -4π serà el que podrem associar amb la integral de $\nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right)$.

En resum,

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) = \begin{cases} 0 & \text{si } \vec{r} \neq 0 \\ -4\pi\delta(\vec{r}) & \text{si } \vec{r} = 0 \end{cases}$$

1.5.6.3. Quant val $\nabla \times \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right)$?

Si fem el càlcul en coordenades esfèriques, essent $\vec{F} = \frac{\vec{r}}{r^3}$, tenim:

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{u}_r & \vec{u}_\theta & \vec{u}_\varphi \\ r^2 \sin\theta & r \sin\theta & r \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ F_r & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\vec{u}_\theta}{r \sin\theta} \left(-\frac{\partial F_r}{\partial \varphi} \right) + \frac{\vec{u}_\varphi}{r} \frac{\partial F_r}{\partial \theta}$$

Si $r \neq 0$, el resultat és nul i, si $r = 0$, ambdós sumands donen la indeterminació $\frac{0}{0}$, que resollem aplicant la regla de L'Hôpital:

$$\frac{\frac{\partial \left[\frac{\partial F_r}{\partial \varphi} \right]}{\partial r}}{\frac{\partial [r \sin\theta]}{\partial r}} = \frac{0}{\sin\theta} = 0$$

$$\frac{\frac{\partial \left[\frac{\partial F_r}{\partial \theta} \right]}{\partial r}}{\frac{\partial [r]}{\partial r}} = \frac{0}{1} = 0$$

Queda, doncs, demostrat que el resultat és nul, com podíem esperar pel fet de ser un camp central.

²⁰ El valor de la integral $\int_0^\infty \left(\frac{r^2 dr}{(r^2 + \varepsilon^2)^{5/2}} \right) = \frac{1}{3\varepsilon^2}$ es pot obtenir directament en línia (vegeu, per exemple, <https://www.calculadora-de-integrales.com/>).

1.5.6.4. Sobre la integració en volum de funcions amb $\frac{1}{R^\alpha}$ on $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$

Siga la integral següent:

$$I_1(\vec{r}) = \int_V f(\vec{r}') \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|^\alpha} dv' = \int_V g(\vec{r}, \vec{r}') dv'$$

on una vegada més les $\vec{r}$ indiquen els punts en què avaluem els camps i les $\vec{r}'$ indiquen els punts on estan definides les fonts.

Es pot demostrar que la integral convergeix si hi ha el límit

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{V-v_\varepsilon} g(\vec{r}, \vec{r}') dv' = I_2$$

on v_ε és el volum esfèric que conté $\vec{r}$ i el radi del qual és ε ; és a dir, la distància màxima a r no excedeix de ε . Aquesta és la situació que tenim en els nostres problemes físics, perquè, com que $f(\vec{r}')$ és contínua i acotada prop del punt $\vec{r} = 0$, hi ha una constant $M > 0$ en aquest volum de radi ε , tal que

$$|f(\vec{r}')| \leq M$$

i, per tant,

$$\left| \int_{v_\varepsilon} f(\vec{r}') \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|^\alpha} dv' \right| \leq M \int_{v_\varepsilon} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|^\alpha} dv'$$

Vegem-ne la integral:

$$I_3(\vec{r}) = \int_{v_\varepsilon} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|^\alpha} dv' = \int_{v_\varepsilon} \frac{1}{R^\alpha} dv'$$

on la contribució de l'esfera menuda de radi ε serà:

$$I_3(\vec{r}) = \int_0^\varepsilon \frac{4\pi R^2}{R^\alpha} dR = \frac{4\pi R^{(3-\alpha)}}{(3-\alpha)} \Big|_0^\varepsilon$$

que no presenta cap problema, sempre que $\alpha < 3$; de fet, quan $\varepsilon \rightarrow 0$, la integral és nul·la (òbviament, sempre que $\alpha < 3$). D'altra banda, la contribució $V - v_\varepsilon$ té un valor finit, atès que l'integrand és finit.

En la Llei de Coulomb l'exponent és 2, i podem justificar, també, la absència d'una singularitat, quan el denominador tendeix a 0 pensant que el volum dv (que depèn del radi al cub) tendeix més ràpidament a 0 que l'increment que es produeix en l'integrand com a conseqüència del fet que el denominador depèn de la distància al quadrat.

1.5.7. Demostració que les condicions del teorema de Helmholtz impliquen que el camp decreix a l'infinit, si més no, com $1/r^2$

De la definició de $\vec{F}$,

$$\vec{F} = -\nabla\phi + \nabla \times \vec{A}$$

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \frac{S(\vec{r}')}{R(\vec{r}, \vec{r}')} dv'$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{C}(\vec{r}')}{R(\vec{r}, \vec{r}')} dv'$$

$$\vec{F} = -\nabla_r \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \frac{S(\vec{r}')}{R(\vec{r}, \vec{r}')} dv' + \nabla_r \times \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{C}(\vec{r}')}{R(\vec{r}, \vec{r}')} dv'$$

$$\vec{F} = -\frac{1}{4\pi} \int_{V'} S(\vec{r}') \nabla_r \left(\frac{1}{R} \right) dv' + \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \nabla_r \times \frac{\vec{C}(\vec{r}')}{R(\vec{r}, \vec{r}')} dv'$$

$$\vec{F} = -\frac{1}{4\pi} \int_{V'} S(\vec{r}') \nabla_r \left(\frac{1}{R} \right) dv' + \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \left\{ \frac{1}{R} \nabla_r \times \vec{C}(\vec{r}') - \vec{C}(\vec{r}') \times \nabla_r \left(\frac{1}{R} \right) \right\} dv'$$

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi} \left\{ \int_{V'} \left[\frac{S(\vec{r}') \vec{R}}{R^3} - \frac{\vec{R}}{R^3} \times \vec{C}(\vec{r}') \right] dv' \right\}$$

Si el punt camp està molt allunyat de les fonts (tendint a l'infinit), aleshores

$$\frac{\vec{R}}{R^3} = \frac{\vec{r}}{r^3} + O\left(\frac{1}{r^3}\right)$$

Introduint això en l'equació de $\vec{F}$, tenim:

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{\vec{r}}{r^3} \int_{V'} S(\vec{r}') dv' - \frac{\vec{r}}{r^3} \times \int_{V'} \vec{C}(\vec{r}') dv' \right\} + O\left(\frac{1}{r^3}\right)$$

Com que les fonts són integrables, aquestes integrals són finites i, per tant,

$$|\vec{F}(\vec{r})| \leq \frac{C}{r^2} + O\left(\frac{1}{r^3}\right)$$

1.5.8. Notes històriques. Alguns detalls cronològics

- 600 aC: Tales de Milet observa que, en fregar ambre amb pell, aquest pot atraure objectes lleugers. És un fenomen electroestàtic. Aquesta és una de les primeres observacions documentades de l'efecte elèctric estàtic.
- 1600: William Gilbert, metge de la reina Elisabet I d'Anglaterra, encunya el terme "electricitat" en la seua obra *De Magnete* i diferencia entre magnetisme i electricitat.
- 1660: Otto von Guericke construeix una màquina electroestàtica.
- 1729: Stephen Gray descobreix que l'electricitat pot fluir a través d'alguns materials (conductors), però no a través d'altres (aïllants).
- 1733: Charles du Fay identifica dos tipus de càrregues elèctriques (positiva i negativa).
- 1747-1752: Benjamin Franklin proposa la teoria del fluid elèctric únic i realitza el famós experiment amb la milotxa, que demostra que els llamps de les tempestes són descàrregues elèctriques.
- 1780: Luigi Galvani descobreix l'electricitat animal.
- 1771-1781: Henry Cavendish estudia molts fenòmens elèctrics, possiblement abans que Coulomb, però, com que no va publicar molts dels seus descobriments, aquests només van ser coneguts pòstumament. Va treballar amb condensadors (el que ell denominava "ampolles de Leyden") i va mesurar la conductivitat de

materials. Fins i tot va calcular la capacitat elèctrica d'una esfera i va arribar prop del concepte potencial elèctric.

- 1785: Charles Coulomb formula la llei que descriu la força entre dues càrregues elèctriques. Usa una balança de torsió per a mesurar forces elèctriques entre càrregues puntuals. La seua llei és anàloga a la llei de gravitació de Newton, però per a càrregues elèctriques.
- 1800: Alessandro Volta inventa la primera font contínua de corrent, la pila voltaica.
- 1820: Hans Christian Ørsted descobreix la relació entre electricitat i magnetisme.
- 1820-1825 – André-Marie Ampère formula la llei d'Ampère, que quantifica la força entre corrents elèctrics.
- 1827: Georg Simon Ohm formula la llei d'Ohm, que descriu la relació entre voltatge, corrent i resistència.
- 1830-32: Joseph Henry (1797-1878) descobreix la inducció electromagnètica de manera independent, gairebé al mateix temps que Faraday.
- 1831: Michael Faraday demostra la inducció electromagnètica: un corrent pot generar-se mitjançant un camp magnètic variable amb el temps.
- 1860: James Clerk Maxwell unifica la teoria electromagnètica amb les seues famoses equacions de Maxwell.
- 1879 - 1882: Thomas Edison desenvolupa el corrent continu.
- 1887 i 1888: Nikola Tesla desenvolupa el corrent altern, amb importants aplicacions industrials.
- Segle XX: La teoria quàntica i la física de l'estat sòlid permeten explicar els mecanismes microscòpics del flux d'electrons.

Bibliografia per a l'apartat 1.5

Marsden, Jerrold E. & Tromba, Anthony, apartats 2.6 i 4.4, i L8.

Apostol, Tom M., L8, L9 i L10.

Arfken, George B. & Weber, Hans J., cap 1.

Reitz, John R., Milford, Frederick J. & Christy, Robert W., L1.

Jackson, John David, L1.

Bibliografia de la lliçó 1

Apostol, Tom M., *Calculus: Cálculo con Funciones de Varias Variables y Álgebra Lineal*, vol. 2. Reverté, 1973.

Arfken, George B. & Weber, Hans J., *Mathematical Methods for Physicists*. Elsevier, 6a edició, 2005.

Feynman, Richard, Leighton, Robert B. & Sands, Matthew, *Física vol. II: Electromagnetismo y Materia*. Addison-Wesley Iberoamericana, 1987.

Griffiths, David J., *Introduction to Electrodynamics*. Prentice Hall, 1989.

Jackson, John David, *Electrodinámica clásica*. Pearson Alhambra, 2a edició, 1980.

Kittel, Charles, *Introduction to Solid State Physics*. 9a edició (Global Edition). Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2018.

Marqués, Ricardo, *Notas de la asignatura Electromagnetismo*. Universidad de Sevilla, 2003.

Marsden, Jerrold E. & Tromba, Anthony, *Vector Calculus*. W. H. Freeman & Company · New York, 9a edició, 2012.

Panofsky, Wolfgang K.H. & Phillips, Melba, *Classical Electricity and Magnetism*. Dover Addison-Wesley Publishing Company Inc., Series in Advanced Physics, 2a edició, 1962.

Reitz, John R., Milford, Frederick J. & Christy, Robert W., *Fundamentos de la Teoría Electromagnética*. Addison-Wesley Iberoamericana, 4a edició, 1996.

Lliçó 2

El camp electroestàtic

2.1. Introducció

2.2. Llei de Coulomb

2.3. Camp elèctric. Divergència i rotacional del camp electroestàtic

2.4. Teorema de Gauss

2.5. El potencial electroestàtic. Equacions de Poisson i Laplace

2.6. Contingut complementari

Bibliografia general

Griffiths, David J.

Textos avançats:

Panofsky, Wolfgang K. H. & Phillips, Melba.

Jackson, John David.

➤ Després de cada apartat s'indica la bibliografia específica i les lectures recomanades.

➤ Al final de la lliçó s'inclouen les referències bibliogràfiques completes.

Lliçó 2: El camp electroestàtic

2.1. Introducció

El camp electroestàtic és la descripció física i matemàtica de la interacció entre càrregues elèctriques en repòs. El seu estudi forma part de l'electroestàtica, una branca de l'electromagnetisme que tracta fenòmens en què no hi ha moviment de càrregues (corrents). Aquesta aproximació permet simplificar moltes situacions i construir les bases conceptuals de la teoria electromagnètica completa.

Històricament, l'estudi de l'electricitat comença en l'Antiguitat, quan filòsofs grecs com Tales de Milet van observar que, en fregar ambre amb pell es produïen atraccions entre cossos lleugers. Tot i això, no va ser fins al segle XVIII quan es van començar a formalitzar aquestes observacions en termes quantitius.

Un dels èxits més importants en aquesta línia va ser la formulació de la llei de Coulomb el 1785, que marca el punt de partida de l'anàlisi del camp electroestàtic, seguit pel desenvolupament del concepte de camp elèctric per part de Michael Faraday en el segle XIX, i la seua formalització matemàtica per part de James Clerk Maxwell.

Revisem el concepte de camp: Suposem que una càrrega (o conjunt de càrregues) genera una pertorbació o canvi en les condicions de l'espai, de manera que, si posem una càrrega de prova q ($q \rightarrow 0$) que no modifiqui el camp, apareix una força $\vec{F}$.

Definim el camp elèctric com:

$$\vec{E} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{q}$$

Cal entendre el límit amb el significat físic que la càrrega de prova no modifica el camp en aquests punts.

Bibliografia per a l'apartat 2.1

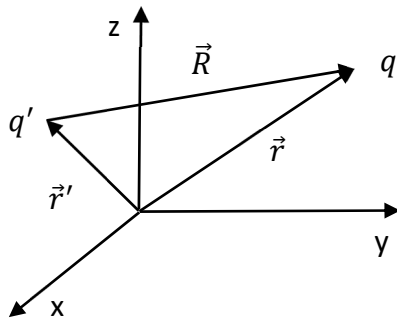
Feynman, Richard, Leighton, Robert B. & Sands, Matthew, L4.

2.2. Llei de Coulomb (Coulomb-Cavendish)

La llei de Coulomb, formulada per Charles-Augustin de Coulomb el 1785, descriu la força entre dues càrregues elèctriques puntuals.²¹ Així, a partir d'experiments amb una balança de torsió, Coulomb va descobrir que la força és:

- directament proporcional al producte de les càrregues,
- inversament proporcional al quadrat de la distància entre elles,
- dirigida al llarg de la línia que uneix les dues càrregues.

Matemàticament, aquesta llei és anàloga a la llei de la gravitació universal de Newton, amb la important diferència que la força elèctrica pot ser repulsiva o atractiva, depenent del signe de les càrregues. Coulomb va ser el primer a publicar els resultats encara que, segons sembla, Henry Cavendish els havia demostrat abans. Aquesta llei es concreta en



$$\vec{F}(\vec{r}) = k \frac{q(\vec{r}) q'(\vec{r}') \vec{R}}{R^3}$$

on $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$.

Abusant del llenguatge, podríem dir que $\vec{F}$ és la força que la càrrega $q'(\vec{r}')$ exerceix sobre $q(\vec{r})$, tot i que, com és obvi, la força que exerceix $q(\vec{r})$ sobre $q'(\vec{r}')$ és la mateixa, però canviada de signe.

Noteu que, en aquest cas, la prima ($\vec{r}'$) ve associada a la càrrega prima $q'(\vec{r}')$.

²¹ Fixem-nos que quan diem *puntuals* volem dir que les seues dimensions són molt menudes en el context de l'experiment, i com a idealització/modelització, parlem de càrregues puntuals.

La constant de proporcionalitat, en el sistema internacional racionalitzat (vegeu la lliçó 1), té el valor: $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8,987551787 \cdot 10^9 \frac{Nm^2}{C^2}$ i la $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2} = \frac{farads}{m}$ es denomina permitivitat del buit.

Cal indicar, en aquest moment, que un punt clau per al desenvolupament de bona part de les teories físiques és l'aplicabilitat del principi de superposició lineal, pel qual la força total que exerciria un conjunt de càrregues seria la superposició de les forces individuals, $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$.

Bibliografia per a l'apartat 2.2

Reitz, John R., Milford, Frederick J. & Christy, Robert W., L2.

2.3. Camp elèctric. Divergència i rotor del camp electroestàtic

El concepte de camp elèctric va ser introduït per Michael Faraday en el segle XIX. Faraday va proposar que les càrregues no interactuen instantàniament a distància, sinó que generen un camp que ocupa l'espai circumdant. El camp elèctric, com ja hem dit, es defineix com la força per unitat de càrrega que actua sobre una càrrega de prova positiva:

$$\vec{E} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{q}$$

Així, el camp generat per una càrrega puntual q' es definirà com:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'(\vec{r}')}{R^2} \vec{u}_R$$

on

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$$

Recordem, una vegada més, que la distància sense prima és la referida al punt camp i la distància amb prima indica el punt font (on hi ha la càrrega que genera el camp):

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \vec{u}_{\vec{r}-\vec{r}'} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} [\vec{r} - \vec{r}']$$

A partir del principi de superposició lineal, per a un conjunt de càrregues puntuals, el camp serà:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'_i(\vec{r}') [\vec{r} - \vec{r}']}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

D'una manera semblant, per aplicació del principi de superposició, podem deduir que el camp associat a una distribució de càrrega per unitat de volum serà

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}') [\vec{r} - \vec{r}']}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dv'$$

formulació que també serà aplicable a distribucions superficials o lineals de càrrega:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S'} \frac{\sigma(\vec{r}') [\vec{r} - \vec{r}']}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dS'$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{L'} \frac{\lambda(\vec{r}') [\vec{r} - \vec{r}']}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dl'$$

A continuació, obtindrem les fonts de divergència i de rotacional del camp, el coneixement de les quals serà necessari per a la definició unívoca del camp, segons el teorema de Helmholtz.

Si apliquem l'operador divergència a l'expressió del camp, tenim:

$$\begin{aligned} \nabla_r \cdot \vec{E}(\vec{r}) &= \nabla_r \cdot \left\{ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}') [\vec{r} - \vec{r}']}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dv' \right\} = \\ &= \left\{ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \rho(\vec{r}') \nabla_r \cdot \left(\frac{[\vec{r} - \vec{r}']}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) dv' \right\} \end{aligned}$$

Recordem que

$$\frac{[\vec{r} - \vec{r}']}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{\vec{R}}{R^3}$$

i que

$$\nabla_r \left(\frac{[\vec{r} - \vec{r}']}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) = 4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}') = 4\pi\delta(\vec{R})$$

Per tant,

$$\nabla_r \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \rho(\vec{r}') 4\pi\delta(\vec{R}) dv' = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}$$

equació que ens relaciona la divergència del camp (en un punt) amb la densitat de càrrega en aquest mateix punt. Això dona lloc al que es coneix com a primera equació de Maxwell:

$$\nabla \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Si, per altra part, apliquem l'operador rotacional a la definició del camp elèctric, tenim:

$$\nabla_r \times \vec{E}(\vec{r}) = \nabla_r \times \left\{ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}') [\vec{r} - \vec{r}']}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dv' \right\} = \left\{ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \rho(\vec{r}') \nabla_r \times \left(\frac{[\vec{r} - \vec{r}']}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) dv' \right\}$$

Com que $\frac{[\vec{r} - \vec{r}']}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$ és un camp central, el seu rotacional serà zero, cosa que anul·la les fonts de rotacional en el cas estàtic.

També es pot veure com:

$$\nabla_r \times \frac{[\vec{r} - \vec{r}']}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \nabla_r \times \left(\frac{(\vec{R})}{|\vec{R}|^3} \right) = \nabla_r \times \left(-\nabla_r \frac{1}{R} \right) = 0$$

Una consideració addicional és que a partir de

$$\nabla_r \times \vec{E}(\vec{r}) = 0$$

per aplicació de teorema de Stokes, es pot escriure:

$$\int_S \nabla_r \times \vec{E}(\vec{r}) d\vec{S} = \oint \vec{E} d\vec{l} = 0$$

igualtat que evidencia el caràcter conservatiu del camp electroestàtic.

Per tal d'aprofundir els conceptes d'aquest apartat:

- Demostreu que el camp elèctric que crea un cercle de radi a amb una densitat superficial de càrrega constant, σ , en punts de l'eix que passa pel seu centre, és:

$$\vec{E}(z) = \frac{\sigma z \vec{u}_z}{2\epsilon_0} \left(\frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{(a^2 + z^2)}} \right)$$

- Demostreu, així mateix, que el camp elèctric és nul en $z=0$.

Bibliografia per a l'apartat 2.3

Marqués, Ricardo, L1.

2.4. Teorema de Gauss o llei de Gauss

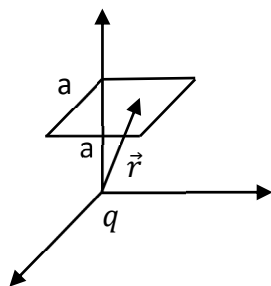
El teorema de Gauss,²² formulat per Carl Friedrich Gauss, aplicat al camp elèctric, estableix que el flux del camp elèctric a través d'una superfície tancada és proporcional a la càrrega total tancada al volum envoltat per la superfície:

$$\oint_{S'} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{V'} \nabla \cdot \vec{E} dv' = \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}')}{\epsilon_0} dv' = \frac{Q_T}{\epsilon_0}$$

La llei o teorema de Gauss sempre es compleix i en certes condicions de simetria, amb l'elecció d'una superfície gaussiana adequada, ens permetrà obtenir el camp elèctric amb més facilitat que la integració directa, com és el cas, per exemple, del camp generat per:

- una càrrega puntual (simetria esfèrica)
- un fil carregat (simetria cilíndrica)
- un pla carregat (simetria plana)
- una densitat de càrrega en volum que només depengui de la distància a l'origen.

²² Vegeu el contingut complementari de la lliçó 1.



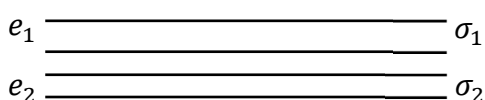
- Com a exemple dels avantatges d'aplicar el teorema de Gauss, podem demostrar, per integració directa i per aplicació del teorema, que el flux, sobre un pla com el de la figura, del camp elèctric generat per una càrrega puntual situada a una distància a , és

$$\Phi = \frac{q}{24\epsilon_0}$$

- Vegem-ne un altre cas. En l'interior d'una esfera de radi a , hi ha una càrrega Q distribuïda amb una densitat constant $\rho = \rho_0$; demostreu que el camp elèctric, en qualsevol punt de l'espai exterior, és el mateix que el que crearia una càrrega puntual de valor Q situada al centre de l'esfera.
- Si ara la distribució de càrrega fora de la forma $\rho = \rho_0 (r - a)$, com canviaria el camp?
- Com a exemple addicional, demostreu que el camp en la intersecció de dues esferes de radi a , carregades amb densitats uniformes de càrrega $+\rho$ i $-\rho$, amb els centres separats una distància $d < 2a$, és constant.

Moltes vegades, ens trobem amb la presència de conductors en equilibri electroestàtic. Si diem que un conductor està en equilibri, aquesta expressió implica que no hi ha moviment de càrregues en el seu interior. Tot i això, el conductor té molts electrons lliures, encara que la càrrega total siga 0. Perquè estiga en equilibri, el camp elèctric ha de ser 0 allà on es troben les càrregues lliures i (com veurem) el potencial, que definirem en l'apartat següent, serà, per consegüent, constant. Com a conseqüència, si hi afegim càrrega, lliure de moure's, aquesta càrrega estarà en la regió més exterior (a la superfície com a idealització), per tal que el camp en l'interior continue sent 0 i així puguem parlar de –i tinguem– equilibri. Hem d'insistir que, quan parlem de càrrega, entenem que és un excés de càrrega sobre la situació d'equilibri inicial del conductor. Tornarem sobre el tema en la lliçó 4.

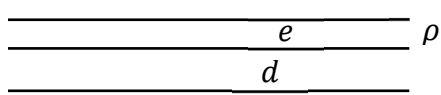
Per tal d'aprofundir en aquests conceptes, analitzem els exemples/problemes següents.



- Siguen dues plaques conductores planes molt llargues de gruixos e_1 i e_2 . Estan carregades amb una densitat total σ_1 i σ_2 ,

respectivament. Demostreu que les densitats de les cares externes dels conductors són iguals i que en les cares interiors són iguals, però canviades de signe.

- Suposem ara que, sobre un conductor descarregat pla de gruix d , tenim una densitat de



càrrega ρ en una placa de gruix e . Demostreu que la densitat de càrrega induïda en el conductor és $\sigma = -\rho \frac{e}{2}$

en la superfície de contacte amb la densitat de càrrega.

Bibliografia per a l'apartat 2.4

Reitz, John R., Milford, Frederick J. & Christy, Robert W., L2.

2.5. El potencial electroestàtic. Equacions de Poisson i Laplace

Començarem aquest apartat definint, a partir de diferents punts de vista, el potencial elèctric per a trobar, una vegada en tinguem la formulació en funció de les càrregues, les equacions diferencials que el caracteritzen amb les quals, conegudes les condicions de contorn, es pot abordar l'obtenció del potencial sense necessitat de conèixer totes les càrregues.

2.5.1. El potencial electroestàtic

El potencial electroestàtic és una funció escalar que descriu l'energia potencial elèctrica per unitat de càrrega en un punt de l'espai, però atès que, de moment, no parlarem d'energia, ens conformarem amb el plantejament que el potencial electroestàtic és una eina matemàtica que permet obtenir el camp elèctric a partir d'un pas intermedi.

En efecte, com que el camp electroestàtic és conservatiu, deriva d'una funció potencial

$$\vec{E} = -\nabla\phi$$

En conseqüència, les línies de camp són perpendiculars a les superfícies equipotencials del potencial electroestàtic. D'altra banda, si el camp és 0 en un conductor, el potencial serà constant, com ja havíem anunciat.

L'ús del potencial facilita el càlcul en molts problemes i permet descriure el treball en moure càrregues entre punts del camp.

Vegem la integració del camp electroestàtic en un camí entre dos punts $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

$$\int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{E} \, d\vec{l} + \int_{\vec{b}}^{\vec{a}} \vec{E} \, d\vec{l} = 0 \Rightarrow \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{E} \, d\vec{l} = \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{E} \, d\vec{l}$$

és a dir, la integral és independent del camí, com ja podíem deduir del caràcter conservatiu del camp elèctric.

Definim el potencial electroestàtic en un punt $\vec{a}$ com la circulació del camp electroestàtic canviada de signe des de l'origen de potencials al punt $\vec{a}$:

$$\phi(\vec{a}) - \phi(\text{origen}) = - \int_{\text{origen}}^{\vec{a}} \vec{E} \, d\vec{l}$$

Usualment, l'origen s'escull en l'infinit (sempre que no tinguem càrregues en la modelització del problema) i la diferència de potencial entre dos punts vindrà donada, com hem dit anteriorment, per

$$\phi(\vec{b}) - \phi(\vec{a}) = - \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{E} \, d\vec{l}$$

o per inferència directa a partir de la definició de gradient,

$$\phi(\vec{b}) - \phi(\vec{a}) = \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \nabla \phi \, d\vec{r}$$

d'on també es pot deduir

$$\vec{E} = -\nabla \phi$$

tancant el cercle argumentatiu.

Com hem dit, la definició del potencial (escalar) elèctric implica que el camp electroestàtic és perpendicular a les superfícies equipotencials, cosa que indica la direcció de màxima variació del potencial.

En cas de tenir dos potencials que difereixen en una constant, ens donaran el mateix camp, que és el que té sentit físic, i això estableix una certa indeterminació en el potencial,

$$\text{Si } \phi' = \phi + \text{constant}, \quad \vec{E} = -\nabla\phi = -\nabla\phi'$$

Malgrat tot, si treballem amb diferències de potencial, com serà el cas, això no serà un problema.

Una altra possible indeterminació seria el fet que dos potencials diferiren l'un de l'altre en un potencial de gradient nul:

$$\phi = \phi' + \psi \quad \text{i} \quad \nabla\psi = 0$$

La indeterminació es resol, novament, prenent un origen comú de potencials, per exemple, l'infinit per a distribucions finites de càrrega, que són les que tenen sentit físic.

Per a una càrrega puntual, el potencial en funció de les fonts ve donat a partir del camp elèctric per:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \vec{u}_{\vec{r}-\vec{r}'} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} [\vec{r} - \vec{r}']$$

$$\phi(\vec{r}) - \phi(\infty) = - \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\infty} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

i, a partir del principi de superposició, podem obtenir el potencial per a una distribució de càrrega:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{R(\vec{r}, \vec{r}')} dv'$$

I semblantment per a distribucions superficials o lineals de càrrega.

Una altra manera equivalent d'obtenir l'expressió del potencial d'una distribució de càrrega és directament a partir del valor del camp:

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}) &= \int_{V'} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(\vec{r}') [\vec{r} - \vec{r}']}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dv' = \int_{V'} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(\vec{r}') \vec{R}}{R^3} dv' = \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \rho(\vec{r}') \nabla_r \left(\frac{1}{R} \right) dv' = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla_r \int_{V'} \rho(\vec{r}') \left(\frac{1}{R} \right) dv'\end{aligned}$$

Per comparació amb

$$\vec{E} = -\nabla\phi$$

obtenim el mateix resultat anterior:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \rho(\vec{r}') \left(\frac{1}{R} \right) dv' + \text{constant}$$

2.5.2. Equacions diferencials per al potencial electroestàtic: Equacions de Poisson i Laplace

A partir de $\vec{E} = -\nabla\phi$, tenim que

$$\nabla\vec{E} = -\nabla(\nabla\phi) = -\nabla^2\phi = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}$$

El que es coneix com a equació de Poisson, que estableix la relació entre el laplaciana del potencial i la densitat de càrrega en aquest mateix punt.

D'altra banda, en els punts en què no hi ha densitat de càrrega, tindrem el que es coneix com a equació de Laplace:

$$\nabla^2\phi = 0$$

L'avantatge, quan podem calcular el potencial, és la facilitat d'obtenció del camp elèctric per derivació. Així, si coneixem les condicions de contorn del problema²³, podem abordar la resolució d'aquestes equacions diferencials com a pas previ al càlcul del camp elèctric.

Com és possible que el potencial continga tota la informació del camp $\vec{E}$? La raó és que l'existència del potencial implica que $\nabla \times \vec{E} = 0$ i viceversa, que conté la restricció de la igualtat de les derivades creuades.

- En aquest context, demostreu que el potencial i el camp en punts de l'eix z , creats per una circumferència de radi a situada en el pla x, y , el centre del qual coincideix amb el centre del sistema de referència, i carregada amb una densitat lineal de càrrega λ , queden definits per:

$$\phi(z) = \frac{\lambda a}{2\epsilon_0(a^2 + z^2)^{1/2}}$$

$$\vec{E}(z) = \frac{\lambda a z \vec{u}_z}{2\epsilon_0(a^2 + z^2)^{3/2}}$$

- Demostreu que la component radial del camp anterior en les proximitats de l'eix (a una distància Δr) és, aproximadament,

$$E_r(z, \Delta r) \approx \frac{\lambda a \Delta r}{4\epsilon_0(a^2 + z^2)^{5/2}} (2z^2 - a^2)$$

- Considerem que el potencial mitjà temporal d'un àtom d'hidrogen neutre és donat per:

$$\phi(r) = \frac{q e^{-\alpha r}}{4\pi\epsilon_0} \left(1 + \frac{\alpha r}{2}\right)$$

²³ En absència de densitats superficials de càrrega, les condicions de contorn que imposen la continuïtat del potencial i de la seua derivada normal en les superfícies delimitants constitueixen un conjunt necessari i suficient per a garantir l'existència i la unicitat de la solució de les equacions de Laplace i de Poisson.

on q és la càrrega electrònica i $\alpha = \frac{2}{a_0}$, sent a_0 el radi de Bohr. Quina serà la distribució de càrrega corresponent a aquest potencial?

- Siga ara un núvol de partícules carregades, en equilibri, amb una densitat de càrrega que depèn de la distància a l'origen d'acord amb

$$\rho = \begin{cases} \rho_0 \left(1 - r^2/a^2\right) & \text{per a } 0 < r < a \\ 0 & \text{per a } r > a \end{cases}.$$

Obtingueu el potencial a tot l'espai.

Bibliografia per a l'apartat 2.5

Reitz, John R., Milford, Frederick J. & Christy, Robert W., L3.

Griffiths, David J., L2.

2.6. Contingut complementari

2.6.1. Què ocorre si tenim regions en què la densitat de càrrega és constant?

Partirem de l'equació que ens defineix el camp a partir de les fonts en un volum V' :

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= \int_{V'} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(\vec{r}') [\vec{r} - \vec{r}']}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dv' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}') \vec{R}}{R^3} dv' = \\ &= - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \rho(\vec{r}') \nabla_r \left(\frac{1}{R} \right) dv' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \rho(\vec{r}') \nabla_{r'} \left(\frac{1}{R} \right) dv' \end{aligned}$$

Si tenim en compte que

$$\nabla_{r'} \left(\frac{\rho(\vec{r}')}{R} \right) = \rho(\vec{r}') \nabla_{r'} \left(\frac{1}{R} \right) + \left(\frac{1}{R} \right) \nabla_{r'} \rho(\vec{r}')$$

podem posar

$$\rho(\vec{r}') \nabla_{r'} \left(\frac{1}{R} \right) = \nabla_{r'} \left(\frac{\rho(\vec{r}')}{R} \right) - \left(\frac{1}{R} \right) \nabla_{r'} \rho(\vec{r}')$$

igualtat que, incorporada a l'expressió del camp, ens permet escriure

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \rho(\vec{r}') \nabla_{\vec{r}'} \left(\frac{1}{R} \right) dv' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \left\{ \nabla_{\vec{r}'} \left(\frac{\rho(\vec{r}')}{R} \right) - \left(\frac{1}{R} \right) \nabla_{\vec{r}'} \rho(\vec{r}') \right\} dv'$$

La primera integral té similituds amb la divergència d'un camp (vectorial), però es tracta del gradient d'un escalar. Vegem com podem trobar una equivalència al teorema Gauss o de la divergència.

Suposem un camp escalar ψ i el multipliquem per un vector constant $\vec{u}$, i apliquem el teorema de la divergència o de Gauss,

$$\int_{V'} \nabla(\psi \vec{u}) dv' = \int_{V'} \{ \psi \nabla \vec{u} + \vec{u} \nabla(\psi) \} dv' = \int_{V'} \{ \vec{u} \nabla(\psi) \} dv' = \oint_{S'} \psi \vec{u} d\vec{S}'$$

Traient el vector constant fora de la integral i simplificant, tenim que:

$$\int_{V'} \nabla(\psi) dv' = \oint_{S'} \psi d\vec{S}'$$

que serà una nova igualtat derivada de les propietats vectorials i del teorema de la divergència.

Aplicant aquesta identitat a la primera integral de la nostra equació del camp elèctric, tenim:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \left\{ \nabla_{\vec{r}'} \left(\frac{\rho(\vec{r}')}{R} \right) \right\} dv' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{S'} \frac{\rho(\vec{r}')}{R} d\vec{S}'$$

i ens queda

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{S'} \frac{\rho(\vec{r}')}{R} d\vec{S}' - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \left\{ \left(\frac{1}{R} \right) \nabla_{\vec{r}'} \rho(\vec{r}') \right\} dv'$$

L'equació anterior mostra que, en les regions en què $\rho(\vec{r}') = \rho_0$, és a dir, és constant, la segona integral serà 0 i, per tant:

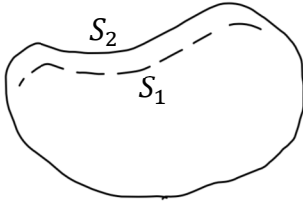
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S'} \frac{\rho_0}{R} d\vec{S}' = \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{S'} \frac{1}{R} d\vec{S}'$$

integral que és purament un factor geomètric.

Lògicament, l'aplicació de la versió modificada del teorema de la divergència exigeix que la densitat de càrrega siga contínua (en la física "real" ho serà) en el recinte d'integració.

Des d'un punt de vista formal, si hi apareixen discontinuïtats, les hauríem d'excloure mitjançant parts de S que les engloben i treballar amb les regions independents que ens apareixerien.

Si la distribució és limitada (ocupa només una regió de l'espai, és a dir, $\rho(\vec{r} \rightarrow \infty) =$



0), les parts de la integral de superfície que s'allunyen fins a l'infinit no donaran contribució:

$$\oint_S = \oint_{S_1} + \oint_{S_2} + \oint_{S_\infty} \frac{0}{R} d\vec{S}'$$

Com que els vectors de les superfícies S_1 i S_2 són iguals i oposats en direcció, tenim

$$\oint_S \frac{\rho(\vec{r}')}{R} d\vec{S}' = \oint_{S_1} \frac{\rho_1(\vec{r}')}{R} d\vec{S}' + \oint_{S_2} \frac{\rho_2(\vec{r}')}{R} d\vec{S}' + \oint_{S_\infty} \frac{0}{R} d\vec{S}' = \oint_S \frac{\rho_1 - \rho_2}{R} d\vec{S}'$$

on ρ_1 i ρ_2 són els valors de la densitat de càrrega en punts infinitament propers a la discontinuïtat, i, per tant:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\rho_1 - \rho_2}{R} d\vec{S}' - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_1+V_2} \left\{ \left(\frac{1}{R} \right) \nabla_{r'} \rho(\vec{r}') \right\} dv'$$

serà l'expressió aplicable a aquest cas, expressió que considera la presència de discontinuïtats i la possibilitat que la densitat de càrrega no siga constant.

2.6.2. Què ocurriria si la Llei de Coulomb no fora exactament com $\frac{1}{r^2}$?

Com és sabut, una distribució esfèrica superficial constant de massa no crea camp gravitatori en el seu interior pel fet que la gravitació depèn de la distància com a $\frac{1}{r^2}$. Aquesta evidència va suggerir a Henry Cavendish l'experiment de demostrar que, si tenim un conductor esfèric carregat i l'envoltem per un altre de connectat amb l'anterior mitjançant un fil conductor de dimensions negligibles, la càrrega se n'anirà a l'exterior.

Què passaria, doncs, si la Llei de Coulomb no fora exactament amb una dependència espacial $\frac{1}{r^2}$?

- Considerem dues esferes conductores concèntriques, centrades a l'origen del sistema de referència, connectades per un fil conductor de dimensions no significatives en el problema. L'esfera interior de radi b i càrrega desconeguda q_b i l'exterior de radi a i càrrega coneguda q_a . Suposant que el camp elèctric d'una càrrega puntual vinguera determinat per

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^{2+\delta}} \vec{u}_{\vec{r}}$$

on $\delta \ll 1$.

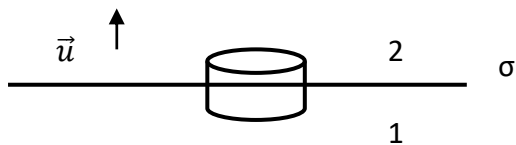
Demostreu que la càrrega q_b seria

$$q_b = -\frac{q_a\delta}{2(a-b)} \{2b \ln(2a) - (a+b)\ln(a+b) + (a-b)\ln(a-b)\} + O(\delta^2)$$

Adaptat de Panofsky, Wolfgang K. H. & Phillips, Melba, p. 23.

2.6.3 Comportament del camp electroestàtic i el potencial en travessar una superfície carregada

Per a estudiar aquest problema, considerem un cilindre fictici menut, amb les parets laterals



perpendiculars a la superfície. Si fem el cilindre suficientment menut, el flux a través de la superfície lateral serà negligible i l'única

càrrega que ens quedarà dins del cilindre serà la que corresponga a la superfície. Per tant, per aplicació del Teorema de Gauss, tenim:

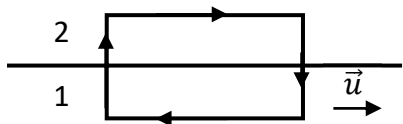
$$\oint_{S'} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{V'} \nabla \cdot \vec{E} \, dv' = \oint_{S'} \frac{\sigma(\vec{r}')}{\epsilon_0} dS'$$

d'on és immediat deduir que

$$E_{n,2} - E_{n,1} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

on les $E_{n,i}$ són les components normals del camp elèctric.

Respecte de les components tangencials del camp, considerant que $\nabla \times \vec{E} = 0$ i tenint en compte el Teorema de Stokes, tenim que



$$\int_{S'} \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

d'on es dedueix, quan l'apliquem a la circulació de la figura on els costats laterals són molt menuts de manera que el paral·lelepípede està a una distància infinitesimal de la superfície, que:

$$E_{t,2} = E_{t,1}$$

Pel que fa al potencial, el que produeix aquesta distribució superficial de càrrega seria:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S'} \sigma(\vec{r}') \left(\frac{1}{R} \right) dS'$$

per la qual cosa és immediat concloure que, en punts a la mateixa distància a banda i banda del pla, el potencial serà el mateix, ja que només depèn de la distància en valor absolut. Per tant, en aquestes condicions, el potencial és continu.

2.6.4. Potencial en una regió de l'espai limitada per una superfície on coneixem el potencial i el camp elèctric

Fins ara, per a l'obtenció del potencial en un punt $\vec{r}$, necessitem conèixer totes les distribucions de càrrega a l'espai i aplicar l'expressió

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V \rightarrow \infty} \rho(\vec{r}') \left(\frac{1}{R} \right) dv'$$

Però realment necessitem conèixer totes les càrregues per a determinar el potencial? Aquesta és la qüestió que abordem en aquest apartat.

Estem interessats a conèixer el potencial en un punt $\vec{r}$ i coneixem la densitat de càrrega en un cert volum limitat per una superfície, però sabem que fora del volum també pot haver-hi càrregues.

Apliquem el Teorema de Gauss a un vector $\phi \nabla_{r'} \psi$ dins del volum en què coneixem la densitat de càrrega:

$$\oint [\phi(\vec{r}') \nabla_{r'} \psi(\vec{r}')] d\vec{S}' = \int_V \nabla_{r'} (\phi \nabla_{r'} \psi) dv' = \int_V [(\phi \nabla_{r'}^2 \psi + (\nabla_{r'} \psi \nabla_{r'} \phi))] dv'$$

Si fem el mateix amb $\psi \nabla_{r'} \phi$ i les restem, tindrem:

$$\begin{aligned} \oint [\phi(\vec{r}') \nabla_{r'} \psi(\vec{r}') - \psi(\vec{r}') \nabla_{r'} \phi(\vec{r}')] d\vec{S}' = \\ \int_V [(\phi \nabla_{r'}^2 \psi + (\nabla_{r'} \psi \nabla_{r'} \phi)) - (\psi \nabla_{r'}^2 \phi + (\nabla_{r'} \psi \nabla_{r'} \phi))] dv' = \\ \int_V [(\phi \nabla_{r'}^2 \psi - \psi \nabla_{r'}^2 \phi)] dv' \end{aligned}$$

que és una de les conegudes com a Igualtats de Green. Òbviament, ϕ i ψ han de ser contínues i derivables.

Siga ϕ el potencial electroestàtic i $\psi = \frac{1}{R}$. Recordant que

$$\nabla_{r'} \left(\frac{1}{R} \right) = \frac{\vec{R}}{R^3} = \nabla_{r'} \psi \quad \text{i que} \quad \nabla_{r'}^2 \frac{1}{R} = -4\pi\delta(R)$$

i substituint en l'anterior igualtat, obtenim, en cas que $\vec{r}$ estiga dins del volum:

$$\begin{aligned} \int_V \left[\phi(\vec{r}')(-4\pi\delta(R)) - \frac{1}{R} \nabla_{r'}^2 \phi(\vec{r}') \right] dv' = \\ -4\pi\phi(\vec{r}) - \int_V \frac{1}{R} \left(-\frac{\rho(\vec{r}')}{\epsilon_0} \right) dv' = \oint \left[\frac{\vec{R}}{R^3} \phi(\vec{r}') - \frac{1}{R} \nabla_{r'} \phi(\vec{r}') \right] d\vec{S}' \end{aligned}$$

En conclusió, el potencial vindrà donat per

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \left\{ \oint \left[-\frac{\vec{R}}{R^3} \phi(\vec{r}') + \frac{1}{R} \nabla_{r'} \phi(\vec{r}') \right] d\vec{S}' \right\} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{R} dv'$$

És a dir, l'efecte de qualsevol càrrega exterior a V per al càlcul del potencial als punts interiors està determinat pel valor del potencial i la seua derivada normal (el camp elèctric) en la superfície, amb els vectors de superfície dirigits cap a fora de la regió V .

Si, per contra, el punt $\vec{r}$ és exterior al volum, la demostració anterior ens permet establir la igualtat

$$\frac{1}{\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{R} dv' = \left\{ \oint \left[\frac{\vec{R}}{R^3} \phi(\vec{r}') - \frac{1}{R} \nabla_{r'} \phi(\vec{r}') \right] d\vec{S}' \right\}$$

Això implica que l'efecte de les càrregues interiors al volum V , per als punts exteriors, és equivalent a les integrals de superfície del potencial i el camp elèctric perpendicular a la superfície. El vector de superfície dirigit cap a fora del volum com abans. Com es veu, l'equivalència és completa.

Bibliografia de la lliçó 2

Feynman, Richard, Leighton, Robert B. & Sands, Matthew, *Física vol. II: Electromagnetismo y Materia*. Addison-Wesley Iberoamericana, 1987.

Griffiths, David J., *Introduction to Electrodynamics*. Prentice Hall, 1989.

Jackson, John David, *Electrodinámica clásica*. Pearson Alhambra, 2a edició, 1980.

Marqués, Ricardo, *Notas de la asignatura Electromagnetismo*. Universidad de Sevilla, 2003.

Panofsky, Wolfgang K.H. & Phillips, Melba, *Classical Electricity and Magnetism*, 1962.

Reitz, John R., Milford, Frederick J. & Christy, Robert W., *Fundamentos de la Teoría Electromagnética*. Addison-Wesley Iberoamericana, 4a edició, 1996.

Lliçó 3

Desenvolupament multipolar del potencial electroestàtic

3.1. Introducció

3.2. Desenvolupament multipolar del potencial electroestàtic

3.3. Potencial i camp d'un dipol elèctric

3.4. Distribucions de dipols elèctrics

3.5. Contingut complementari

Bibliografia general

Griffiths, David J., L3.

Textos avançats:

Panofsky, Wolfgang K. H. & Phillips, Melba, L1.

Jackson, John David, L4.

➤ Després de cada apartat s'indica la bibliografia específica i les lectures recomanades.

➤ Al final de la lliçó s'hi inclouen les referències bibliogràfiques completes.

Lliçó 3: Desenvolupament multipolar del potencial electroestàtic

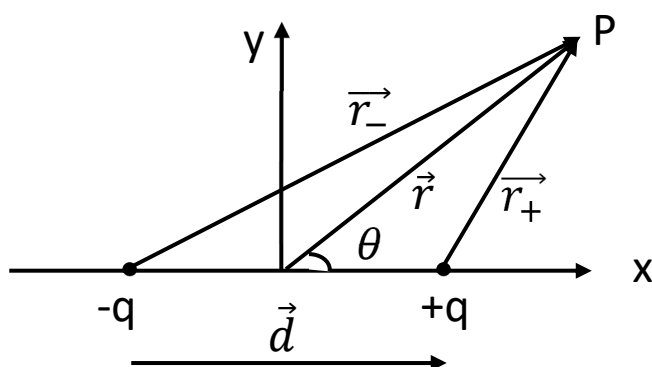
3.1. Introducció

El desenvolupament multipolar del potencial té les arrels en els treballs de matemàtics i físics del segle XVIII i XIX. Pierre-Simon Laplace, amb la seua famosa Equació de Laplace, i Carl Friedrich Gauss, amb la seua Llei de Gauss, van establir les bases de l'anàlisi del potencial. Més endavant, científics com James Clerk Maxwell van utilitzar els desenvolupaments multipolars en els seus Tractats d'Electricitat i Magnetisme per a descriure els camps generats per a distribucions de càrrega.

Per què un desenvolupament multipolar?

Quan s'analitza el potencial elèctric generat per una distribució de càrrega, sovint estem interessats en el comportament d'aquest potencial a grans distàncies de la regió en què hi ha les càrregues. En aquest límit, no cal conèixer tots els detalls de la distribució de càrrega; només cal conèixer-ne certes propietats globals. Això motiva el desenvolupament multipolar, una tècnica matemàtica que permet expressar el potencial electroestàtic com a suma de termes que decreixen amb la distància i que representen diferents contribucions geomètriques de la distribució de càrrega. Vegem-ne algun exemple.

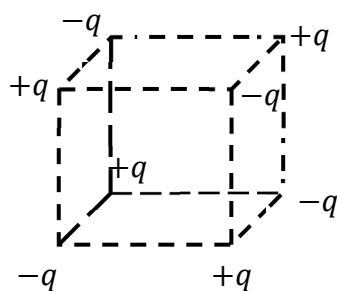
Dues càrregues puntuals amb signes diferents.



Vist des de lluny, la càrrega total és, naturalment, 0. Això seria una primera aproximació, ja que sabem que hi ha càrrega. Però, si ens hi apropàrem prou, veuríem el comportament clarament diferent que hi ha en les

proximitats a aquestes dues càrregues. Entre aquests dos límits és on el desenvolupament multipolar pot mostrar avantatges.

Suposem una distribució de càrrega com la de la figura següent:



La càrrega total és nul·la, però una aproximació millor és considerar les parelles que dos a dos formen aquest conjunt de vuit càrregues.

El fet de voler conèixer el potencial i el camp a grans distàncies, no ens hauria de ser aliè. Trobem l'interès que té en moltes situacions, com ara el camp que creen les molècules que, tot i ser neutres, poden generar un camp, com és el cas de les molècules polars (com és l'aigua) o els àtoms sotmesos a un camp extern.

Abordarem el problema fent el desenvolupament en sèrie de Taylor del terme $\frac{1}{R}$ en el potencial, analitzant els diferents components de la sèrie, que anomenarem *multipols elèctrics*.

Bibliografia per a l'apartat 3.1

Feynman, Richard, Leighton, Robert B. & Sands, Matthew, L6.

3.2. Desenvolupament multipolar del potencial electroestàtic

Suposem que en un cert volum V hi ha una densitat càrrega $\rho(\vec{r}')$; el potencial electroestàtic en un punt $\vec{r}$ és:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{R(\vec{r}, \vec{r}')} dv$$

Recordem que en aquesta expressió hem posat (podem posar-hi) l'origen de potencials en l'infinit, ja que es tracta d'una distribució de càrrega confinada a V .

Volem avaluar aquest potencial lluny de la regió on $\rho(\vec{r}') \neq 0$, és a dir, quan $\vec{r} \gg \vec{r}'_{max}$. En aquest cas, podem expandir $\frac{1}{R}$ en una sèrie multipolar. A partir del valor de R :

$$R^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\theta = r^2 \left[1 + \frac{r'^2}{r^2} - \frac{2r'}{r} \cos\theta \right]$$

sent θ l'angle entre els dos vectors $\vec{r}$ i $\vec{r}'$.

La igualtat anterior es pot reescriure com

$$R = r \left[1 + \frac{r'^2}{r^2} - \frac{2r'}{r} \cos\theta \right]^{1/2} = r\sqrt{1 + \varepsilon}$$

amb

$$\varepsilon = \left[\frac{r'^2}{r^2} - \frac{2r'}{r} \cos\theta \right] = \left[\frac{r'^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} \right]$$

i substituint ε pel seu valor, quedant-nos amb l'exponent quadràtic a r' , el desenvolupament en sèrie quedaria així:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{r'^2}{r^2} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} + \frac{12}{8} \left(\frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} \right)^2 + \dots \right] = \frac{1}{r} \left[1 + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} + \frac{3}{2} \left(\frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{r'^2}{r^2} \dots \right]$$

Això es pot reformular amb els Polinomis de Legendre P_n , que són un conjunt de polinomis ortogonals que sorgeixen freqüentment en la solució d'equacions diferencials, especialment en problemes amb simetria esfèrica. Els Polinomis de Legendre es representen habitualment com $P_n(x)$, on n és un nombre enter no negatiu que representa el grau del polinomi.

Els Polinomis de Legendre venen definits per

$$P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x^2)]^n$$

i satisfan l'equació diferencial²⁴

²⁴ Vegeu Annex A.4.

$$(1 - x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + n(n + 1)y = 0$$

coneguda com a Equació diferencial de Legendre.

A partir dels esmentats polinomis, el desenvolupament en sèrie es pot escriure així:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r} \right)^n P_n(\cos \theta)$$

i el potencial queda de la manera següent:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{R(\vec{r}, \vec{r}')} dv' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \int_V r'^n \rho(\vec{r}') P_n(\cos \theta) dv'$$

Aquests polinomis, com hem dit, són ortogonals en l'interval $[-1, 1]$, és a dir:

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ \frac{2}{2n+1} & \text{si } n = m \end{cases}$$

Els primers polinomis de Legendre són:

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

D'altra banda, com ja hem vist, es poden utilitzar altres expressions equivalents per a expressar el desenvolupament en sèrie. Per exemple, si reprenem el desenvolupament en sèrie amb ϵ , tindríem,

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{r'^2}{r^2} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} + \frac{12}{8} \left(\frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} \right)^2 + \dots \right] = \frac{1}{r} \left[1 + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} + \frac{3}{2} \left(\frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{r'^2}{r^2} \dots \right]$$

En incorporar-lo a l'expressió del potencial, el primer element donarà lloc al terme monopolar, el segon donarà lloc al dipolar i els altres dos sumands formaran el terme quadripolar:

$$\text{Monopolar} = \int_V \rho(\vec{r}') dv' = Q_{total}$$

$$\text{Dipolar} = \vec{p} = \int_V \vec{r}' \rho(\vec{r}') dv'$$

$$\text{Tensor Quadripolar} = Q_{i,j} = \int_V [3x'_i x'_j - \delta_{i,j} r'^2] \rho(\vec{r}') dv'$$

Aquests termes ens permeten escriure els tres primers sumands del potencial com

$$\phi(\vec{r}) = \frac{Q_{total}}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i,j} \frac{x_i x_j}{2r^5} Q_{i,j}$$

- Per a aprofundir en aquests conceptes i formulació, es pot demostrar que el moment dipolar i el tensor quadripolar de dues càrregues puntuals $+q (0,0, a/2)$ i $-q (0,0, -a/2)$, situades en els punts que s'indiquen són

$$\vec{p} = qa\vec{u}_z$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Deduïu com es comporta el potencial i analitzeu el cas límit quan el dipol, mantenint-ne el valor, tinguerà unes dimensions negligibles.

- Un altre exemple és el de dues distribucions lineals de càrrega paral·leles, rectilínies i indefinides separades una distància a que tenen densitats lineals de càrrega $+\lambda$ i $-\lambda$;

estem interessats a saber el potencial quan la distància entre els fils és molt menuda respecte a la resta de distàncies en el problema.

- En l'apartat 3.5.4 tenim un altre exemple sobre el càlcul dels moments multipolars d'una distribució de càrrega.

Bibliografia per a l'apartat 3.2

Griffiths, David J., L3.

Reitz, John R., Milford, Frederick J. & Christy, Robert W., L2.

3.3. El potencial i el camp d'un dipol elèctric

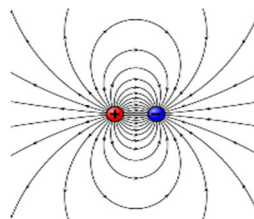
La definició de dipol elèctric $\vec{p} = \int_V \vec{r}' \rho(\vec{r}') dv'$ ens permet escriure el potencial d'aquest dipol, tal com hem vist en l'apartat anterior, en la forma:

$$\begin{aligned}\phi_{dip}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \int_V \vec{r}' \rho(\vec{r}') P_1(\cos\theta) dv' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \int_V \vec{r}' \rho(\vec{r}') \cos\theta dv' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3} \int_V \vec{r}' \rho(\vec{r}') dv' = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}\end{aligned}$$

En el cas de dues càrregues puntuals iguals i de signe oposat, el moment dipolar es pot obtenir a partir de la definició, $\vec{p} = \int_V \vec{r}' \rho(\vec{r}') dv'$, per a obtenir el resultat conegut de cursos anteriors,

$$\vec{p} = q\vec{d}$$

essent $\vec{d}$ el vector que uneix la càrrega negativa amb la positiva.



<http://tesla.us.es/wiki/index.php?title=Archivo:Campo-dipolo-electrico.png&limit=250>

Com més a prop estiguem d'aquestes càrregues, més apreciarà el camp la diferència entre la zona propera a la càrrega negativa i la zona propera a la càrrega positiva. Per contra, en allunyar-nos, el detall de "proper" quedarà difuminat.

Continuant amb els aspectes teòrics d'aquesta lliçó, per a calcular el camp elèctric del dipol elèctric, farem:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla \left(\frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \right)$$

on, per simplicitat, hem posat el dipol en l'origen del sistema de referència. Tot i això, el resultat i el mètode d'obtenció és completament general i només hauríem de canviar $\vec{r}$ per $\vec{R}$ (si situàrem el dipol en un punt $\vec{r}'$).

En cas que excluïem el punt $\vec{r} = 0$,²⁵ on es troba el dipol, tenim:

$$\nabla_r \left(\frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} \right) = \vec{p} \cdot \nabla_r \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right) + \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \nabla_r (\vec{p}) + \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \nabla_r \right) \vec{p} + (\vec{p} \cdot \nabla_r) \frac{\vec{r}}{r^3} = 0 + 0 + 0 + (\vec{p} \cdot \nabla_r) \frac{\vec{r}}{r^3}$$

resultat en què el segon i el tercer sumand s'anul·len perquè les derivades actuen sobre els punts camp i el primer, perquè el rotacional d'un camp central és zero.

Calculem la component associada a $p_x \vec{u}_x$:

$$\left(p_x \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right)$$

Si fem $x^2 + y^2 + z^2 = A$, per a simplificar l'escriptura, derivant, tenim:

$$\begin{aligned} (p_x \vec{u}_x) \left\{ A^{-3/2} + x \frac{-3}{2} A^{-5/2} 2x \right\} + (p_x \vec{u}_y) \left\{ y \frac{-3}{2} A^{-5/2} 2x \right\} + (p_x \vec{u}_z) \left\{ z \frac{-3}{2} A^{-5/2} 2x \right\} \\ = p_x \vec{u}_x \left\{ \frac{r^2 - 3x^2}{A^{5/2}} \right\} + p_x \vec{u}_y \left\{ \frac{-3xy}{A^{5/2}} \right\} + p_x \vec{u}_z \left\{ \frac{-3xz}{A^{5/2}} \right\} \end{aligned}$$

De manera similar, per a les altres components, obtindríem:

$$p_y \vec{u}_y \left\{ \frac{r^2 - 3y^2}{A^{5/2}} \right\} + p_y \vec{u}_x \left\{ \frac{-3xy}{A^{5/2}} \right\} + p_y \vec{u}_z \left\{ \frac{-3yz}{A^{5/2}} \right\}$$

²⁵ Des del punt de vista físic, l'exclusió del punt $\vec{r} = 0$ no té cap objecció, ja que, conceptualment, no té sentit ocupar-se del punt en què no podem posar la càrrega de prova, atès que està ocupat pel dipol generador del camp. Tanmateix, abordem matemàticament aquest problema en l'apartat 3.5.3, de contingut complementari.

$$p_z \vec{u}_z \left\{ \frac{r^2 - 3z^2}{A^{5/2}} \right\} + p_x \vec{u}_x \left\{ \frac{-3xz}{A^{5/2}} \right\} + p_y \vec{u}_y \left\{ \frac{-3yz}{A^{5/2}} \right\}$$

Sumant els tres resultats i agrupant ens queda:

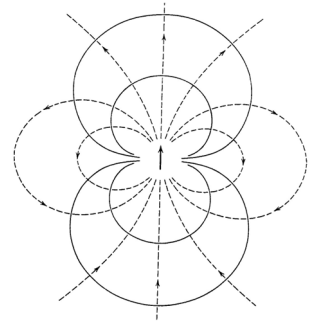
$$\nabla \left(\frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} \right) = \frac{r^2 \vec{p} - 3(\vec{p} \cdot \vec{r}) \vec{r}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}$$

i el camp elèctric serà:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r}) \vec{r} - r^2 \vec{p}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r}) \vec{r} - r^2 \vec{p}}{r^5}$$

O generalitzant per a qualsevol posició del dipol

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{R}) \vec{R} - R^2 \vec{p}}{R^5}$$



En aquest context, podem considerar una entitat idealitzada caracteritzada pel seu moment dipolar i que no té dimensions.²⁶ La nova entitat (modelització de la realitat) serà el dipol elèctric puntual i tindrà un potencial i un camp elèctric exactes que vindran donats per

<https://www5.uva.es/ema/g/proyectoEMAG/html/dipolos/dipolo.html>

$$\phi_{dip}(\vec{r}) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\phi = \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r}) \vec{r} - \vec{p} r^2}{4\pi\epsilon_0 r^5}$$

sent $\vec{r}$ la distància del dipol (situat en l'origen del sistema de referència) al punt camp. Aquest camp té simetria axial respecte a $\vec{p}$ i apareix en l'estudi de múltiples contextos físics.²⁷

²⁶ Aquest punt de vista no és més que el que apliquem a la definició d'una càrrega puntual o una massa puntual, que caracteritzem simplement pels efectes que té en el camp elèctric o el gravitatori.

²⁷ Molècules polars, antenes, propietats de materials, interaccions entre àtoms i molècules, per esmentar-ne només alguns contextos.

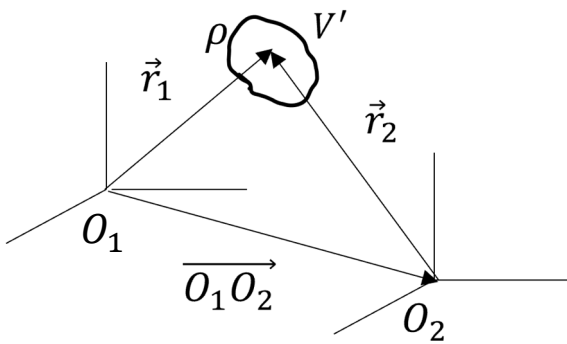
Hem d'insistir a assenyalar que, en aquest cas, les expressions del potencial i el camp són exactes, perquè, en no tenir dimensions, qualsevol punt està "molt" allunyat.

El moment dipolar depèn de la posició de les càrregues (distribució de càrregues); ens plantejem si el valor depèn també d'origen del sistema de referència.

Comencem amb aquesta qüestió: quin seria el moment dipolar d'una càrrega puntual?

La resposta és immediata a partir de la definició de moment dipolar $\vec{p} = \int_V \vec{r}' \rho(\vec{r}') dv'$, que, referit a una única càrrega, ens proporciona el valor $\vec{p} = \vec{r}' q$. Això ens indica clarament que, si la càrrega està situada fora de l'origen, aquest moment dipolar tindrà un valor determinat. No hem de perdre de vista que és una magnitud associada a un desenvolupament en sèrie per a l'obtenció del potencial.

Analitzem el cas general d'una distribució de càrrega. El moment dipolar, vist des de dos sistemes de referència amb els respectius orígens en O_1 i O_2 , és:



$$\vec{p}_1 = \int_{V'} \vec{r}'_1 \rho(\vec{r}'_1) dv'$$

$$\vec{p}_2 = \int_{V'} \vec{r}'_2 \rho(\vec{r}'_2) dv'$$

Òbviament,

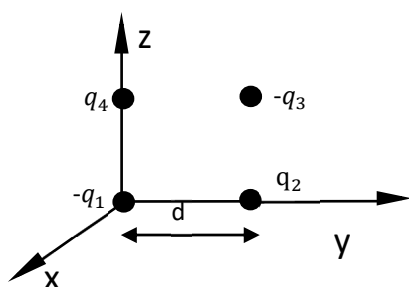
$$\rho(\vec{r}') = \rho(\vec{r}'_1) = \rho(\vec{r}'_2) \quad \text{i} \quad \vec{r}'_1 = \vec{r}'_2 + \overrightarrow{O_1 O_2}$$

Per tant,

$$\begin{aligned} \vec{p}_1 &= \int_{V'} \vec{r}'_1 \rho(\vec{r}'_1) dv' = \int_{V'} (\vec{r}'_2 + \overrightarrow{O_1 O_2}) \rho(\vec{r}'_1) dv' = \\ \overrightarrow{O_1 O_2} \int_{V'} \rho(\vec{r}'_1) dv' + \int_{V'} \vec{r}'_2 \rho(\vec{r}'_2) dv' &= \overrightarrow{O_1 O_2} \int_{V'} \rho(\vec{r}'_1) dv' + \vec{p}_2 \end{aligned}$$

És a dir, si la càrrega total és nul·la, el moment dipolar no depèn de l'origen. A més, el moment monopolar també seria 0.

Respecte del terme quadripolar o tensor quadripolar, en aquest tensor els termes de la diagonal sumen 0 i és un tensor simètric $Q_{i,j} = Q_{j,i}$.²⁸



➤ Com a exemple del que acabem d'explicar, es pot demostrar que el potencial escalar de la distribució de càrregues puntuals de la figura, on les càrregues són $|q_i| = q$, correspon a

$$\phi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{-3qd^2}{r^5} yz \right\}$$

i les coordenades y, z són les que defineixen el pla del paper.

➤ Per a completar aquest apartat, podem calcular el camp elèctric dels exemples de càlcul de potencial de l'apartat anterior, 3.2.

Bibliografia per a l'apartat 3.3

Reitz, John R., Milford, Frederick J. & Christy, Robert W., L2.

3.4. Distribucions de dipols elèctrics

En medis materials és comú que no hi haja càrrega lliure, encara que pot haver-hi dipols infinitesimals $d\vec{p}$ als quals podem associar un potencial elèctric diferencial

$$d\phi(\vec{r}) = \frac{d\vec{p} \cdot \vec{R}}{4\pi\epsilon_0 R^3}$$

²⁸ A partir de la definició dels elements del tensor

$$Q_{i,j} = \int_V [3x'_i x'_j - \delta_{i,j} r'^2] \rho(\vec{r}') dv'$$

la traça serà:

$$\sum_i Q_{ii} = \sum_i \int_V [3x'_i x'_i - \delta_{ii} r'^2] \rho(\vec{r}') dv' = \int_V [(3 \sum_i x'_i x'_i - 3r'^2)] \rho(\vec{r}') dv' = \int_V [3(r'^2 - r'^2)] \rho(\vec{r}') dv' = 0.$$

Es defineix la polarització $\vec{P}$ com una densitat de dipol elèctric per unitat de volum, de manera que:

$$\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{dv}$$

i, per aplicació del principi de superposició, el potencial associat amb una distribució de dipols serà:

$$\begin{aligned}\phi(\vec{r}) &= \int_V d\phi(\vec{r}) = \int_V \frac{d\vec{p} \cdot \vec{R}}{4\pi\epsilon_0 R^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\vec{P} \cdot \vec{R}}{R^3} dv' = \\ &= \left| \nabla_r \left(\frac{1}{R} \right) = -\frac{\vec{R}}{R^3} = -\nabla_{r'} \left(\frac{1}{R} \right) \right| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \vec{P} \cdot \nabla_{r'} \left(\frac{1}{R} \right) dv'\end{aligned}$$

(on entre les línies verticals hem incorporat la igualtat que hem aplicat per a obtenir la nova equació).

Considerant que

$$\nabla_{r'} \left(\frac{\vec{P}}{R} \right) = \frac{1}{R} \nabla_{r'} \vec{P} + \vec{P} \nabla_{r'} \left(\frac{1}{R} \right)$$

substituint, tenim:

$$\begin{aligned}\phi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \int_V \nabla_{r'} \left(\frac{\vec{P}}{R} \right) dv' - \int_V \frac{1}{R} \nabla_{r'} \vec{P} dv' \right\} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \int_S \frac{\vec{P}}{R} d\vec{S}' - \int_V \frac{1}{R} \nabla_{r'} \vec{P} dv' \right\}\end{aligned}$$

on hem aplicat el teorema de Gauss a la primera integral.

Podem veure l'expressió anterior com el potencial degut a una distribució de càrregues lligades, equivalents a la polarització $\vec{P}$, tal que en volum seria:

$$\rho_P(\vec{r}) = -\nabla_r \cdot \vec{P}(\vec{r})$$

i en la superfície, la densitat superficial seria:

$$\sigma_P(\vec{r}) = \vec{P}(\vec{r})\vec{n}$$

sent $\vec{n}$ el vector normal exterior a la superfície que conté el volum V .

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \int_S \frac{\sigma_P(\vec{r}')}{R} dS' + \int_V \frac{\rho_P(\vec{r}')}{R} dv' \right\}$$

Es pot demostrar que la càrrega total equivalent a la polarització en un volum és 0, només sumant (integrant) les densitats ρ_P i σ_P .

Aquesta formulació ens permet aprofitar resultats obtinguts amb càrregues reals per a obtenir el potencial associat a distribucions de dipols, com ara la modelització de materials, potencials moleculars, electroestàtica en biomolècules, etc.

➤ Com a exemples d'aplicació dels conceptes anteriors, es pot demostrar que el potencial i el camp elèctric en punts de l'eix z generats per una distribució lineal de dipols $\vec{\tau}$ (tenint una direcció $\vec{u}_z$) en forma d'anell de radi a , centrat a l'origen i situat al pla $z=0$, es poden expressar, per a punts $z \gg a$, com

$$\phi(z) = \frac{\tau a z}{2\epsilon_0 |z|^3}$$

$$\vec{E}(z) = \vec{u}_z \frac{\tau a}{\epsilon_0 |z|^3}$$

Bibliografia per a l'apartat 3.4

Reitz, John R., Milford, Frederick J. & Christy, Robert W., L2.

3.5. Contingut complementari

3.5.1. Angle sòlid

L'angle sòlid és una mesura de la porció de camp “visual” que ocupa un objecte des d'un punt específic. És l'equivalent tridimensional d'un angle pla, però en comptes de mesurar una obertura en un pla, mesura una obertura a l'espai (un con).

En pot donar una imatge intuïtiva la situació següent: si observem diferents objectes des d'una posició fixa, l'angle sòlid ens diu quant del cel o de l'espai que hi ha davant nostre ocupa aquest objecte des del nostre punt de vista (idealment puntual). Un exemple, també demostratiu, és una llanterna que emet llum. El feix de llum és cònic; aquest con conforma un angle sòlid. Si la llanterna il·lumina una porció de l'espai reduïda, té un angle sòlid menut; si il·lumina una major àrea del cel, l'angle sòlid és més gran.

Així com un angle pla es mesura en radians, l'angle sòlid es mesura en estereoradians (sr), que és la unitat del sistema internacional. Un angle sòlid d'1 sr cobreix una porció de l'espai tridimensional igual a una superfície esfèrica d'àrea r^2 sobre una esfera de radi r . Per tant, una esfera completa té un angle sòlid de 4π estereoradians.

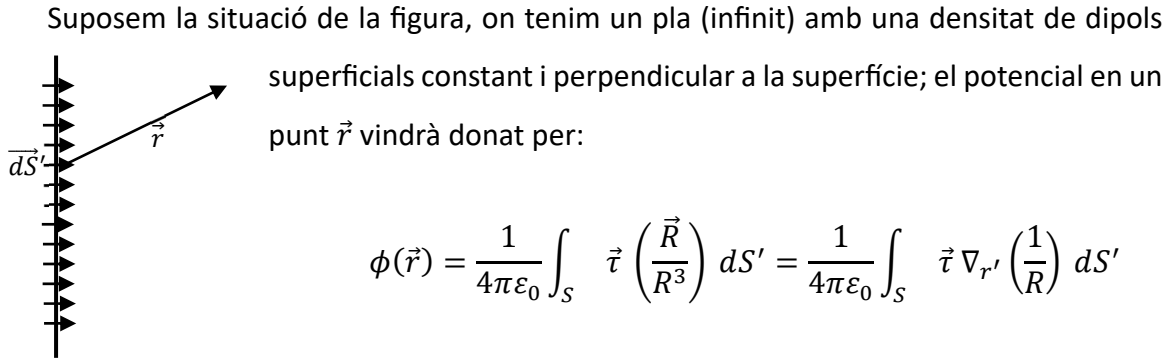
La definició matemàtica d'angle sòlid és

$$\Omega = \int_S \frac{\vec{R} d\vec{S}'}{R^3}$$

on $\vec{R}$ és la distància des del punt des d'on volem veure l'angle sòlid fins a la superfície $d\vec{S}'$.

3.5.2. Discontinuitats del potencial

Segons vam veure en la lliçó 2 (apartat 2.6.3), el potencial és continu quan passem a través d'una superfície carregada amb densitat σ , com es podia demostrar fàcilment calculant el potencial a una cara i l'altra d'aquesta superfície tenint en compte que el potencial només depèn de la distància a aquesta superfície. Tanmateix, quan travessem una superfície plana (molt llarga, infinita, com a modelització) que conté una densitat superficial de dipols elèctrics, les coses són diferents pel caràcter vectorial d'aquesta densitat de dipols $\vec{\tau} = \frac{d\vec{p}}{dS}$.



Com que $\vec{\tau}$ és constant i perpendicular a la superfície: $\vec{\tau} dS = \tau d\vec{S}$, tindrem que el potencial es podrà expressar com:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \vec{\tau} \left(\frac{\vec{R}}{R^3} \right) dS' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \tau \left(\frac{\vec{R} d\vec{S}'}{R^3} \right) = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \int_S \left(\frac{\vec{R} d\vec{S}'}{R^3} \right)$$

La quantitat entre parèntesis $\left(\frac{\vec{R} d\vec{S}'}{R^3} \right)$ és estructuralment semblant a la de la definició d'angle sòlid. Amb tot, haurem de considerar, i adaptar si escau, les direccions de $\vec{R}$ i de $d\vec{S}'$ respecte a les de la definició d'angle sòlid, per tal com, depenent de la situació física particular, hi podran coincidir o no.

En el nostre problema tenim dues situacions, segons si el punt de camp està situat a l'esquerra o a la dreta del pla.

Quan el punt camp estiga situat a l'esquerra del pla, el vector (la direcció) $d\vec{S}'$ està definit igual com el que utilitzaríem per a calcular l'angle sòlid que veuríem des del punt camp, però el vector $\vec{R}$ té el signe contrari (recordem que va des d'on estan els dipols a la superfície al punt on volem calcular el potencial) respecte al de la definició d'angle sòlid $\left(\frac{\vec{R} d\vec{S}'}{R^3} \right) = -\Omega$.

Així mateix, l'angle sòlid que es veu quan el punt és molt proper a la superfície és 2π i, si estem a l'esquerra el potencial serà, per tant,

$$\phi_{esq}(\vec{r}) = \frac{-\tau\Omega}{4\pi\epsilon_0} = \frac{-\tau}{2\epsilon_0}$$

Si, per contra, ens trobem a la dreta de la superfície, el vector $d\vec{S}'$ està definit amb signe contrari a com ho estaria en l'angle sòlid que veuríem des del punt camp, però el vector $\vec{R}$

també té el signe canviat respecte al de la definició d'angle sòlid; per tant, $\left(\frac{\vec{R}d\vec{S}'}{R^3}\right) = \Omega$, i, per tant, ara

$$\phi_{dre}(\vec{r}) = \frac{\tau\Omega}{4\pi\epsilon_0} = \frac{\tau}{2\epsilon_0}$$

La diferència entre tots dos potencials és la discontinuïtat del potencial en travessar aquesta superfície de dipols

$$\phi_{dre} - \phi_{esq} = \frac{\tau}{\epsilon_0}$$

Una inferència d'aquesta demostració és el valor del potencial dins d'una superfície tancada on hi ha una distribució superficial de dipols constant que apunta cap a fora de la superfície. L'angle sòlid vist des de punts exteriors és 0; per tant, $\phi_{fora} = 0$ i, segons l'última equació,

$$\phi_{dre} - \phi_{esq} = \phi_{fora} - \phi_{dins} = \frac{\tau}{\epsilon_0}$$

d'on

$$\phi_{dins} = -\frac{\tau}{\epsilon_0}$$

que és el resultat que obtindríem si considerem que, des de dins, l'angle sòlid és 4π i que el nostre vector $\vec{R}$ té el signe canviat pel que fa al de la definició d'angle sòlid, raó per la qual el salt és:

$$\phi_{dins} = \frac{-\tau\Omega}{4\pi\epsilon_0} = -\frac{\tau}{\epsilon_0}$$

3.5.3 Integració del camp elèctric en un volum

Segons vam veure en la lliçó 2 (apartat 2.6.1), per a un escalar ψ , es compleix

$$\int_{V'} \nabla(\psi) dv' = \oint_{S'} \psi d\vec{S}'$$

Si això ho apliquem al potencial electroestàtic,

$$\int_{V'} \nabla(\phi) dv' = - \int_{V'} \vec{E} dv' = \oint_{S'} \phi d\vec{S}'$$

Apliquem aquesta igualtat a una esfera de radi a . La suma del camp elèctric en l'interior d'aquesta esfera de radi a serà:

$$\int_{V'} \vec{E}(\vec{r}') dv' = - \oint_{S'} \phi(\vec{a}) \vec{u}_r dS'$$

Certament, qualsevol volum pot ser tancat per una superfície de radi a , així que la demostració és general, i no només restringida a un volum esfèric.

Vegem amb detall aquesta igualtat, començant per la integral en la superfície:

$$\begin{aligned} \oint_{S'} \phi(\vec{a}) \vec{u}_r a^2 \sin\theta d\theta d\varphi = \\ \oint_{S'} \phi(\vec{a}) a^2 \sin\theta d\theta d\varphi [\cos\theta \vec{u}_z + \sin\theta (\cos\varphi \vec{u}_x + \sin\varphi \vec{u}_y)] \end{aligned}$$

Si substituïm el potencial per la seua expressió a partir dels polinomis de Legendre:

$$\phi(\vec{a}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}')}{R} dv' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a^{n+1}} \int_{V'} r'^n \rho(\vec{r}') P_n(\cos\theta) dv'$$

i la integral de superfície, $\oint_{S'} \phi(\vec{a}) \vec{u}_r dS'$, quedarà així:

$$\begin{aligned} \oint_{S'} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a^{n+1}} \int_{V'} r'^n \rho(\vec{r}') P_n(\cos\theta) dv' \{ a^2 \sin\theta d\theta d\varphi [\cos\theta \vec{u}_z \\ + \sin\theta (\cos\varphi \vec{u}_x + \sin\varphi \vec{u}_y)] \} \end{aligned}$$

Per a resoldre la integral, fixem un punt $\vec{r}'$. A fi de poder utilitzar la parametrització usual en coordenades esfèriques, aquest punt l'escollirem en l'eix z , $\vec{r}' = r' \vec{u}_z$, la qual cosa no restringeix generalitat, i tindrem:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \rho(r' \vec{u}_z) dv' \int_{\varphi, \theta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^2}{a^{n+1}} r'^n P_n(\cos\theta) d(\cos\theta) (-1) d\varphi d\theta [\cos\theta \vec{u}_z + \sin\theta (\cos\varphi \vec{u}_x + \sin\varphi \vec{u}_y)]$$

Quan fem la integral en φ , desapareixen les dependències en els eixos x i y , per la qual cosa queda

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \rho(r' \vec{u}_z) dv' \int_{\theta=\pi}^{\theta=0} \frac{1}{-1} 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r'^n a^2}{a^{n+1}} P_n(\cos\theta) d(\cos\theta) \cos\theta \vec{u}_z$$

Tenint en compte que $\cos\theta = P_1(\cos\theta)$ i que els polinomis de Legendre són ortogonals:

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ \frac{2}{2n+1} & \text{si } m = n \end{cases}$$

Aleshores, queda:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \rho(r' \vec{u}_z) dv' \int_{\theta=\pi}^{\theta=0} \frac{1}{-1} 2\pi P_n P_1 \frac{r'^n a^2}{a^{n+1}} d(\cos\theta) \vec{u}_z &= \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \rho(r' \vec{u}_z) dv' 2\pi \frac{2}{3} \frac{r' a^2}{a^2} \vec{u}_z &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \rho(r' \vec{u}_z) dv' \frac{4\pi}{3} r' \vec{u}_z = \\ \frac{1}{3} \frac{4\pi}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \rho(\vec{r}') dv' \vec{r}' &= \frac{\vec{p}}{3\epsilon_0} \end{aligned}$$

I, reprenent l'equació de partida,

$$\int_{V'} \vec{E}(\vec{r}') dv' = - \oint_{S'} \phi(\vec{a}) \vec{u}_r dS' = - \frac{\vec{p}}{3\epsilon_0}$$

sent $\vec{p}$ el moment dipolar de la distribució de càrrega continguda en V' .

Cal remarcar que V' ha de contenir totes les fonts de densitat de càrrega que generen el camp, ja que així ho hem considerat en el càlcul del potencial en la superfície de l'esfera que contenia aquest volum. El resultat obtingut és aplicable, per tant, a tot volum que continga les càrregues que generen el camp.

- Un cas que incideix en l'interès d'aquesta demostració és aplicar aquesta equació al camp que genera una càrrega puntual, situada al centre de la regió en el volum del qual volem avaluar el camp. Sense fer cap operació, podem concloure que el valor de la integral serà 0,²⁹ atès que no hi ha cap moment dipolar associat amb la càrrega puntual situada al centre del volum.
- Un altre cas és el de calcular aquesta suma del camp en un volum (suposem que és esfèric, sense pèrdua de generalitat), al centre del qual hi ha un dipol puntual. Aquesta és l'única font que genera camp elèctric en el nostre problema acadèmic.

Siga un dipol $\vec{p} = p\vec{u}_z$ situat a l'origen del sistema de referència. Hem vist que el camp elèctric és:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2\vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^5} = \frac{3pr^2 \cos\theta \vec{u}_r - r^2 p \vec{u}_z}{4\pi\epsilon_0 r^5}$$

Volem avaluar

$$\begin{aligned} \int_{V'} \vec{E}(\vec{r}') dv' &= \int_{r,\theta,\varphi} \frac{3pr^2 \cos\theta \vec{u}_r - r^2 p \vec{u}_z}{4\pi\epsilon_0 r^5} dv' = \\ &= \int_{r,\theta,\varphi} \frac{3pr^2 \cos\theta \vec{u}_r - r^2 p \vec{u}_z}{4\pi\epsilon_0 r^5} r^2 \sin\theta d\varphi d\theta dr \end{aligned}$$

En integrar en φ , s'anul·len les components en les direccions dels eixos x i y . Per tant, ens queda pel primer sumand de la integral, excloent-ne el punt $r=0$,

²⁹ Podria ser interessant calcular aquesta integral en un volum i comprovar que és nul·la.

$$\int_{r,\theta} \frac{3p \cos^2 \theta \vec{u}_z}{4\pi \epsilon_0 r^3} 2\pi r^2 \sin \theta d\theta dr = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} 6\pi p \vec{u}_z \int_{\Delta}^a \frac{dr}{r} \left(-\frac{\cos^3 \theta}{3} \right) \Big|_0^{\pi} =$$

$$\frac{1}{4\pi \epsilon_0} 6\pi p \vec{u}_z \frac{2}{3} (\ln r) \Big|_{\Delta}^a = \frac{1}{\epsilon_0} p \vec{u}_z \ln \frac{r}{\Delta}$$

És obvi que el punt $r=0$ presenta una singularitat, cosa que tampoc no ens hauria de sorprendre si tenim en compte que allà hi ha el dipol puntual (idealització de la realitat física de tenir un dipol en una regió molt menuda).

Continuem amb l'altre terme:

$$\int_{r,\theta,\varphi} \frac{-r^2 p \vec{u}_z}{4\pi \epsilon_0 r^5} r^2 \sin \theta d\varphi d\theta dr = -\frac{2\pi p}{4\pi \epsilon_0} \vec{u}_z \int_{r,\theta} \frac{1}{r^3} r^2 \sin \theta d\theta dr =$$

$$-\frac{2\pi p}{4\pi \epsilon_0} \vec{u}_z \int_{\Delta}^a \frac{dr}{r} (-\cos \theta) \Big|_0^{\pi} = -\frac{4\pi p}{4\pi \epsilon_0} \vec{u}_z (\ln r) \Big|_{\Delta}^a = -\frac{p}{\epsilon_0} \vec{u}_z \left(\ln \frac{\Delta}{a} \right)$$

Si sumem ambdues contribucions, tenim que

$$\int_{V_{\Delta}} \vec{E}(\vec{r}') dv' = \frac{1}{\epsilon_0} p \vec{u}_z \ln \frac{r}{\Delta} - \frac{1}{\epsilon_0} p \vec{u}_z \left(\ln \frac{\Delta}{a} \right) = 0$$

Però fixem-nos que dins hi ha un dipol, i aquest resultat sembla contradir l'equació que havíem demostrat.

Continuem amb la integral de superfície,

$$\oint_{S'} \phi(\vec{a}) \vec{u}_r dS' = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \oint_{S'} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} \vec{u}_r dS' = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \oint_{S'} \frac{p \vec{u}_z \cdot \vec{a} \vec{u}_r}{a^3} \vec{u}_r a^2 \sin \theta d\varphi d\theta$$

$$= \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \oint_{S'} p \cos \theta \vec{u}_r \sin \theta d\varphi d\theta$$

La integral φ anul·la les components en les direccions x i y , i queda finalment

$$\frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int_0^{\pi} 2\pi p \cos \theta \vec{u}_z \sin \theta \cos \theta d\theta = \frac{2\pi p}{4\pi \epsilon_0} \vec{u}_z \int_0^{\pi} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{p}{3} \vec{u}_z$$

En conseqüència,

$$\oint_{S'} \phi(\vec{a}) \vec{u}_r dS' = \frac{\vec{p}}{3\epsilon_0}$$

i apareixeria una contradicció si ens oblidem que hem exclòs el punt $r=0$ en la integral de volum,

$$\int_{V_\Delta} \vec{E}(\vec{r}') dv' = - \oint_{S'} \phi(\vec{a}) \vec{u}_r dS' = - \frac{\vec{p}}{3\epsilon_0}$$

Una manera de resoldre aquesta aparent contradicció és afegir una contribució al camp elèctric del dipol que tinga en compte la contribució de la seua presència en origen tal que:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2\vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^5} - \frac{\vec{p}}{3\epsilon_0} \delta(\vec{r})$$

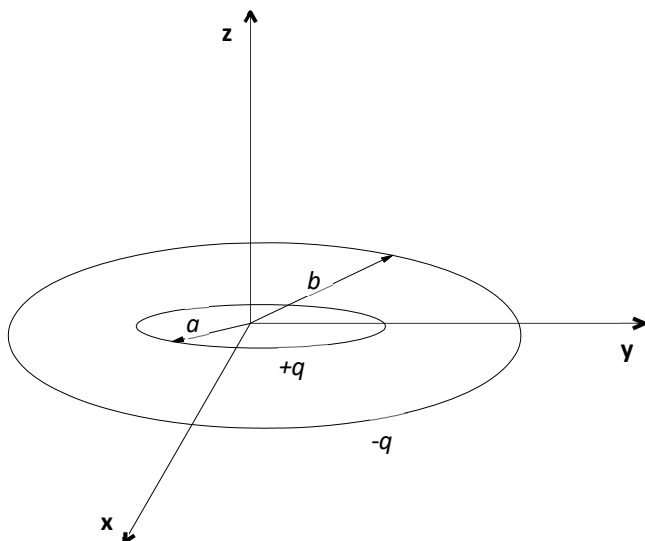
i amb aquesta definició ja és tot coherent.

Aquesta igualtat i la demostració anterior ens permeten determinar que la mitjana del camp elèctric dins de l'esfera serà:

$$\langle \vec{E}(\vec{r}) \rangle = - \frac{\vec{p}}{4\pi\epsilon_0 a^3}$$

3.5.4. Sobre el càlcul dels moments multipolars d'una distribució de càrrega

En aquest apartat, pretenem aprofundir en el càlcul dels moments dipolars amb l'exemple



il·lustratiu de demostrar que el moment dipolar de dos anells concèntrics de radis a i b , que tenen càrregues $+q$ i $-q$ distribuïdes uniformement en la circumferència, és 0, i que el potencial elèctric a grans distàncies és:

$$\phi(\vec{r}) \approx \frac{a^2 - b^2}{16\pi\epsilon_0 r^5} (x^2 + y^2 - 2z^2)$$

L'expressió del moment dipolar és

$$\vec{p} = \int_V \vec{r}' \rho(\vec{r}') dv'$$

En el cas que ens ocupa, tenim una densitat lineal λ i el moment dipolar vindrà donat per

$$\vec{p} = \int_{C_1+C_2} \vec{r}' \lambda(\vec{r}') dl'$$

Es pot intuir que, en fer la volta completa a la circumferència, el resultat serà 0, tant en una distribució com en una altra. Formalment:

$$\begin{aligned} \vec{p} &= \int_{C_1+C_2} \vec{r}' \lambda(\vec{r}') dl' = \int_{C_1} a \vec{u}_r \frac{q}{2\pi a} a d\varphi + \int_{C_2} b \vec{u}_r \frac{-q}{2\pi b} b d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} a (\cos\varphi \vec{u}_x + \sin\varphi \vec{u}_y) \frac{q}{2\pi a} a d\varphi + \int_0^{2\pi} b (\cos\varphi \vec{u}_x + \sin\varphi \vec{u}_y) \frac{-q}{2\pi b} b d\varphi = 0 + 0 \end{aligned}$$

Ens queda el càlcul del tensor quadripolar:

$$Q_{i,j} = \int_V [3x'_i x'_j - \delta_{i,j} r'^2] \rho(\vec{r}') dv'$$

Començarem pels elements de la diagonal,

$$\begin{aligned} Q_{x,x} &= \int_{C_1+C_2} [3x'_x x'_x - \delta_{x,x} r'^2] \lambda(\vec{r}') dl' = \\ &= \int_0^{2\pi} [3a^2 \cos^2\varphi - a^2] \frac{q}{2\pi a} a d\varphi - \int_0^{2\pi} [3b^2 \cos^2\varphi - b^2] \frac{q}{2\pi b} b d\varphi = \\ &= \left\{ \frac{q}{2\pi} (3a^2\pi - 2\pi a^2) - \frac{q}{2\pi} (3b^2\pi - 2\pi b^2) \right\} = \frac{q}{2} (a^2 - b^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_{y,y} &= \int_{C_1+C_2} [3x'_y x'_y - \delta_{y,y} r'^2] \lambda(\vec{r}') dl' = \\ &= \int_0^{2\pi} [3a^2 \sin^2\varphi - a^2] \frac{q}{2\pi a} a d\varphi - \int_0^{2\pi} [3b^2 \sin^2\varphi - b^2] \frac{q}{2\pi b} b d\varphi = \\ &= \left\{ \frac{q}{2\pi} (3a^2\pi - 2\pi a^2) - \frac{q}{2\pi} (3b^2\pi - 2\pi b^2) \right\} = \frac{q}{2} (a^2 - b^2) \end{aligned}$$

Podem deduir el valor de $Q_{z,z}$ per la propietat de la traça del tensor que estableix:

$$Q_{z,z} = -(Q_{x,x} + Q_{y,y}) = -2\frac{q}{2}(a^2 - b^2) = -q(a^2 - b^2)$$

Tanmateix, ho calcularem directament també:

$$\begin{aligned} Q_{z,z} &= \int_{C_1+C_2} [-\delta_{z,z} r'^2] \lambda(\vec{r}') dl' = \\ &= \int_0^{2\pi} [0 - a^2] \frac{q}{2\pi a} a d\varphi - \int_0^{2\pi} [0 - b^2] \frac{q}{2\pi b} b d\varphi = \\ &= \left\{ \frac{q}{2\pi} (-2\pi a^2) - \frac{q}{2\pi} (-2\pi b^2) \right\} = -q(a^2 - b^2) \end{aligned}$$

cosa que efectivament és el resultat esperat.

Pel que fa als elements creuats,

$$\begin{aligned} Q_{x,y} = Q_{y,x} &= \int_{C_1+C_2} [3x'_x x'_y] \lambda(\vec{r}') dl' = \\ &= \int_0^{2\pi} [3a^2 \cos\varphi \sin\varphi] \frac{q}{2\pi a} a d\varphi - \int_0^{2\pi} [3b^2 \cos\varphi \sin\varphi] \frac{q}{2\pi b} b d\varphi = \\ &= \left\{ \frac{q}{2\pi} 0 - \frac{q}{2\pi} 0 \right\} = 0 \end{aligned}$$

$$Q_{x,z} = Q_{z,x} = \int_{C_1+C_2} [3x'_x 0] \lambda(\vec{r}') dl' = 0$$

$$Q_{y,z} = Q_{z,y} = \int_{C_1+C_2} [3x'_y 0] \lambda(\vec{r}') dl' = 0$$

En resum,

$$Q_{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \frac{q}{2} (a^2 - b^2)$$

i el potencial corresponent serà:

$$\begin{aligned}\phi(\vec{r}) &\approx \frac{Q_{total}}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i,j} \frac{x_i x_j}{2r^5} Q_{i,j} \\ &= 0 + 0 + \frac{1}{8\pi\epsilon_0 r^5} \frac{q}{2} (a^2 - b^2)(x^2 + y^2 - 2z^2)\end{aligned}$$

3.5.5. Demostració de la dependència/independència del tensor quadripolar respecte al sistema de referència

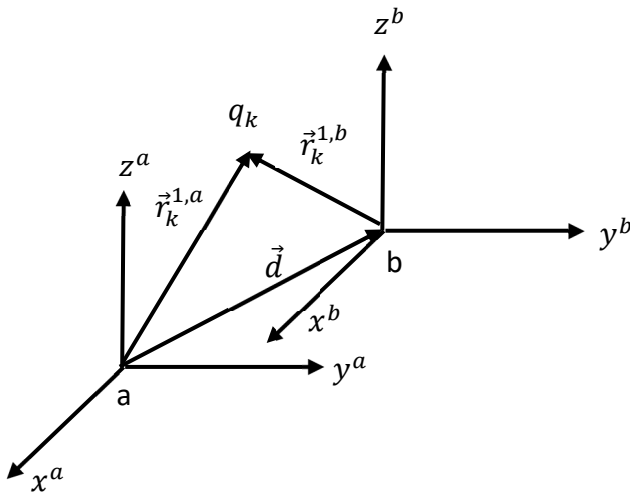
Siga un conjunt de n càrregues q_k . Siga

$$\vec{d} = (d_x, d_y, d_z)$$

el vector que uneix els orígens dels sistemes de referència a i b . Siga

$$\vec{r}_k'^a = \vec{r}_k'^b + \vec{d}$$

el vector de posició de la càrrega q_k , tant des de l'origen a , com des de l'origen b .



$$\vec{r}_k'^a = (x_1'^a, x_2'^a, x_3'^a)$$

$$\vec{r}_k'^b = (x_1'^b, x_2'^b, x_3'^b)$$

El tensor quadripolar respecte de l'origen a serà:

$$Q_{i,j}^a = \sum_{k=1}^n q_k \left\{ 3x_i'^a x_j'^a - \delta_{i,j} (r_k'^a)^2 \right\}$$

Substituint-les $x_i'^a$ en funció dels valors respecte a l'altre sistema de referència, amb origen en b , tenim:

$$\begin{aligned}Q_{i,j}^a &= \sum_{k=1}^n q_k \left\{ 3x_i'^a x_j'^a - \delta_{i,j} (r_k'^a)^2 \right\} \\ &= \sum_{k=1}^n q_k \left\{ 3(x_i'^b + d_i)(x_j'^b + d_j) - \delta_{i,j} \left[(r_k'^b)^2 + d^2 + 2\vec{r}_k'^b \cdot \vec{d} \right] \right\}\end{aligned}$$

Si desenvolupem els productes obtindrem

$$\sum_{k=1}^n q_k \left\{ 3(x_i'^b x_j'^b + d_i x_j'^b + d_j x_i'^b + d_i d_j) - \delta_{i,j} \left[(r_k'^b)^2 + d^2 + 2\vec{r}_k'^b \cdot \vec{d} \right] \right\}$$

Numerem els diferents sumands:

$$\sum_{k=1}^n q_k \{ (1 + 2 + 3 + 4) - \delta_{i,j} [5 + 6 + 7] \}$$

Si ajuntem l'1 i el 5 tenim el valor de $Q_{i,j}^b$

Vegem els termes que ens queden:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n q_k \{ 3 (d_i x_j'^b + d_j x_i'^b + d_i d_j) - \delta_{i,j} [d^2 + 2 \vec{r}_k'^b \vec{d}] \} \\ &= 3d_i \sum_k q_k x_j'^b + 3d_j \sum_k q_k x_i'^b + 3d_i d_j \sum_k q_k - \delta_{i,j} \left(d^2 \sum_k q_k + 2 \vec{d} \sum_k q_k \vec{r}_k'^b \right) \\ &= 3d_i p_j^b + 3d_j p_i^b + 3d_i d_j Q_t - \delta_{i,j} (d^2 Q_t + 2 \vec{d} \vec{p}^b) \end{aligned}$$

Tots aquests termes són nuls si la càrrega total és nul·la i el moment dipolar també ho és, de manera que si el moment monopolar i el dipolar són nuls, el tensor quadripolar és independent del sistema de referència.

Bibliografia de la lliçó 3

Feynman, Richard, Leighton, Robert B. & Sands, Matthew. *Física vol. II: Electromagnetismo y Materia*. Addison-Wesley Iberoamericana, 1987.

Griffiths, David J., *Introduction to Electrodynamics*. Prentice Hall, 1989.

Jackson, John David, *Electrodinámica clásica*. Pearson Alhambra, 2a edició, 1980.

Panofsky, Wolfgang K.H. & Phillips, Melba, *Classical Electricity and Magnetism*. Dover Addison-Wesley Publishing Company Inc., Series in Advanced Physics, 2a edició, 1962.

Reitz, John R., Milford, Frederick J. & Christy, Robert W., *Fundamentos de la Teoría Electromagnética*. Addison-Wesley Iberoamericana, 4a edició, 1996.

Lliçó 4

El potencial electroestàtic

4.1. Introducció. Conductors en electroestàtica

4.2. Teoremes d'unicitat

4.3. El mètode de les imatges

4.4. El mètode de separació de variables

4.5. Contingut complementari

Bibliografia general

Griffiths, David J., L3.

Benito, Emilio, L4.

Textos avançats:

Panofsky, Wolfgang K. H. & Phillips, Melba, L3.

Jackson, John David, L2 i L3.

➤ Després de cada apartat s'indica la bibliografia específica i les lectures recomanades.

➤ Al final de la lliçó s'inclouen les referències bibliogràfiques completes.

Lliçó 4:

El potencial electroestàtic

4.1. Introducció. Conductors en electroestàtica

Com ja hem vist, el concepte de potencial electroestàtic sorgeix en el segle XIX com una eina fonamental per a simplificar l'anàlisi i l'estudi dels camps electroestàtics. Matemàtics i físics com Laplace, Poisson o Gauss, entre d'altres, van contribuir al desenvolupament de les eines necessàries per a estudiar-los. Com que és una magnitud escalar, el potencial resulta més fàcil de calcular que el camp elèctric vectorial, que podrem obtenir per derivació.

Tractarem de resoldre les equacions del potencial, sotmeses a condicions de contorn específiques. Els conductors, per les seues propietats, ens permetran fixar el potencial en les regions on es troben. De fet, fixar aquestes condicions, i establir contorns que delimiten la regió d'interès, és una opció física realista.

4.1.1. Conductors en equilibri electroestàtic

Les propietats dels conductors es poden comprendre assumint que els àtoms cedeixen un o més electrons, els quals resten gairebé lliures a l'interior. Si no hi ha camps (electromagnètics) externs, aquests electrons es mouen aleatòriament, sense ordre, i generen un gas electrònic al voltant dels ions. En el règim electroestàtic, un conductor perfecte arriba a un estat en què les càrregues lliures es redistribueixen fins que el camp elèctric que actua sobre aquestes s'anul·la; això implica que les càrregues lliures no es desplaçaran.

Les propietats dels conductors en equilibri són les següents:

- el camp en el seu interior és nul,
- el potencial en tot el conductor és constant,
- les càrregues (excés de càrrega/càrrega no compensada) es redistribueixen en la superfície exterior del conductor, llevat que estiguen lligades,
- el camp elèctric, just fora de la superfície, és perpendicular a aquesta i el seu valor, coneguda la densitat de càrrega, és $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$,

- el temps de relaxació en els metalls és de l'ordre de $\tau \sim 10^{-19}$ s, cosa que justifica el model idealitzat que estudiem en electroestàtica.³⁰

Alguna de les conseqüències físiques que comporten aquestes propietats són l'apantallament electroestàtic (gàbia de Faraday) i la inducció de càrregues en presència de camps externs. D'altra banda, si el conductor està aïllat (no connectat a una pila), la càrrega no canvia; si està connectat a un potencial (pila), la càrrega serà la necessària per a mantenir aquest potencial i dependrà de la presència d'altres càrregues (presència de camps) a l'espai.

4.1.2. Capacitat d'un conductor aïllat

El potencial en qualsevol punt de l'espai degut només a un conductor, incloent-hi el mateix conductor, és

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma(\vec{r}')}{R(\vec{r}, \vec{r}')} dS$$

on σ és la densitat superficial de càrrega i R la distància des de cada element de superfície dS al punt on volem calcular el potencial.

Si en cada punt de la superfície del conductor la densitat de càrrega σ s'incrementara a $\sigma' = k\sigma$, resultaria que la càrrega total seria $q' = kq$ i el potencial corresponent seria $\phi' = k\phi$, per tal com hi ha una relació lineal entre la càrrega i el potencial, cosa òbvia a partir de la definició anterior de potencial. Es defineix la capacitat del conductor com la relació entre la càrrega del conductor i el potencial a què està sotmès:

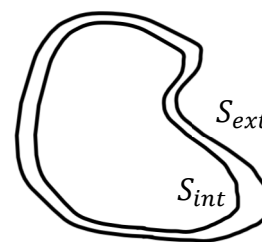
$$C = \frac{Q}{\phi_c}$$

La capacitat només depèn de la geometria del conductor (forma i mida) i la seua unitat en el SI és el farad.

³⁰ El temps de relaxació d'un conductor es defineix com el temps que triga aquest conductor a tornar al seu estat d'equilibri després de ser pertorbat per una força externa, com un camp elèctric.

4.1.3. Propietats d'un conductor buit

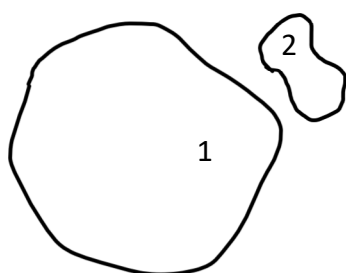
Siga un conductor buit. Pel fet d'estar en equilibri electroestàtic, en l'interior el camp és nul i, per tant, tota la regió envoltada per aquest conductor està al mateix potencial que hàgem fixat amb una pila (respecte de l'origen de potencials). En aquesta situació, dins del conductor no hi ha res. Però si, per exemple, introduïm una càrrega puntual en qualsevol posició, aleshores, sobre la superfície interior del conductor s'induirà una càrrega igual i de signe contrari a la càrrega puntual i es distribuirà de la manera adequada per garantir que el camp siga 0 entre les superfícies interior i exterior del conductor.



En aquesta nova situació, la de tenir una càrrega puntual en l'interior, tenim diferents possibilitats:

- El conductor està aïllat (no connectat a cap pila) i descarregat. En aquest cas, apareixerà sobre la superfície exterior una càrrega positiva del mateix valor que la càrrega puntual incorporada en l'interior (per a mantenir la conservació de la càrrega) i es distribuirà com calga en la superfície exterior per a mantenir la condició d'equilibri.
- El conductor està aïllat i carregat (càrrega total Q). En aquest cas, apareixerà una càrrega $Q+q$ en la superfície exterior distribuïda com calga per a mantenir la condició d'equilibri.
- El conductor no està aïllat (està connectat a una pila) i, per tant, el potencial està fixat. En aquest cas, la càrrega en la superfície exterior serà la necessària per a mantenir el potencial fixat amb la pila. En la superfície interior se seguirà mantenint que la càrrega total és $-q$.

Considerem ara dos conductors carregats.



Podem imaginar línies de camp elèctric que ixen del conductor 1 i acaben en el conductor 2. Qualsevol dS a la superfície d'un conductor defineix un tub de línies que incideix en (connecta amb) un element de superfície de l'altre. Aquests dos elements, que es denominen *corresponents*, porten càrregues iguals i

oposades, tal com es demostra amb el teorema de Gauss aplicat al volum tancat delimitat pel tub i els dos casquets dins dels conductors.

Hi ha la possibilitat que un element de superfície d'un conductor no tinga un corresponent en l'altre. En aquest cas, les línies de camp que ixen s'estenen cap a l'infinit. Tanmateix, això no pot passar si els conductors tenen càrrega total nul·la: segons la llei de Gauss, el flux net del camp elèctric en l'infinit hauria de ser 0, la qual cosa implica que les línies de camp que ixen d'un conductor han d'acabar en l'altre.

També és important notar que cap línia de camp pot començar i acabar en el mateix conductor. Si això passara, la integral del camp al llarg d'aquesta línia seria positiva:

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{l} > 0$$

i, tenint en compte que

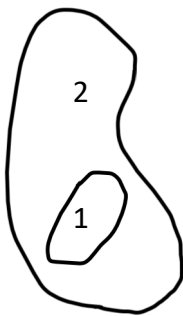
$$\vec{E} \parallel d\vec{l}$$

tindríem:

$$\phi(\vec{b}) - \phi(\vec{a}) = \int_b^a E \, dl > 0$$

cosa que contradiria el fet que el conductor és una regió equipotencial.

Una situació particular de tot això és que un conductor estiga dins de l'altre conductor buit.



Òbviament, hi ha influència total del conductor 1 (el que es troba en l'interior) respecte al 2, però no hi ha cap influència entre el conductor 1 i qualsevol conductor exterior.

El conductor 1 queda perfectament aïllat del camp exterior, ja que el 2 constitueix una gàbia de Faraday per a l'1.

Repetint les consideracions anteriors, el conductor buit té dues superfícies: la interior i l'exterior. La càrrega de la cara interior del 2 és igual en magnitud i de signe oposat a la càrrega de l'1, per tal com el camp en l'interior del conductor 2 és nul.

Així, pel teorema de Gauss aplicat a una superfície S en l'interior del conductor 2

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 = \oint_{S_1} \sigma_1 dS_1 + \oint_{S_{2int}} \sigma_{2int} dS_{2int}$$

$$\oint_{S_1} \sigma_1 dS_1 = - \oint_{S_{2int}} \sigma_{2int} dS_{2int} \rightarrow q_1 = -q_{2int}$$

on S_1 és la superfície que defineix el conductor 1 i S_{2int} és la superfície interior del conductor 2.

Si ara unim el conductor 1 al 2, el sistema evoluciona fins a un nou estat d'equilibri en què els dos potencials són iguals i, com que el camp en l'interior de 2 és 0, en tota la regió interior (incloent-hi l'espai entre els conductors) el potencial serà constant i el camp elèctric serà 0; tindrem, per tant, que $q_1 = 0$.³¹

4.1.4. Condensadors

Suposem que no hi ha cap conductor exterior i que la càrrega total del conductor 1 (al qual li suposem el potencial més gran i, per tant, càrrega positiva) és q_1 . La capacitat d'aquest sistema es definiria com

$$C = \frac{q_1}{\phi_1 - \phi_2}$$

Aquesta configuració és la que es coneix com un condensador.

En l'apartat 4.1.2 hem parlat de la capacitat d'un conductor. Aquest concepte implica que el conductor juntament amb l'infinít constitueix una "parella de conductors" i, vist que el

³¹ Recordem el que s'ha discutit en l'apartat 2.6.2, respecte a què ocurriria si la llei de Coulomb no fora exactament proporcional a la inversa de la distància al quadrat.

potencial en l'infinit és zero, la capacitat no és més que la càrrega que té el conductor dividida pel potencial al qual està sotmès, com havíem definit prèviament.

➤ Per tal d'aprofundir en aquests conceptes, considerem ara dos conductors esfèrics concèntrics: un conductor massís de radi a , envoltat per un altre, de radi interior b i radi exterior c ($a < b < c$). Analitzeu les configuracions següents, pel que fa al potencial i les càrregues totals en els conductors:

- carregat i aïllat el massís, aïllat i descarregat l'exterior,
- carregat i aïllat el massís, connectat a un potencial el conductor exterior,
- carregat i aïllat el massís i connectat al conductor exterior, que està aïllat,
- altres.

En l'apartat de contingut complementari 4.5.1, analitzem els sistemes de conductors i algunes conseqüències per als condensadors.

Bibliografia per a l'apartat 4.1

Feynman, Richard, Leighton, Robert B. & Sands, Matthew, L6.

Griffiths, David J., L3.

4.2. Teoremes d'unicitat

Els teoremes d'unicitat garanteixen que sota certes condicions de contorn la solució del potencial electroestàtic és única. Així, si per a una regió en la qual coneixem la densitat de càrrega es troba una solució del potencial que satisfaci les condicions de contorn, no pot haver-hi cap altre potencial que complisca la mateixa equació de Poisson dins del volum i satisfaci les mateixes condicions de contorn, la solució és única (primer teorema d'unicitat). Així mateix, el segon teorema d'unicitat estableix que, si en aquesta mateixa regió, en lloc del potencial, coneixem la component normal del camp elèctric a la superfície, també la solució és única.

Demostració:

Apliquem el teorema de la divergència al vector $\phi \nabla \phi$:

$$\oint_S \phi \nabla \phi \cdot d\vec{S} = \int_V \nabla(\phi \nabla \phi) \cdot d\vec{v} = \int_V [(\nabla \phi)^2 + \phi \nabla^2 \phi] dv$$

Suposem que hi haguera dues solucions, ϕ_1 i ϕ_2 , que satisfan les condicions de contorn en els potencials (primer teorema d'unicitat) o en les derivades normals a la superfície (segon teorema d'unicitat). Aplicant la igualtat anterior al potencial diferència, tindrem:

$$\begin{aligned} \oint_S (\phi_1 - \phi_2) \nabla(\phi_1 - \phi_2) \cdot d\vec{S} &= \oint_S (\phi_1 - \phi_2) \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial n} - \frac{\partial \phi_2}{\partial n} \right) dS \\ &= \int_V [(\nabla(\phi_1 - \phi_2))^2 + (\phi_1 - \phi_2)(\nabla^2 \phi_1 - \nabla^2 \phi_2)] dv = \int_V [(\nabla(\phi_1 - \phi_2))^2] dv \end{aligned}$$

ja que ambdues solucions satisfarien l'equació de Poisson (o Laplace fora de les càrregues) i, per tant, $\nabla^2 \phi = \nabla^2 \phi_1 - \nabla^2 \phi_2 = 0$. Per consegüent,

$$\oint_S (\phi_1 - \phi_2) \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial n} - \frac{\partial \phi_2}{\partial n} \right) dS = \int_V [(\nabla(\phi_1 - \phi_2))^2] dv$$

Les condicions de contorn sobre els potencials o sobre les derivades normals (camp elèctric), que són les mateixes per a totes dues solucions, garanteixen que la integral de superfície és nul·la. Com que l'integrand de la integral de volum és quadràtic, i, per tant, sempre ≥ 0 , l'única opció és que

$$(\nabla(\phi_1 - \phi_2))^2 = 0 \rightarrow \nabla \phi_1 = \nabla \phi_2$$

en tots els punts del volum, cosa que ens condueix a $\phi_1 = \phi_2 + \text{constant}$.

La constant serà nul·la, ja que en la superfície $\phi_1 = \phi_2$ i aquesta constant és la mateixa per a tots els punts.

Si el que coneixem són les condicions de contorn de les derivades normals, no podem anul·lar com abans la constant i els potencials podrien diferir en una constant, però donarien el mateix camp.

Les condicions de Dirichlet (sobre els potencials) o Neumann (sobre les derivades normals del potencial o camp elèctric a la superfície), o fins i tot mixtes depenent de la regió que analitzem, són suficients per a garantir la solució única.

Bibliografia per a l'apartat 4.2

Griffiths, David, J., L3.

Panofsky, Wolfgang K.H. & Phillips, Melba, L3.

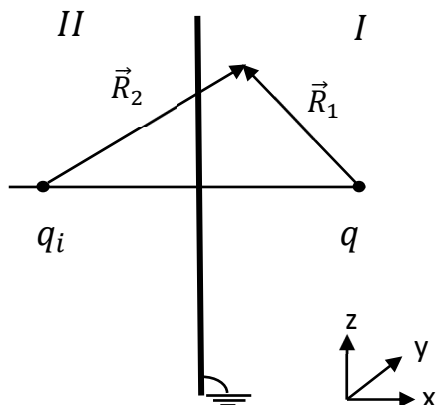
4.3. El mètode de les imatges (electroestàtiques)

El mètode de les imatges electroestàtiques va ser introduït en el segle XIX per William Thomson (Lord Kelvin) per a resoldre problemes amb conductors mitjançant l'ús de càrregues fictícies (imatges).

El mètode de les imatges es basa en els teoremes d'unicitat, que acabem d'analitzar. Essencialment, la solució del problema s'aconsegueix substituint el contorn per un espai imatge amb unes fonts fictícies (imatge) situades a l'exterior del volum d'interès, de manera que, substituint el contorn per aquestes càrregues imatge, es continuen complint les condicions de contorn, juntament amb les càrregues reals, que no es poden haver alterat per l'acció de les càrregues imatge.

4.3.1. Pla conductor a potencial zero en presència d'una càrrega puntual

En la figura següent, es representa una càrrega puntual situada a una distància d davant d'un pla conductor a potencial zero. Es pot generalitzar fàcilment el resultat per a un conjunt de



càrregues o una distribució de càrrega amb densitat $\rho(\vec{r}')$.

Podem imaginar una càrrega imatge especular per simetria, i el potencial en la superfície del pla conductor serà zero, és a dir, satisfà la condició de contorn. No hem alterat la zona I (on hi ha la càrrega q). En conclusió, tenim la solució del problema si som

capaços de calcular el potencial en la regió I format per aquestes dues “distribucions de càrrega”: la càrrega original i la imatge.

El problema físic real és que la càrrega puntual q indueix en el conductor (fixat a potencial zero) unes càrregues que es distribueixen en la superfície i la densitat de les quals podem calcular si calculem el camp en les proximitats de la superfície conductora.

El potencial, degut a les dues càrregues puntuals serà:

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{q}{R_1} + \frac{q_i}{R_2} \right\}$$

$$\vec{R}_1 = \vec{r} - \vec{r}' = (x - d, y, z)$$

$$\vec{R}_2 = \vec{r} - \vec{r}'_i = (x + d, y, z)$$

on hem posat el pla conductor coincident amb el pla y, z , d'un sistema de coordenades cartesià.

Com és immediat de veure, el potencial en $x = 0$ és 0; $\forall y, z$, segons fixa la condició de contorn, sempre que la càrrega imatge siga igual i oposada en signe a la càrrega real.

El potencial i el camp elèctric seran, per tant:

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right\} \quad i \quad \vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{\vec{R}_1}{R_1^3} - \frac{\vec{R}_2}{R_2^3} \right\}$$

i la densitat de càrrega induïda en el conductor serà, doncs:

$$\sigma = \epsilon_0 E_n$$

$$\sigma = -\epsilon_0 \left. \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|_{0,y,z} = -\epsilon_0 \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{0,y,z}$$

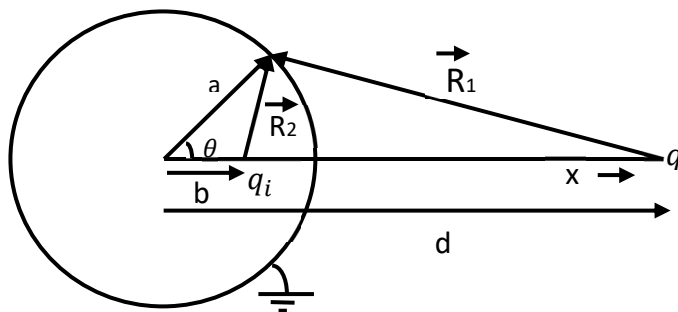
➤ Com a exercici, es pot demostrar que la densitat de càrrega seria

$$\sigma(0, y, z) = - \frac{qd}{2\pi (y^2 + z^2 + d^2)^{3/2}}$$

i per integració es pot demostrar que la càrrega total en el pla és $q_i = -q$.

4.3.2. Esfera conductora a potencial zero en presència d'una càrrega puntual exterior

- Un altre problema que admet una solució simple, per aplicació del mètode de les imatges, és veure el potencial que genera en l'espai una càrrega puntual q , davant d'una esfera conductora a potencial zero, tal com es demostra a continuació.



$$\phi(a) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{q}{R_1(a)} + \frac{q_i}{R_2(a)} \right\}$$

$$d\vec{u}_x + \vec{R}_1 = \vec{a} \quad \text{i} \quad b\vec{u}_x + \vec{R}_2 = \vec{a}$$

$$\text{i per tant, } R_1(a) = \sqrt{a^2 + d^2 - 2adc\cos\theta}$$

$$R_2(a) = \sqrt{a^2 + b^2 - 2abc\cos\theta}$$

i

El parèntesi, en l'equació del potencial,

$$\left\{ \frac{q}{R_1(a)} + \frac{q_i}{R_2(a)} \right\}$$

ha de ser igual a 0 per a qualsevol angle; per tant:

$$qR_2(a) = -q_iR_1(a) \quad \forall \theta$$

Elevant al quadrat i desenvolupant, és fàcil demostrar que aquesta condició es compleix per a qualsevol angle si

$$b = \frac{a^2}{d} \quad \text{i} \quad q_i = -q \frac{a}{d}$$

Aquesta solució és intercanviable si la regió d'interès fora la interior (amb una càrrega q dins), i es podria abordar considerant una càrrega imatge a l'exterior de l'esfera, mantenint les mateixes simetries en les posicions i valors de les càrregues.

Si en comptes d'estar a potencial zero, l'esfera estiguera a un cert potencial, aquesta condició la podríem aconseguir afegint-hi una nova càrrega puntual imatge al centre de l'esfera tal que donara el potencial desitjat en la superfície; suposem que fora

$$\phi_0, \text{ aleshores } Q \text{ hauria de ser } 4\pi\epsilon_0 a \phi_0^{32}$$

En conclusió, els avantatges i les limitacions del mètode de les imatges electroestàtiques es poden sintetitzar així:

- És un mètode directe i elegant
- No cal resoldre equacions diferencials
- Només és aplicable de manera útil a geometries simples (plans, esferes, etc.).

Els exercicis següents contribuiran a una comprensió millor del contingut d'aquest apartat.

➤ Obtingueu pel mètode de les imatges el potencial corresponent a un dipol elèctric situat davant d'un pla conductor connectat a potencial zero

- quan el dipol és paral·lel al pla i
- quan és perpendicular.

➤ Calculeu el potencial en punts (x, y, z) amb $y > 0$ i $z > 0$ quan els semiplans $z=0$ amb $y > 0$ i $y=0$ amb $z > 0$ estan a potencial zero i se situa una càrrega puntual q en $(0, a, b)$ amb a i b positius.

Bibliografia per a l'apartat 4.3

Reitz, John R., Milford, Frederick J. & Christy, Robert W., L3.

³² En l'apartat 4.5.3, de contingut complementari, analitzem el potencial creat per un cilindre conductor en presència d'una línia carregada amb densitat lineal λ i situada a una distància d .

4.4. El mètode de separació de variables

Considerem en aquest apartat la solució de l'equació de Laplace, pel mètode de separació de variables, en una regió limitada. Aquest mètode es pot utilitzar si el contorn de la regió té una forma tal que, en un sistema de coordenades apropiat, les equacions que defineixen aquest contorn es poden expressar d'una manera simple. Hi ha onze sistemes de coordenades en què la separació de variables és possible.³³ D'aquesta manera, s'aconsegueix convertir l'equació en derivades parcials en tres equacions diferencials ordinàries, les solucions de les quals són, en principi, més simples.

En aquest curs ens limitarem a la solució de l'equació de Laplace en coordenades cartesianes, esfèriques o cilíndriques. Les analitzem a continuació.

4.4.1. Equació de Laplace en coordenades cartesianes

L'equació de Laplace en coordenades cartesianes és:

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$$

Aquesta equació admet la solució en separació de variables:

$$\phi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$$

$$\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} + \frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} + \frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} = 0$$

Si igualem cada sumand a les anomenades constants de separació, obtenim:

$$\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} = -\alpha^2$$

$$\frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} = -\beta^2$$

³³ Es pot trobar un estudi avançat del mètode de separació de variables, per exemple, en el text de Morse & Feshbach.

$$\frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} = (\alpha^2 + \beta^2)$$

on, depenent de les condicions de contorn, haurem d'elegir aquestes constants reals o imaginàries per a obtenir solucions amb què satisfer les condicions de contorn.

Suposem que necessitem una solució trigonomètrica per a satisfer el comportament del potencial en x , o, dit altrament, per a satisfer la condició de contorn en x . En aquest cas, l'elecció de α real ens proporciona aquestes solucions, ja que

$$\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} = -\alpha^2$$

té com a solucions $X(x) = e^{\pm i\alpha x}$, de les quals podem agafar combinacions lineals

$$X(x) = A \frac{e^{+i\alpha x} - e^{-i\alpha x}}{2i} = A \sin \alpha x$$

$$X(x) = B \frac{e^{+i\alpha x} + e^{-i\alpha x}}{2} = B \cos \alpha x$$

Podem fer-ho d'una manera semblant amb $Y(y)$, triant β real. En aquest cas, les solucions $Z(z)$ seran també exponencials, però no imaginàries i es podran construir com a combinació lineal de la forma $Z(z) = e^{\pm z(\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}}}$. Així, tindrem:

$$Z(z) = A \sinh(\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}} z + B \cosh(\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}} z$$

En resum, el mètode de separació de variables en coordenades cartesianes permet construir la solució amb combinacions lineals de:

- a) funcions trigonomètriques per a dues dependències, més una funció hiperbòlica per a l'altra variable,
- b) dues funcions hiperbòliques per a dues dependències, més una trigonomètrica per a l'altra,

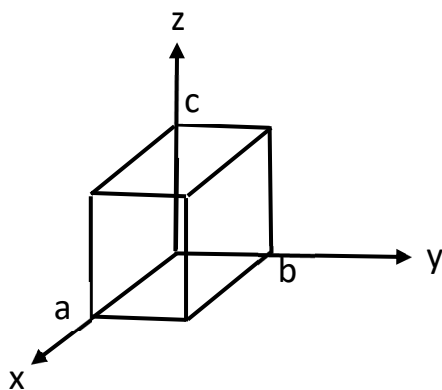
- c) una dependència lineal més una de trigonomètrica i una altra d'hiperbòlica, si una constant de separació és 0,
- d) tres funcions lineals quan les tres constants siguen seleccionades com a 0.

- Un exemple d'aquest darrer cas, $\phi(x, y, z) = (A_1 x + A_2)(A_3 y + A_4)(A_5 z + A_6)$, és tenir els tres plans $(0, y, z)$; $(x, 0, z)$; $(x, y, 0)$ a potencial constant. La solució general per a $x > 0, y > 0, z > 0$ seria:

$$\phi(x, y, z) = A x y z + B$$

A aquesta solució li hauríem d'aplicar les condicions de contorn.

Tornant al problema general, la solució incorpora uns coeficients que cal determinar en cada cas utilitzant la paritat, el comportament i l'ortogonalitat de les funcions trigonomètriques o hiperbòliques. Pel que fa a l'elecció de les constants de separació de les equacions, hem de pensar que una elecció adequada simplificarà els càlculs i donarà una forma compacta a la solució. Altres eleccions també poden satisfer les condicions de contorn, però la solució serà més difícil i l'expressió, més complexa.



- Siga un conductor amb forma de paral·lelepípede, tal com indica la figura. A la tapa superior se li ha fixat un potencial $V = (x, y, c)$ i la resta de cares es troben a potencial zero. Ens plantegem calcular el potencial en l'interior d'aquest paral·lelepípede.

Per aplicació del mètode de separació de variables, podem construir una solució

$$\phi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$$

amb les condicions de contorn següents:

En els plans y, z

$$\phi(0, y, z) = 0 = \phi(a, y, z)$$

En els plans x, z $\phi(x, 0, z) = 0 = \phi(x, b, z)$

En els plans x, y $\phi(x, y, 0) = 0$ i $\phi(x, y, c) = V(x, y)$

En x i y , tenim zeros repetits, que es poden aconseguir fàcilment amb solucions trigonomètriques.

Com que en $x = 0$ el valor de la funció és 0, la solució es podrà construir amb funcions sinus

$$X(x) = A \sin k_x x$$

on k_x és la constant de separació per a la dependència respecte de la x . La condició d'anul·lar-se en a es pot aconseguir amb diversos valors de k_x sempre que es complisca $k_{x,n}a = n\pi$ amb $n = 1, 2, 3, \dots$. És a dir, $k_{x,n} = \frac{n\pi}{a}$.

Amb un raonament semblant a l'anterior, podem concloure que es podrà aconseguir la dependència respecte de la y amb unes constants de separació $k_{y,m} = \frac{m\pi}{b}$.

Per a la dependència en z , només ens queden les funcions hiperbòliques. Tenint en compte que en el punt $z=0$, el potencial s'anul·la, ens haurem de quedar amb solucions de tipus sinus hiperbòlic:³⁴

$$Z(z) = C \sinh k_z z$$

Les tres constants de separació estan relacionades, de manera que

$$k_z = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$$

A aquestes condicions haurem d'afegir-hi la que, en la tapa, es compleix:

$$\phi(x, y, c) = V(x, y)$$

³⁴ Vegeu l'apartat 4.5.4., de contingut complementari.

Com que la solució més general serà una suma de totes les solucions possibles, tindrem:

$$\phi(x, y, z) = \sum_{n,m} A_{n,m} \sin k_{x,n} x \sin k_{y,m} y \sinh k_{z,n,m} z$$

$$\phi(x, y, c) = V(x, y) = \sum_{n,m} A_{n,m} \sin k_{x,n} x \sin k_{y,m} y \sinh k_{z,n,m} c$$

Si apliquem les condicions d'ortogonalitat de les funcions trigonomètriques i multipliquem l'equació anterior per $\sin k_{x,l} x$ i integrem entre 0 i a ,³⁵ ens queda:

$$\begin{aligned} \int_0^a V(x, y) \sin k_{x,l} x \, dx &= \int_0^a \sum_{n,m} \{A_{n,m} \sin k_{x,n} x \sin k_{y,m} y \sinh k_{z,n,m} c\} \sin k_{x,l} x \, dx \\ &= \frac{a}{2} \sum_m \{A_{l,m} \sin k_{y,m} y \sinh k_{z,l,m} c\} \end{aligned}$$

on el terme $\frac{a}{2}$ ix de la integració $\int_0^a \sin k_{x,n} x \sin k_{x,l} x \, dx$.

Si sorgeixen dubtes respecte de si amb els límits d'integració se satisfà l'ortogonalitat, es pot resoldre la integral i fer-hi les substitucions corresponents.

Fent ara el mateix per a la variable y , tindrem:

$$\begin{aligned} \int_0^b \int_0^a V(x, y) \sin k_{x,l} x \sin k_{y,j} y \, dx \, dy &= \\ \int_0^b \frac{a}{2} \sum_m \{A_{l,m} \sin k_{y,m} y \sinh k_{z,l,m} c\} \sin k_{y,j} y \, dy &= \frac{b a}{2} A_{l,j} \sinh k_{z,l,j} c \end{aligned}$$

d'on es dedueixen els valors dels coeficients $A_{l,j}$

³⁵ Aquesta elecció dels límits d'integració ve determinada per ser la dels zeros repetits de la funció sinus.

$$A_{l,j} = \frac{4 \int_0^b \sin k_{y,j} y \left[\int_0^a V(x,y) \sin k_{x,l} x dx \right] dy}{ab \sinh k_{z,l,j} c}$$

on $k_{x,l} = \frac{l\pi}{a}$; $k_{y,j} = \frac{j\pi}{b}$ i $k_{z,l,j} = \sqrt{\left(\frac{l\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{j\pi}{b}\right)^2}$

- Com a exercici complementari considerem l'enunciat següent: Amb quatre làmines conductores molt llargues es forma un prisma de secció rectangular de costats $2a$ i $2b$. Determineu el potencial dins del prisma quan dues cares oposades es connecten a terra i les altres dues, a potencials $\pm V$.

4.4.2. Equació de Laplace en coordenades esfèriques

L'equació de Laplace en coordenades esfèriques és:

$$\nabla^2 \phi(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} = 0$$

Comencem construint la solució amb dues funcions, l'una amb la dependència radial i l'altra amb l'angular:

$$\phi(r, \theta, \varphi) = \mathcal{R}(r)Y(\theta, \varphi)$$

on la part angular són els harmònics esfèrics, que són *funcions especials* que permeten la solució, mitjançant la separació de variables en coordenades esfèriques, de l'equació de Laplace o l'equació de Helmholtz.³⁶ Es defineixen, doncs, com a solucions de l'equació diferencial corresponent.³⁷

Introduint aquesta solució amb variables separables i operant, ens apareix:

³⁶ L'equació de Helmholtz és $\nabla^2 \phi + k^2 \phi = 0$, on k és el nombre d'ones relacionat amb la freqüència o l'energia, segons l'àmbit d'estudi.

³⁷ Per a ampliació es pot consultar, per exemple, el text d'Arfken & Weber.

$$\frac{1}{\mathcal{R}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 + \frac{d\mathcal{R}}{dr} \right) = \text{constant} = n(n+1)$$

i, operant després de multiplicar per $Y \sin \theta$,

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} + n(n+1) Y \sin \theta = 0$$

La solució per a la dependència radial és:

$$\mathcal{R}(r) = A_n r^n + B_n r^{-(n+1)}$$

i la solució per a la dependència angular, com dèiem, es construeix amb els harmònics esfèrics:

$$Y(\theta, \varphi) = \Theta(\theta) \Phi(\varphi)$$

$$\frac{\sin \theta}{\Theta(\theta)} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + n(n+1) \sin^2 \theta + \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = 0$$

cosa que, en introduir el paràmetre de separació

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = -m^2$$

permet obtenir les solucions següents:

$$\text{per a } m = 0 \rightarrow \Phi = A \varphi + B$$

usualment, la regió està limitada en φ , entre 0 i 2π o múltiples de 2π . Així doncs, les solucions físiques per a $m = 0$ són constants,

$$\text{per a } m \neq 0 \rightarrow \Phi = C_m \cos m\varphi + D_m \sin m\varphi$$

L'equació per a la dependència angular θ es pot reescriure així:

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left(n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) \Theta = 0$$

i, fent el canvi de variable $x = \cos \theta$.

$$\frac{d}{dx} \left((1-x^2) \frac{d\Theta}{dx} \right) + \left(n(n+1) - \frac{m^2}{(1-x^2)} \right) \Theta = 0$$

Si exigim que la solució siga finita per a $x^2 \leq 0$, és a dir, per a tots els valors de θ , aleshores n ha de ser 0 o enter positiu i m només poden adoptar els valors entre $-n$ i n . Dit d'una altra manera, l'equació Θ té solucions diferents de 0, que són no singulars en $[-1, 1]$ només si n i m són enters amb $-n \leq m \leq n$. Aquesta equació té l'estructura de l'equació diferencial associada de Legendre que és satisfeta per les funcions associades de Legendre de 1a, $P_n^m(x)$, i 2a espècie, $Q_n^m(x)$, on $n=0,1,2,\dots$ i n és un enter amb $|m| \leq n$.³⁸

La solució general serà, doncs:

$$\phi(r, \theta, \varphi) = \mathcal{R}(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (A_{n,m} r^n + B_{n,m} r^{-(n+1)}) P_n^m(\cos\theta) e^{im\varphi}$$

En el cas de problemes amb simetria de revolució, la qual cosa implica que no hi ha dependència de φ , aleshores $m = 0$ i la solució general queda:

$$\phi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n r^n + B_n r^{-(n+1)}) P_n(\cos\theta)$$

Una vegada consultat el contingut complementari de l'apartat 4.5.5, resoleu els exercicis següents:

³⁸ Les funcions associades de Legendre de 2a espècie presenten singularitats en $x = \pm 1$, per la qual cosa no les considerarem en el nostre problema electroestàtic. Les funcions associades de Legendre de 1a espècie compleixen la relació següent:

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x)$$

i $P_n(x)$ són els ja coneguts polinomis de Legendre, que es defineixen amb la fórmula de Rodrigues.

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$

- Una esfera conductora de radi a es troba a potencial zero al si d'un camp inicialment uniforme E_0 . Determineu el potencial i la densitat de càrrega superficial induïda en l'esfera conductora.
- Al centre d'un conductor buit de radi a que es manté a potència V_0 hi ha un dipol de moment $\vec{p} = p\vec{u}_z$. Trobeu el potencial en l'interior de l'esfera i la densitat superficial de càrrega induïda a la superfície.

4.4.3. Equació de Laplace en coordenades cilíndriques

Finalment, analitzarem l'equació de Laplace en coordenades cilíndriques, l'estructura de la qual és:

$$\nabla^2 \phi(r, \varphi, z) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$$

En el cas de simetria axial amb invariància longitudinal

$$\phi \neq f(\varphi, z)$$

$$\nabla^2 \phi(r) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\phi}{dr} \right) = 0$$

i les solucions són de la forma

$$\phi(r) = A \ln r + B$$

En el cas de simetria axial, però amb dependència en z ,

$$\phi \neq f(\varphi)$$

$$\nabla^2 \phi(r, \varphi, z) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$$

les solucions seran de la forma següent:

$$\phi(r, \theta, \varphi) = \mathcal{R}(r)\mathbb{Z}(z)$$

$$\frac{\mathcal{R}''}{\mathcal{R}} + \frac{1}{r} \frac{\mathcal{R}'}{\mathcal{R}} = -\frac{\mathbb{Z}''}{\mathbb{Z}}$$

Tenim dues possibilitats segons que la constant de separació siga T^2 o $-T^2$. Això és:

$$\frac{\mathbb{Z}''}{\mathbb{Z}} = T^2 \quad \text{o} \quad \frac{\mathbb{Z}''}{\mathbb{Z}} = -T^2$$

En el primer cas,

$$\mathbb{Z}(z) = A(T)\cosh Tz + B(T)\sinh Tz$$

és a dir, tenim solucions exponencials per a z amb coeficients que són funció de T .

Si fem $Tr = v$, l'equació de la part radial queda així:

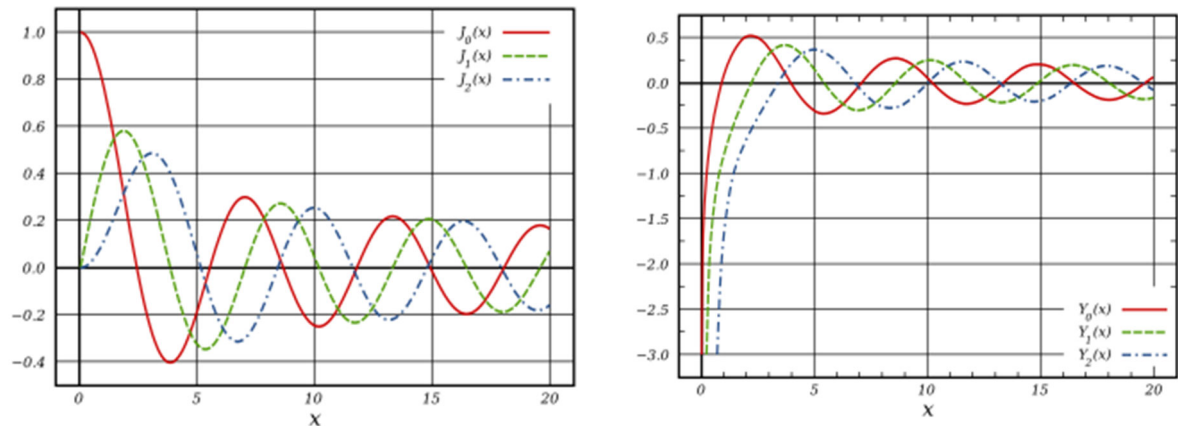
$$\frac{d\mathcal{R}^2}{dv^2} + \frac{1}{v} \frac{d\mathcal{R}}{dv} + \mathcal{R} = 0$$

que és una equació diferencial de tipus Bessel³⁹ amb $n = 0$, les solucions de la qual es poden construir amb les funcions de Bessel de 1a ($J_0(v)$) i 2a ($N_0(v)$ o $Y_0(v)$) espècie. Així doncs,

$$\mathcal{R} = B_1 J_0(v) + B_2 N_0(v)$$

Gràficament, aquestes funcions tenen el comportament següent:

³⁹ L'equació diferencial de tipus Bessel és de la forma següent: $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - n^2)y = 0$.



https://es.wikipedia.org/wiki/Funci%C3%B3n_de_Bessel

Com es veu en les figures anteriors, la funció de Bessel de segona espècie divergeix en 0, d'on es pot concloure que, si $r = 0$ queda inclòs en la regió d'interès, aleshores $B_2 = 0$.

L'altra opció per a la constant de separació és que

$$\frac{\mathbb{Z}''}{\mathbb{Z}} = -T^2$$

amb solucions del tipus:

$$\mathbb{Z}(z) = A(T)\cos Tz + B(T)\sin Tz$$

Fent el canvi de variables,

$$jTr = v$$

la solució de la part radial queda igual que abans, però amb l'argument imaginari,

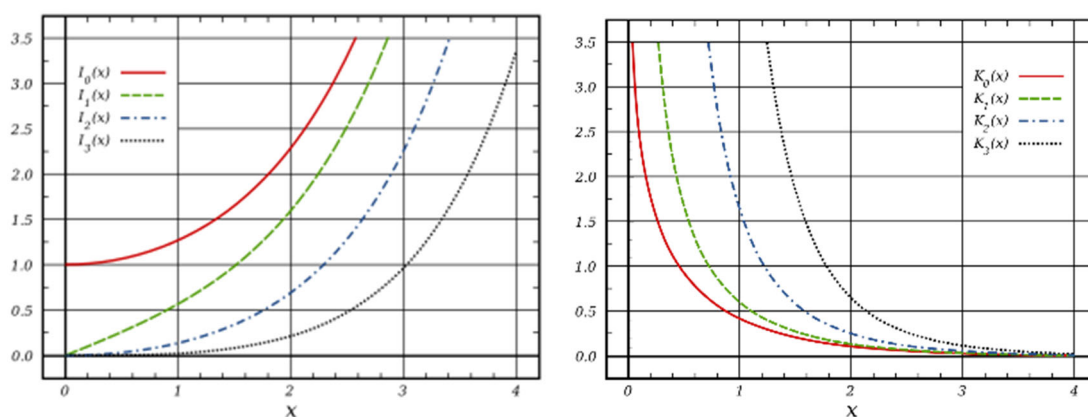
$$\mathcal{R} = B_1 J_0(jTr) + B_2 N_0(jTr).$$

Les funcions de Bessel amb argument imaginari són les funcions de Bessel modificades:

$$J_n(jTr) = I_n$$

$$N_n(jTr) = K_n$$

El comportament de les funcions I_0 y K_0 es pot veure en la gràfica següent:



https://es.wikipedia.org/wiki/Funci%C3%B3n_de_Bessel

Novament, es pot concloure que, si $r = 0$ està inclòs en la regió d'interès, $B_2 = 0$, ja que K_0 divergeix en $r = 0$.

Analitzem ara el cas en què el problema, per la simetria en les condicions de contorn i definició, no depèn de z .

$$\phi \neq f(z)$$

Per tant, l'equació de Laplace, queda:

$$\nabla^2 \phi(r, \varphi) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} = 0$$

Construïrem la solució en la forma

$$\phi(r, \varphi) = \mathcal{R}(r) \mathcal{F}(\varphi)$$

Introduint aquesta solució a l'equació diferencial i dividint per ϕ , obtenim:

$$\frac{r}{\mathcal{R}} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\mathcal{R}}{dr} \right) + \frac{1}{\mathcal{F}} \frac{d^2 \mathcal{F}}{d\varphi^2} = 0$$

Assignant a cada sumant una constant, tenim:

$$\alpha^2 + \beta^2 = 0$$

$$\alpha^2 - \alpha^2 = 0$$

Podem fer consideracions semblants a les realitzades en el cas de coordenades cartesianes.

$$\frac{1}{\mathcal{F}} \frac{d^2 \mathcal{F}}{d\varphi^2} = -\alpha^2$$

Si α és zero, la solució per a $\mathcal{F}$ és lineal

$$\mathcal{F} = A_0 + B_0 \varphi$$

però la periodicitat en φ fa que $B_0 = 0$. D'altra banda, en aquest cas la solució per a $\mathcal{R}$ és logarítmica, cosa que fa que la solució divergisca tant en $r = 0$ com en $r \rightarrow \infty$.

Si α és real >0 les solucions $\mathcal{F}$ seran trigonomètriques, que habitualment són les que necessitem per l'estructura cilíndrica del problema. No obstant això, des del punt de vista matemàtic també podríem suposar una solució amb α imaginari; en aquest cas, la solució formal per a $\mathcal{F}$ seria per superposició de funcions hiperbòliques.

Anem a les solucions trigonomètriques:

$$\mathcal{F} = C \cos k\varphi + D \sin k\varphi$$

on $k = \alpha$, amb la nomenclatura dels casos anteriors. Tenint en compte que les funcions trigonomètriques són periòdiques:

$$\mathcal{F}(\varphi) = \mathcal{F}(\varphi + m2\pi)$$

Així,

$$\mathcal{F} = C \cos k\varphi + D \sin k\varphi = C \cos k(\varphi + m2\pi) + D \sin k(\varphi + m2\pi)$$

i, perquè això es complisca, $k \cdot m$ ha de ser sencer.

Canviem la nomenclatura i establim que la constant de separació és n . És a dir $n=k=\alpha$.

Per tant, l'equació diferencial per a r serà:

$$\frac{r}{\mathcal{R}} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\mathcal{R}}{dr} \right) = n^2$$

amb n sencer, com és obvi, i $n > 0$. La solució d'aquesta equació diferencial és:

$$\mathcal{R} = A r^n + B r^{-n}$$

i la solució general és:

$$\phi(r, \varphi) = \mathcal{R}(r) \mathcal{F}(\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n r^n + B_n r^{-n}) (C_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi)$$

- En l'apartat 4.5.6 i 4.5.7, de contingut complementari, es pot veure tant el cas general com l'aplicació a l'obtenció del potencial en una caixa conductora cilíndrica de radi a i longitud L , la cara lateral de la qual, així com la tapa inferior, estan a potencial zero. La tapa superior està a potencial $V(r, \varphi)$.
- Un exercici menys complex matemàticament és el d'un cilindre infinit de radi a partit longitudinalment en dues meitats que es mantenen a potencials $\pm V$, del qual volem trobar el potencial en punts de l'interior i en punts de l'exterior.

Bibliografia per a l'apartat 4.4

Reitz, John R., Milford, Frederick J. & Christy, Robert W., L3.

Benito, Emilio, L4.

4.5. Contingut complementari

4.5.1. Sistema de diversos conductors: coeficients de capacitat i influència

Considerem un sistema de n conductors i siga q_i la càrrega de cadascun

$$q_i = \oint_{S_i} \sigma_i dS_i$$

i la càrrega total del sistema serà:

$$\sum_{i=1}^n q_i = \sum_{i=1}^n \oint_{S_i} \sigma_i dS_i = \int_S \sigma dS \quad \text{essent } S = \sum_{i=1}^n S_i$$

El potencial vindria expressat per

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma}{R} dS = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \int_{S_i} \frac{\sigma_i}{R} dS_i$$

Aquesta expressió és vàlida per a tot l'espai, tant exterior com interior als conductors.

En el conductor i -èsim, el potencial ve donat per:

$$\phi_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^n \int_{S_j} \frac{\sigma_j}{R_{i,j}} dS_j$$

Lògicament, el sumand corresponent al conductor serà:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S_i} \frac{\sigma_i}{R_{i,i}} dS_i$$

Aquesta integral no divergeix, ja que

$$\int_{S_i} \frac{\sigma_i}{R_{i,i}} dS_i = \int_{(S_i-S')} \frac{\sigma_i}{R_{i,i}} dS + \int_{S'} \frac{\sigma_i}{R_{i,i}} dS$$

on S' és una esfera menuda al voltant del punt en què calculem el camp en l'interior del conductor. La primera integral no presenta cap problema i en la segona tenim que $S' = \pi R_{i,i}^2$ i el límit

$$\lim_{R_{i,i} \rightarrow 0} \frac{\sigma_i}{R_{i,i}} dS = \lim_{R_{i,i} \rightarrow 0} \frac{\sigma_i \pi R_{i,i}^2}{R_{i,i}} = 0$$

Resolta la qüestió anterior, continuem fent el producte de la densitat de càrrega pel potencial en el conductor i -èsim:

$$\sigma_i \phi_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sigma_i \sum_{j=1}^n \int_{S_j} \frac{\sigma_j}{R_{i,j}} dS_j$$

$$\int_{S_i} \sigma_i \phi_i dS_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S_i} \sigma_i \sum_{j=1}^n \int_{S_j} \frac{\sigma_j}{R_{i,j}} dS_i dS_j$$

Com que ϕ_i és constant en el conductor i -èsim (envoltat per la superfície S_i),

$$\int_{S_i} \sigma_i \phi_i dS_i = \phi_i \int_{S_i} \sigma_i dS_i = \phi_i q_i$$

per tant,

$$\phi_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{q_i} \int_{S_i} \sigma_i \sum_{j=1}^n \int_{S_j} \frac{\sigma_j}{R_{i,j}} dS_i dS_j$$

o, cosa que és igual,

$$\phi_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{q_i} \int_{S_i} \sum_{j=1}^n \int_{S_j} \frac{\sigma_i \sigma_j}{R_{i,j}} dS_i dS_j$$

raó per la qual podem posar

$$\phi_i = \sum_{j=1}^n p_{i,j} q_j$$

on

$$p_{i,j} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{q_i q_j} \int_{S_i} \int_{S_j} \frac{\sigma_i \sigma_j}{R_{i,j}} dS_i dS_j$$

Aquests $p_{i,j}$ s'anomenen coeficients de potencial del sistema de conductors. De la seua definició es pot concloure que són simètrics $p_{i,j} = p_{j,i}$ de la qual cosa es deriva que la matriu que els engloba és simètrica. Els $p_{i,j}$ només depenen de la geometria, és a dir, de la posició i la forma dels conductors, como demostrarem en l'apartat 4.5.2 següent.

Resolent el sistema d'equacions per als q_i

$$\phi_i = \sum_{j=1}^n p_{i,j} q_j$$

quedaria com a solució

$$q_i = \sum_{j=1}^n c_{i,j} \phi_j$$

on $c_{i,j} = \frac{p_{i,j}}{\Delta p}$, i Δp és el determinant de la matriu $|p_{i,j}|$. Els $c_{i,j}$ són els coeficients de capacitat ($c_{i,i}$) o influència ($c_{i,j} \forall i \neq j$). Així, el $c_{i,1}$ és el coeficient que indica la influència del conductor 1 i l'*i*-èsim.

D'una manera semblant al que s'esdevé amb els coeficients $p_{i,j}$, els coeficients $c_{i,j}$ són independents de la distribució de potencials entre els conductors i només depenen de la geometria del conjunt.⁴⁰

⁴⁰ Vegeu l'apartat següent per a la demostració.

A partir de la definició de potencial,

$$\phi_i = \sum_{j=1}^n p_{i,j} q_j = \sum_{j=1}^n \phi_{i,j}$$

podem imaginar una situació que ens farà dotar, més clarament, de significació física els coeficients de potencial. Suposem que la càrrega del j -èsim és $q_j = 1$ i tots els altres conductors tenen una càrrega nul·la:

$$q_k = 0 \quad \forall k \neq j$$

Aleshores,

$$\phi_i = p_{i,j}$$

és a dir, el coeficient $p_{i,j}$ és el potencial del conductor i -èsim quan el conductor j té càrrega unitat i tots els altres estan descarregats, incloent-hi el mateix i -èsim.

Una anàlisi semblant es pot fer amb els coeficients de capacitat:

$$q_i = \sum_{j=1}^n c_{i,j} \phi_j$$

Si fixem el potencial del $\phi_j = 1$ i tots els altres, incloent-hi l' i -èsim, els fixem a 0

$$\phi_i = 0 \quad \forall i \neq j$$

aleshores,

$$q_i = c_{i,j}$$

Això ens permet afirmar que els coeficients d'influència són la càrrega que adquireix un conductor i -èsim quan el j -èsim té una potencial unitat i tots els altres estan a potencial nul, incloent-hi aquell mateix.

Característiques de la matriu dels coeficients $c_{i,j}$

La matriu dels coeficients de capacitat i d'influència, $c_{i,j}$, té les característiques següents:⁴¹

- els coeficients de capacitat són sempre $c_{i,i} > 0$,
- els coeficients d'influència són sempre $c_{i,j} \leq 0$,
- la matriu és simètrica, $c_{i,j} = c_{j,i}$,
- la matriu és definida positiva, quan el potencial inclou la contribució de les mateixes càrregues; això vol dir que, per a qualsevol conjunt de potencials, el producte de la matriu dels coeficients de capacitat i influència pel "vector" dels potencials és sempre ≥ 0 ,
- la condició que la matriu siga definida positiva implica que no només els elements de la diagonal principal, sinó qualsevol menor principal (que té la diagonal principal com a diagonal), incloent-hi la mateixa matriu, té determinant estrictament positiu,
- la condició de ser definida positiva implica, així mateix, que la suma de cada fila ha de ser positiva o nul·la. Això equival al fet que l'element de la diagonal principal (que és positiu) ha de ser $\geq$ al valor absolut de la suma de tots els altres elements de la mateixa fila (que són negatius o nuls). Per exemple,

$$c_{11} \geq |c_{12} + c_{13} + \dots + c_{1n}|$$

Analitzem amb una mica més de detall el cas d'un condensador.⁴² Considerant el primer conductor amb càrrega positiva q , determinem el potencial fent servir

$$\phi_1 = p_{11}q_1 + p_{12}q_2; \quad \phi_2 = p_{21}q_1 + p_{22}q_2$$

$$\phi_1 = (p_{11} - p_{12})q; \quad \phi_2 = (p_{21} - p_{22})q$$

La diferència de potencial entre els conductors és proporcional a q :

⁴¹ Vegeu també l'apartat 4.5.2, a continuació.

⁴² Per simplicitat en la formulació, no posarem la coma entre els subíndexs llevat que poguera existir confusió.

$$\phi_1 - \phi_2 = (p_{11} + p_{22} - 2p_{21}) q = \frac{q}{C}$$

S'anomena C la capacitat del sistema. La condició necessària perquè dos conductors constitueixen un condensador és que el flux del camp elèctric generat pel conductor a potencial més alt quedi totalment concatenat amb el conductor a potencial inferior; és a dir, que totes les línies de camp que ixen del positiu acaben en el negatiu (influència total). Atès que la presència d'altres conductors i de terra, assimilable a un conductor de capacitat infinita i, per tant, a potencial fix, desvia part del flux, la condició d'influència total només es compleix d'una manera estricta quan un dels conductors confina geomètricament l'altre (p. ex., una geometria coaxial o esfèrica concèntrica), cosa que garanteix que el camp extern siga negligible i que el flux quedi exclusivament entre els dos conductors.

Pel que fa a la càrrega, les equacions per a dos conductors serien:

$$q_1 = c_{11}\phi_1 + c_{12}\phi_2$$

$$q_2 = c_{21}\phi_1 + c_{22}\phi_2$$

Si estem amb un condensador, com a conseqüència de la influència total $q_1 = -q_2 = q$, on hem suposat que el conductor a més potencial és l'1, la diferència de potencial serà $\phi = \phi_1 - \phi_2$ i la capacitat $C = \frac{q}{\phi}$.

El resum és que

$$q = c_{11}\phi_1 + c_{12}\phi_2 \rightarrow C\phi = c_{11}\phi_1 + c_{12}\phi_2$$

$$-q = c_{21}\phi_1 + c_{22}\phi_2 \rightarrow -C\phi = c_{21}\phi_1 + c_{22}\phi_2$$

Substituint $\phi = \phi_1 - \phi_2$ i operant amb la primera equació, obtenim:

$$(C - c_{11})\phi_1 = (c_{12} + C)\phi_2$$

i, com que ha de ser vàlid per a qualsevol parella de potencials,

$$c_{11} = C$$

$$c_{12} = -C$$

De manera similar, es pot demostrar, a partir de l'equació del conductor carregat negativament, que

$$c_{22} = C$$

$$c_{21} = -C$$

4.5.2. Sobre els coeficients de potencial i de capacitat

4.5.2.1. Simetria de la matriu de coeficients de potencial

Suposem un conjunt de n conductors carregats amb densitats de càrrega σ_i i càrregues totals q_i . Suposem un altre estat d'aquest conjunt de n conductors, però ara amb càrregues i densitats σ'_i i q'_i , respectivament. Cal notar que la relació entre les densitats superficials de càrrega i les càrregues totals és lineal, és a dir, que si $\sigma'_i = k\sigma_i$ la càrrega total d'aquest conductor serà $q'_i = kq_i$.

D'acord amb la definició dels coeficients de potencial,

$$p_{i,j} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{q_i q_j} \int_{S_i} \int_{S_j} \frac{\sigma_i \sigma_j}{R_{i,j}} dS_i dS_j$$

Vegem quins són els valors d'aquests coeficients en aquests dos estats.

En el primer estat de càrrega tindriem que el coeficient seria l'esmentat anteriorment.

En el segon estat tindriem:

$$p'_{i,j} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{q'_i q'_j} \int_{S_i} \int_{S_j} \frac{\sigma'_i \sigma'_j}{R_{i,j}} dS_i dS_j = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{k^2 q_i q_j} \int_{S_i} \int_{S_j} \frac{k^2 \sigma_i \sigma_j}{R_{i,j}} dS_i dS_j = p_{i,j}$$

Per tant, tots dos coeficients de potencial són iguals i això és vàlid de manera general, cosa que demostra que només depèn de factors geomètrics que no han canviat entre la configuració inicial i la denominada prima (').

Per extensió, podem concloure que la matriu dels coeficients de capacitat també és simètrica i els coeficients només depenen de la geometria del problema.

4.5.2.2. Valor dels coeficients de potencial

Atès que $p_{i,j}$ és el potencial del conductor i -èsim quan es col·loca una càrrega unitat en el conductor j -èsim i els altres conductors tenen càrrega 0, la llei de Coulomb (i la linealitat del problema) implica que aquest potencial és una suma de les contribucions dels camps elèctrics de totes les càrregues del sistema. L'únic conductor carregat (i ho és positivament) és el j -èsim i el potencial produït per una càrrega positiva en qualsevol punt de l'espai és positiu (relatiu a terra); per tant, tindrem que el potencial en l' i -èsim és positiu i, per tant, $p_{i,j} \geq 0 \quad \forall i, j$.

4.5.2.3. Valor dels coeficients d'influència i de capacitat

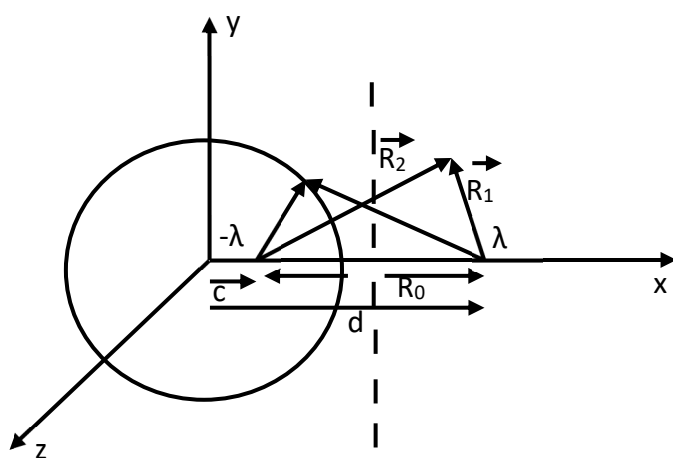
Pel que fa als coeficients d'influència, com ja sabem, $c_{i,j}$ és la càrrega del conductor i -èsim quan el conductor j -èsim té fixat un potencial unitat i els altres conductors estan a potencial zero. La llei de Coulomb (i la linealitat del problema) implica que posar un conductor a potencial positiu respecte als altres induïx una càrrega negativa en tots els altres conductors; per tant, tindrem que $c_{i,j} \leq 0 \quad \forall i \neq j$ (coeficients d'influència). Noteu que el valor zero només apareixerà si no hi ha interacció.

En el cas dels coeficients de capacitat, tindríem que aquest conductor estaria a potencial unitat i la resta a zero. Així doncs, el camp elèctric eixiria d'aquest per a anar cap als altres conductors (que estan a menor potencial), és a dir, la càrrega que té el conductor i -èsim és positiva i, com que el coeficient de capacitat és la càrrega que adquireix, queda demostrat que $c_{i,i} > 0$.

El cas $c_{i,i} = 0$ significaria que, en elevar el potencial del conductor i -èsim a 1 (mantenint els altres a 0), no apareixeria càrrega neta en aquest conductor. Això contradiu la intuïció i l'anàlisi habitual excepte en casos degenerats; és a dir, el conductor i -èsim no pot tenir càrrega bé perquè és un punt sense dimensió, bé perquè està unit elèctricament a un altre cos (i, aleshores, no és un conductor independent).

4.5.3. Mètode de les imatges electroestàtiques en el cas d'un cilindre conductor en les proximitats d'una línia carregada amb densitat lineal λ

Siga una línia carregada amb una densitat lineal $+\lambda$ situada a una distància d de l'eix axial d'un cilindre conductor de radi a i longitud infinita (com a idealització), connectat a un potencial ϕ_0 . En el dibuix la línia estaria al llarg de l'eix z .



El potencial de la densitat lineal λ , per aplicació del teorema de Gauss és:

$$\phi(R) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln R + \text{constant}$$

Com a càrrega imatge, podem suposar una línia amb càrrega $-\lambda$ situada dins del cilindre i amb l'eix paral·lel a l'eix de la càrrega real. Quant a l'origen de

potencials, podríem imaginar una línia equidistant entre la línia de càrrega real i la imatge, i posar allí l'origen de potencial.⁴³

$$\phi_+(R) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_0}{R_1}$$

$$\phi_-(R) = \frac{-\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_0}{R_2}$$

$$\phi_+(R) + \phi_-(R) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

Si ens fixem en els punts del cilindre

⁴³ En tot això sorgeix un problema i és el fet que, en les dades del enunciat, parlem d'un potencial ϕ_0 , però no diem respecte de quin origen.

$$R_1(a) = \sqrt{(d-x)^2 + y^2}$$

$$R_2(a) = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

on x i y són els punts de la superfície del cilindre, referits al sistema de referència de la figura, punts en què es compleix que $x^2 + y^2 = a^2$.

Perquè la suma dels dos potencials siga 0, $\ln \frac{R_2(a)}{R_1(a)} = 0$, hauria donar-se que $R_1(a) = R_2(a)$, la qual cosa no té sentit.

Tornem al problema inicial en què posem el cilindre a potencial ϕ_0 respecte del 0 elegit arbitràriament. Aquest és un punt molt important, ja que, quan diem que un conductor està a un cert potencial, cal indicar clarament l'origen de potencials. En el problema que estem analitzant, hem posat l'origen en la línia R_0 :

$$\phi_0(a) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

o, cosa que és igual,

$$\frac{R_2}{R_1} = e^{\frac{\phi_0 2\pi\epsilon_0}{\lambda}}$$

Siga $A = e^{\frac{\phi_0 4\pi\epsilon_0}{\lambda}}$; aleshores, tindrem:

$$R_1^2 A = R_2^2$$

Operant, s'obté que, per als punts del cilindre, la igualtat anterior condueix a

$$x^2 + y^2 - \frac{2x(c-Ad)}{1-A} = \frac{Ad^2 - c^2}{1-A}$$

Aquesta és l'equació del cilindre. Si volem que l'eix del cilindre passe pel centre del sistema de referència, el terme de l'equació anterior que està multiplicat per x s'haurà

d'anul·lar, ja que l'equació del cilindre centrat en l'eix és, com havíem dit anteriorment, $x^2 + y^2 = a^2$.

D'altra banda, el terme de la dreta en la igualtat ha de ser el radi del cilindre.

En resum,

$$A = \frac{c}{d} \quad \text{i} \quad \frac{Ad^2 - c^2}{1 - A} = a^2$$

La resolució d'aquestes equacions ens fa que

$$c = \frac{a^2}{d} \quad \text{i} \quad \phi_0 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{a}{d}$$

és a dir, el potencial està predeterminat amb la configuració de càrregues que hem establert i el fet que l'origen del sistema de referència per al potencial s'haja fixat en la línia equidistant entre les densitats lineals de càrrega real i imatge, de manera que no té sentit parlar (encara) d'un valor per al potencial al cilindre.

Podem fer alguna cosa en aquesta situació? Seguint el raonament que vam fer en l'estudi de l'esfera conductora a potencial zero en presència d'una càrrega puntual exterior (apartat 4.3.2), si poguérem aconseguir una configuració que ens anul·lara el potencial en el cilindre, després hi podríem afegir una altra càrrega (distribució de càrrega) per a portar-lo al potencial desitjat.

Ens podem imaginar una altra λ'' situada a l'eix del cilindre tal que el seu potencial serà

$$\phi = \frac{\lambda''}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_0 + c}{r}$$

i la densitat lineal de càrrega, que anul·laria el potencial ϕ_0 en la superfície del cilindre, seria:

$$\lambda'' = -\phi_0 \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{R_0 + c}{a}}$$

El potencial generat per aquesta λ'' seria, doncs,

$$\phi(r) = -\phi_0 \frac{\ln\left(\frac{R_0 + c}{r}\right)}{\ln\left(\frac{R_0 + c}{a}\right)}$$

Recapitulant, tenim:

$$\phi(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1} - \phi_0 \frac{\ln\left(\frac{R_0 + c}{r}\right)}{\ln\left(\frac{R_0 + c}{a}\right)} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1} - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left(\ln \frac{a}{d}\right) \left(\frac{\ln\left(\frac{R_0 + c}{r}\right)}{\ln\left(\frac{R_0 + c}{a}\right)}\right)$$

En aquestes condicions, per als punts del cilindre, el potencial és 0.

En conseqüència, si el que volem és que el potencial tinga un valor prefixat, per exemple V , hauríem d'afegir-hi una densitat lineal de càrrega λ''' en l'eix del cilindre tal que:

$$V = \frac{\lambda'''}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_0 + c}{a}$$

cosa que implica una densitat lineal de càrrega

$$\lambda''' = \frac{V 2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{R_0 + c}{a}}$$

i un potencial addicional

$$\phi(r) = \frac{V}{\ln \frac{R_0 + c}{a}} \ln \frac{R_0 + c}{r}$$

En resum, el potencial en qualsevol punt extern al cilindre vindrà donat per:

$$\phi(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1} - \phi_0 \frac{\ln\left(\frac{R_0 + c}{r}\right)}{\ln\left(\frac{R_0 + c}{a}\right)} + V \frac{\ln \frac{R_0 + c}{r}}{\ln \frac{R_0 + c}{a}}$$

sent r la distància del punt camp des de l'eix del sistema de referència, R_2 i R_1 les distàncies al punt camp des de les densitats real i imatge inicials i on ϕ_0 és:

$$\phi_0 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{a}{d}$$

4.5.4. Sobre l'ortogonalitat de les funcions trigonomètriques i el comportament de les funcions hiperbòliques

Les funcions trigonomètriques són ortogonals entre 0 i π i també entre 0 i 2π :

$$\int (\sin mx)(\sin nx)dx = \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} - \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)}$$

Com que $\sin kx|_0^\pi = 0$ i també $\sin kx|_0^{2\pi} = 0, \forall k$ enter, aleshores, per a $m \neq n$ la integral s'anul·larà.

En el cas que $m = n$, tindrem:

$$\int (\sin nx)(\sin nx)dx = \int \sin^2(nx)dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2nx}{4n} = \begin{cases} \int_0^\pi = \frac{\pi}{2} \\ \int_0^{2\pi} = \pi \end{cases}$$

Idènticament, amb el cosinus, tenim:

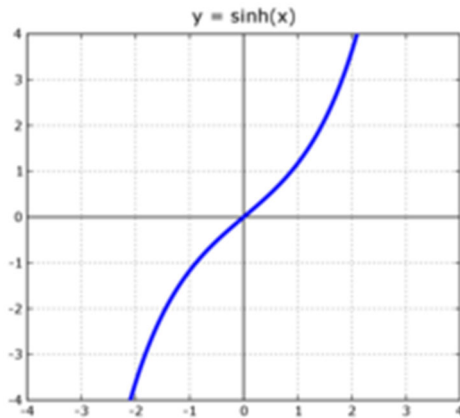
$$\int (\cos mx)(\cos nx)dx = \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} + \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)}$$

En conseqüència, el resultat serà de nou nul per a $m \neq n$; per a $m = n \neq 0$, tindrem:

$$\int (\cos nx)(\cos nx)dx = \int \cos^2(nx)dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2nx}{4n} = \begin{cases} \int_0^\pi = \frac{\pi}{2} \\ \int_0^{2\pi} = \pi \end{cases}$$

Per acabar, si $m = n = 0$, aquesta integral ens donarà el rang d'integració.

Per la seua banda, les funcions hiperbòliques no són ortogonals. Gràficament, el seu comportament és el de la figura següent:



https://es.wikipedia.org/wiki/Seno_hiperb%C3%B3lico

$$\sinh mx = \frac{e^{mx} - e^{-mx}}{2}$$

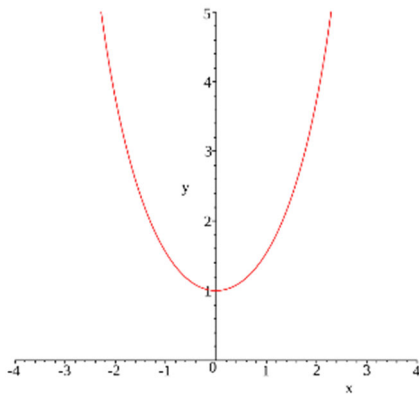
i si fem la integral per a $m \neq n$, resulta:

$$\int (\sinh mx)(\sinh nx)dx = \frac{\sinh(m+n)x}{2(m+n)} - \frac{\sinh(m-n)x}{2(m-n)}$$

En el cas de $m = n$, tindríem:

$$\int (\sinh nx)(\sinh nx)dx = \int \sinh^2(nx)dx = -\frac{x}{2} + \frac{\sinh 2nx}{4n}$$

Idènticament, podem veure el comportament de la funció $\cosh x$:



https://es.wikipedia.org/wiki/Coseno_hiperb%C3%B3lico

$$\cosh mx = \frac{e^{mx} + e^{-mx}}{2}$$

per a $m \neq n$

$$\int (\cosh mx)(\cosh nx)dx = \frac{\sinh(m-n)x}{2(m-n)} + \frac{\sinh(m+n)x}{2(m+n)}$$

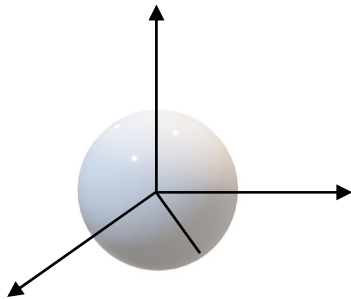
i, per a $m = n \neq 0$, tindríem:

$$\int (\cosh nx)(\cosh nx)dx = \int \cosh^2(nx)dx = \frac{x}{2} + \frac{\sinh 2nx}{4n}$$

Finalment, si $m = n = 0$, la integral ens donaria el rang d'integració.

4.5.5. Exemple d'obtenció del potencial en el cas de coordenades esfèriques

Com a exemple d'aplicació del contingut d'aquesta lliçó, analitzarem el problema següent:



➤ Siga una esfera dividida en dues meitats que es manté a potencials $\pm V_0$. Obteniu el potencial dins de l'esfera.

Hem de resoldre l'equació de Laplace, però en aquest cas hi ha simetria respecte de φ ; per tant, l'estructura de la solució, segons hem vist en l'apartat 4.3, és:

$$\phi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n r^n + B_n r^{-(n+1)}) P_n(\cos\theta)$$

L'origen es troba en la regió d'estudi i, per tant, $B_n = 0, \forall n$:

$$\phi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos\theta)$$

Les condicions de contorn són:

$$\phi(a, \theta) = \begin{cases} V_0 & \text{si } 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \\ -V_0 & \text{si } \frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi \end{cases}$$

i la condició ja considerada que $\phi(0, \theta)$ té un valor finit.

Fent ús de l'ortogonalitat dels polinomis de Legendre,

$$\int_0^{\pi} P_n(\cos\theta) P_m(\cos\theta) \sin\theta d\theta = \begin{cases} x = \cos\theta \\ dx = -\sin\theta d\theta \\ \theta = \pi \rightarrow x = -1 \\ \theta = 0 \rightarrow x = 1 \end{cases} = \int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{n,m}$$

Així, multiplicant la condició de contorn en la superfície per $P_m(\cos\theta)$ i integrant entre -1 i 1 , o, cosa que és igual, entre 0 i π , ens quedarà:

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\pi/2} V_0 P_m(\cos\theta) d(\cos\theta) + \int_{\pi/2}^{\pi} (-V_0) P_m(\cos\theta) d(\cos\theta) = \\
& \int_0^{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} A_n a^n P_n(\cos\theta) P_m(\cos\theta) d(\cos\theta) = \\
& \sum_{n=0}^{\infty} A_n a^n \int_0^{\pi} P_n(\cos\theta) P_m(\cos\theta) d(\cos\theta) = A_n a^n \frac{2}{2n+1}; \\
& \int_0^{\pi/2} V_0 P_m(\cos\theta) d(\cos\theta) + \int_{\pi/2}^{\pi} (-V_0) P_m(\cos\theta) d(\cos\theta) = \\
& V_0 \left\{ \int_0^{\pi/2} P_m(\cos\theta) d(\cos\theta) - \int_{\pi/2}^{\pi} P_m(\cos\theta) d(\cos\theta) \right\} = \\
& V_0 \left\{ \int_0^1 P_m(x) dx - \int_0^{-1} P_m(x) dx \right\} = V_0 \left\{ \int_0^1 P_m(x) dx + \int_0^1 P_m(-x) (-dx) \right\} = \\
& V_0 \left\{ \int_0^1 P_m(x) dx - \int_0^1 P_m(-x) (dx) \right\} = \\
& \left| \begin{array}{c} \text{tenint} \\ \text{en compte que} \\ P_m(-x) = (-1)^m P_m(x) \end{array} \right| = \\
& V_0 \left\{ \int_0^1 P_m(x) dx - \int_0^1 (-1)^m P_m(x) (dx) \right\} = V_0 (1 - (-1)^m) \int_0^1 P_m(x) dx
\end{aligned}$$

si m és parell $((1 - (-1)^m) = 0)$ i si és senar $(1 - (-1)^m) = 2$.

En conseqüència, amb n senar,⁴⁴

$$A_n a^n \frac{2}{2n+1} = 2 V_0 \int_0^1 P_n(x) dx$$

Per a calcular aquesta integral, aprofitarem que

$$(2n+1)P_n(x) = \frac{dP_{n+1}(x)}{dx} - \frac{dP_{n-1}(x)}{dx}$$

Per tant,

⁴⁴ Recordem que $m=n$.

$$\begin{aligned}\int_0^1 P_n(x) dx &= \int_0^1 \frac{1}{(2n+1)} \left(\frac{dP_{n+1}(x)}{dx} - \frac{dP_{n-1}(x)}{dx} \right) dx = \\ &= \frac{1}{(2n+1)} (P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x)) \Big|_0^1 = \\ &= \frac{1}{(2n+1)} \{P_{n+1}(1) - P_{n-1}(1) - P_{n+1}(0) + P_{n-1}(0)\}\end{aligned}$$

Considerant $P_j(1) = 1, \forall j$, ens queda

$$\int_0^1 P_n(x) dx = \frac{1}{(2n+1)} \{1 - 1 - P_{n+1}(0) + P_{n-1}(0)\}$$

D'altra banda, $P_n(0) = 0$, si n és senar. En el nostre cas, n és senar, per la qual cosa $n-1$ i $n+1$ són parells.

Utilitzant la relació de recurrència

$$nP_n(x) = (2n-1)xP_{n-1}(x) - (n-1)P_{n-2}(x)$$

tenim:

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2(n+1)-1)xP_n(x) - (n)P_{n-1}(x)$$

Aplicant-ho a $x=0$,

$$(n+1)P_{n+1}(0) = (2n+1)xP_n(0) - (n)P_{n-1}(0) = -nP_{n-1}(0)$$

$$P_{n+1}(0) = -\frac{nP_{n-1}(0)}{(n+1)}$$

Reprenent on ens hem quedat:

$$\begin{aligned}\int_0^1 P_n(x) dx &= \frac{1}{(2n+1)} \{P_{n-1}(0) - P_{n+1}(0)\} = \frac{1}{(2n+1)} \left[\left(1 + \frac{n}{n+1}\right) P_{n-1}(0) \right] = \\ &= \frac{P_{n-1}(0)}{n+1}\end{aligned}$$

Tenint en compte que⁴⁵

$$P_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n+1)!!}{2^n n!}$$

si escrivim n senar com a $n = 2k + 1$

$$P_{n-1}(0) = P_{2k}(0) = (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{2^k k!}$$

i, si substituïm, tindrem:

$$\int_0^1 P_n(x) dx = \int_0^1 P_{2k+1}(x) dx = \frac{1}{2k+2} P_{2k}(0) = \frac{1}{2k+2} (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{2^k k!}$$

amb la qual cosa, reprenent l'equació dels coeficients,

$$A_{2k+1} a^{2k+1} \frac{2}{2(2k+1)+1} = \frac{1}{2k+2} (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{2^k k!} 2 V_0$$

queda:

$$A_{2k+1} = (-1)^k \frac{(2k-1)!! (4k+3)}{a^{2k+1} (k+1) 2^{k+1} k!} V_0$$

i la solució és:

$$\phi(r, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k-1)!! (4k+3)}{(k+1)! 2^{k+1}} V_0 \left(\frac{r}{a}\right)^{2k+1} P_{2k+1}(\cos\theta); \text{ amb } r \leq a$$

⁴⁵ Recordem el significat del doble factorial per a n enter

$$(2n)!! = 2n(2n-2)(2n-4) \dots 2 = 2^n n!$$

$$(2n-1)!! = (2n-1)(2n-3) \dots 1 = \frac{(2^n)!}{2^n n!}$$

i la convenció: $0!! = 1$ i $(-1)!! = 1$

4.5.6. Cas general de separació de variables en coordenades cilíndriques

Amb la finalitat de completar l'estudi que hem abordat del mètode de separació de variables, a continuació, analitzem el cas general⁴⁶ en coordenades cilíndriques, en què l'equació de Laplace té la forma:

$$\nabla^2 \phi(r, \varphi, z) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$$

multiplicant per r^2

$$r \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} + r^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$$

construïm la solució amb tres funcions:

$$\phi(r, \varphi, z) = \mathcal{R}(r) \mathcal{F}(\varphi) \mathbb{Z}(z)$$

cosa que ens porta a

$$\frac{r}{\mathcal{R}} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\mathcal{R}}{dr} \right) + \frac{1}{\mathcal{F}} \frac{d^2 \mathcal{F}}{d\varphi^2} + \frac{r^2}{\mathbb{Z}} \frac{d^2 \mathbb{Z}}{dz^2} = 0$$

Seguint el mateix esquema de l'apartat 4.4, si fem

$$\frac{1}{\mathbb{Z}} \frac{d^2 \mathbb{Z}}{dz^2} = T^2$$

tindrem:

$$\mathbb{Z}(z) = A(T) \cosh Tz + B(T) \sinh Tz = A_T \cosh Tz + B_T \sinh Tz$$

Si T fora 0,

$$\mathbb{Z}(z) = A_0 z + B_0$$

⁴⁶ Contingut d'interès acadèmic significatiu, encara que prescindible per al desenvolupament de l'examen de l'assignatura.

D'altra banda, la dependència φ està governada per:

$$\frac{1}{\mathcal{F}} \frac{d^2 \mathcal{F}}{d\varphi^2} = -n^2$$

amb solucions

$$\mathcal{F}(\varphi) = C\varphi + D \quad \text{si } n = 0$$

i

$$\mathcal{F}(\varphi) = C_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi \quad \text{si } n \neq 0$$

Les mateixes consideracions que vam fer pel que fa a φ quan vam estudiar la solució de l'equació de Laplace en coordenades esfèriques, són aplicables aquí.

L'equació diferencial per a la dependència radial és:

$$r \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\mathcal{R}}{dr} \right) + (T^2 r^2 - n^2) \mathcal{R} = 0$$

que té com a solució les funcions de Bessel de 1a (J_n) i 2a (N_n) espècie

$$\mathcal{R}(r) = E_n J_n(Tr) + F_n N_n(Tr) \quad \text{si } T \neq 0$$

i

$$\mathcal{R}(r) = Er^n + Fr^{-n} \quad \text{si } T = 0$$

Si tant T com n són 0, la solució general (recordem que les equacions a resoldre són diferents de les del cas general) seria:

$$\phi(r, \varphi, z) = (E \ln r + F)(C\varphi + D)(A_0 z + B_0)$$

Si $T \neq 0$ i $n \neq 0$,

$$\phi(r, \varphi, z) = \sum_T \sum_n (E_n J_n(Tr) + F_n N_n(Tr)) (C_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi) (A_T \cosh Tz + B_T \sinh Tz)$$

Si $T = 0$ i $n \neq 0$,

$$\phi(r, \varphi, z) = \sum_n (Er^n + Fr^{-n}) (C_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi) (A_0 z + B_0)$$

Si $T \neq 0$ i $n = 0$

$$\phi(r, \varphi, z) = \sum_T (E_0 J_0(Tr) + F_0 N_0(Tr)) (C_0 \varphi + D_0) (A_T \cosh Tz + B_T \sinh Tz)$$

Si haguérem considerat l'altra opció per a la constant de separació de la dependència en z ,

$$\frac{1}{z} \frac{d^2 z}{dz^2} = -T^2$$

la solució general seria:

$$Z(z) = A_T \cos Tz + B_T \sin Tz \text{ per a } T \neq 0$$

$$F(\varphi) = C_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi \text{ si } n \neq 0$$

$$R(r) = E_n I_n(Tr) + F_n K_n(Tr) \text{ si } T \neq 0$$

on apareixen les funcions de Bessel modificades de 1a (I_n) i 2a (K_n) espècie. Vegem-ho amb més detall.

Si T fora 0,

$$Z(z) = A_0 z + B_0$$

Si $T \neq 0$,

$$\mathbb{Z}(z) = A_T \cos Tz + B_T \sin Tz$$

D'altra banda, podem obtenir la dependència en φ resolent

$$\frac{1}{\mathcal{F}} \frac{d^2 \mathcal{F}}{d\varphi^2} = -n^2$$

amb solucions

$$\mathcal{F}(\varphi) = C\varphi + D \quad \text{si } n = 0$$

i

$$\mathcal{F}(\varphi) = C_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi \quad \text{si } n \neq 0$$

L'equació diferencial per a la dependència radial serà:

$$r \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\mathcal{R}}{dr} \right) + (-T^2 r^2 - n^2) \mathcal{R} = 0$$

que té com a solució les funcions de Bessel de 1a i 2a espècie modificades:

$$\mathcal{R}(r) = E_n I_n(Tr) + F_n K_n(Tr) \quad \text{si } T \neq 0$$

i

$$\mathcal{R}(r) = Er^n + Fr^{-n} \quad \text{si } T = 0$$

Si tant T com n són 0, la solució general serà:

$$\phi(r, \varphi, z) = (E \ln r + F)(C\varphi + D)(A_0 z + B_0)$$

Si $T \neq 0$ i $n \neq 0$

$$\phi(r, \varphi, z) = \sum_T \sum_n (E_n I_n(Tr) + F_n K_n(Tr))(C_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi)(A_T \cos Tz + B_T \sin Tz)$$

Si $T = 0$ i $n \neq 0$

$$\phi(r, \varphi, z) = \sum_n (Er^n + Fr^{-n})(C_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi)(A_0 z + B_0)$$

Si $T \neq 0$ i $n = 0$

$$\phi(r, \varphi, z) = \sum_T (E_0 I_0(Tr) + F_0 K_0(Tr))(C_0 \varphi + D_0)(A_T \cos Tz + B_T \sin Tz)$$

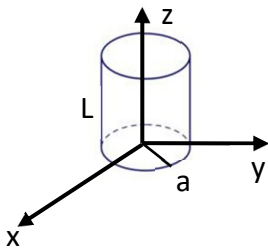
Recordem que T pot correspondre a qualsevol valor numèric i la solució es construiria per integració si T és continu.

El fet de triar una constant de separació o una altra dependrà de la compatibilitat amb les condicions de contorn del problema.

4.5.7. Exemple d'aplicació del mètode de separació de variables en coordenades cilíndriques

Analitzem l'exercici següent:⁴⁷

- Siga una caixa conductora cilíndrica de radi a i longitud L la cara lateral de la qual està a potencial zero, així com la base inferior. La tapa superior està a un potencial $V(r, \varphi)$. Trobeu el potencial elèctric en l'interior d'aquesta caixa conductora.



Donades les característiques del problema, podem:

- utilitzar coordenades cilíndriques per a la resolució de l'equació de Laplace,
- utilitzar el mètode de separació de variables

$$\nabla^2 \phi(r, \varphi, z) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$$

⁴⁷ Contingut d'interès acadèmic significatiu demostratiu de la metodologia de càlcul amb les funcions de Bessel, encara que prescindible per al desenvolupament de l'examen.

$$\phi(r, \varphi, z) = \mathcal{R}(r) \mathcal{F}(\varphi) \mathbb{Z}(z)$$

Podem associar la funció $\mathbb{Z}(z)$ a una constant de separació real que ens donarà funcions hiperbòliques, solució que entenem que s'adapta millor que les trigonomètriques, que reservem per a la dependència en φ :

$$\frac{\mathbb{Z}''}{\mathbb{Z}} = T^2$$

$$\mathbb{Z}(z) = A(T)\cosh Tz + B(T)\sinh Tz$$

Com hem vist en el desenvolupament de la teoria en l'apartat 4.5.6, la solució general es pot construir a partir de

$$\phi(r, \varphi, z) = (E_n J_n(Tr) + F_n N_n(Tr))(A_T \cosh Tz + B_T \sinh Tz)$$

Una condició de contorn és que $\mathbb{Z}(0) = 0$; per consegüent, hem de quedar-nos amb la solució en $\sinh Tz$.

Pel que fa a la dependència en φ ,

$$\mathcal{F}(\varphi) = C_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi \text{ si } n \neq 0$$

Pel que fa a la dependència en r ,

$$\mathcal{R}(r) = E_n J_n(Tr) + F_n N_n(Tr) \text{ si } T \neq 0$$

Com que el punt $r = 0$ es troba en la regió d'estudi i les funcions de Bessel de segona espècie divergeixen en 0, podem eliminar aquestes funcions fent $F_n = 0 \quad \forall n$.

Amb totes aquestes consideracions, la solució general serà de la forma

$$\phi(r, \varphi, z) = \sum_n \sum_T E_n J_n(Tr) (C_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi) (B_T \sinh Tz)$$

o

$$\phi(r, \varphi, z) = \sum_n \sum_T J_n(Tr) (C_{n,T} \cos n\varphi + D_{n,T} \sin n\varphi) (\sinh Tz)$$

si les constants $C_{n,T}$ i $D_{n,T}$ engloben les E_n i B_T .

La condició de contorn sobre la cara lateral implica que, perquè el potencial allà siga 0, s'ha de complir:

$$J_n(Ta) = 0 \quad \forall n$$

Això ens porta al fet que les Ta seran els zeros de la funció de Bessel de primera espècie d'ordre n . Hi ha infinits zeros, que podem denominar $\xi_{n,m}$, tal que $\xi_{n,m} = T_{n,m}a$ i, per tant, els valors de T seran discrets, però no enters.⁴⁸

Incorporant tots aquests resultats a la solució general, aquesta quedarà així:

$$\phi(r, \varphi, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} J_n\left(\frac{\xi_{n,m}}{a}r\right) (C_{n,m} \cos n\varphi + D_{n,m} \sin n\varphi) \left(\sinh \frac{\xi_{n,m}}{a}z\right)$$

Per a l'obtenció dels coeficients $C_{n,m}$ i $D_{n,m}$, ens basarem en la condició de contorn de la tapa superior i l'ortogonalitat de les funcions de Bessel i la de les funcions trigonomètriques.

$$\phi(r, \varphi, L) = V(\varphi, L) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} J_n\left(\frac{\xi_{n,m}}{a}r\right) (C_{n,m} \cos n\varphi + D_{n,m} \sin n\varphi) \left(\sinh \frac{\xi_{n,m}}{a}L\right)$$

Considerant la propietat de les funcions de Bessel de primera espècie,

$$\int_0^1 J_n(\xi_{n,m'} s) J_n(\xi_{n,m} s) s ds = \frac{1}{2} [J_{n+1}(\xi_{n,m})]^2 \delta_{m,m'}$$

on, com és obvi, $s = \frac{r}{a}$.

⁴⁸ El subíndex m serà l'índex dels zeros de la funció de Bessel.

A més, $J_{n+1}(\xi_{n,m}) = -\frac{dJ_n}{d(\xi)}(\xi_{n,m})$, és a dir, és la derivada de la funció J_n respecte del seu argument avaluada en els zeros de la funció J_n .

Si escrivim la condició d'ortogonalitat en funció de r ,

$$\int_0^a J_n\left(\xi_{n,m'} \frac{r}{a}\right) J_n\left(\xi_{n,m} \frac{r}{a}\right) r dr = \frac{a^2}{2} [J_{n+1}(\xi_{n,m})]^2 \delta_{m,m'} = \frac{a^2}{2} \left[-\frac{dJ_n}{d(\xi)}(\xi_{n,m})\right]^2$$

Aplicant aquestes consideracions,

$$\int_0^a V(r, \varphi) J_n\left(\xi_{n,m} \frac{r}{a}\right) r dr = \frac{a^2}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[-\frac{dJ_n}{d\xi}(\xi_{n,m})\right]^2 (C_{n,m} \cos n\varphi + D_{n,m} \sin n\varphi) \left(\sinh \frac{\xi_{n,m}}{a} L\right)$$

on $\left[-\frac{dJ_n}{d\xi}(\xi_{n,m})\right]$ són, com ja hem dit, els valors de la funció derivada en els zeros de la funció de Bessel de primera espècie.

Multiplicant per $\cos n'\varphi$ i integrant entre 0 i 2π ,

$$\int_0^a \int_0^{2\pi} V(r, \varphi) J_n\left(\xi_{n,m} \frac{r}{a}\right) r \cos n'\varphi dr d\varphi = \frac{a^2}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{dJ_n}{d\xi}(\xi_{n,m})\right]^2 \pi(C_{n,m}) \left(\sinh \frac{\xi_{n,m}}{a} L\right)$$

i, per tant, els coeficients són:

$$C_{n,m} = \frac{2 \int_0^a \int_0^{2\pi} V(r, \varphi) J_n\left(\xi_{n,m} \frac{r}{a}\right) r \cos n\varphi dr d\varphi}{a^2 \pi \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{dJ_n}{d\xi}(\xi_{n,m})\right]^2 \sinh \frac{\xi_{n,m}}{a} L}$$

4.5.8. Una qüestió conceptual sobre conductors

Analitzem els problemes següents:

- Una esfera metàl·lica sense càrrega neta té un radi a i conté N electrons de conducció (corresponentment, hi ha N ions fixos en la xarxa cristal·lina). Es retira una fracció f d'aquests electrons amb capacitat de moure's dins de la xarxa. Calculeu el radi de l'esfera en què es distribueixen els $(1-f) N$ electrons de conducció restants.
- Suposem que, en un plantejament acadèmic, l'esfera que conté els electrons de conducció es desplaça lleugerament de la posició centrada a l'origen una certa distància d seguint un diàmetre, sense deformar-se i sense eixir-se'n de l'esfera metàl·lica. Calculeu en aquestes condicions el camp elèctric en l'interior de l'esfera que conté els electrons de conducció.

Problema adaptat de Macchi, Moruzzi & Pegoraro.

Bibliografia de la Lliçó 4

- Arfken, George B. & Weber, Hans J., *Mathematical Methods for Physicists*. Elsevier, 6a edició, 2005.
- Benito, Emilio, *Problemas de campos electromagnéticos* / E. Benito Madrid: AC, D.L. 1985.
- Feynman, Richard, Leighton, Robert B. & Sands, Matthew. *Física vol. II: Electromagnetismo y Materia*. Addison-Wesley Iberoamericana, 1987.
- Griffiths, David J., *Introduction to Electrodynamics*. Prentice Hall, 1989.
- Macchi, Andrea, Moruzzi, Giovanni & Pegoraro, Francesco, *Problems in Classical Electromagnetism*. Springer, 2017.
- Morse, Philip M. & Feshbach, Herman. *Methods of Theoretical Physics. Volum I*. Nova York: McGraw-Hill, 1953.
- Panofsky, Wolfgang K.H. & Phillips, Melba, *Classical Electricity and Magnetism*. Dover Addison-Wesley Publishing Company Inc., Series in Advanced Physics, 2a edició, 1962.
- Reitz, John R., Milford, Frederick J. & Christy, Robert W., *Fundamentos de la Teoría Electromagnética*. Addison-Wesley Iberoamericana, 4a edició, 1996

Lliçó 5

El camp magnetoestàtic

5.1. Introducció

5.2. Llei d'Ampère

5.3. Camp magnètic. Divergència i rotor del camp magnetoestàtic

5.4. Teorema d'Ampère

5.5. Potencial vector

5.6. La força de Lorentz

5.7. Contingut complementari

Bibliografia general

Griffiths, David J., L5.

Textos avançats:

Panofsky, Wolfgang K. H. & Phillips, Melba, L7 i L8.

Jackson, John David, L5.

➤ Després de cada apartat s'indica la bibliografia específica i les lectures recomanades.

➤ Al final de la lliçó s'inclouen les referències bibliogràfiques completes.

Lliçó 5: El camp magnetoestàtic

5.1. Introducció

Fins ara hem estudiat el problema electroestàtic en què, com indica el nom, només teníem configuracions de càrrega estacionària (no depenent del temps en cada punt, $\rho \neq f(t)$). Un pas més en l'estudi de l'electromagnetisme és considerar el flux de càrregues o corrent elèctric i analitzar-ne els efectes.

D'acord amb els descobriments d'Oersted, cada corrent està acompanyat per un camp magnètic, per la qual cosa, en presència de corrents, no es pot tractar el problema electromagnètic (per això el nom) per mitjà, només, d'un camp elèctric.

Per a començar, considerarem corrents que varien lentament amb el temps. La magnetoestàtica és la branca de l'electromagnetisme que estudia els camps magnètics estacionaris, és a dir, aquells que no varien amb el temps o ho fan molt lentament. Aquests camps són generats per corrents elèctrics constants i es poden analitzar mitjançant les equacions de Maxwell per al cas estacionari.

L'estudi del magnetisme té arrels antigues, però va ser en el segle XIX amb els treballs de Hans Christian Oersted (Ørsted) (1777-1851), André-Marie Ampère (1775-1836), Jean Baptiste Biot (1774-1862) i Félix Savart (1791-1841), entre altres que la història ha deixat en l'oblit, que se'n va poder establir una teoria coherent.

En el cas que les variacions temporals siguin harmòniques, els efectes magnètics es poden negligir quan els camps varien a baixa freqüència, i les dimensions del conductor siguin menudes comparades amb la profunditat de penetració associada a l'efecte pell ($\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\sigma\mu}}$),⁴⁹ i, per tant, podem passar per alt els corrents induïts o de Foucault. Tampoc no

⁴⁹ On ω és la freqüència angular, σ és la conductivitat i μ és la permeabilitat del conductor.

considerarem l'efecte Hall, present fins i tot a freqüència 0; amb tot, aquest efecte no és molt significatiu en conductors.

Necessitem una equació que ens relacione el corrent amb el camp elèctric en un punt i aquesta relació per a camps no molt intensos és lineal:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

Es tracta de la llei d'Ohm, on σ és la conductivitat del material i es mesura en el sistema internacional en S/m (siemens/metre); de vegades en comptes de siemens s'utilitza el terme sinònim *mho* (com a invers al d'Ohm). Aquesta relació és fenomenològica i només vàlida per al rang lineal corresponent a camps no molt intensos. En el cas de medis anisòtrops, caldrà utilitzar el tensor de conductivitat.

D'altra banda, el fet d'estar en la situació estàtica o quasiestàtica ens indica que, localment, la densitat de càrrega no variarà amb el temps i l'equació de continuïtat

$$\nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

ens condueix al fet que en aquesta situació la densitat de corrent satisfà $\nabla \cdot \vec{j} = 0$.

L'estudi del camp magnetoestàtic no sols té un interès teòric intrínsec pel fet que aclareix les simetries i les propietats matemàtiques del camp magnètic, sinó que també té una importància pràctica significativa, atès que sustenta el funcionament de dispositius electromecànics, sistemes d'emmagatzematge magnètic o tecnologies de confinament de plasmes, entre d'altres àrees tecnològiques.

Aquesta lliçó es proposa d'examinar amb rigor les equacions fonamentals del camp magnetoestàtic, els mètodes de càlcul associats i la relació que tenen amb la formulació integral i diferencial de les lleis electromagnètiques, cosa que assenta les bases per a una comprensió més profunda de l'electrodinàmica en conjunt.

Bibliografia per a l'apartat 5.1

Reitz, John R., Milford, Frederick J. & Christy, Robert W., L8 i L9.

Feynman, Richard, Leighton, Robert B. & Sands, Matthew, L13, L14 i L15.

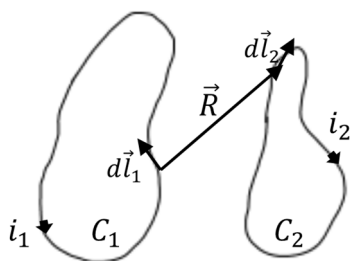
Costa Quintana, Joan & López Aguilar, Fernando, L4.

5.2. Llei d'Ampère

Igual com la Llei de Coulomb formula la interacció entre càrregues elèctriques, la Llei experimental d'Ampère formula la interacció entre corrents que passen per diferents circuits. Així, la força que apareix entre dos fils conductors (circuits) pels quals circulen sengles corrents, i_1 i i_2 , es pot formular com

$$\vec{F}_{2,1} = -\frac{\mu_0}{4\pi} i_1 i_2 \oint_{C_1} \oint_{C_2} (d\vec{l}_1 d\vec{l}_2) \frac{\vec{R}}{R^3}$$

on hem suposat que el corrent és el mateix en tots els punts del circuit (cosa que en definitiva ens permet parlar d'estat estacionari) i per això pot eixir fora de la integració. Així mateix, s'hi ha incorporat la permeabilitat del buit μ_0 .



Aquesta expressió indica quina és la força que apareix en el circuit 2 (recorregut per un corrent i_2) com a conseqüència del fet que pel circuit 1 passe un corrent i_1 .

Podem reescriure la igualtat anterior tenint en compte que

$$d\vec{l}_2 \times \left(d\vec{l}_1 \times \frac{\vec{R}}{R^3} \right) = \left(d\vec{l}_2 \times \frac{\vec{R}}{R^3} \right) d\vec{l}_1 - (d\vec{l}_1 d\vec{l}_2) \frac{\vec{R}}{R^3}$$

Si, a més, considerem que, de manera general es compleix,

$$\oint_C d\vec{l} \times \frac{\vec{R}}{R^3} = \int_S \left(\nabla \times \frac{\vec{R}}{R^3} \right) d\vec{S} = 0$$

pel fet de ser un camp central. Aplicant aquesta darrera consideració a l'equació del nostre problema, tindrem

$$\oint_{C_2} d\vec{l}_2 \frac{\vec{R}}{R^3} = 0$$

Introduint aquestes consideracions, trobem que

$$\vec{F}_{2,1} = \frac{\mu_0}{4\pi} i_1 i_2 \oint_{C_1} \oint_{C_2} d\vec{l}_2 x \left(d\vec{l}_1 x \frac{\vec{R}}{R^3} \right)$$

que es pot reorganitzar com:

$$\vec{F}_{2,1} = i_2 \oint_{C_2} d\vec{l}_2 x \left\{ \frac{\mu_0 i_1}{4\pi} \oint_{C_1} \left(d\vec{l}_1 x \frac{\vec{R}}{R^3} \right) \right\}$$

amb $\vec{R}$ sent la distància vectorial entre $d\vec{l}_1$ i $d\vec{l}_2$ (vegeu figura anterior).

Podem interpretar la magnitud entre els claus com el camp que genera el circuit 1 en un punt $d\vec{l}_2$ del circuit 2. Aquesta consideració ens permet definir el camp magnètic que crea aquest circuit 1, com:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \left\{ \frac{\mu_0 i_1}{4\pi} \oint_{C_1} \left(d\vec{l}_1 x \frac{\vec{R}}{R^3} \right) \right\}$$

essent $\vec{r}'$ el vector de posició dels elements de longitud $d\vec{l}_1$ que defineixen el circuit C_1 i $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$.⁵⁰ Per tant, la força que apareix sobre un circuit C en presència d'un camp magnètic $\vec{B}$ serà:

⁵⁰ Biot i Savart, a partir d'un conjunt d'experiments amb cables rectes i circulars recorreguts per corrent i estudiant la desviació angular d'una agulla magnètica, el 1820 van enunciar una llei diferencial segons la qual la contribució al camp magnètic d'un element de corrent $i d\vec{l}$, expressada en notació actual, seria: $d\vec{B}(\vec{r}) \propto \frac{i d\vec{l}(\vec{r}') \times \vec{R}}{R^3}$.

En la actualitat, de vegades, també s'anomena "Llei de Biot i Savart" la integral que dona el camp magnètic de tota la distribució de corrent estacionari.

$$\vec{F} = i \oint_C d\vec{l}(\vec{r}') \times \vec{B}(\vec{r}')$$

En cas que, en comptes d'un corrent i , el que tinguem siga una densitat de corrent $\vec{J}$, podem incorporar la modificació corresponent a l'equació del camp magnètic, considerant que $i d\vec{l} = (\vec{J} d\vec{S}) d\vec{l} = \vec{J} dv$:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \left\{ \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \left(\vec{J}(\vec{r}') \times \frac{\vec{R}}{R^3} \right) dv' \right\}$$

A partir de tot això, la força sobre una regió en què hi ha una densitat de corrent $\vec{J}$ en presència d'un camp magnètic serà:

$$\vec{F} = \int_{V'} \left(\vec{J}(\vec{r}') \times \vec{B}(\vec{r}') \right) dv'$$

Noteu que les $\vec{J}$ que apareixen en les dues darreres equacions són diferents, ja que una és la que genera el camp i l'altra és aquella sobre la qual actua aquest camp.

- Per tal d'aprofundir en el contingut d'aquest apartat, es pot demostrar per integració directa que el camp magnètic creat per un corrent filiforme indefinit (coincident amb l'eix z d'un sistema de coordenades cartesianes) que transporta una intensitat de corrent i és

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 i}{2\pi\rho} \vec{u}_\rho$$

en coordenades cilíndriques, amb la parametrització corresponent.

- Demostreu, també per integració directa, que el camp magnètic creat per una espira circular de radi a que transporta un corrent i , en punts de l'eix perpendicular al pla de l'espira que passa pel seu centre és

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 i}{2} \vec{u}_z \left[\frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \right]$$

Bibliografia per a l'apartat 5.2

Reitz, John R., Milford, Frederick J. & Christy, Robert W., L8.

Griffiths, David J., L5.

5.3. Camp magnètic. Divergència i rotor del camp magnetoestàtic

5.3.1. Propietats diferencials del camp magnetoestàtic

Comencem per la divergència:

$$\nabla_r \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla_r \int_{V'} \left(\vec{J}(\vec{r}') \times \frac{\vec{R}}{R^3} \right) dv' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \nabla_r \left(\vec{J}(\vec{r}') \times \frac{\vec{R}}{R^3} \right) dv'$$

Ara bé, hem de considerar que:

$$\nabla_r \left(\vec{J}(\vec{r}') \times \frac{\vec{R}}{R^3} \right) = \frac{\vec{R}}{R^3} \nabla_r \times \vec{J}(\vec{r}') - \vec{J}(\vec{r}') \left(\nabla_r \times \frac{\vec{R}}{R^3} \right)$$

Els dos sumands són 0: el primer perquè la derivació és sobre $\vec{r}$ i $\vec{J}(\vec{r}')$ està definida en $\vec{r}'$, i el segon pel fet de ser un camp central. En definitiva,

$$\nabla_r \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla_r \int_{V'} \left(\vec{J}(\vec{r}') \times \frac{\vec{R}}{R^3} \right) dv' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \nabla_r \left(\vec{J}(\vec{r}') \times \frac{\vec{R}}{R^3} \right) dv' = 0$$

És a dir, el camp magnètic no té fonts de divergència:

$$\nabla_r \vec{B}(\vec{r}) = 0 = \nabla \vec{B}(\vec{r})$$

cosa que és coherent amb l'absència de monopols magnètics que serien les fonts d'aquesta divergència, com ho són les densitats de càrrega en el cas del camp elèctric.

Per aplicació de teorema de Gauss, podem veure la versió integral del caràcter solenoidal del camp magnètic.

$$\int_{V'} \nabla_{r'} \vec{B}(\vec{r}') dv = \oint_{S'} \vec{B}(\vec{r}') d\vec{S}' = 0$$

És a dir, el flux del camp magnètic a través de qualsevol superfície tancada és nul.

D'una manera semblant, podem obtenir el valor del rotacional a partir de

$$\nabla_r \times \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla_r \times \int_{V'} \left(\vec{J}(\vec{r}') \times \frac{\vec{R}}{R^3} \right) dv' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \nabla_r \times \left(\vec{J}(\vec{r}') \times \frac{\vec{R}}{R^3} \right) dv'$$

Si considerem la igualtat següent:

$$\nabla_r \times \left(\vec{J}(\vec{r}') \times \frac{\vec{R}}{R^3} \right) = \left(\frac{\vec{R}}{R^3} \nabla_r \right) \vec{J}(\vec{r}') - (\vec{J}(\vec{r}') \nabla_r) \frac{\vec{R}}{R^3} + \vec{J}(\vec{r}') \left(\nabla_r \frac{\vec{R}}{R^3} \right) - \frac{\vec{R}}{R^3} (\nabla_r \vec{J}(\vec{r}'))$$

i n'excloem els termes que són nuls, per tal com la derivació actua sobre punts diferents a aquells en què està definida la magnitud, ens queda:

$$\nabla_r \times \left(\vec{J}(\vec{r}') \times \frac{\vec{R}}{R^3} \right) = -(\vec{J}(\vec{r}') \nabla_r) \frac{\vec{R}}{R^3} + \vec{J}(\vec{r}') \left(\nabla_r \frac{\vec{R}}{R^3} \right)$$

La integral del segon sumand,

$$\int_{V'} \vec{J}(\vec{r}') \left(\nabla_r \frac{\vec{R}}{R^3} \right) dv'$$

serà zero per a qualsevol $R \neq 0$. En canvi, en $R = 0$, cal recordar el valor de la divergència

$$\left(\nabla_r \frac{\vec{R}}{R^3} \right) = 4\pi\delta(\vec{R})$$

Així doncs,

$$\int_{V'} \vec{J}(\vec{r}') \left(\nabla_r \frac{\vec{R}}{R^3} \right) dv' = \int_{V'} \vec{J}(\vec{r}') 4\pi\delta(\vec{R}) dv' = 4\pi\vec{J}(\vec{r})$$

Passant ara al primer terme, la integral serà:

$$-\int_{V'} (\vec{J}(\vec{r}') \nabla_r) \frac{\vec{R}}{R^3} dv' = \int_{V'} (\vec{J}(\vec{r}') \nabla_{r'}) \frac{\vec{R}}{R^3} dv'$$

on l'operador en l'integrand té la forma

$$J_j \frac{\partial}{\partial x'_j}$$

que s'aplicarà a cada component de $\frac{\vec{R}}{R^3}$, tal que la *i*-èsima vindrà donada per:

$$\sum_{j=1}^3 \left(J_j \frac{\partial}{\partial x'_j} \right) \frac{R_i}{R^3}$$

o, de forma simplificada, aplicant la convenció de suma d'índexs repetits:

$$\left(J_j \frac{\partial}{\partial x'_j} \right) \frac{R_i}{R^3}$$

D'altra banda, si considerem que

$$\frac{\partial}{\partial x'_j} \left(\frac{J_j R_i}{R^3} \right) = \frac{\partial J_j}{\partial x'_j} \left(\frac{R_i}{R^3} \right) + J_j \frac{\partial}{\partial x'_j} \left(\frac{R_i}{R^3} \right)$$

igualtat que es pot reordenar, per a procedir a la integració per parts, tindrem:

$$J_j \frac{\partial}{\partial x'_j} \left(\frac{R_i}{R^3} \right) = \frac{\partial}{\partial x'_j} \left(\frac{J_j R_i}{R^3} \right) - \frac{\partial J_j}{\partial x'_j} \left(\frac{R_i}{R^3} \right)$$

$$\int_{V'} J_j \frac{\partial}{\partial x'_j} \left(\frac{R_i}{R^3} \right) dv' = \int_{V'} \frac{\partial}{\partial x'_j} \left(\frac{J_j R_i}{R^3} \right) dv' - \int_{V'} \frac{\partial J_j}{\partial x'_j} \left(\frac{R_i}{R^3} \right) dv'$$

El primer sumand és la divergència (recordem la convenció de suma dels índexs repetits) i hi podem aplicar el teorema de Gauss:

$$\int_{V'} \frac{\partial}{\partial x'_j} \left(\frac{J_j R_i}{R^3} \right) dv' = \oint_{S'} \left(\frac{R_i}{R^3} \right) J_j dS'_j$$

Si la distribució està limitada a la regió V' , en la superfície S' els vectors $\vec{J}$ i $d\vec{S}$ seran perpendiculars (ja que $\vec{J}$ no ix de la superfície) i el flux serà 0, ja que $J_j dS'_j = \vec{J} \cdot d\vec{S}$.⁵¹

El segon sumand incorpora

$$\frac{\partial J_j}{\partial x'_j}$$

que és la divergència de $\vec{J}$ i; en tractar-se de corrents estacionaris, aquest terme serà 0. Per tant, tots dos sumands són nuls i

$$\int_{V'} J_j \frac{\partial}{\partial x'_j} \left(\frac{R_i}{R^3} \right) dv' = 0$$

Recapitulant:

$$\nabla_r \times \vec{B}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} (0 + 4\pi \vec{J}(\vec{r})) = \mu_0 \vec{J}(\vec{r})$$

5.3.2. El potencial escalar magnètic

La relació punt a punt del rotacional amb les fonts (densitats de corrents) ens pot dur a regions en què, com que el corrent és 0, el rotacional del camp també ho siga,

$$\nabla \times \vec{B}(\vec{r}) = 0 \text{ i això implicarà que } \vec{B}(\vec{r}) = -\mu_0 \nabla \phi_m$$

on ϕ_m serà el potencial escalar magnètic vàlid per a les regions en què el camp magnètic és irrotacional.

Bibliografia per a l'apartat 5.3

Costa Quintana, Joan & López Aguilar, Fernando, L4.

⁵¹ Recordem, una vegada més, la convenció de sumatori d'índex repetits.

5.4. Teorema d'Ampère

A partir del rotacional del camp magnètic i per aplicació del teorema de Stokes, podem tenir la versió integral de l'equació que relaciona el camp amb les fonts, d'una manera semblant a la versió integral de l'equació $\nabla \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$, que vam obtenir per aplicació del teorema de Gauss.

En efecte,

$$\int_{S.O} \nabla \times \vec{B}(\vec{r}') d\vec{S} = \oint_C \vec{B}(\vec{r}) d\vec{l} = \mu_0 \int_{S.O} \vec{J}(\vec{r}) d\vec{S} = \mu_0 I_e$$

on I_e és el corrent enllaçat per la corba tancada en la qual recolza la superfície oberta S , cosa que constitueix l'anomenat teorema d'Ampère, que, juntament amb

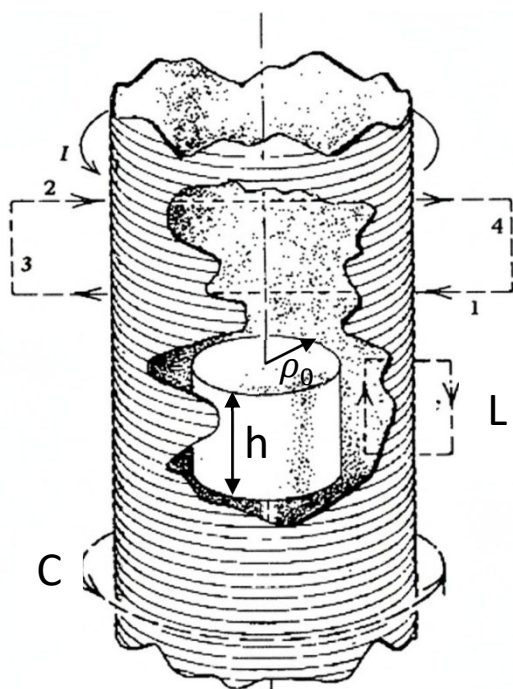
$$\oint_{S'} \vec{B}(\vec{r}') d\vec{S}' = 0$$

estableixen les propietats integrals del camp magnètic per a corrents estacionaris.

➤ Com a aplicació del que acabem de dir, considereu els dos problemes de l'apartat anterior 5.2.

Analitzem ara el cas d'un solenoide molt llarg (infinit) pel qual circula un corrent I i té n espires, molt juntes, per unitat de longitud. Ens preguntem sobre les dependències paramètriques i direcció del camp magnètic.

En principi, $\vec{B} = f(\rho, \varphi, z)$. Però és evident que diferents punts camp, situats en el mateix φ, z però amb diferent ρ , veuen (senten) un camp diferent. En canvi, diferents z o diferents φ per a un mateix ρ veuen la mateixa distribució de corrent, per la qual cosa tindran el mateix camp. En conclusió, el camp només dependrà de ρ .



Adaptat de Paul Lorrain, Dale R. Corson, *Campos y Ondas Electromagnéticas. Selecciones Científicas* (1972)

Pel que fa a les components, haurem de recórrer a les equacions diferencials o integrals per a discernir quins components hi ha i quin valor tenen.

Ens trobem fora dels corrents i, per tant,

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{\rho}) = 0$$

$$\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial B_z}{\partial \rho} - \frac{\partial B_\rho}{\partial z} \right) \vec{u}_\rho - \left(\frac{\partial B_z}{\partial \rho} - \frac{\partial B_\rho}{\partial z} \right) \vec{u}_\phi + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial(\rho B_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial B_\rho}{\partial \phi} \right) \vec{u}_z = 0$$

Tenint en compte que les tres components només depenen de

ρ , l'equació anterior ens porta a

$$-\vec{u}_\phi \left(\frac{\partial B_z}{\partial \rho} \right) = 0$$

$$\frac{\vec{u}_z}{\rho} \left(\frac{\partial(\rho B_\phi)}{\partial \rho} \right) = 0$$

d'on es deriven les conclusions següents:

- de la primera igualtat, tenim:

$$\frac{\partial B_z}{\partial \rho} = \frac{dB_z}{d\rho} = 0 \rightarrow B_z \neq f(\rho)$$

és a dir, B_z o és 0 o és constant.

- de la segona igualtat es deriva que

$$\rho B_\phi \neq f(\rho)$$

cosa que implica que B_φ o bé és 0 o bé és constant.

Tenint en compte les conclusions anteriors, construïm un cilindre de radi ρ_0 i longitud h , dins del solenoide, com s'indica en la figura anterior, i apliquem la propietat integral del camp magnètic,

$$\oint_{S'} \vec{B}(\vec{r}') d\vec{S}' = 0$$

El flux a través de les bases, vist que $B_z \neq f(\rho)$, s'anul·larà: si hi haguera contribució al flux de la base de baix, eixiria completament per la base de dalt. Això també passaria, fins i tot, si fora només funció de ρ .

Per tant, també serà zero la contribució al flux de la superfície lateral,

$$\int_{S.lat} \vec{B}(\rho_0) d\vec{S}' = 0 = \int_{S.lat} B_\rho dS' = B_\rho 2\pi\rho_0 l$$

d'on deduïm que $B_\rho = 0$ per a punts interiors.

El mateix raonament es pot fer per a un cilindre exterior i, de nou, la conclusió serà que la component $B_\rho = 0$.

Fem ara un *llaç ampereà*, com el que hem indicat en la figura anterior amb 1-2-3-4, en què el corrent global enllaçat és 0; per tant,

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = 0$$

Vist que $B_\rho = 0$, només queden les contribucions laterals dels trossos 3 i 4, i, consegüentment,

$$B_z(3) = B_z(4)$$

és a dir, la B_z fora del solenoide és la mateixa en tots els punts i és, per tant, constant (o nul·la).

Fent el mateix amb un llaç completament en l'interior, la conclusió serà la mateixa, és a dir, B_z dins del solenoide és la mateixa en tots els punts i és, per tant, constant (o nul·la).

Suposem que hi ha un B_z en l'interior i imaginem una superfície plana perpendicular a l'eix del solenoide. El camp magnètic s'haurà de tancar. Tot el flux que passa per dins s'haurà de tancar per l'exterior. Com que la superfície exterior és infinita, l'única manera és admetre que el camp exterior és 0. És a dir, les línies de camp es tancaran per l'infinit tornant per la part inferior del solenoide.

També es pot arribar a aquesta conclusió pensant que, a grans distàncies, el camp del solenoide serà 0 i, com que sempre té el mateix valor, segons hem demostrat, podem concloure que $B_z = 0$ en l'exterior.

Considerem ara un *llaç ampereà* com el L de la figura anterior:

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \int_C B_z dl = \mu_0 n I l = B_z l$$

i, per tant, en l'interior del solenoide:

$$B_z = \mu_0 n I$$

Ens queda la component B_φ . Si fem un *llaç ampereà*, en forma de circumferència centrada a l'eix del cilindre i coplanar amb les espirals, en l'interior del solenoide tindrem:

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = 0$$

ja que no hi ha corrent enllaçat. La conclusió és que B_φ és zero en l'interior.

Si fem el llaç per fora, com l'anomenat C , podem considerar que el solenoide és un conjunt d'espires apilades, de manera que el corrent enllaçat serà 0; en aquest cas, la nostra modelització ens porta a $B_\varphi = 0$ o bé podem considerar que el corrent puja d'una espira a la següent (cosa que és una aproximació millor a la realitat) i, en aquest cas,

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I = 2\pi\rho B_\varphi$$

d'on fora del solenoide tindrem:

$$B_\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}$$

Cal notar que aquesta component és molt menor que la B_z i constitueix un refinament de la solució.

Com a aprofundiment en els conceptes anteriors, podem fer les activitats següents:

- Demostreu que el camp magnètic que crea un corrent d'intensitat i procedent de $z = \infty$ que descendeix per l'eix z fins a l'origen del sistema de coordenades i es distribueix isòtropicament sobre el pla $(x,y,0)$, és:

per a $z > 0$

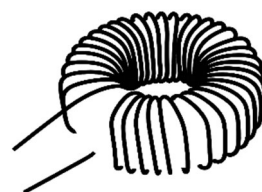
$$\vec{B}(\rho, z) = -\frac{\mu_0 i}{4\pi\rho} \vec{u}_\varphi \left(2 + \frac{z}{\sqrt{(\rho^2 + z^2)}} \right)$$

i per a $z < 0$

$$\vec{B}(\rho, z) = -\frac{\mu_0 i}{4\pi\rho} \vec{u}_\varphi \left(\frac{z}{\sqrt{(\rho^2 + z^2)}} \right)$$

- Demostreu que el camp en l'interior d'una bobina toroidal de secció rectangular sense nucli conductor i radi mitjà R formada per N espires molt juntes, recorregudes per un corrent i , és

$$\vec{B}(\rho) = \frac{\mu_0 N i}{2\pi\rho} \vec{u}_\varphi$$



- Siga un conductor cilíndric indefinit on s'ha practicat una cavitat, també cilíndrica, l'eix de la qual és paral·lel al del cilindre inicial i està situat en posició excèntrica. El conductor està recorregut per un corrent i distribuït uniformement en tota la secció transversal. Siga a el radi de la cavitat, b el del cilindre conductor i d la distància entre els eixos de tots dos, de manera que $a+b < d$. Demostreu que $\vec{B}$ és uniforme en la cavitat i determineu-ne el valor.

- Siga un cilindre conductor buit molt llarg, que es tanca a distàncies molt allunyades de la regió d'interès, de radi a i gruix negligible, pel qual circula una densitat de corrent superficial constant $\vec{K}$ que ascendeix formant un angle θ amb l'eix del cilindre (direcció $\vec{u}_z$). Obtingueu el camp magnètic en tot l'espai.

Bibliografia per a l'apartat 5.4

Griffiths, David J., L5.

Reitz, John R., Milford, Frederick J. & Christy, Robert W., L8.

5.5. Potencial vector

5.5.1. Obtenció del potencial vector a partir del camp magnètic

Tenint en compte que $\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}) = 0$, podem deduir que el camp magnètic deriva, a través del rotacional, d'un altre camp vectorial, $\vec{B}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{A}(\vec{r})$, atès que sempre $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}(\vec{r})) = 0$, per les propietats dels operadors vectorials. Anomenarem aquest nou camp vectorial *potencial vector*.

Apareix, com és lògic, una indeterminació en una funció gradient, atès que un altre potencial vector $\vec{A}'(\vec{r})$ tal que $\vec{A}(\vec{r}) + \nabla \psi = \vec{A}'(\vec{r})$ ens donaria el mateix camp magnètic. Recordem que $(\nabla \times \nabla \psi) = 0$ sempre.

Aquesta indeterminació desapareixerà amb les condicions físiques del problema o establint unes condicions matemàtiques en les denominades transformacions de contrast o transformacions Gauge.⁵²

Per a obtenir una expressió de $\vec{A}(\vec{r})$, partirem de la definició de camp magnètic,

$$\vec{B}(\vec{r}) = \left\{ \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \left(\vec{j}(\vec{r}') \times \frac{\vec{R}}{R^3} \right) dv' \right\} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \left(\vec{j}(\vec{r}') \times \nabla_r \frac{1}{R} \right) dv'$$

⁵² Vegeu, per exemple, Griffiths, L10.

Tenint en compte que

$$\nabla_r \times \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{R} = \frac{1}{R} \nabla_r \times \vec{J}(\vec{r}') - \vec{J}(\vec{r}') \times \nabla_r \left(\frac{1}{R} \right) = -\vec{J}(\vec{r}') \times \nabla_r \left(\frac{1}{R} \right)$$

i substituint en la integral anterior, tenim:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \left\{ \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \left(\vec{J}(\vec{r}') \times \frac{\vec{R}}{R^3} \right) dv' \right\} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \left(\nabla_r \times \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{R} \right) dv' = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla_r \times \int_{V'} \left(\frac{\vec{J}(\vec{r}')}{R} \right) dv'$$

cosa que ens permet definir un nou camp vectorial (el potencial vector) com:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \left(\frac{\vec{J}(\vec{r}')}{R} \right) dv'$$

que complirà

$$\vec{B}(\vec{r}) = \nabla_r \times \vec{A}(\vec{r})$$

En el cas de corrents estacionaris filiformes, l'expressió del potencial vector queda:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} i \oint_C \left(\frac{d\vec{l}}{R} \right)$$

Tenint en compte el teorema de Stokes,

$$\oint \vec{v} \cdot d\vec{l} = \int_{S.O.} \nabla \times \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

fem $\vec{v} = \oint \vec{n}$, on $\vec{n}$ és un vector constant. Aleshores,

$$\nabla \times \vec{v} = \nabla \times \oint \vec{n} = \nabla \oint \times \vec{n} + \oint \nabla \times \vec{n} = \nabla \oint \times \vec{n}$$

d'on es pot deduir

$$\oint \vec{v} \cdot d\vec{l} = \int_{S.O.} \nabla \oint \times \vec{n} \cdot d\vec{S}$$

Consegüentment,

$$\oint \vec{n} \cdot d\vec{l} = \vec{n} \oint d\vec{l} = -\vec{n} \int_{S.O.} d\vec{S} \times \nabla \phi$$

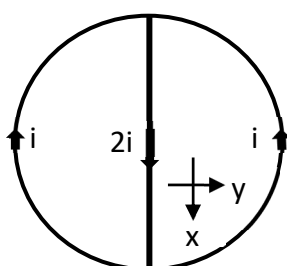
i d'això concloem:

$$\oint \vec{n} \cdot d\vec{l} = - \int_{S.O.} d\vec{S}' \times \nabla \phi$$

$$\text{Si } \phi = \frac{1}{R} \text{ aleshores } \nabla \phi = \nabla \left(\frac{1}{R} \right) = -\frac{\vec{R}}{R^3}$$

i tindrem una altra forma d'expressar el potencial vector associat a un corrent filiforme:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} i \oint_C \left(\frac{d\vec{l}}{R} \right) = i \int_{S.O.} d\vec{S}' \times \left(\nabla_{r'} \left(\frac{1}{R} \right) \right) = i \int_{S.O.} d\vec{S}' \times \left(\frac{\vec{R}}{R^3} \right)$$



➤ Com a aplicació dels conceptes anteriors, podem demostrar que el potencial vector en punts de l'eix que passa perpendicularment pel centre del cercle definit per l'espira de la figura, és

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \left[-\frac{2a}{\sqrt{(a^2 + z^2)}} + \ln \frac{(a + \sqrt{(a^2 + z^2)})}{(-a + \sqrt{(a^2 + z^2)})} \right] \vec{u}_x$$

5.5.2. Propietats diferencials i integrals del potencial vector

A partir de la definició del potencial vector,

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \left(\frac{\vec{J}(\vec{r}')}{R} \right) dv'$$

vegem la divergència:

$$\nabla_r \cdot \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla_r \cdot \int_{V'} \left(\frac{\vec{J}(\vec{r}')}{R} \right) dv' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \nabla_r \cdot \left(\frac{\vec{J}(\vec{r}')}{R} \right) dv'$$

Aquest integrand es pot desenvolupar com:

$$\nabla_r \left(\frac{\vec{J}(\vec{r}')}{R} \right) = \vec{J}(\vec{r}') \nabla_r \left(\frac{1}{R} \right) + \left(\frac{1}{R} \right) \nabla_r \vec{J}(\vec{r}') = \vec{J}(\vec{r}') \nabla_r \left(\frac{1}{R} \right) = -\vec{J}(\vec{r}') \nabla_{r'} \left(\frac{1}{R} \right)$$

i atès que també es compleix

$$\nabla_{r'} \left(\frac{\vec{J}(\vec{r}')}{R} \right) = \vec{J}(\vec{r}') \nabla_{r'} \left(\frac{1}{R} \right) + \left(\frac{1}{R} \right) \nabla_{r'} \vec{J}(\vec{r}')$$

podem establir la igualtat següent:

$$\nabla_r \left(\frac{\vec{J}(\vec{r}')}{R} \right) = -\vec{J}(\vec{r}') \nabla_{r'} \left(\frac{1}{R} \right) = -\nabla_{r'} \left(\frac{\vec{J}(\vec{r}')}{R} \right) + \left(\frac{1}{R} \right) \nabla_{r'} \vec{J}(\vec{r}')$$

Així doncs,

$$\nabla_r \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \nabla_r \left(\frac{\vec{J}(\vec{r}')}{R} \right) dv' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \left[\left(\frac{1}{R} \right) \nabla_{r'} \vec{J}(\vec{r}') - \nabla_{r'} \left(\frac{\vec{J}(\vec{r}')}{R} \right) \right] dv'$$

El primer terme és nul en corrents estacionaris, perquè $\nabla \vec{J} = 0$, i el segon sumand de l'integrand es pot transformar en una integral de superfície aplicant el teorema de Gauss.

$$\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \left[-\nabla_{r'} \left(\frac{\vec{J}(\vec{r}')}{R} \right) \right] dv' = -\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{S'} \left[\left(\frac{\vec{J}(\vec{r}')}{R} \right) \right] d\vec{S}'$$

Aquesta integral és nul·la si els corrents estan confinats, ja que $\vec{J}(\vec{r}')$ serà tangent a la superfície, pel fet de no poder-ne “escapar”.

$$\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{S'} \left[\left(\frac{\vec{J}(\vec{r}')}{R} \right) \right] d\vec{S}' = 0$$

La situació que la divergència del potencial vector siga nul·la, $\nabla_r \vec{A}(\vec{r}) = 0$, en corrents estacionaris, ens trau la indeterminació de què havíem parlat abans.

Resumint, les equacions diferencials que satisfà el potencial vector són:

$$\nabla_r \vec{A}(\vec{r}) = 0 \quad \text{i} \quad \nabla_r \times \vec{A}(\vec{r}) = \vec{B}(\vec{r})$$

És a dir, el camp magnètic actua com a “font” del rotacional del potencial vector, per la qual cosa es pot establir el paral·lelisme entre les equacions del camp magnètic respecte a les fonts de rotacional i el potencial vector, respecte de les seues fonts, que són el camp magnètic.

Vegem, a partir del teorema de Helmholtz, quines conseqüències se’n deriven: suposem un camp vectorial $\vec{A}(\vec{r})$ que serà el potencial vector del qual coneixem, com hem dit abans, les fonts de divergència i rotacional

$$\nabla_r \vec{A}(\vec{r}) = 0 \quad \text{i} \quad \nabla_r \times \vec{A}(\vec{r}) = \vec{B}(\vec{r})$$

aleshores:

$$\vec{A}(\vec{r}) = -\nabla_r \phi + \nabla_r \times \vec{F}(\vec{r})$$

amb

$$\phi = \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \frac{S(\vec{r}')}{R} dv' = 0$$

per tal com les fonts $S(\vec{r}')$ de divergència per al potencial vector són 0.

D'altra banda,

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{B}(\vec{r}')}{R} dv'$$

ja que les fonts de rotacional són el camp magnètic.

Així, el potencial vector és:

$$\vec{A}(\vec{r}) = 0 + \nabla_r \times \vec{F}(\vec{r})$$

Vegem el desenvolupament del rotacional $\vec{F}(\vec{r})$:

$$\nabla_r \times \vec{F}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \nabla_r \times \left(\frac{\vec{B}(\vec{r}')}{R} \right) dv'$$

$$\nabla_r \times \left(\frac{\vec{B}(\vec{r}')}{R} \right) = \left(\frac{1}{R} \right) \nabla_r \times \vec{B}(\vec{r}') - \vec{B}(\vec{r}') \times \nabla_r \left(\frac{1}{R} \right) = \vec{B}(\vec{r}') \times \left(\frac{\vec{R}}{R^3} \right)$$

cosa que ens permet obtenir una altra expressió per al potencial vector

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \left(\frac{\vec{B}(\vec{r}') \times \vec{R}}{R^3} \right) dv'$$

Podríem haver escrit aquesta equació només considerant el paral·lelisme, entre les equacions de camp de què parlàvem abans:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \left(\frac{\vec{J}(\vec{r}') \times \vec{R}}{R^3} \right) dv' \leftrightarrow \nabla_r \times \vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \vec{J}(\vec{r})$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \left(\frac{\vec{B}(\vec{r}') \times \vec{R}}{R^3} \right) dv' \leftrightarrow \nabla_r \times \vec{A}(\vec{r}) = \vec{B}(\vec{r})$$

El potencial vector també satisfà l'equació de Poisson vectorial. En efecte,

$$\nabla_r \times \vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \vec{J}(\vec{r})$$

$$\nabla_r \times \nabla_r \times \vec{A}(\vec{r}) = \nabla_r \left(\nabla_r \cdot \vec{A}(\vec{r}) \right) - \nabla_r^2 \vec{A}(\vec{r}) = -\nabla_r^2 \vec{A}(\vec{r}) = \mu_0 \vec{J}(\vec{r})$$

$$\nabla_r^2 \vec{A}(\vec{r}) = -\mu_0 \vec{J}(\vec{r})$$

en actuar sobre un camp vectorial, aquest laplaciana implica, en coordenades cartesianes, tres equacions, una per a cada component.⁵³

⁵³ En l'Annex hi ha les expressions del laplaciana d'un camp vectorial en coordenades esfèriques i cilíndriques.

Per acabar, podem veure les formes integrals del potencial vector derivades de les equacions diferencials de la divergència i el rotacional. Així, de

$$\nabla \vec{A}(\vec{r}) = 0$$

tenim:

$$\oint \vec{A} d\vec{S} = 0$$

i, a partir del rotacional, obtenim:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \nabla_r \times \vec{A}(\vec{r})$$

$$\int_{s.o.} (\nabla \times \vec{A}) d\vec{S} = \oint_c \vec{A} d\vec{l} = \int_{s.o.} \vec{B} d\vec{S}$$

Vegem-ne alguns exemples.

- Demostreu que el potencial vector que crea una espira de radi a recorreguda per un corrent i , situat en el pla x, y , centrat en l'origen, en punt propers a l'eix z és:

$$\vec{A}(z, \Delta\rho) = \frac{\mu_0 i a^2 \Delta\rho}{4(z^2 + a^2)^{3/2}} \vec{u}_\varphi$$

on $\Delta\rho$ és la distància a l'eix del punt en què calculem el potencial vector.

- Obtingueu el potencial vector corresponent a un camp uniforme i a un corrent filiforme rectilini indefinit.
- En el cas estudiat en l'apartat anterior del conductor cilíndric indefinit, demostreu que el potencial vector per a punts molt allunyats del conductor pot aproximar-se per:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 i}{2\pi(b^2 - a^2)} \left[a^2 \ln(\sqrt{x^2 + (y - d)^2}) - b^2 \ln(\sqrt{x^2 + y^2}) \right] \vec{u}_z$$

Bibliografia per a l'apartat 5.5

Griffiths, David J., L5.

Feynman, Richard, Leighton, Robert B. & Sands, Matthew, L14 i L15.

5.6. La força de Lorentz. Moviment de càrregues

Suposem una càrrega puntual q que es desplaça amb velocitat $\vec{v}$ en presència d'un camp elèctric $\vec{E}$ i un camp magnètic $\vec{B}$. La força total que fan aquests camps sobre la càrrega és

$$\vec{F} = q\vec{E} + q(\vec{v} \times \vec{B})$$

on q és la càrrega elèctrica de la partícula $\vec{E}$ és el camp elèctric, $\vec{v}$ és la velocitat de la càrrega q i $\vec{B}$ és el camp magnètic. Es tracta de la coneguda com a força de Lorentz, una llei experimental que, juntament amb les equacions de Maxwell, permet definir la interacció del camp electromagnètic.

Aquesta llei experimental és perfectament coherent amb les equacions vistes per al camp magnètic. En efecte, a l'apartat 5.3 trobem que

$$\vec{F} = \int_{V'} (\vec{J} \times \vec{B}) dv'$$

Si tenim en compte que la densitat de corrent es pot expressar com:

$$\vec{J} = \rho \vec{v}$$

podem escriure que

$$\vec{F} = \int_{V'} (\rho \vec{v} \times \vec{B}) dv'$$

expressió que, en el cas d'una càrrega puntual, ens porta a l'equació de la força de Lorentz pel que fa al camp magnètic,

$$\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$$

i, en cas d'una densitat de càrrega, ens permet definir una força per unitat de volum:

$$\vec{f} = \rho(\vec{v} \times \vec{B})$$

En tots dos casos, haurem d'afegir-hi la força deguda al camp elèctric i la força per unitat de volum serà:

$$\vec{f} = \rho(\vec{E} + (\vec{v} \times \vec{B})) = \rho\vec{E} + \rho(\vec{v} \times \vec{B})$$

La força de Lorentz és una manifestació directa de com les càrregues elèctriques interactuen amb el camp electromagnètic i és essencial per a comprendre la dinàmica de partícules en física i en diverses aplicacions tecnològiques. És responsable de fenòmens com la desviació de partícules carregades en acceleradors de partícules, en tubs de raigs catòdics, o en l'espai, així com en el funcionament dels motors elèctrics i generadors, en física de plasmes o en la formació d'aurores en l'atmosfera terrestre.

Quan una partícula carregada es troba en repòs, només el camp elèctric exerceix força sobre aquesta. En canvi, quan la partícula es mou, el camp magnètic genera una força perpendicular tant a la direcció del moviment com a la direcció del camp magnètic, cosa que dona com a resultat un moviment circular o helicoidal, depenent de les condicions.

Com a complement de l'apartat considerem la situació següent:

- Un cable conductor rígid, de longitud L , gira al voltant d'un dels extrems amb velocitat angular ω . Analitzeu el moviment de càrregues en el cable i els possibles efectes que té.

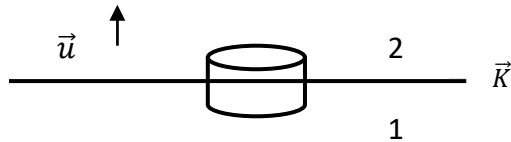
Bibliografia per a l'apartat 5.6

Griffiths, David J., L5 i L10.

5.7. Contingut complementari

5.7.1. Comportament del camp magnètic en travessar una superfície per on circula una densitat de corrent superficial

Per aplicació del teorema de Gauss a un cilindre menut amb les parets laterals perpendiculars a la superfície, tindrem:



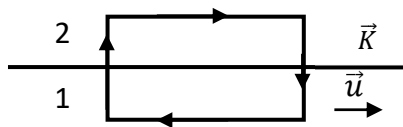
$$\oint_{S'} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

Si disminuïm l'alçada del cilindre de manera que siga negligible el flux a través de la superfície lateral, és immediat demostrar que

$$B_{n,2} - B_{n,1} = 0$$

on $B_{n,i}$ són les components normals del camp.

D'altra banda, si apliquem el teorema d'Ampère al llaç dibuixat en què la densitat de corrent apunta cap a dins del paper, formant, si escau, un cert angle amb la perpendicular a la superfície que defineix el llaç, obtindrem:



$$\int_{S'} \nabla \times \vec{B} \cdot d\vec{S} = \mu_0 I_e$$

Si el llaç *ampereà* està molt proper al pla, la contribució, si n'hi haguera, de la integral de línia dels costats laterals serà nul·la i només ens queda la contribució dels components tangencials, i el corrent superficial; per tant:

$$B_{t,2} - B_{t,1} = \mu_0 K \cos\theta$$

sent θ l'angle que forma $\vec{K}$ amb la normal a la superfície plana que defineix el llaç.

5.7.2. Comportament del potencial vector en travessar una superfície per on circula una densitat de corrent superficial

Les equacions que satisfà el potencial vector en el cas estacionari són:

$$\nabla \vec{A} = 0$$

$$\nabla \times \vec{A} = \vec{B}$$

Apliquem la primera equació a un cilindre, d'una manera semblant al que s'ha fet amb el camp magnètic, i fem que aquest cilindre siga molt menut, de manera que es pugui negligir el flux a través de la superfície lateral. Com que el flux total és 0, això implica la continuïtat de les components normals del potencial vector:

$$\oint_{S'} \vec{A} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$A_{n,2} - A_{n,1} = 0$$

Si ara considerem l'equació del rotacional

$$\nabla \times \vec{A} = \vec{B}$$

o, de manera equivalent, en forma integral:

$$\int_{S'} \nabla \times \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_{S'} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

i analitzem aquesta equació en un *llaç ampereà* igual al rectangle emprat en l'apartat anterior, fent que els costats laterals presenten una longitud negligible. El flux del camp magnètic serà nul i, en conseqüència, les components tangencials del potencial vector també seran contínues:

$$A_{t,2} - A_{t,1} = 0$$

Bibliografia de la lliçó 5

Costa Quintana, Joan & López Aguilar, Fernando, *Interacción Electromagnética. Teoría Clásica*. Reverté, 2007.

Feynman, Richard, Leighton, Robert B. & Sands, Matthew, *Física vol. II: Electromagnetismo y Materia*. Addison-Wesley Iberoamericana, 1987.

Griffiths, David J., *Introduction to Electrodynamics*. Prentice Hall, 1989.

Jackson, John David, *Electrodinámica clásica*. Pearson Alhambra, 2a edició, 1980.

Panofsky, Wolfgang K.H. & Phillips, Melba, *Classical Electricity and Magnetism*, Dover Addison-Wesley Publishing Company Inc., Series in Advanced Physics, 2a edició, 1962.

Reitz, John R., Milford, Frederick J. & Christy, Robert W., *Fundamentos de la Teoría Electromagnética*. Addison-Wesley Iberoamericana, 4a edició, 1996.

Lliçó 6

Desenvolupament multipolar del potencial vector

6.1. Introducció

6.2. Desenvolupament multipolar del potencial vector

6.3. Potencial i camp d'un dipol magnètic

6.4. Distribucions de dipols magnètics

6.5. Contingut complementari

Bibliografia general

Griffiths, David J., L5.

Costa Quintana, Joan & López Aguilar, Fernando, L5.

Textos avançats:

Panofsky, Wolfgang K. H. & Phillips, Melba, L7 i L8.

Jackson, John David, L5.

- Després de cada apartat s'indica la bibliografia específica i les lectures recomanades.
- Al final de la lliçó s'inclouen les referències bibliogràfiques completes.

Lliçó 6:

Desenvolupament multipolar del potencial vector

6.1. Introducció

En l'estudi de l'electromagnetisme, el potencial vector és una eina fonamental per a obtenir els camps magnètics generats per distribucions de corrent. Quan s'analitza la radiació electromagnètica o els camps a grans distàncies de les fonts, resulta molt útil expressar el potencial vector com una sèrie de termes que reflecteixen diferents simetries espacials, coneguts com a termes multipolars.

El desenvolupament multipolar del potencial vector consisteix a descompondre aquest potencial en una suma de contribucions amb ordre creixent: dipolar, quadripolar, octopolar, etc. Aquesta expansió no sols simplifica l'anàlisi matemàtica, sinó que també ajuda a entendre com diferents configuracions de corrents produeixen diferents patrons de radiació i camps electromagnètics.

Aquest enfocament és essencial per a abordar problemes complexos en Física i Enginyeria, com ara el disseny d'antenes, l'anàlisi de radiació de sistemes elèctrics o l'estudi d'interaccions a distància. A més, el desenvolupament multipolar proporciona una base sòlida per a comprendre com es propaguen les ones electromagnètiques i com es poden aproximar els camps lluny de les seues fonts.

En aquesta lliçó, explorarem les bases matemàtiques del desenvolupament multipolar, de manera similar a com ho hem fet amb el desenvolupament multipolar del potencial elèctric en Electroestàtica. Definirem el concepte de *dipol magnètic puntual* i derivarem el camp magnètic associat. Així mateix, desenvoluparem la formulació vàlida per a analitzar els camps i potencials magnètics associats a les densitats de moment magnètic.

Bibliografia per a l'apartat 6.1

Reitz, John R., Milford, Frederick J. & Christy, Robert W., L7, L8 i L9.

Feynman, Richard, Leighton, Robert B. & Sands, Matthew, L13, L14 i L15.

6.2. Desenvolupament multipolar del potencial vector

Tant en l'expressió obtinguda per al potencial vector associat a una densitat de corrent,

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \left(\frac{\vec{J}(\vec{r}')}{R} \right) dv'$$

com en el seu equivalent per a corrents estacionaris filiformes,

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} i \oint_C \left(\frac{d\vec{l}}{R} \right)$$

tenim una dependència en $\frac{1}{R}$ que podem treballar d'una manera semblant a com vam fer amb el potencial electroestàtic, fent el desenvolupament en sèrie de potències corresponent:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r} \right)^n P_n(\cos\theta)$$

Per tant, el potencial vector es pot expressar com:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} i \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{r^{n+1}} \right) \oint_C r'^n P_n(\cos\theta) d\vec{l}$$

Podem veure els primers termes i obtenir els anomenats multipols magnètics: terme monopolar, dipolar, quadripolar, etc.⁵⁴

Terme monopolar $n=0$. Tenint en compte que $d\vec{l} = d\vec{r}'$,

⁵⁴ L'expressió del terme quadripolar és més complexa que en el cas del potencial escalar, i no l'estudiarem ací en detall. No obstant això, els elements de la matriu del moment quadripolar estan definits per:

$$Q_{ij} = \frac{1}{2} \int_V \left[x'_i \left(\vec{r}' x'_j \vec{J}(\vec{r}') \right)_j + x'_j \left(\vec{r}' x'_i \vec{J}(\vec{r}') \right)_i \right] dv$$

I la component i -èsima del potencial vector associat seria:

$$A_i = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r^3} Q_{ij} n_j \quad \left(n_j = \frac{x_j}{r} \right)$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{1}{r} \oint_C 1 \cdot 1 d\vec{r}' = 0$$

com era esperable, atesa la ben coneguda absència de monopols magnètics.

Terme dipolar, per a $n=1$. Trobem ara el terme dipolar:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{1}{r^2} \oint_C r' \cos\theta d\vec{l} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{1}{r^3} \oint_C (\vec{r} \vec{r}') d\vec{r}'$$

D'altra banda,

$$d[(\vec{r} \vec{r}') \vec{r}'] = (\vec{r} d\vec{r}') \vec{r}' + (\vec{r} \vec{r}') d\vec{r}'$$

a més,

$$\oint d[(\vec{r} \vec{r}') \vec{r}'] = 0$$

per tant:

$$\oint (\vec{r} d\vec{r}') \vec{r}' = - \oint (\vec{r} \vec{r}') d\vec{r}'$$

Si, addicionalment, tenim en compte que

$$\oint \vec{r} \times (\vec{r}' \times d\vec{r}') = \vec{r} \times \oint (\vec{r}' \times d\vec{r}') = \oint (\vec{r} d\vec{r}') \vec{r}' - \oint (\vec{r} \vec{r}') d\vec{r}'$$

podem establir que

$$\vec{r} \times \oint (\vec{r}' \times d\vec{r}') = - 2 \oint (\vec{r} \vec{r}') d\vec{r}'$$

d'on es conclou que

$$- \frac{1}{2} \vec{r} \times \oint (\vec{r}' \times d\vec{r}') = - \frac{1}{2} \vec{r} \times \oint (\vec{r}' \times d\vec{l}) = \oint (\vec{r} \vec{r}') d\vec{r}' = \oint (\vec{r} \vec{r}') d\vec{l}$$

Recapitulant:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{1}{r^3} \oint_C (\vec{r} \vec{r}') d\vec{r}' = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{1}{r^3} \left[-\frac{1}{2} \vec{r} \times \oint_C (\vec{r}' \times d\vec{l}) \right]$$

i així podem definir una nova entitat: el moment dipolar magnètic d'un circuit filiforme, com ara

$$\vec{m} = \frac{i}{2} \oint_C (\vec{r}' \times d\vec{l})$$

a partir del qual el potencial magnètic és:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} [\vec{m} \times \vec{r}]$$

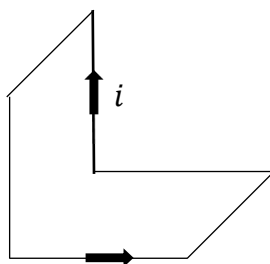
Si l'espina (circuit) és plana,

$$d\vec{S} = \frac{1}{2} (\vec{r}' \times d\vec{l})$$

i per això

$$\vec{m} = \frac{i}{2} \oint_C d\vec{S}' = i \vec{S}$$

Si l'espina no és plana, s'haurà de fer la integral o bé cercar les regions planes i fer una superposició.

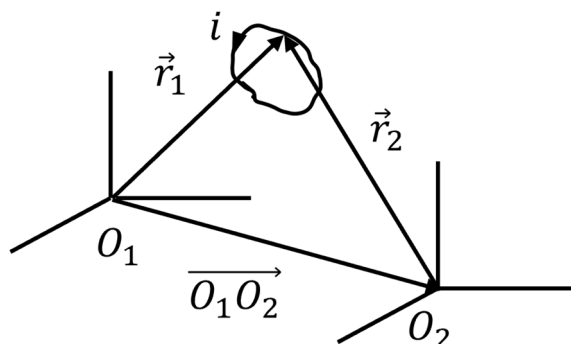


➤ Siga l'espina de la figura recorreguda per un corrent i en el sentit marcat en la figura. Els costats són a i $2a$. Demostreu per superposició quant val el moment dipolar d'aquest circuit.

La definició de moment dipolar es pot generalitzar a una distribució de corrents

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \oint_C (\vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}')) dv'$$

Atesa l'absència de moment monopolar, podem intuir que el moment dipolar no dependrà de l'origen. Vegem-ho:



$$\begin{aligned}\vec{m}_1 &= \frac{i}{2} \oint (\vec{r}_1 \times d\vec{l}) = \\ \frac{i}{2} \oint (\overrightarrow{O_1 O_2} \times d\vec{l}) + \frac{i}{2} \oint (\vec{r}_2 \times d\vec{l}) &= \\ \frac{i}{2} \overrightarrow{O_1 O_2} \times \oint d\vec{l} + \vec{m}_2 &= \vec{m}_2\end{aligned}$$

Si en comptes d'una densitat de corrent en volum, tinguérem una densitat de corrent superficial, el moment dipolar seria:

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \oint (\vec{r}' \times \vec{K}(\vec{r}')) dS'$$

Fins i tot una càrrega amb moviment circular de radi r que podem modelitzar com un corrent:

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{q}{2\pi/\omega} = \frac{q v}{2\pi r}$$

tindrà un moment dipolar associat,

$$\begin{aligned}\vec{m} &= \frac{i}{2} \oint (\vec{r}' \times d\vec{l}) = \frac{1}{2} \oint \frac{q v}{2\pi r} (\vec{r}' \times d\vec{l}) = \\ \frac{1}{2} \frac{q}{2\pi r} \oint (\vec{r}' \times \vec{v}) dl &= \frac{1}{2} \frac{q}{2\pi r} (\vec{r}' \times \vec{v}) \oint dl = \frac{1}{2} \frac{q}{2\pi r} (\vec{r}' \times \vec{v}) 2\pi r = \\ &= \frac{1}{2} q (\vec{r}' \times \vec{v})\end{aligned}$$

Com a aplicació del contingut d'aquest apartat, es poden fer els exercicis següents:

- Demostreu que el potencial vector produït pel corrent que circula per una espira circular de radi a , en punts en què pugui ser vàlida l'aproximació dipolar, suposant que l'espira té

el centre en l'eix z de un sistema de referencia cartesià, pot expressar-se en coordenades cilíndriques com:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 i a^2}{4} \frac{\rho}{(z^2 + \rho^2)^{3/2}} \vec{u}_\phi$$

- Un disc de radi a carregat amb una càrrega q repartida uniformement en la seua superfície gira al voltant del seu eix amb velocitat angular ω . Demostreu que el moment dipolar magnètic del disc i el camp magnètic en qualsevol punt de l'espai, en coordenades esfèriques, utilitzant l'aproximació dipolar, són

$$\vec{m} = \frac{\pi \sigma \omega a^4}{4} \vec{u}_z$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\pi \sigma \omega a^4}{4} \frac{2 \cos \theta \vec{u}_r + \sin \theta \vec{u}_\theta}{r^3}$$

- Siguen dos discos paral·lels coaxials de radis a i b ($a > b$) que tenen càrregues $+q$ i $-q$ repartides uniformement en la seua superfície. La separació entre els discos és h i estan girant al voltant de l'eix que passa pels seus centres amb velocitat angular constant ω . Demostreu que el moment dipolar magnètic és

$$\vec{m} = \frac{q \omega}{4} (a^2 - b^2) \vec{u}_z$$

Bibliografia per a l'apartat 6.2

Griffiths, David J., L5.

Costa Quintana, Joan & López Aguilar, Fernando, L5.

Reitz, John R., Milford, Frederick J. & Christy, Robert W., L8.

6.3. Dipol magnètic puntual

Com acabem de veure, el dipol magnètic té un potencial vector associat

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} [\vec{m} \times \vec{r}]$$

A partir d'aquest potencial vector, podem calcular el camp magnètic que pot no estar en l'origen del sistema de referència i, per tant, la distància que ens interessarà serà la distància al dipol, cosa que ens porta a

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{R^3} [\vec{m} \times \vec{R}] \text{ on } \vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$$

Per a obtenir el camp $\vec{B}(\vec{r})$, haurem de calcular el rotacional

$$\vec{B}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{A}(\vec{r}) = \nabla \times \left\{ \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{R^3} [\vec{m} \times \vec{R}] \right\}$$

Considerant que

$$\nabla \times \left\{ \frac{1}{R^3} [\vec{m} \times \vec{R}] \right\} = \left(\frac{\vec{R}}{R^3} \nabla_r \right) \vec{m}(\vec{r}') - (\nabla_r \vec{m}(\vec{r}')) \frac{\vec{R}}{R^3} - (\vec{m}(\vec{r}') \nabla_r) \frac{\vec{R}}{R^3} + \vec{m}(\vec{r}') \nabla_r \left(\frac{\vec{R}}{R^3} \right)$$

tenim:

$$\nabla \times \left\{ \frac{1}{R^3} [\vec{m} \times \vec{R}] \right\} = -(\vec{m}(\vec{r}') \nabla_r) \frac{\vec{R}}{R^3} + \vec{m}(\vec{r}') \nabla_r \left(\frac{\vec{R}}{R^3} \right)$$

El segon sumand té la mateixa estructura que l'obtinguda en l'apartat 3.3 per al dipol elèctric⁵⁵ i, per tant, operant de manera similar, obtindrem, per a $\vec{R} \neq 0$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{m} \vec{R})\vec{R} - R^2 \vec{m}}{R^5}$$

Formalment, ens quedaria la situació $\vec{R} = 0$, que podem abordar com en el cas electroestàtic per a obtenir⁵⁶

$$\vec{B}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{m} \vec{R})\vec{R} - R^2 \vec{m}}{R^5} + \frac{2}{3} \mu_0 \vec{m} \delta(\vec{R})$$

⁵⁵ $\nabla \left(\frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} \right) = \vec{p} \times \left(\nabla \times \frac{\vec{r}}{r^3} \right) + \frac{\vec{r}}{r^3} \times (\nabla \times \vec{p}) + \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \nabla \right) \vec{p} + (\vec{p} \nabla) \frac{\vec{r}}{r^3} = 0 + 0 + 0 + (\vec{p} \nabla) \frac{\vec{r}}{r^3}$

⁵⁶ Vegeu el contingut complementari de l'apartat 6.5.2.

Una idealització semblant a la realitzada amb el camp elèctric és la de considerar un ens que no té dimensions, el dipol magnètic puntual, i que ve caracteritzat pel seu moment dipolar $\vec{m}$, entitat per a la qual tant el camp magnètic com el potencial són donats de manera exacta (ja que tots els punts estan allunyats) per:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} [\vec{m} \times \vec{r}]$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2\vec{m}}{r^5}$$

Bibliografia per a l'apartat 6.3

Costa Quintana, Joan & López Aguilar, Fernando, L5.

Reitz, John R., Milford, Frederick J. & Christy, Robert W., L8.

6.4. Distribucions de dipols magnètics

En magnetoestàtica, en tots els punts on no hi ha corrents, tenim que el camp magnètic és irrotacional:

$$\nabla \times \vec{B}(\vec{r}) = 0$$

En aquest cas, el camp es pot obtenir a partir d'un potencial escalar: el potencial escalar magnètic, com ja havíem introduït en la lliçó 5 (apartat 5.3.2).

$$\vec{B}(\vec{r}) = -\mu_0 \nabla \phi_m$$

6.4.1. Potencial escalar associat a un dipol magnètic puntual

El potencial escalar associat amb un dipol magnètic puntual serà:

$$\phi_m = \frac{\vec{m} \cdot \vec{R}}{4\pi R^3}$$

i el seu gradient serà:

$$\nabla \phi_m(\vec{r}) = \nabla_r \left(\frac{\vec{m}(\vec{r}') \cdot \vec{R}}{4\pi R^3} \right) = \frac{1}{4\pi} \left[\vec{m}(\vec{r}') \times \left(\nabla_r \times \frac{\vec{R}}{R^3} \right) + \frac{\vec{R}}{R^3} \times (\nabla_r \times \vec{m}(\vec{r}')) + (\vec{m}(\vec{r}') \cdot \nabla_r) \frac{\vec{R}}{R^3} + \left(\frac{\vec{R}}{R^3} \cdot \nabla_r \right) \vec{m}(\vec{r}') \right] = \frac{1}{4\pi} (\vec{m}(\vec{r}') \cdot \nabla_r) \frac{\vec{R}}{R^3}$$

que és el mateix que obteníem en l'estudi de $\nabla \times \vec{A}(\vec{r})$, corresponent a un dipol magnètic, però canviat de signe.⁵⁷

Així doncs,

$$\nabla \phi_m(\vec{r}) = \nabla_r \left(\frac{\vec{m}(\vec{r}') \cdot \vec{R}}{4\pi R^3} \right) = \frac{1}{4\pi} (\vec{m}(\vec{r}') \cdot \nabla_r) \frac{\vec{R}}{R^3} = -\frac{1}{4\pi} \nabla_r \left\{ \frac{1}{R^3} [\vec{m} \times \vec{R}] \right\} = -\frac{1}{\mu_0} \nabla_r \times \vec{A}(\vec{r})$$

Això corrobora que, en multiplicar aquest gradient per $-\mu_0$, donarà el camp magnètic correcte.

6.4.2. Densitats de corrent equivalents a la magnetització

De la mateixa manera com hem definit les densitats de càrrega equivalents a la polarització elèctrica en l'apartat 3.4, estem ara en condicions de definir les densitats de corrent equivalents a la magnetització. Una distribució contínua de moments dipolars magnètics $\vec{m}$ genera un camp magnètic que es pot tractar mitjançant una densitat de moment dipolar $\vec{M}$. Aquest enfocament és molt útil per a descriure materials magnètics en el marc de la magnetització

$$\vec{M} = \frac{d\vec{m}}{dv}$$

i definir el potencial escalar magnètic associat.

Vegem-ho:

$$d\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{R^3} [d\vec{m} \times \vec{R}]$$

⁵⁷ Vegeu l'apartat 6.3, $\nabla_r \left\{ \frac{1}{R^3} [\vec{m} \times \vec{R}] \right\} = -(\vec{m}(\vec{r}') \cdot \nabla_r) \frac{\vec{R}}{R^3} + \vec{m}(\vec{r}') \cdot \nabla_r \left(\frac{\vec{R}}{R^3} \right)$.

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{1}{R^3} [d\vec{m}(\vec{r}') \times \vec{R}] dv' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{1}{R^3} [\vec{M}(\vec{r}') \times \vec{R}] dv' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \left[\vec{M}(\vec{r}') \times \nabla_{r'} \left(\frac{1}{R} \right) \right] dv'\end{aligned}$$

Si considerem que

$$\nabla_{r'} \times \left[\frac{\vec{M}(\vec{r}')}{R} \right] = \nabla_{r'} \left(\frac{1}{R} \right) \times \vec{M}(\vec{r}') + \frac{1}{R} \nabla_{r'} \times \vec{M}(\vec{r}')$$

podem escriure

$$\vec{M}(\vec{r}') \times \nabla_{r'} \left(\frac{1}{R} \right) = -\nabla_{r'} \times \left[\frac{\vec{M}(\vec{r}')}{R} \right] + \frac{1}{R} \nabla_{r'} \times \vec{M}(\vec{r}')$$

Substituint en l'expressió del potencial vector $\vec{A}(\vec{r})$:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \left[\vec{M}(\vec{r}') \times \nabla_{r'} \left(\frac{1}{R} \right) \right] dv' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \left\{ -\nabla_{r'} \times \left[\frac{\vec{M}(\vec{r}')}{R} \right] + \frac{1}{R} \nabla_{r'} \times \vec{M}(\vec{r}') \right\} dv'$$

i considerant la igualtat:⁵⁸

$$\int_{V'} [\nabla \times \vec{F}] dv' = - \oint_{S'} [\vec{F} \times \vec{n}] dS'$$

de manera que

$$\int_{V'} \left\{ -\nabla_{r'} \times \left[\frac{\vec{M}(\vec{r}')}{R} \right] \right\} dv' = \oint_{S'} \left\{ \left[\frac{\vec{M}(\vec{r}')}{R} \right] \times \vec{n} \right\} dS' = \oint_{S'} \left\{ \left[\frac{\vec{M}(\vec{r}') \times \vec{n}}{R} \right] \right\} dS'$$

podem definir unes densitats de corrent superficial i volúmic equivalents a la magnetització:

$$\vec{K}_m = \vec{M} \times \vec{n} \quad \text{i} \quad \vec{J}_m = \nabla_{r'} \times \vec{M}(\vec{r}')$$

⁵⁸ Vegeu demostració en l'apartat 6.5.1.

on $\vec{n}$ és la normal exterior a la superfície i, per tant,

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{S'} \frac{\vec{K}_m}{R} dS' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{J}_m}{R} dv'$$

Aquestes densitats de corrent equivalents també s'anomenen corrents aparents en contraposició amb els corrents lliures. La suma d'aquests corrents aparents és 0, ja que no n'hi ha, com demostrarem a continuació.

Demostració:

$$\oint_{S'} \vec{K}_m dS' + \int_{V'} \vec{J}_m dv' = \oint_{S'} (\vec{M} \times \vec{n}) dS' + \int_{V'} (\nabla_{r'} \times \vec{M}(\vec{r}')) dv'$$

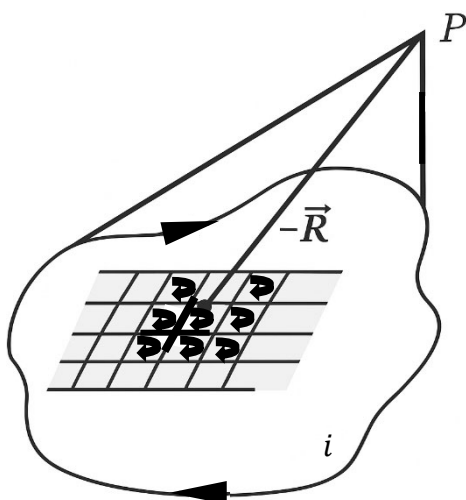
tenint en compte el que hem demostrat de forma general en l'apartat 6.5.1,

$$-\oint_{S'} [\vec{M} \times \vec{n}] dS' = \int_{V'} [\nabla \times \vec{M}] dv'$$

queda demostrat que la suma dels corrents aparents serà zero, com ja havíem avançat.

6.4.3. Potencial escalar magnètic associat a un circuit

Siga un circuit definit per una corba tancada i el descomponem en elements de superfície segons es veu en la figura següent:



Podem imaginar aquestes superfícies infinitesimals com a definides per un circuit infinitesimal recorregut per un corrent de manera que defineixen un conjunt de dipols elementals $d\vec{m} = i d\vec{S}$.

El potencial escalar associat serà:

$$d\phi_m(\vec{r}) = \left(\frac{d\vec{m}(\vec{r}') \cdot \vec{R}}{4\pi R^3} \right)$$

que, integrat, ens donarà el potencial escalar magnètic associat al circuit:

$$\phi_m(\vec{r}) = \frac{i}{4\pi} \int_{S'} \frac{d\vec{S}'(\vec{r}') \vec{R}}{R^3}$$

6.4.4. Densitats fictícies de càrrega magnètica equivalent a la magnetització

Si tinguérem una distribució de dipols $\vec{M}$ per unitat de volum, el potencial escalar magnètic seria:

$$\phi_m(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \frac{d\vec{m}(\vec{r}') \vec{R}}{R^3} = \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{M}(\vec{r}') \vec{R}}{R^3} dv'$$

Cal assenyalar que aquesta equació és aplicable per a punts externs a V' , donat que només allí està definit el potencial escalar, per a la definició del qual es requereix que el rotacional del camp magnètic siga 0, o, cosa que és igual, que no hi haja corrents.

Desenvolupant una mica més l'equació anterior,

$$\phi_m(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{M}(\vec{r}') \vec{R}}{R^3} dv' = \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \vec{M}(\vec{r}') \nabla_{r'} \left(\frac{1}{R} \right) dv'$$

i recordant que

$$\nabla_{r'} \left(\frac{\vec{M}(\vec{r}')}{R} \right) = \nabla_{r'} \left(\frac{1}{R} \right) \vec{M}(\vec{r}') + \left(\frac{1}{R} \right) \nabla_{r'} \vec{M}(\vec{r}')$$

podem reescriure el potencial escalar magnètic com:

$$\phi_m(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \nabla_{r'} \left(\frac{\vec{M}(\vec{r}')}{R} \right) dv' + \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \left(\frac{(-\nabla_{r'} \vec{M}(\vec{r}'))}{R} \right) dv'$$

$$\phi_m(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \oint_{S'} \left(\frac{\vec{M}(\vec{r}')}{R} \right) d\vec{S}' - \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \left(\frac{(\nabla_{r'} \vec{M}(\vec{r}'))}{R} \right) dv'$$

i podem definir unes densitats fictícies de càrrega magnètica en volum i en superfície:

$$\rho_m(\vec{r}') = -\nabla_{r'} \cdot \vec{M}(\vec{r}')$$

$$\sigma_m(\vec{r}') = \vec{M}(\vec{r}') \cdot \vec{n}(\vec{r}')$$

sent el $\vec{n}$ vector normal exterior a la superfície a cada punt.

Òbviament, la suma d'aquestes densitats de càrrega magnètica fictícia ha de ser nul·la, com podem demostrar per aplicació del teorema de la divergència:

$$\oint_{S'} \sigma_m dS' + \int_{V'} \rho_m dv' = \oint_{S'} [\vec{M}(\vec{r}') \cdot \vec{n}(\vec{r}')] dS' + \int_{V'} -\nabla_{r'} \cdot \vec{M}(\vec{r}') dv' =$$

$$\oint_{S'} [\vec{M}(\vec{r}') \cdot d\vec{S}'] + \oint_{S'} -[\vec{M}(\vec{r}') \cdot d\vec{S}'] = 0$$

Com a final d'aquest apartat,

- Calculeu el valor del potencial escalar magnètic produït pel corrent que circula per una espira circular de radi a . Obtingueu el camp magnètic a partir d'aquest potencial escalar i compareu el resultat amb el que s'obtindria utilitzant el potencial vector per a punts on és vàlida l'aproximació dipolar, expressat en coordenades cilíndriques com:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 i a^2}{4} \frac{\rho}{(z^2 + \rho^2)^{3/2}} \vec{u}_\phi$$

- Dins d'un cilindre de radi a i altura h , hi ha una distribució de dipols magnètics amb densitat $\vec{M}$ uniforme. Obtingueu el potencial vector en dues situacions: suposant que $\vec{M}$ és paral·lel a l'eix del cilindre i suposant que $\vec{M}$ és perpendicular a aquest eix.
- En el cilindre anterior, determineu les densitats de càrrega magnètica equivalent a la magnetització i discutiu-ne el resultat.

Bibliografia per a l'apartat 6.4

Griffiths, David J., L5.

Reitz, John R., Milford, Frederick J. & Christy, Robert W., L8 i L9.

6.5. Contingut complementari

6.5.1. Demostració de la relació entre el rotacional d'un camp $\vec{F}(\vec{r}')$ en un volum tancat i la integral de $\vec{n} \times \vec{F}(\vec{r}')$ sobre la superfície que envolta el volum

En aquest apartat, pretenem demostrar que

$$\int_V \nabla \times \vec{F}(\vec{r}') dv = \oint_S (\vec{n} \times \vec{F}(\vec{r}')) dS$$

on $\vec{F}(\vec{r})$ és un camp vectorial definit en V i $\vec{n}$ és el vector normal a la superfície a cada punt d'aquesta.

Siga la component z del rotacional

$$(\nabla \times \vec{F})_z = \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}$$

Definim un camp vectorial $\vec{G} = F_y \vec{u}_x + F_x \vec{u}_y$

$$\nabla \cdot \vec{G} = \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}$$

i, si apliquem el teorema de Gauss,

$$\begin{aligned} \int_V \nabla \cdot \vec{G} dv &= \int_V (\nabla \times \vec{F})_z dv = \oint_S \vec{G} \cdot d\vec{S} = \\ \oint_S \vec{G} \cdot \vec{n} dS &= \oint_S (n_x F_y - n_y F_x) dS = \oint_S (\vec{n} \times \vec{F})_z dS \end{aligned}$$

En resum,

$$\int_V (\nabla \times \vec{F})_z dv = \oint_S (\vec{n} \times \vec{F})_z dS$$

i, sumant les tres components del rotacional, obtenim:

$$\begin{aligned} \int_V (\nabla \times \vec{F}) dv &= \int_V \left\{ (\nabla \times \vec{F})_x \vec{u}_x + (\nabla \times \vec{F})_y \vec{u}_y + (\nabla \times \vec{F})_z \vec{u}_z \right\} dv = \\ &= \oint_S \left\{ (\vec{n} \times \vec{F})_x \vec{u}_x + (\vec{n} \times \vec{F})_y \vec{u}_y + (\vec{n} \times \vec{F})_z \vec{u}_z \right\} dS = \oint_S (\vec{n} \times \vec{F}) dS \end{aligned}$$

com volíem demostrar.

6.5.2 Integració del camp magnètic en un volum

Considerem la relació, demostrada en l'apartat 6.5.1 anterior,

$$\int_V \nabla \times \vec{F}(\vec{r}') dv' = \oint_S (\vec{n} \times \vec{F}(\vec{r}')) dS$$

Si ara apliquem la igualtat anterior al nostre problema d'estudiar la integral del camp magnètic dins d'un cert volum substituint el camp pel rotacional del potencial vector, tindrem:

$$\int_{V'} \vec{B} dv' = \int_{V'} \nabla \times \vec{A}(\vec{r}') dv'$$

$$\oint_{V'} \nabla \times \vec{A}(\vec{r}') dv' = \oint_{S'} (\vec{n} \times \vec{A}(\vec{r}')) dS'$$

$$\int_{V'} \vec{B} dv' = \int_{V'} \nabla \times \vec{A}(\vec{r}') dv' = \int_{S'} dS' (\vec{n} \times \vec{A}(\vec{r}')) = \int_{S'} dS' \left(\vec{n} \times \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \left(\frac{\vec{J}(\vec{r}')}{R} \right) dv' \right)$$

En cas que els corrents que generen $\vec{A}(\vec{r}')$ estiguen tots en V' , podem fixar un punt $\vec{r}'$ i integrar per a tota la superfície, i podem reescriure la integral com:

$$\int_{S'} dS' \left(\vec{n} \times \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{V'} \left(\frac{\vec{J}(\vec{r}')}{R} \right) dv' \right) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \vec{J}(\vec{r}') dv' \times \int_{S'} dS' \left(\frac{\vec{n}}{R} \right)$$

Si en la integral

$$\int_{S'} dS' \left(\frac{\vec{n}}{R} \right)$$

substituïm $\frac{1}{R}$ utilitzant la sèrie de polinomis de Legendre, podem demostrar que⁵⁹

$$\int_{S'} dS' \left(\frac{\vec{n}}{R} \right) = \frac{2}{3} \vec{r}' 2\pi$$

i, substituint en l'equació de volum,

$$\begin{aligned} -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \vec{J}(\vec{r}') dv' \times \frac{2}{3} \vec{r}' 2\pi &= -\frac{1}{3} \mu_0 \int_{V'} (\vec{J}(\vec{r}') \times \vec{r}') dv' = \\ \frac{2}{3} \mu_0 \left\{ \frac{1}{2} \int_{V'} (\vec{r}' \times \vec{J}(\vec{r}')) dv' \right\} &= \frac{2}{3} \mu_0 \vec{m} \end{aligned}$$

Ací tenim un resultat general en el sentit del valor de la integral

$$\int_{V'} \vec{B} dv' = \frac{2}{3} \mu_0 \left\{ \frac{1}{2} \int_{V'} (\vec{r}' \times \vec{J}(\vec{r}')) dv' \right\} = \frac{2}{3} \mu_0 \vec{m}$$

similarmet al que hem obtingut per al camp elèctric

$$\int_{V'} \vec{E} dv' = -\frac{1}{3\epsilon_0} \int_{V'} \rho(\vec{r}') dv' \vec{r}' = -\frac{\vec{p}}{3\epsilon_0}$$

En el cas de tenir un dipol en el volum d'integració, aquest resultat ens fa que el valor del camp, incloent-hi el punt en què està el dipol, siga

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{R})\vec{R} - R^2 \vec{m}}{R^5} + \frac{2}{3} \mu_0 \vec{m} \delta(\vec{R})$$

⁵⁹ Vegeu l'apartat 6.5.3 a continuació.

Si tota la distribució de corrents estiguera situada fora de l'esfera, el problema seria lleugerament diferent, com s'analitza en el text de Jackson.⁶⁰

6.5.3. Demostració del valor de $\int_S \frac{\vec{n} dS}{R}$ en la superfície d'una esfera

Si substituïm la integral $\frac{1}{R}$ pel seu valor en funció dels polinomis de Legendre,

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(\cos\theta)$$

tenim:

$$\begin{aligned} \int_S \frac{\vec{n} dS}{R} &= \int_S \vec{n} dS \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(\cos\theta) = \\ &= \int_S \{ [\cos\theta \vec{u}_z + \sin\theta (\cos\varphi \vec{u}_x + \sin\varphi \vec{u}_y)] a^2 \sin\theta d\theta d\varphi \} \frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{a}\right)^n P_n(\cos\theta) \end{aligned}$$

Per a resoldre la integral, fixem un punt $\vec{r}'$ en l'eix z , $\vec{r}' = r' \vec{u}_z$ (la qual cosa no restringeix la generalitat del resultat), per tal de poder utilitzar la parametrització usual en coordenades esfèriques, i tindrem que, quan fem la integral en φ , desapareixen les dependències en els eixos x i y , raó per la qual queda:

$$\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r'^n a^2}{a^{n+1}} P_n(\cos\theta) (-1) d(\cos\theta) \cos\theta \vec{u}_z$$

Tenint en compte que $\cos\theta = P_1(\cos\theta)$ i que els polinomis de Legendre són ortogonals:

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ \frac{2}{2n+1} & \text{si } m = n \end{cases}$$

aleshores, queda:

⁶⁰ Jackson, apartat 4.1 (p. 145).

$$\int_{\theta=\pi}^{\theta=0} \frac{1}{-1} 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r'^n a^2}{a^{n+1}} P_n(\cos\theta) d(\cos\theta) \cos\theta \vec{u}_z$$

$$\int_{\theta=\pi}^{\theta=0} \frac{1}{-1} 2\pi P_n P_1 \frac{r'^n a^2}{a^{n+1}} d(\cos\theta) \vec{u}_z = 2\pi \frac{2 r' a^2}{3 a^2} \vec{u}_z = 2\pi \frac{2 \vec{r}'}{3} = \int_s \frac{\vec{n} dS}{R}$$

6.5.4. Comportament del potencial escalar magnètic en travessar una superfície amb una densitat superficial de càrrega magnètica fictícia

El potencial escalar magnètic es defineix en regions on no hi ha corrents, però sí que podem tenir densitats de moment dipolar magnètic. A partir de les densitats fictícies de càrrega magnètica d'aquestes entitats, aquest potencial escalar es pot expressar com:

$$\phi_m(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \oint_{S'} \left(\frac{\sigma_m(\vec{r}')}{R} \right) dS' - \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \left(\frac{\rho_m(\vec{r}')}{R} \right) dv'$$

Suposem una superfície que separa dues regions, en la qual hi ha una densitat fictícia de càrrega magnètica $\sigma_m(\vec{r}')$. El potencial escalar magnètic als dos costats de la superfície serà:

$$\phi_m(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \oint_{S'} \left(\frac{\sigma_m(\vec{r}')}{R} \right) dS'$$

Si ens preguntem sobre la seua continuïtat o discontinuïtat en travessar aquesta superfície, no cal més que remetre's a les consideracions que ja es van fer respecte al potencial escalar elèctric (apartat 2.6.3), vist que la forma de l'equació és la mateixa. Per tant, podem afirmar que el potencial escalar magnètic serà continu en travessar aquesta superfície.

Bibliografia de la lliçó 6

Costa Quintana, Joan & López Aguilar, Fernando, *Interacción Electromagnética. Teoría Clásica*. Reverté, 2007.

Feynman, Richard, Leighton, Robert B. & Sands, Matthew. *Física vol. II: Electromagnetismo y Materia*. Addison-Wesley Iberoamericana, 1987.

Griffiths, David J. *Introduction to Electrodynamics*. Prentice Hall, 1989.

Jackson, John David, *Electrodinámica clásica*. Pearson Alhambra, 2a edició, 1980.

Panofsky, Wolfgang K.H. & Phillips, Melba, *Classical Electricity and Magnetism*. Dover Addison-Wesley Publishing Company Inc., Series in Advanced Physics, 2a edició, 1962.

Reitz, John R., Milford, Frederick J. & Christy, Robert W. *Fundamentos de la Teoría Electromagnética*. Addison-Wesley Iberoamericana, 4a edició, 1996.

Lliçó 7

Inducció electromagnètica

7.1. Introducció

7.2. La força electromotriu

7.3. Llei de Faraday de la inducció electromagnètica

7.4. Inducció en un circuit en moviment i en un circuit deformable

7.5. Coeficients d'inducció. Fórmula de Neumann

7.6 Contingut complementari

Bibliografia general

Griffiths, David J., L6.

Costa Quintana, Joan & López Aguilar, Fernando, L6.

Textos avançats:

Panofsky, Wolfgang K. H. & Phillips, Melba, L9.

➤ Després de cada apartat s'indica la bibliografia específica i les lectures recomanades.

➤ Al final de la lliçó s'inclouen les referències bibliogràfiques completes.

Lliçó 7: Inducció electromagnètica

7.1. Introducció

La inducció electromagnètica, que constitueix un dels pilars conceptuals de l'electromagnetisme clàssic, descriu la relació entre la variació temporal dels camps magnètics i l'aparició de camps elèctrics. Des de la seua formulació experimental per part de Michael Faraday el 1831 i la seua integració teòrica a les equacions de Maxwell, aquest fenomen es reconeix com una manifestació essencial de la dinàmica dels camps electromagnètics.

Com veurem a continuació, la llei de Faraday s'expressa no sols en termes de la força electromotriu induïda en un circuit, sinó també com una relació diferencial fonamental

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

que estableix que un camp elèctric no conservatiu sorgeix com a conseqüència de la variació temporal del camp magnètic. Aquesta formulació revela una simetria profunda en la teoria electromagnètica i diferencia els camps elèctrics d'origen electroestàtic d'aquells d'origen inductiu.

L'anàlisi de la inducció electromagnètica comprèn els fenòmens d'autoinducció i d'inductància mútua, essencials per a la descripció rigorosa de circuits i dispositius electromagnètics. Així mateix, l'estudi d'aquest fenomen proporciona el marc per a entendre la propagació d'ones electromagnètiques, en què els camps elèctrics i magnètics s'indueixen mútuament en l'espai-temps.

La inducció electromagnètica no sols constitueix un fenomen central de l'electromagnetisme clàssic, com dèiem, sinó que també és una porta d'entrada cap a la comprensió integral dels camps electromagnètics tant en contextos teòrics com aplicats.

Bibliografia per a l'apartat 7.1

Feynman, Richard, Leighton, Robert B. & Sands, Matthew, L17.

Cheng, David K., L6.

7.2. La força electromotriu

Al llarg de les dues darreres lliçons, hem analitzat el camp magnètic produït per un corrent estacionari o quasiestacionari, sense preocupar-nos d'aquest corrent ni del seu origen. Analitzem ara breument el comportament circuital del corrent.

Per tal que es moguen les càrregues, necessitem un camp elèctric que siga capaç de fer (aportar) el treball necessari. El treball per unitat de càrrega realitzat per un camp electroestàtic és:

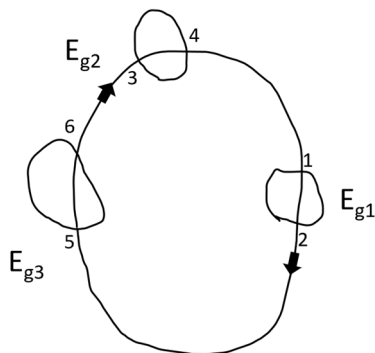
$$\mathcal{T} = \varepsilon = \oint \vec{E}_e \cdot d\vec{l} = - \oint \nabla \phi \cdot d\vec{l} = 0$$

com ja sabíem, atès que és un camp conservatiu. Necessitem, doncs, un altre camp que aporte l'energia necessària; es tractarà d'un camp electromotor o dels generadors, que, juntament amb el camp electroestàtic $\vec{E}_e$, ens permetrà generar i mantenir el moviment de les càrregues en l'interior del conductor:

$$\varepsilon = \oint (\vec{E}_e + \vec{E}_g) \cdot d\vec{l} = 0 + \oint \vec{E}_g \cdot d\vec{l}$$

El camp electromotor o dels generadors estarà en algunes parts del circuit, mentre que

el camp electroestàtic, que és responsable del moviment i manteniment del flux de corrent, estarà en tot el circuit.



En la integral de línia haurem de sumar (o restar segons el signe) cada generador segons que contribuïska al moviment de les càrregues o s'hi oposa.

El moviment de càrrega en un conductor està frenat per les col·lisions que tenen lloc en el seu interior. Pensem que, si no fora així, tindrien un moviment uniformement accelerat $\vec{a} = \frac{m}{\vec{F}}$. Aquestes col·lisions ens donen al final una velocitat mitjana que caracteritza el material. De fet, la llei d'Ohm, de caràcter empíric i fenomenològic, estableix, com ja hem vist, una relació lineal, per a camps no molt intensos, entre la densitat de corrent i el camp elèctric aplicat,

$$\vec{J} = \sigma(\vec{E}_e + \vec{E}_g)$$

on σ és la conductivitat del material.

Podem desenvolupar una mica més aquesta relació: siga un cilindre conductor de secció S ; aleshores,

$$i = \vec{J} \vec{S}$$

$$\varepsilon = \oint (\vec{E}_e + \vec{E}_g) \cdot d\vec{l} = \oint \frac{\vec{J}}{\sigma} \cdot d\vec{l} = \oint \vec{E}_g \cdot d\vec{l} = \oint \frac{i}{\sigma S} dl = \frac{i l}{\sigma S}$$

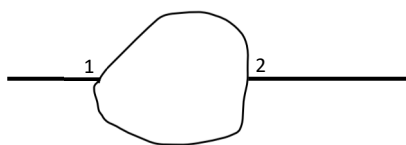
$\frac{l}{\sigma S}$ és la resistència del cable (R) i hi retrobem la coneguda llei d'Ohm en circuits filiformes,

$$i R = \varepsilon$$

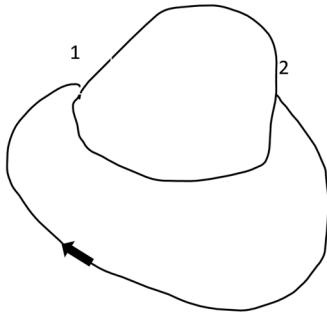
També veiem el sentit físic de la magnitud anomenada potencial ε (denominada usualment V en la teoria de circuits), com el treball realitzat sobre la unitat de càrrega al llarg del recorregut.

Analitzant les diferents parts del circuit, com dèiem, $\vec{E}_e$ es troba en tot el circuit i en els generadors tenim els dos camps $\vec{E}_e + \vec{E}_g$.

Siga un circuit obert. El camp $\vec{E}_g$ impulsa les càrregues a moure, per exemple, d'1 a 2, però, com que no en poden eixir, s'hi acumulen generant un camp que s'oposa a aquest moviment fins que, finalment, el



moviment de càrregues cessa i $-\vec{E}_e = \vec{E}_g = \nabla\phi = \phi_2 - \phi_1$, que és la diferència de potencial entre els extrems (borns) del generador.⁶¹



En el cas límit oposat, hi hauria un circuit que curtcircuita els extrems del generador. En aquest cas, $\phi_2 = \phi_1 \rightarrow \vec{E}_e = 0$ i el flux de corrent en l'interior del generador no cessaria mentre mantinguera la capacitat de subministrar energia (encara que sempre hi ha una certa resistència interna, per la qual cosa s'aniria descarregant).

En funcionament normal, estem en la situació en què $\vec{E}_g > \vec{E}_e$ i el flux es manté al llarg de tot el circuit: ixen les càrregues per l'extrem 2 i, en arribar a l'1, són impulsades novament pel generador fins a arribar a 2 i torna a començar.

Podríem concloure que un generador serà un dispositiu capaç de separar càrregues i generar una diferència de potencial entre dos punts. De fet, un generador converteix en energia elèctrica algun tipus d'energia no elèctrica com ara:

- energia química (bateries i acumuladors),
- energia mecànica (dinamo: bobina que gira en un camp magnètic),
- energia lluminosa (cèl·lula solar),
- energia piezoelèctrica (encenedors piezoelèctrics, sensors de vibració, micròfons, rellotges de quars, etc.).

Trobem aquests exemples en piles, plantes hidroelèctriques, parcs eòlics, plantes termoelèctriques, panells solars, grups electrògens, dinamos de bicicleta, alguns encenedors, etc.

⁶¹ $\phi_2 - \phi_1$ és la diferència de potencial que podem mesurar entre els terminals d'una pila o bateria quan no hi ha res més connectat.

En lliçons precedents hem analitzat els efectes d'un corrent que no variava amb el temps. En el cas que el corrent siga funció del temps, $i(t)$, s'hi incorpora un nou efecte físic que considerarem a continuació: la inducció electromagnètica.

Com dèiem, la inducció electromagnètica és un fenomen clau de l'electromagnetisme clàssic, amb aplicacions tecnològiques immenses. La comprensió dels camps variables en el temps, la Llei de Faraday i les seues conseqüències, permeten dissenyar dispositius eficients per a generació, distribució i ús de l'energia elèctrica, d'on deriva l'interès tecnològic significatiu que té.

Bibliografia per a l'apartat 7.2

Reitz, John R., Milford, Frederick J. & Christy, Robert W., L7.

7.3. Llei de Faraday de la inducció electromagnètica

En el segle XIX, en concret, cap al 1830, es buscava en els corrents elèctrics un fenomen anàleg al de la inducció electroestàtica, és a dir, se sabia que un conductor carregat fa que un altre situat a les proximitats tinga càrregues elèctriques induïdes. Què passaria amb els corrents?

Faraday va descobrir que, mentre el corrent circulava en règim estacionari, $i \neq f(t)$, per un circuit, no hi havia cap efecte sobre un altre circuit situat a les proximitats, però, en obrir o tancar el pas del corrent, apareixia un corrent addicional induït en el circuit proper. És a dir, quan hi havia una variació del corrent en funció del temps, apareixia un corrent induït.

Però aquest no és l'únic cas en què apareix inducció; també es dona:

- en un circuit rígid que es mou en un camp no uniforme (depenent de la posició) i estacionari, és a dir, no canvia amb el temps;
- en un circuit l'àrea del qual canvia al si d'un camp magnètic (circuit deformable);
- quan el camp magnètic canvia amb el temps $\vec{B}(t)$, per la raó que siga, com en el cas particular de l'experiment de Faraday en obrir o tancar el pas de corrent en el circuit.

Tots aquests casos es poden englobar en una única llei, la llei de Faraday, que estableix que la força electromotriu induïda en un circuit és igual a la derivada temporal del flux total del camp magnètic que el travessa.

La llei de Faraday, descoberta experimentalment el 1831, descriu com un camp magnètic variable en el temps pot induir un camp elèctric.

$$\varepsilon = - \frac{d\phi}{dt}$$

on ε és la força electromotriu, fem, induïda i ϕ és el flux del camp magnètic.

$$\phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

El signe menys és la representació matemàtica de la denominada llei de Lenz, que estableix que el corrent induït té un sentit de recorregut, de manera que el camp magnètic que crea tendeix a oposar-se a la variació del flux que la produeix.

La llei de Lenz determina la direcció del corrent induït i garanteix la conservació de l'energia en els processos electromagnètics.

En forma integral, tenim:

$$\varepsilon = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d\phi}{dt} = - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Aquesta expressió indica que un camp elèctric no conservatiu és induït per un camp magnètic variable.

Si el circuit és rígid i estacionari,

$$\varepsilon = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d\phi}{dt} = - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

D'altra banda, el teorema de Stokes ens permet de dir que

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{S} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

Donat que les superfícies són arbitràries, excepte pel fet que han de complir amb la condició de recolzar sobre el circuit, podem inferir una igualtat punt a punt de la forma

$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

que és l'expressió diferencial de la llei de Faraday i que constitueix la generalització del cas electroestàtic quan tenim corrents que produeixen camps magnètics que varien amb el temps.

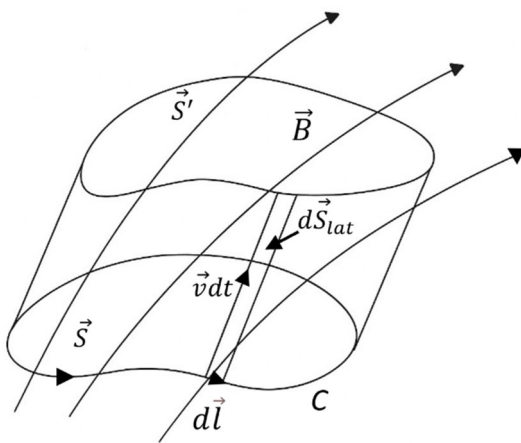
Bibliografia per l'apartat 7.3

Cheng, David K., L6.

7.4. Inducció en un circuit en moviment i en un circuit deformable

7.4.1. Força electromotriu en un circuit rígid en moviment

En el cas que el circuit es moga dins d'un camp magnètic, $\vec{B}(x, y, z, t)$, el moviment del circuit produeix una variació del flux i la derivada total del flux constarà de dues contribucions: l'una



associada a les variacions temporals del camp i l'altra lligada al moviment.

Considerem una espira definida per la corba C que en un temps dt modifica la seua posició i se situa en S' . Cada element de longitud $d\vec{l}$ de la corba C es trasllada en una longitud $\vec{v}dt$, on $\vec{v}$ podria ser funció de la posició sobre la corba, encara que no s'hauria de trencar el circuit.

D'acord amb la definició de derivada

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\Phi(t + dt) - \Phi(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\int_{S'} \vec{B}(t + dt) \cdot d\vec{S}' - \int_S \vec{B}(t) \cdot d\vec{S} \right]$$

Tenint en compte el desenvolupament en sèrie de Taylor per a $\vec{B}(t + dt)$,

$$\vec{B}(t + dt) = \vec{B}(t) + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} dt + \dots$$

i quedant-nos en primer ordre, tenim:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \int_{S'} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}' + \frac{d}{dt} \left[\int_{S'} \vec{B}(t) d\vec{S}' - \int_S \vec{B}(t) d\vec{S} \right]$$

Apliquem ara el teorema de la divergència al camp $\vec{B}(\vec{r}, t)$ considerant el volum tancat format per les superfícies S i S' , més la superfície lateral escombrada en el desplaçament:

$$\int_V \nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) dv = \int_{S'} \vec{B} \cdot d\vec{S}' - \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} + \int_{S_{lat}} \vec{B} \cdot d\vec{S}_{lat} = 0$$

$$\int_{S'} \vec{B} \cdot d\vec{S}' - \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = - \int_{S_{lat}} \vec{B} \cdot d\vec{S}_{lat}$$

La superfície lateral és $d\vec{S}_{lat} = d\vec{l} \times \vec{v} dt$ i ens queda:

$$\int_{S'} \vec{B} \cdot d\vec{S}' - \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = - \int_{S_{lat}} (d\vec{l} \times \vec{v}) \cdot \vec{B} dt$$

Si fem el mateix raonament amb el camp $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$,

$$\int_{S'} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}' - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = - \int_C (d\vec{l} \times \vec{v}) \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} dt$$

El segon terme de la igualtat és un infinitèsim de segon ordre, que podem no considerar en quedar-nos en primer ordre en aquesta aproximació i, per tant:

$$\int_{S'} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}' = \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

Recapitulant els resultats anteriors, tenim:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \int_{S'} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}' + \frac{d}{dt} \left[\int_{S'} \vec{B}(t) d\vec{S}' - \int_S \vec{B}(t) d\vec{S} \right]$$

que és igual a

$$\frac{d\Phi}{dt} = \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} - \int_C (\vec{dl} \times \vec{v}) \vec{B} = \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} + \int_C (\vec{B} \times \vec{v}) d\vec{l}$$

i per aplicació del teorema de Stokes:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \int_S \left[\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \nabla \times (\vec{B} \times \vec{v}) \right] d\vec{S}$$

on S és una superfície que recolza en C .

En el segon membre, el primer sumand representa la variació del flux causada per la dependència temporal del camp i el segon és la variació originada pel moviment.

Com a conseqüència de tot això, en el circuit apareix una fem induïda:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = - \int_S \left[\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \nabla \times (\vec{B} \times \vec{v}) \right] d\vec{S}$$

Des del punt de vista del circuit, les càrregues en moviment es mouen per l'acció d'un camp elèctric $\vec{E}'$, ja que no hi ha moviment del circuit, de manera que el treball realitzat per unitat de càrrega serà:

$$\varepsilon = \oint \vec{E}' \cdot d\vec{l} = \int_S \nabla \times \vec{E}' \cdot d\vec{S}$$

d'on es dedueix la igualtat punt a punt:

$$\nabla \times \vec{E}' = - \left[\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \nabla \times (\vec{B} \times \vec{v}) \right]$$

o, el que és igual:

$$\nabla \times [\vec{E}' - (\vec{B} \times \vec{v})] = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

on $\vec{E}'$ és el camp vist per les càrregues en el mateix circuit (i, per tant, en repòs). Si l'observador acompanya el circuit en el moviment, per a ell no hi ha contribució deguda a $\vec{v}$ i la força motora és d'origen elèctric:

$$\vec{F} = q\vec{E}'$$

En canvi, per a l'observador en repòs, apareixerà la contribució del camp magnètic. Així, per a cada càrrega,

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{B} \times \vec{v})$$

ambdues forces són lògicament iguals i, per tant,

$$\vec{E}' = (\vec{E} + \vec{B} \times \vec{v})$$

substituint en l'expressió

$$\nabla \times [\vec{E}' - (\vec{B} \times \vec{v})] = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

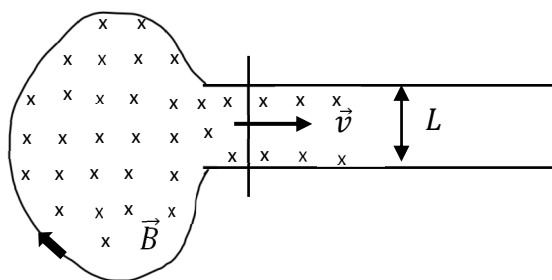
recuperem la llei de Faraday, vàlida de manera general:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

7.4.2. Força electromotriu en un circuit en què canvia la superfície (circuit deformable)

Siga un circuit com el de la figura següent al si d'un camp magnètic constant que apunta cap a dins (el que veiem seria l'extrem del darrere de la fletxa del camp) i una part del circuit es desplaça cap a la dreta amb una certa velocitat, fent que canvie la superfície del circuit travessada pel camp.

En aquestes condicions la fem induïda:



$$\varepsilon = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = - \int_S \vec{B} \cdot \frac{d}{dt} (d\vec{S})$$

Amb $\frac{d}{dt} (d\vec{S})$ volem indicar quant varia la superfície en dt .

Suposem que es desplaça una part del circuit ($d\vec{l}$); l'àrea escombrada en desplaçar-se un ($d\vec{l}'$) serà ($d\vec{S} = d\vec{l} \times d\vec{l}'$) i, per tant,

$$\frac{d(d\vec{l} \times d\vec{l}')}{dt} = d\vec{l} \times \frac{d\vec{l}'}{dt} + \frac{d\vec{l}}{dt} \times d\vec{l}' = d\vec{l} \times \vec{v}, \quad \text{atès que } \frac{d\vec{l}}{dt} = 0$$

Així, tindrem:

$$\vec{B} \cdot \frac{d}{dt} (d\vec{S}) = \vec{B} \cdot (d\vec{l} \times \vec{v}) = - d\vec{l} \cdot (\vec{B} \times \vec{v})$$

i la fem induïda

$$\varepsilon = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_L (\vec{B} \times \vec{v}) \cdot d\vec{l} = - \int_L (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = -vBL$$

Hem elegit el sentit de recorregut (indicat per la fletxa) de manera que el vector perpendicular a la superfície siga paral·lel a la direcció de $\vec{B}$, la qual cosa ens definirà el signe del corrent (en aquest cas, el de les agulles del rellotge), que considerem positiu. El resultat negatiu obtingut per a la fem ens indica que el corrent induït anirà en sentit contrari al de la fletxa de la figura.

Convé assenyalar que, atès que els elements $d\vec{l}$ formen part d'un circuit que, encara que deformable, ha de mantenir la continuïtat, la velocitat de cada $d\vec{l}$ no pot ser arbitrària. En particular, la velocitat dels elements $d\vec{l}$ veïns ha de variar de manera contínua al llarg del circuit (en el nostre cas, la part en moviment), de manera que la diferència de velocitat, que puga haver-hi, entre elements infinitesimals adjacents hauria de tendir a zero en el límit $dl \rightarrow 0$.

Aquesta fem induïda associada amb el moviment de la vareta (de longitud L) també es pot obtenir a partir de la força de Lorentz: tenim que la vareta es desplaça amb velocitat $\vec{v}$ en un camp magnètic $\vec{B}$ perpendicular tant a $\vec{v}$ com a L ; el conjunt es comporta com un generador en circuit obert, donat que la vareta no està encara en connexió amb la resta del circuit. La força sobre les càrregues positives serà cap amunt i sobre les càrregues negatives serà en sentit oposat; això produirà una separació de càrregues en l'interior de la vareta i la generació d'un camp electroestàtic que s'oposarà a la separació de càrregues causada per la força de Lorentz. Aquest camp electroestàtic augmenta fins que s'assoleix l'equilibri següent:

$$\vec{E} = -\vec{v} \times \vec{B}$$

En aquest moment, entre els extrems de la vareta mòbil,⁶² hi ha una diferència de potencial:

$$\phi_2 - \phi_1 = - \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_1^2 (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = v B L$$

Aquest resultat indica que el punt 2 es troba a un potencial més alt. En recolzar la vareta sobre els carrils, es tancaria el circuit i podria circular el corrent induït, que, amb la disposició del camp i de la velocitat que mostra la figura, aniria en el sentit contrari a les agulles del rellotge. És a dir, és el mateix resultat que s'obté en la resolució a partir del càlcul de la variació del flux, tal com hem fet anteriorment.

Quan un conductor es mou al si d'un camp magnètic variable, s'hi indueixen els anomenats corrents de Foucault (o paràsits). Aquests corrents produeixen efectes d'escalfament i pèrdua d'energia per efecte Joule i es poden reduir mitjançant l'ús de nuclis laminats o materials amb baixa conductivitat elèctrica.

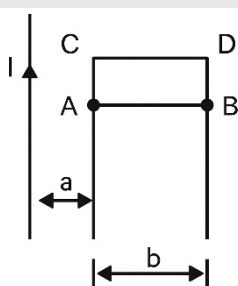
Com a aplicació dels conceptes anteriors, podem fer els exercicis i les demostracions següents:

- Una espira rectangular de costats a i b ($a > b$) i un cable bifilar pel qual circula un corrent $i = i_0 e^{-kt}$ estan situats en el mateix pla. El costat més gran de l'espira és paral·lel al cable.

⁶² Indiquem amb 1 el punt més baix i amb 2 el punt de dalt.

La distància entre els fils del cable és d , així com la distància entre el costat de l'espira i el cable més proper. Calculeu la fem induïda en l'espira.

- En el pla d'una espira rectangular de costats a i b i paral·lelament a un dels costats, hi ha un fil conductor rectilini que transporta un corrent constant i . Calculeu la fem induïda en l'espira quan aquesta s'allunya de l'eix amb velocitat v respecte al fil conductor.



- En el camp magnètic d'un corrent rectilini vertical i indefinit es troba el circuit dibuixat en la figura. Els carrils verticals tenen una resistència de $\beta \Omega/cm$. El tram mòbil AB i el tram fix CD tenen entre ells dos una resistència R . Calculeu la força que cal aplicar a la barra mòbil AB que té massa M perquè caiga amb velocitat constant.

Bibliografia per a l'apartat 7.4

Costa Quintana, Joan & López Aguilar, Fernando, L4.

7.5. Coeficients d'inducció. Autoinducció i inducció mútua

7.5.1. Coeficients d'autoinducció

Com hem comentat, el corrent en un circuit pot generar una fem induïda sobre si mateix en cas que el corrent canvie amb el temps. Sigui un circuit recorregut per un corrent $i(t)$ que crea un camp magnètic $\vec{B}(t)$. La conseqüència és que en el mateix circuit apareix una fem induïda, ja que varia el flux del camp magnètic que passa a través del circuit:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\Phi}{di} \frac{di}{dt}$$

La derivada $\frac{d\Phi}{di}$ depèn de la forma de la funció $\Phi = f(i)$, que serà un factor geomètric, ja que el camp depèn linealment amb el corrent, cosa que implica que el flux també ho farà,

$$\vec{B}(\vec{r}) = \left\{ \frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint_C \left(d\vec{l} \times \frac{\vec{R}}{R^3} \right) \right\}$$

Si suprimim el corrent i , el que ens queda és el factor geomètric de què parlàvem associat amb el circuit concret.

Si el circuit és rígid i, per tant, la superfície no canvia, tenim:

$$\Phi = L i$$

i, consegüentment, el coeficient d'autoinducció serà:

$$\frac{d\Phi}{di} = L$$

i la fem induïda es pot expressar com:

$$\varepsilon = -L \frac{di}{dt}$$

Cal recordar que la unitat de la inducció (coeficient L), en el SI, és l'henry, tal com indicàvem en la primera lliçó.

7.5.2. Inducció mútua

La variació de corrent en un circuit pot induir una fem en un altre circuit proper. Això és, si tenim n circuits, el flux en el circuit k -èsim serà la suma dels fluxos que generen els altres circuits, més el flux propi:

$$\Phi_k = \sum_{j=1}^n \Phi_{k,j}$$

on $\Phi_{k,j}$ és el flux del circuit j -èsim sobre el k -èsim,

$$\Phi_{k,j} = \int_{S_k} \vec{B}_j \cdot d\vec{S}_k$$

expressió en què $\vec{B}_j$ és el camp del circuit j -èsim sobre la superfície del k -èsim, $\vec{S}_k$. Això ens permet definir els coeficients d'inducció mútua $L_{k,j}$:

$$\Phi_{k,j} = L_{k,j} i_j$$

formulació que, juntament amb el coeficient d'autoinducció definit prèviament,

$$\Phi_{k,k} = L_{k,k} i_k$$

ens permet determinar la fem induïda com:

$$\varepsilon_k = -\frac{d\Phi_k}{dt} = -\sum_{j=1}^n \frac{d\Phi_{k,j}}{dt} = -\sum_{j=1}^n L_{k,j} \frac{di_j}{dt} = \sum_{j=1}^n \varepsilon_{k,j}$$

7.5.3. Fórmula de Neumann

Desenvolupant les definicions anteriors, el flux sobre el circuit k -èsim és:

$$\Phi_k = \oint_{C_k} \vec{A} \cdot d\vec{l}_k$$

on el potencial vector $\vec{A}$ és el generat per tots els circuits j , sobre el k -èsim.

Cada circuit j -èsim genera un potencial vector, que és donat per:

$$\vec{A}_j(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} i_j \oint_{C_j} \frac{1}{R} d\vec{l}_j$$

on R és la distància de cada element $d\vec{l}_j$ al punt $\vec{r}$ on avaluem el potencial vector. Així, tindrem:

$$\vec{A} = \sum_{j=1}^n \vec{A}_j = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{j=1}^n i_j \oint_{C_j} \frac{1}{R} d\vec{l}_j$$

i, per tant,

$$\Phi_k = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_k} \left[\sum_{j=1}^n i_j \oint_{C_j} \frac{1}{R} d\vec{l}_j \right] d\vec{l}_k$$

expressió que, comparada amb l'equació

$$\Phi_k = \sum_{j=1}^n \Phi_{k,j} = \sum_{j=1}^n L_{k,j} i_j$$

ens permet definir els coeficients d'inducció mútua com:

$$L_{k,j} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_k} \oint_{C_j} \frac{d\vec{l}_j d\vec{l}_k}{R}$$

sent $\vec{R} = \vec{r}_k - \vec{r}_j$ la distància entre els elements de longitud $d\vec{l}_j$ i $d\vec{l}_k$.

Aquesta és la coneguda com a fórmula de Neumann, la simetria de la qual respecte als índexs és completa, per la qual cosa els coeficients d'inducció mútua són simètrics:

$$L_{k,j} = L_{j,k}$$

Analitzarem el cas del coeficient d'autoinducció en l'apartat 7.6.3, de contingut complementari.

A continuació, es presenten els enunciats de tres exercicis, la resolució dels quals ajudarà a la comprensió dels conceptes estudiats, seguits de dos més que van acompanyats de la solució.

- Calculeu el coeficient d'autoinducció d'una bobina toroidal de n espises i secció quadrada de costat a . El radi de la circumferència que descriu el centre de les espises és igual a b .
- Calculeu el coeficient d'autoinducció d'un solenoide molt llarg de n espises per unitat de longitud i secció circular de radi a .
- Dues espises circulars de radis a i b ($b \ll a$) són paral·leles i els seus centres estan a una distància d sobre la recta perpendicular a aquests centres. Obteniu el coeficient d'inducció mútua.
- Una espira circular de radi b es troba en l'interior d'un solenoide semiinfinit de radi a ($b \ll a$), situada a una distància d de la base del solenoide. Els seus centres es troben en el mateix eix. Obteniu el coeficient d'inducció mútua del sistema.

Solució

El solenoide comença en $z=0$ i s'estén fins a $z = +\infty$. L'espira menuda se situa en $z=d$.

El camp en punts de l'eix generat pel solenoide és:

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 n i}{2} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right) \vec{u}_z$$

i la inductància mútua es definirà com el flux sobre l'espira quan el corrent és la unitat:

$$\phi(d) = \frac{\mu_0 n \pi b^2}{2} \left(1 - \frac{d}{\sqrt{a^2 + d^2}} \right) = L_{21} = L_{12}$$

- Suposem que una espira menuda de radi b se situa en l'eix z a una distància d del centre d'un solenoide finit de longitud l i radi a ($b \ll a$). Obteniu el coeficient d'inducció mútua.

Solució

El camp en l'eix del solenoide finit, de longitud total l és:

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 n i}{2} \left(\frac{z + l/2}{\sqrt{a^2 + (z + l/2)^2}} - \frac{z - l/2}{\sqrt{a^2 + (z - l/2)^2}} \right) \vec{u}_z$$

de manera que la inductància mútua (el flux del camp magnètic sobre l'altre circuit quan hi passa un corrent unitat) serà:

$$L_{2,1} = \frac{\mu_0 n \pi b^2}{2} \left(\frac{d + l/2}{\sqrt{a^2 + (d + l/2)^2}} - \frac{d - l/2}{\sqrt{a^2 + (d - l/2)^2}} \right) = M^{63}$$

Bibliografia per a l'apartat 7.5

Costa Quintana, Joan & López Aguilar, Fernando, L6.

Reitz, John R., Milford, Frederick J. & Christy, Robert W., L11.

⁶³ Quan estudiem dos circuits, el coeficient d'inducció mútua també s'indica amb la lletra M .

7.6. Contingut complementari

7.6.1. Aplicacions de la inducció electromagnètica

La inducció electromagnètica té nombroses aplicacions tecnològiques: generadors elèctrics, transformadors, motors, sistemes de fre magnètic, cuines d'inducció i moltes altres.

- Generadors elèctrics: En moure una espira o bobina en un camp magnètic, es genera una fem induïda que permet obtenir corrent altern.
- Transformadors: Es basen en la inducció mútua entre bobines per a elevar o reduir tensions elèctriques en sistemes de corrent altern.
- Motors elèctrics: Converteixen energia elèctrica en energia mecànica mitjançant la interacció de camps magnètics que generen un parell de forces que produeix moviment de rotació.
- Cuines d'inducció: Utilitzen camps magnètics alterns per a induir corrents de Foucault en materials conductors, de manera que produeixen calor per efecte Joule.
- Frens magnètics: Dispositius que utilitzen camps magnètics variables o corrents induïts en materials conductors per a generar forces de frenada sense contacte mecànic; redueixen l'energia cinètica en transformar-se en calor dins del conductor mitjançant corrents de Foucault.

7.6.2. Els camps no estacionaris i la seua relació amb els potencials

L'equació següent,

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

fa que, quan els camps varien amb el temps, ja no es puga derivar $\vec{E}$ d'un camp escalar. Tanmateix, atès que

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{i} \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

podem escriure

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{A} = -\nabla \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Per tal com la derivada temporal i espacial són independents:

$$\nabla \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0$$

i això sí que pot derivar-se d'un camp escalar, $-\nabla \phi$. D'això podem concloure que

$$\vec{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

cosa que constitueix una generalització del que s'ha vist en el cas electroestàtic.

Encara més, podem introduir la definició del camp en l'expressió del treball per unitat de càrrega,

$$\varepsilon = \int_C \vec{E} d\vec{l} = - \int_C \nabla \phi d\vec{l} - \int_C \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} d\vec{l} = - \int_C \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} d\vec{l}$$

vist que el primer sumand és nul, com ja sabem, tindrem:

$$\varepsilon = - \oint \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} d\vec{l}$$

resultat esperable, atès que el flux del camp magnètic és:

$$\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S} = \oint_C \vec{A} d\vec{l}$$

7.6.3. El coeficient d'autoinducció a partir de la fórmula de Neumann

Quan es vol aplicar la fórmula de Neumann al càlcul de l'autoinducció

$$L_{k,j} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_k} \oint_{C_j} \frac{d\vec{l}_j d\vec{l}_k}{R}$$

apareix una dificultat matemàtica, perquè el punt $\vec{R} = 0$ es troba en el domini d'integració. Aquesta dificultat és més aparent que real, ja que està idealitzant el corrent filiforme. En la realitat, sempre tindrem una secció transversal finita i, per tant, aquesta singularitat és producte de la idealització o modelització.

Una manera de resoldre el problema és considerar que la secció transversal es pot dividir en filaments “pesats” per $\vec{J}$ i, per tant, el flux a través del circuit en comptes de ser

$$\Phi_{total} = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

serà

$$\Phi_{total} = \frac{1}{i} \int_S \vec{J} \left[\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} \right] d\vec{S}$$

Tenint en compte el valor del potencial vector,

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}}{R} dv$$

i incorporant-lo a l'equació del flux total, tenim:

$$L_{i,i} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{i^2} \int_V \int_{V'} \frac{\vec{J}_i \cdot \vec{J}_{i'}}{R} dv dv'$$

Òbviament, el volum és el mateix i els índexs amb prima són per a facilitar la compressió. La forma operativa és la següent: fixem un dv i recorrem tot el volum V' pel qual passen els corrents $\vec{J}_{i'}$ i després integrarem en dv , de manera que desapareix la singularitat.

7.6.4. Matriu de coeficients d'inducció i autoinducció

Quan tenim un sistema amb n circuits, el flux a través del k -èsim, quan per tots els altres passen corrents i_j , és la suma dels fluxos que tots els altres, incloent-hi el propi, generen sobre aquest.

$$\Phi_k = \sum_{j=1}^n \Phi_{k,j}$$

Cadascun d'aquests fluxos es relaciona linealment amb el corrent que passa per cada circuit de la forma:

$$\Phi_{k,j} = L_{k,j} i_j$$

on els coeficients d'inducció estan donats, segons hem vist, per

$$L_{k,j} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_k} \oint_{C_j} \frac{d\vec{l}_j d\vec{l}_k}{R}$$

Tenim, per tant, una formulació semblant a la del sistema de n conductors,⁶⁴ en què el potencial era donat per

$$\phi_i = \sum_{j=1}^n p_{i,j} q_j$$

on els coeficients de potencial eren:

$$p_{i,j} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{q_i q_j} \int_{S_j} \frac{\sigma_i \sigma_j}{R_{i,j}} dS_i dS_j$$

Aquests $p_{i,j}$ van ser denominats coeficients de potencial del sistema de conductors i es va poder definir una matriu $c_{i,j} = \frac{p_{i,j}}{\Delta p}$, essent Δp el determinant de $|p_{i,j}|$, amb els coeficients de capacitat i influència.

Seguint, doncs, aquesta formulació podem construir la matriu d'inductàncies tal que

$$\begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \vdots \\ \Phi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & \cdots & L_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{n1} & \cdots & L_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_n \end{bmatrix}$$

⁶⁴ Vegeu l'apartat 4.5.1.

A partir de la definició del flux

$$\Phi_k = \sum_{j=1}^n \Phi_{k,j} = \sum_{j=1}^n L_{k,j} i_j$$

podem imaginar-nos una situació que ens farà notar més clarament el significat físic dels coeficients d'inducció. Suposem que el corrent en el j -èsim circuit és $i_j=1$ i tots els altres circuits tenen un corrent nul:

$$i_k = 0 \quad \forall k \neq j$$

Aleshores,

$$\Phi_k = L_{k,j}$$

és a dir, el coeficient $L_{k,j}$ és el flux sobre el circuit k -èsim quan el conductor j -èsim té corrent unitat i tots els altres estan sense pas de corrent, incloent-hi el mateix k -èsim. O, dit d'una altra manera, $L_{k,j}$ és la inducció mútua entre el circuit k -èsim i el j -èsim: el flux que el corrent en el circuit j -èsim induïx en el circuit k -èsim.

Característiques de la matriu dels coeficients $L_{k,j}$

Les característiques de la matriu dels coeficients $L_{j,k}$ són les següents:

- Com dèiem, la matriu és simètrica: $L_{k,j} = L_{j,k}$.
- Els elements de la diagonal principal són estrictament positius $L_{i,i} > 0$.
- El signe dels elements fora de la diagonal principal depèn de l'orientació relativa dels circuits.
- La matriu és definida positiva, la qual cosa vol dir que, per a qualsevol conjunt de fluxos, el producte de la matriu dels coeficients d'inducció pel "vector" dels corrents és sempre ≥ 0 .
- La condició que la matriu siga definida positiva implica que no sols els elements de la diagonal principal sinó també qualsevol menor principal (que té la diagonal principal

com a diagonal), incloent-hi la mateixa matriu, té determinant estrictament positiu.⁶⁵

Així, per exemple, s'ha de complir⁶⁶

$$\begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{vmatrix} = L_{11}L_{22} - L_{12}L_{21} \geq 0$$

- La condició de ser definida positiva implica, així mateix, que la suma de cada fila ha de ser positiva o nul·la. Això equival al fet que l'element de la diagonal principal (que és positiu) ha de ser $\geq$ al valor absolut de la suma de tots els altres elements de la mateixa fila (que són negatius o nuls). Per exemple,

$$L_{11} \geq |L_{12} + L_{13} + \dots + L_{1n}|$$

En el cas d'un sistema de dos circuits, siga $M = L_{12}$ el coeficient d'inducció mútua. Acabem de veure que $L_{11}L_{22} - M^2 \geq 0$, o, cosa que és igual, $M^2 \leq L_{11}L_{22}$ i es pot definir el coeficient d'acoblament com

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_{11}L_{22}}} ; \quad 0 \leq k \leq 1$$

7.6.5. Exemple de càlcul de coeficient d'inducció mútua

Vegem el problema següent, il·lustratiu del càlcul del coeficient d'inducció mútua.

- Una espira circular de radi b es troba en l'interior d'un solenoide semiinfinit de radi a ($b \ll a$), situada a una distància d de la base del solenoide. Els seus centres es troben en el mateix eix. Obteniu el coeficient d'inducció mútua del sistema.

Solució

El solenoide comença en $z=0$ i s'estén fins a $+\infty$. L'espira menuda se situa en $z=d$.

El camp en punts de l'eix generat pel solenoide és:

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 n i}{2} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right) \vec{u}_z$$

⁶⁵ Per a més detall, podeu consultar el criteri de Sylvester al text de Morse & Feshbach en el context de condicions sobre determinants de formes quadràtiques.

⁶⁶ No posarem la separació (coma) entre els subíndex, quan no hi haja cap dubte del significat.

i la inductància mútua es definirà com el flux sobre l'espira quan el corrent és la unitat:

$$\phi(d) = \frac{\mu_0 n \pi b^2}{2} \left(1 - \frac{d}{\sqrt{a^2 + d^2}} \right) = L_{21} = L_{12}$$

Bibliografia de la lliçó 7

Cheng, David K. *Fundamentos de Electromagnetismo para ingeniería*. Pearson Educación, 1997.

Costa Quintana, Joan & López Aguilar, Fernando, *Interacción Electromagnética. Teoría Clásica*. Reverté, 2007.

Feynman, Richard, Leighton, Robert B. & Sands, Matthew. *Física vol. II: Electromagnetismo y Materia*. Addison-Wesley Iberoamericana, 1987.

Griffiths, David J., *Introduction to Electrodynamics*. Prentice Hall, 1989.

Morse, Philip M. & Feshbach, Herman. *Methods of Theoretical Physics. Vol. I*. New York: McGraw-Hill, 1953.

Panofsky, Wolfgang K.H. & Phillips, Melba, *Classical Electricity and Magnetism*. Dover Addison-Wesley Publishing Company Inc., Series in Advanced Physics, 2a edició, 1962.

Reitz, John R., Milford, Frederick J. & Christy, Robert W., *Fundamentos de la Teoría Electromagnética*. Addison-Wesley Iberoamericana, 4a edició, 1996.

Lliçó 8

Equacions de Maxwell *Ones electromagnètiques*

8.1. Introducció

8.2. Generalització del teorema d'Ampère per a corrents no estacionaris. Corrent de desplaçament de Maxwell

8.3. Equacions de Maxwell en el buit

8.4. Equació d'ones. Solució en ones planes

8.5. Ones planes amb variació temporal harmònica

Bibliografia general

Griffiths, David J., L7.

Reitz, John R., Milford, Frederick J. & Christy, Robert W., L6.

Textos avançats:

Panofsky, Wolfgang K. H. & Phillips, Melba, L11.

Jackson, John David, L6 i L7.

➤ Després de cada apartat s'indica la bibliografia específica i les lectures recomanades.

➤ Al final de la lliçó s'inclouen les referències bibliogràfiques completes.

Lliçó 8: Equacions de Maxwell. Ones electromagnètiques

8.1. Introducció

Les equacions de Maxwell representen una fita fonamental en la física del segle XIX, ja que integren coherentment els fenòmens elèctrics i magnètics en un únic marc teòric i mostren la interdependència intrínseca entre els camps elèctric i magnètic. En la formulació diferencial, aquestes equacions descriuen com les distribucions de càrrega i corrent generen camps electromagnètics i com aquests camps evolucionen en l'espai i el temps. Una de les seues prediccions més notables va ser l'existència d'ones electromagnètiques (OEM) que es propagarien en el buit a la velocitat de la llum, com així ha estat, la qual cosa estableix un vincle entre l'electromagnetisme i l'òptica.

Des d'un punt de vista conceptual, les equacions de Maxwell tenen analogies amb altres teories de camp. Per exemple, les equacions d'Euler i Navier-Stokes determinen l'evolució d'un fluid mitjançant camps de velocitat i pressió; les de Maxwell descriuen la dinàmica dels camps elèctrics i magnètics. En tots dos casos s'incorporen principis de conservació (massa, moment i energia en fluids; càrrega, moment lineal, moment angular i energia electromagnètica, en el cas del camp electromagnètic) i s'utilitzen operacions diferencials similars, com ara divergències i rotacionals, per a expressar els principis de conservació i relacions entre els camps. D'altra banda, hi ha un paral·lelisme molt instructiu amb la gravitació newtoniana: la llei de Gauss té una estructura semblant quan l'apliquem al camp elèctric i quan l'apliquem al camp gravitatori, encara que la força elèctrica pot ser atractiva o repulsiva segons la polaritat de les càrregues, com ja hem comentat en altres parts d'aquest text.

A diferència de la gravitació newtoniana, les equacions de Maxwell tenen una formulació que s'integra naturalment amb la relativitat especial i són expressables en termes del tensor del camp electromagnètic, $F^{\mu\nu}$. En la relativitat general, la font del camp gravitatori és el tensor energia-moment, mentre que en electromagnetisme són les càrregues i corrents. En tots dos casos, les interaccions es descriuen mitjançant equacions de camp locals.

El 1865 Maxwell va publicar “A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field”,⁶⁷ que unifica els coneixements experimentals sobre electricitat i magnetisme. En el seu treball va mostrar que la llum pot interpretar-se com una ona electromagnètica que es propaga en l’espai, cosa que supera la necessitat de postular un èter, concepte posteriorment descartat per la teoria de la relativitat.

En el buit, aquestes ones són transversals, amb els camps elèctrics i magnètics perpendiculars entre si i a la direcció de propagació. La inclusió del corrent de desplaçament en les equacions que governen el camp electromagnètic, com veurem més endavant, va ser crucial per a completar la formulació i validar la predicció de les ones electromagnètiques.

Al llarg del curs, ens han anat apareixent les equacions de Maxwell en un camí iniciat en l’electroestàtica, després en la magnetoestàtica i, finalment, en els camps variables amb el temps. Aquest marc teòric es conclou amb el conjunt de quatre equacions que, segons hem vist, en el sistema internacional en el buit i per a corrents estacionaris, es formulen en forma diferencial com

$$\nabla \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

Per a corrents no estacionaris, en canvi, la darrera equació no pot ser vàlida, ja que

$$\nabla(\nabla \times \vec{B}) = 0 = \mu_0 \nabla \vec{J}$$

⁶⁷ Maxwell, James Clerk. (1865). A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, vol. 155, pàg. 459-512. Disponible en <https://doi.org/10.1098/rstl.1865.0008>.

i això implicaria que $\nabla \vec{J} = 0$ en qualsevol circumstància. Per tant, cal introduir la proposta de Maxwell del corrent de desplaçament, per a garantir la consistència de les equacions i permetre la predicció correcta de la propagació d'ones electromagnètiques.

Bibliografia per a l'apartat 8.1

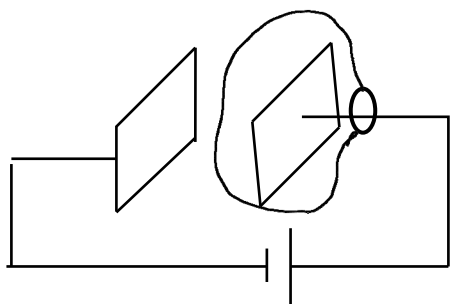
Feynman, Richard, Leighton, Robert B. & Sands, Matthew, L18.

8.2. El corrent de desplaçament

La llei d'Ampère, vàlida per a corrents estacionaris, ens diu que

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

La pregunta és: com podem considerar el cas de situacions no estacionàries, com les de l'exemple següent?



En un condensador, quan estem en règim estacionari, no passa corrent una vegada ja s'ha carregat, però en el procés de càrrega hi ha un pas de corrent no estacionari de manera que tindrem un camp magnètic que satisfarà:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int \vec{J} \cdot d\vec{S} = \mu_0 i_e$$

Si prenem la superfície que recolza en l'anell circular a la part exterior al condensador (vegeu figura anterior), tindrem una densitat de corrent i un flux $\int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$, però, si considerem la superfície dins del condensador, allà no n'hi ha $\vec{J}$. D'altra banda, si ens fixem en el camp elèctric dins del condensador (que considerem ideal, sense efecte de vores i amb un camp $\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 S}$ en l'interior), en el procés de càrrega Q augmenta (hi ha una variació) i, per tant, un corrent,

$$\frac{dQ}{dt} = i = \epsilon_0 S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

A causa de la conservació de la càrrega, el corrent i ha de ser el mateix que passa pel fil conductor, i l'haurem d'afegir al segon membre de la igualtat de la integral de línia per tal de cobrir aquelles zones on no hi ha cables conductors.

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_e + \mu_0 \epsilon_0 \int \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

Aquesta deducció és de caràcter completament general. Maxwell va denominar el darrer terme com a corrent de desplaçament, encara que realment no és un corrent en sentit estricte. Maxwell va afirmar que els efectes electromagnètics que produeix són els mateixos que els atribuïbles als corrents de conducció i, per tant, el teorema d'Ampère l'ha d'incorporar:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

També podem deduir la necessitat d'incorporar el corrent de desplaçament a partir de considerar l'equació de continuïtat,

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

que en el cas no estacionari ens porta a

$$\nabla \cdot \vec{J} = - \frac{\partial \rho}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E}) = - \nabla \cdot \left(\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

Això implica que

$$\nabla \cdot \left(\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = 0$$

en qualsevol circumstància.

Si les fonts de rotacional del camp magnètic foren $\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$, la coherència seria total, atès que la divergència d'un rotacional és sempre 0. Per això la mateixa equació de continuïtat

ens dona una suma de camps que és solenoidal i que es pot postular com les fonts de rotacional del camp magnètic, de manera que desapareix la inconsistència matemàtica detectada per al cas no estacionari i es generalitza, a més, el resultat per al cas estacionari:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

Com veiem, el resultat coincideix amb el que hem obtingut anteriorment, en forma integral, en analitzar el cas de la càrrega d'un condensador.

Aquesta correcció a la 4a equació de Maxwell també garanteix la conservació de la càrrega a través de l'equació de continuïtat.

En l'interior d'un conductor, normalment,

$$\vec{J} \gg \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

i la contribució del corrent de desplaçament és negligible. Tanmateix, en absència de corrents $\vec{J}$, cal tenir-la en compte. L'equivalència dels efectes magnètics dels corrents de desplaçament i els corrents de conducció va ser confirmada experimentalment per Alexander Alexandrovich Eichenwald el 1903 mitjançant un condensador giratori.⁶⁸

L'exercici següent aprofundeix els conceptes de l'apartat.

- Un circuit està format per un cable amb conductivitat (elèctrica) σ i una font de voltatge de la forma $V = V_0 \cos(\omega t + \varphi)$. Compareu el corrent de conducció amb el de desplaçament. Discutiu el casos $\sigma \gg \omega \epsilon_0$ i $\sigma \leq \omega \epsilon_0$.

Bibliografia per a l'apartat 8.2

Griffiths, David J., L7.

Reitz, John R., Milford, Frederick J. & Christy, Robert W., L16.

⁶⁸ Vegeu, per exemple, https://en.wikipedia.org/wiki/Alexander_Eichenwald i les referències que s'hi esmenten.

8.3. Equacions de Maxwell en el buit

Com a resum de tot el que hem dit, les equacions de Maxwell adopten la forma (diferencial i integral) següent:

Llei de Gauss per al camp elèctric

$$\nabla \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad ; \quad \oint_S \vec{E} \, d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

on Q és la càrrega total en el volum tancat per S .

Corol·lari: El camp elèctric divergeix (convergeix) des de les càrregues positives (negatives), o amb més precisió, des de les densitats de càrrega elèctrica.

Llei de Gauss per al camp magnètic

$$\nabla \vec{B} = 0 \quad ; \quad \oint_S \vec{B} \, d\vec{S} = 0$$

Corol·lari: No hi ha densitat de “càrrega” magnètica; no hi ha monopols magnètics dins d’aquest marc conceptual.

Llei de Faraday

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad ; \quad \oint_C \vec{E} \, d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \, d\vec{S} = -\frac{d\Phi}{dt} = \varepsilon$$

Corol·lari: Un camp magnètic, variable amb el temps, genera un camp elèctric.

Llei d’Ampère-Maxwell

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad ; \quad \oint_C \vec{B} \, d\vec{l} = \mu_0 \left[\int_S \vec{J} \, d\vec{S} + \epsilon_0 \int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \, d\vec{S} \right]$$

Corol·lari: Els corrents elèctrics i els camps elèctrics variables, amb el temps, generen un camp magnètic.

Com hem dit, les equacions de Maxwell van tenir un gran impacte, perquè, a partir del marc teòric enunciat, permetien predir fenòmens encara no observats, el més important dels quals va ser la propagació de l'energia en forma d'ones electromagnètiques.

Amb la incorporació de la matèria, i, per tant, amb la possibilitat real de presència d'entitats capaces de polaritzar-se elèctricament o magnetitzar-se (és a dir, amb densitats de $\vec{P}$ i $\vec{M}$), les equacions de Maxwell incorporen nous termes que tenen en compte aquestes densitats de moments dipolars elèctrics i magnètics.

Vegem l'aplicació dels conceptes anteriors:

- Suposem un condensador sotmès a una diferència de potencial $V = V_0 \cos(\omega t + \varphi)$. Obteniu el camp magnètic en tot l'espai.
- Siga un condensador pla format per dos discos. Considerant l'efecte de les vores, el camp elèctric en el seu interior es pot expressar aproximadament per

$$\vec{E} = E_0 \left[1 - \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^2 \right] \sin \omega t \vec{u}_z$$

on ρ_0 és el radi efectiu dels discos. Trobeu el camp magnètic entre les plaques del condensador.

Bibliografia per a l'apartat 8.3

Qualsevol llibre d'electromagnetisme, per exemple: Wangsness, Roald K., L21.

8.4. Equació d'ones. Solució en ones planes

8.4.1. Obtenció de l'equació d'ones

En les regions en què no tenim ni càrregues ni corrents, les equacions de Maxwell es reescriuen com

$$\nabla \vec{E} = 0$$

$$\nabla \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

$$\nabla \times \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$$

Si prenem el rotacional de la llei de Faraday (3a equació de Maxwell):

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial (\nabla \times \vec{B})}{\partial t} = \nabla (\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} + \frac{\partial (\nabla \times \vec{B})}{\partial t} = 0$$

considerant que

$$\frac{\partial (\nabla \times \vec{B})}{\partial t} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad \text{i} \quad \nabla \cdot \vec{E} = 0$$

arribem per substitució a

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

que té l'estructura d'una equació d'ones per a un camp vectorial.

Operant de manera similar per a $\vec{B}$, i utilitzant en aquest cas la llei d'Ampère-Maxwell com a punt d'inici, tenim:

$$\nabla^2 \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0$$

Es tracta, doncs, d'un conjunt de sis equacions (una per a cada component) de la forma genèrica

$$\nabla^2 \Psi - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0$$

Són equacions d'ones amb velocitat $\frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$, que és precisament la velocitat de la llum, com podem comprovar posant els valors de la permitivitat i la permeabilitat del buit.

Tenim, en conseqüència, que el camp electromagnètic és una ona (electromagnètica) i que la llum ho és, predicció teòrica confirmada experimentalment per Heinrich Rudolf Hertz i altres.⁶⁹

Cal assenyalar que, en derivar dues vegades en l'obtenció de l'equació d'ones, s'hi introdueixen més solucions de les que estrictament satisfan les equacions de Maxwell i, per tant, només aquelles solucions de l'equació d'ones que satisfacen les equacions de Maxwell seran ones electromagnètiques.

L'exercici següent pretén consolidar el concepte descrit en els paràgrafs precedents.

➤ Trobeu el camp magnètic associat amb el camp elèctric següent:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{V_0}{\ln \frac{a}{b}} \frac{\sin(\pi z/l)}{\rho} \sin \omega t \vec{u}_\rho$$

i determineu el valor de ω per al qual es compleixen les equacions de Maxwell sense càrregues ni corrents de conducció.

8.4.2. Solució de l'equació d'ones per a ones electromagnètiques planes

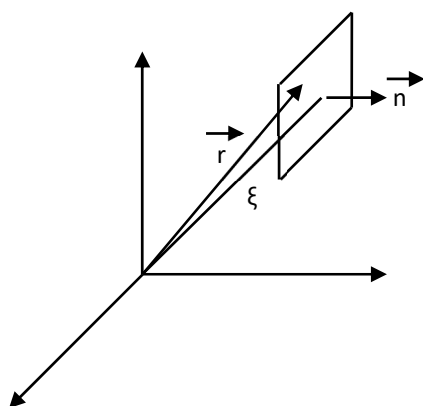
Encara que en la realitat les ones tenen fronts corbats (esfèrics, cilíndrics...), localment, a suficient distància de la font, es comporten com a ones planes. Les ones planes són els "blocs

⁶⁹ Vegeu https://ca.wikipedia.org/wiki/Heinrich_Hertz i les referències originals que s'hi citen.

fonamentals” en l’anàlisi de Fourier, que permet afirmar que qualsevol ona (fins i tot molt complexa) es pot escriure com una superposició d’ones planes amb diferents freqüències i direccions. Per aquestes raons, i també per simplicitat, només considerarem les solucions amb estructura d’ones planes, és a dir, aquelles solucions que només depenen d’un paràmetre espacial ξ i del temps t , doncs, indiquen que en tot pla definit per

$$\vec{n} \cdot \vec{r} = \xi = \text{constant}$$

on $\vec{n}$ és el vector normal al pla i $\vec{r}$ és qualsevol punt sobre aquest, podem dir que cada component dels camps adopta el mateix valor en la seua dependència espacial.



Les equacions d’ones seran de la forma

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0$$

Fent el canvi de variables següent:

$$u = \xi - ct \quad \text{i} \quad v = \xi + ct$$

essent u i v són les variables del canvi, l’equació d’ones es pot reescriure com

$$\frac{\partial^2 \Psi(u, v)}{\partial u \partial v} = 0$$

Hem obtingut aquesta expressió tenint en compte que

$$\partial u = \partial \xi - c \partial t \quad \text{i} \quad \partial v = \partial \xi + c \partial t$$

L’equació de Laplace anterior permet construir una solució per superposició:

$$\Psi(\xi, t) = f(\xi - ct) + g(\xi + ct)$$

on $f(\xi - ct)$ i $g(\xi + ct)$ són funcions arbitràries de l’argument, ja que

$$\frac{\partial^2 \Psi(u, v)}{\partial u \partial v} = \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial}{\partial v} (f(u) + g(v)) = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial}{\partial v} g(v) \right) = 0$$

La funció $f(\xi - ct)$ pren el mateix valor cada vegada que $\xi - ct = \text{constant} = \xi_0$. Així, $\xi = \xi_0 + ct$ representarà una família de plans la distància dels quals creix amb ells amb la velocitat c , cosa que no és més que una ona que avança.

Vegem com a exemple la funció delta de Dirac $\delta(\xi - ct)$:

En $t=0$ tindrem la δ en el  pla $\xi = 0$

En $t=2$ tindrem la δ en el  pla $\xi = 2c$

En $t=4$ tindrem la δ en el  pla $\xi = 4c$

Això evidencia, d'una manera clara, la propagació dels plans que avancen amb el transcurs del temps.

La solució de l'equació de Laplace anterior, obtinguda com una combinació lineal de les funcions f i g , és vàlida per a qualsevol tipus d'ona. Perquè siga una OEM, haurà de satisfer les restriccions que imposen les equacions de Maxwell, que en absència de càrregues i corrents, en el cas de dependència d'un únic paràmetre espacial i el temps,⁷⁰ tenen la forma següent:

$$\nabla \vec{E} = 0 \rightarrow \vec{n} \frac{\partial \vec{E}}{\partial \xi} = 0 \rightarrow \frac{\partial \vec{n} \vec{E}}{\partial \xi} = 0$$

⁷⁰ Pel fet de tenir només la dependència espacial amb ξ l'operador nabla, es pot escriure com $\nabla = \vec{n} \frac{\partial}{\partial \xi}$.

$$\nabla \vec{B} = 0 \rightarrow \vec{n} \frac{\partial \vec{B}}{\partial \xi} = 0 \rightarrow \frac{\partial \vec{n} \vec{B}}{\partial \xi} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \rightarrow \vec{n} \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

$$\nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \rightarrow \vec{n} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial \xi} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$$

Això significa que les components longitudinals dels camps (és a dir, paral·leles a la direcció de propagació definida per $\vec{n}$) no depenen de la posició ξ . Dit d'una altra manera, són constants en l'espai. A més, si multipliquem les equacions 3a i 4a escalarment per $\vec{n}$, tenim:

$$\vec{n} \left(\vec{n} \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial \xi} \right) + \vec{n} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \quad \text{i com que el primer sumand és zero} \rightarrow \frac{\partial \vec{n} \vec{B}}{\partial t} = 0$$

$$\vec{n} \left(\vec{n} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial \xi} \right) + \vec{n} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0, \quad \text{i com que el primer sumand és zero} \rightarrow \frac{\partial \vec{n} \vec{E}}{\partial t} = 0$$

la qual cosa implica que les components longitudinals tampoc no depenen del temps i, per tant, no representen camps que es propaguen longitudinalment. Resulta, doncs, que els camps que corresponen a una OEM plana han de ser perpendiculars a la direcció de propagació, és a dir, són ones transversals.

Podem aprofundir una mica més en les propietats d'aquestes OEM en el marc de les equacions de Maxwell. Per a facilitar la comprensió, pensem en una ona que avança:

$$\frac{\partial f(\xi - ct)}{\partial \xi} = f', \quad \frac{\partial f(\xi - ct)}{\partial t} = -cf'$$

Amb la prima (') indiquem, en aquest cas, la derivació pel que fa a l'argument.

Amb aquesta formulació, les equacions de Maxwell 3a i 4a anteriors, es poden reescriure com

$$\vec{n} \times \vec{E}' = c \vec{B}' \quad \text{i} \quad \vec{n} \times \vec{B}' = -\frac{\vec{E}'}{c}$$

En conseqüència, l'equació de les derivades anterior es pot posar com

$$\vec{n} \times \vec{E} = c \vec{B} \quad \text{i} \quad \vec{n} \times \vec{B} = -\frac{\vec{E}}{c}$$

excepte camps constants, que seran solucions sense interès físic en l'estudi d'ones que es propaguen.

La conclusió és que els camps $\vec{E}$ i $\vec{B}$ són perpendiculars entre si, per tal com

$$\vec{E}(\vec{n} \times \vec{E}) = c \vec{E} \vec{B} = 0 \rightarrow \vec{E} \vec{B} = 0; \quad \text{a més,} \quad \vec{B}(\vec{n} \times \vec{B}) = 0 = -\frac{\vec{E} \vec{B}}{c}$$

i els seus mòduls estan relacionats per $|\vec{E}| = c |\vec{B}|$.

D'altra banda, també es compleix

$$\vec{E} \times \vec{B} = \frac{|\vec{E}|^2}{c} \vec{n} = c |\vec{B}|^2 \vec{n}$$

equació que podem obtenir per operació simple, recordant que $\vec{n} \vec{E} = \vec{n} \vec{B} = 0$.

Si els camps tenen direccions fixes en cadascun dels plans $\vec{n} \vec{r} = \xi = \text{constant}$, tenim una OEM polaritzada linealment.

Analitzem amb una mica més de detall la relació entre els camps. Tots dos camps estan en el pla el vector normal exterior del qual és $\vec{n}$. Definim dos vectors unitaris $\vec{u}_1$ i $\vec{u}_2$ tal que $\vec{u}_1 \times \vec{u}_2 = \vec{n}$.

Els camps es podran escriure en aquesta base com:

$$\vec{E} = f_1(\xi - ct)\vec{u}_1 + f_2(\xi - ct)\vec{u}_2$$

$$\vec{B} = f_3(\xi - ct)\vec{u}_1 + f_4(\xi - ct)\vec{u}_2$$

Per a veure la relació entre els vectors, recorrem a les equacions de Maxwell. La 3a es pot escriure, com ja hem vist,

$$\vec{n} \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

Substituint els camps per les seues expressions en funció de f_i i els vectors unitaris $\vec{u}_1$ i $\vec{u}_2$, tenim:

$$\vec{n} \times [f_1'(\xi - ct)\vec{u}_1 + f_2'(\xi - ct)\vec{u}_2] - c[f_3'(\xi - ct)\vec{u}_1 + f_4'(\xi - ct)\vec{u}_2] = 0$$

Desenvolupant aquesta igualtat

$$[f_1'\vec{u}_2 - f_2'\vec{u}_1] - c[f_3'\vec{u}_1 + f_4'\vec{u}_2] = 0$$

cosa que implica que

$$f_1' = cf_4' \rightarrow f_1 = cf_4$$

$$f_2' = -cf_3' \rightarrow f_2 = -cf_3$$

Per tant,

$$\vec{E} = f_1(\xi - ct)\vec{u}_1 + f_2(\xi - ct)\vec{u}_2$$

i deduïm que

$$c\vec{B} = -f_2(\xi - ct)\vec{u}_1 + f_1(\xi - ct)\vec{u}_2$$

Això satisfà les equacions ja vistes de la perpendicularitat dels camps, la relació entre els mòduls i , com ja hem dit,

$$\vec{E} \times \vec{B} = \frac{|\vec{E}|^2}{c} \vec{n} = c|\vec{B}|^2 \vec{n}$$

El senyal d'aquestes ones va apareixent en diferents plans a mesura que transcorre el temps. En el cas que les funcions f_i siguin iguals, direm que l'ona està polaritzada linealment, atès que els camps mantenen la direcció al front d'ones. Tanmateix, en general, $f_1 \neq f_2$ i les direccions dels camps seran variables, de manera que els extrems descriuran sengles corbes tancades sobre el front d'ones. El sentit de gir en què es descriuen aquestes corbes defineix l'helicitat de l'ona. En cas que la corba siga una circumferència, l'ona estarà polaritzada circularment; si fora una el·lipse, ens trobarem amb una ona amb polarització el·líptica. El mateix és vàlid per a una funció que retrocedeix $g(\xi + ct)$.

Trobem un exemple d'aquestes polaritzacions quan les components del camp elèctric estan desfasades a $\pi/2$ radians, com podem deduir del que hem explicat anteriorment pel que fa a les funcions f_1 i f_2 . Així, en un punt determinat situat en un pla del front d'ones, un camp elèctric amb desfasament $\pi/2$, es pot escriure com:

$$\vec{E}(t) = E_0 \cos(\omega t) \vec{u}_x + E_0 \cos(\omega t + \pi/2) \vec{u}_y$$

$$\vec{E}(t) = E_0 \cos(\omega t) \vec{u}_x - E_0 \sin(\omega t) \vec{u}_y$$

Això descriu un camp elèctric rotant en el pla x, y , que és una ona amb polarització circular (si les amplituds són iguals, com és el cas) o polarització el·líptica (si les amplituds foren diferents). En l'exemple anterior en què el mòdul és constant (E_0), el sentit de la rotació amb desfasament $+\pi/2$, en què el camp elèctric gira en sentit antihorari defineix la polarització circular levogira, vista en la direcció de propagació; per la seua banda, amb desfasament $-\pi/2$, el camp elèctric gira en sentit horari, cosa que correspon a la polarització circular dextrogira.

Bibliografia per a l'apartat 8.4

Cheng, David K., L6 i L7.

8.5. Ones planes amb variació temporal harmònica

En l'exemple anterior, hem vist una forma de variació temporal harmònica. Analitzem-ho amb més detall. Siga un camp elèctric de la forma

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \sin k (\xi - ct) \quad \text{o} \quad \vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \cos k (\xi - ct)$$

on k és una constant que preserva la adimensionalitat de l'argument.

També podem fer ús de la formulació complexa i quedar-nos al final amb la part real o la imaginària,

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{ik (\xi - ct)}$$

en què podem incloure un desfasament

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i[k (\xi - ct) + \varphi]}$$

Aquest desfasament, de vegades, s'incorpora a l'amplitud, cosa que dona lloc a una amplitud complexa:

$$\widehat{E}_0 = \vec{E}_0 e^{i\varphi}$$

Si el senyal és harmònic, la dependència angular serà amb ωt , com ja sabem, i per això $kc = \omega$; a més, $\vec{n} \vec{r} = \xi$ i podem associar amb k (que anomenarem el nombre d'ones), una direcció $\vec{n}$ (la direcció de propagació $k \vec{n} = \vec{k}$). El mòdul del nombre d'ones és:

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{cT} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

on apareix la ben coneguda longitud d'ona. De fet, k no és més que el nombre d'ones que caben en 2π .

Amb totes aquestes consideracions, el camp elèctric es formula així:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i[\vec{k}\vec{r} - \omega t + \varphi]}$$

i les equacions de Maxwell, en absència de càrregues i corrents, tenint en compte el comportament de les derivacions espacials i temporals

$$\nabla \rightarrow i\vec{k} \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\omega$$

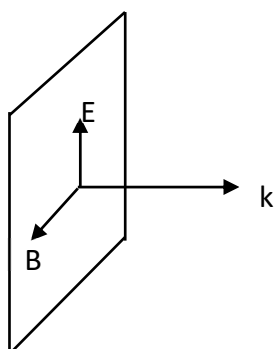
quedaran així:

$$\nabla \vec{E} = 0 \rightarrow i\vec{k} \vec{E}_0 e^{i[\vec{k}\vec{r} - \omega t + \varphi]} = 0 \rightarrow \vec{k} \vec{E}_0 = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \rightarrow i\vec{k} \times \vec{E}_0 e^{i[\vec{k}\vec{r} - \omega t + \varphi]} = (i\omega) \vec{B}_0 e^{i[\vec{k}\vec{r} - \omega t + \varphi]} \rightarrow \vec{k} \times \vec{E}_0 = \omega \vec{B}_0$$

$$\nabla \vec{B} = 0 \rightarrow i\vec{k} \vec{B}_0 e^{i[\vec{k}\vec{r} - \omega t + \varphi]} = 0 \rightarrow \vec{k} \vec{B}_0 = 0$$

$$\nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \rightarrow i\vec{k} \times \vec{B}_0 e^{i[\vec{k}\vec{r} - \omega t + \varphi]} = \frac{1}{c^2} (-i\omega) \vec{E}_0 e^{i[\vec{k}\vec{r} - \omega t + \varphi]} \rightarrow \vec{k} \times \vec{B}_0 = -\frac{\omega}{c^2} \vec{E}_0$$



Aquestes equacions representen la transversalitat de les ones, ja deduïda anteriorment, pel que fa a la direcció de propagació i la forma de l'ona monocromàtica que avança, alhora que expliciten la relació entre els mòduls.

➤ Suposem una ona el camp elèctric de la qual està donat per

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_0 \left(\vec{u}_x + \vec{u}_y e^{j\frac{\pi}{2}} + \vec{u}_z e^{-j\frac{\pi}{2}} \right) e^{j[\pi\sqrt{2}(x+y) - \omega t]}$$

Com a exercici, podem escriure l'ona anterior en notació amb sinus i cosinus, comprovar si es tracta d'una ona plana, és a dir, satisfà l'equació d'ones, i determinar-ne la velocitat de propagació.

Bibliografia per a l'apartat 8.5

Wangsness, Roald K., L24.

8.6. Contingut complementari

8.6.1. Equacions de Maxwell en conductors

Al llarg del curs, hem centrat l'atenció en el problema electromagnètic en el buit; en diverses ocasions, però, hem parlat dels conductors tant en la situació d'equilibri com en la de ser els "cables" pels quals circula el corrent.

Si considerem un conductor ideal, la seua conductivitat serà infinita ($\sigma \rightarrow \infty$), la qual cosa, si tenim una densitat de corrent $\vec{J}$ finit, "obliga" que el camp elèctric s'haja de considerar nul. Tot i això, ja hem vist que el conductor real sempre tindrà una certa resistència, la qual cosa implica la presència d'una conductivitat finita.

Dins d'un conductor la permitivitat i la permeabilitat del qual siguen les del buit però que tinga una certa conductivitat (σ), les equacions de Maxwell en absència d'excés de càrrega són:

$$\nabla \vec{E} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

$$\nabla \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{B} - \mu_0 \left(\sigma \vec{E} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = 0$$

A partir d'aquestes equacions i seguint un procediment semblant al de l'apartat 8.4, podem trobar les equacions d'ones planes amb l'estructura següent:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} - \mu_0 \sigma \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0$$

Això introdueix un terme d'esmoreïment responsable de l'aparició de l'efecte pell, del qual hem parlat en l'apartat 5.1, que fa que l'ona decreixa com a $e^{-\frac{z}{\delta}}$, essent z la distància des de la superfície del conductor i δ la denominada profunditat de penetració ($\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\sigma\mu}}$).

Quan un camp variable amb el temps amb una freqüència ω flueix per un conductor, no es distribueix d'una manera uniforme en tota la secció transversal, sinó que tendeix a concentrar-se prop de la superfície externa del conductor i deixa l'interior amb menys corrent. Així doncs, la resistència elèctrica és més gran que en el cas de corrent continu, atès que el corrent es concentra en una franja superficial, de manera que l'àrea efectiva per a la conducció es redueix i la resistència augmenta respecte a quan el corrent és continu.

Això té efectes pràctics notables, ja que, per a la conducció d'alta freqüència, s'usen conductors buits (tubs metàl·lics), perquè l'interior gairebé no condueix, i així se'n redueix el cost. També es fan servir fils trenats especials que divideixen el corrent en molts filaments fins per a reduir pèrdues.

A freqüències molt altes (MHz, GHz), la profunditat de l'efecte pell pot ser de micròmetres. Per això en guies d'ona i antenes només cal recobrir el metall amb una capa conductora (p. ex., coure platejat).

D'altra banda, apareixen pèrdues per escalfament, atès que, en augmentar la resistència, s'incrementen les pèrdues per efecte Joule. Això esdevé crític en transformadors, motors i línies de transmissió d'alta freqüència.

Bibliografia de la lliçó 8

Cheng, David K., *Fundamentos de Electromagnetismo para ingeniería*. Pearson Educación, 1997.

Feynman, Richard, Leighton, Robert B. & Sands, Matthew. *Física vol. II: Electromagnetismo y Materia*. Addison-Wesley Iberoamericana, 1987.

Griffiths, David J., *Introduction to Electrodynamics*. Prentice Hall, 1989.

Jackson, John David, *Electrodinámica clásica*. Pearson Alhambra, 2a edició, 1980.

Panofsky, Wolfgang K.H. & Phillips, Melba, *Classical Electricity and Magnetism*. Dover Addison-Wesley Publishing Company Inc., Series in Advanced Physics, 2a edició, 1962.

Reitz, John R., Milford, Frederick J. & Christy, Robert W., *Fundamentos de la Teoría Electromagnética*. Addison-Wesley Iberoamericana, 4a edició, 1996.

Wangsness, Roald K. *Campos electromagnéticos*. Limusa-Noriega, 14a reimpressió, 2001.

Epíleg

En aquest manual, hem oferit una visió general de la interacció electromagnètica en el buit, plantejada com una teoria de camps i centrada en l'estudi de les propietats matemàtiques i dels efectes dels camps elèctric i magnètic, que conflueixen en el camp electromagnètic i en la seua formulació mitjançant les equacions de Maxwell.

La formulació d'aquestes equacions, sustentada en els resultats experimentals de Coulomb, Faraday, Ampère i altres, va unificar d'una manera definitiva els fenòmens elèctrics i magnètics dins d'un marc teòric d'una coherència extraordinària. Des d'una perspectiva històrica, poques teories han mostrat un grau tan notable de consistència interna i de fecunditat en les seues aplicacions. El formalisme de l'electromagnetisme no sols presenta una profunda bellesa matemàtica, reflectida en les seues simetries i lleis de conservació (que s'analitzen en *Electromagnetisme II*), sinó que també ha transcendit la física clàssica i ha servit de base per a l'electrodinàmica quàntica, la teoria de la radiació i bona part de la física moderna de partícules.

La formulació diferencial i integral de les equacions de Maxwell, juntament amb la introducció dels potencials, proporciona una bastida matemàtica rigorosa per a l'anàlisi dels camps. Aquest marc constitueix un punt de partida indispensable per a abordar problemes avançats en regions acotades, en sistemes amb condicions de contorn específiques o en geometries d'interès físic i tecnològic.

Més enllà del seu valor conceptual, l'electromagnetisme ha impulsat innumbrables avenços tecnològics, des de les telecomunicacions fins a l'electrònica contemporània, i ha actuat com a pont entre la teoria fonamental i les aplicacions pràctiques. Abordar en aquesta assignatura i en aquest manual l'estudi de l'electromagnetisme en el buit, ofereix les eines necessàries per a comprendre fenòmens en medis materials, plasmes, guies d'ona i altres sistemes de rellevància, així com per a accedir a formulacions quàntiques del camp electromagnètic. En aquest sentit, el buit, lluny de ser un mer "espai buit", es mostra com un medi en què els camps es propaguen transportant energia.

Concloure aquest estudi de l'electromagnetisme no vol dir tancar un capítol, sinó consolidar els fonaments en els quals es basen desenvolupaments posteriors. Aquest manual es tanca, doncs, amb la convicció que el domini dels principis exposats ací constitueix un aspecte formatiu essencial per l'elegància formal de la teoria desenvolupada, així com per l'abast universal que té.

L'electromagnetisme en el buit representa, en definitiva, un exemple privilegiat de com la física aconsegueix combinar senzillesa conceptual i validesa universal. Tant de bo aquestes pàgines servisquen no sols com a suport acadèmic, sinó també com a inspiració per a continuar explorant el vast entramat de lleis que governen el nostre univers.

Annex

A1. Operacions Vectorials: Producte escalar i vectorial

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = \vec{a} \cdot [\vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{d})] = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{d})\vec{c} - (\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c})\vec{d}$$

$$\nabla(\phi\psi) = \phi\nabla\psi + \psi\nabla\phi$$

$$\nabla(\phi\vec{a}) = \vec{a}\nabla\phi + \phi\nabla\vec{a}$$

$$\nabla \times (\phi\vec{a}) = \phi\nabla \times \vec{a} - \vec{a} \times \nabla\phi$$

$$\nabla (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\nabla \times \vec{a}) - \vec{a} \cdot (\nabla \times \vec{b})$$

$$\nabla \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a}(\nabla \cdot \vec{b}) - \vec{b}(\nabla \cdot \vec{a}) + (\vec{b} \cdot \nabla)\vec{a} - (\vec{a} \cdot \nabla)\vec{b}$$

$$\nabla (\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a}(\nabla \cdot \vec{b}) + \vec{b}(\nabla \cdot \vec{a}) + (\vec{b} \cdot \nabla)\vec{a} + (\vec{a} \cdot \nabla)\vec{b}$$

$$\nabla^2\phi = \nabla \cdot \nabla\phi$$

$$\nabla^2\vec{a} = \nabla(\nabla \cdot \vec{a}) - \nabla \times (\nabla \times \vec{a})$$

Aquest laplaciana en coordenades cartesianes (però només en aquestes coordenades) es pot expressar com:

$$\nabla^2\vec{a} = \nabla^2 a_x \vec{u}_x + \nabla^2 a_y \vec{u}_y + \nabla^2 a_z \vec{u}_z$$

$$\nabla \times \nabla \phi = 0$$

$$\nabla(\nabla \times \vec{a}) = 0$$

A2. Relacions integrals

$$\oint_S \vec{a} \, d\vec{S} = \int_V \nabla \vec{a} \, dv$$

$$\oint_S \phi \, d\vec{S} = \int_V \nabla \phi \, dv$$

$$\oint_S d\vec{S} \times \vec{a} = \int_V \nabla \times \vec{a} \, dv$$

$$\oint_C \phi \, d\vec{l} = \int_S d\vec{S} \times \nabla \phi$$

$$\oint_C \vec{a} \, d\vec{l} = \int_S (\nabla \times \vec{a}) \, d\vec{S}$$

A.3. Operadors vectorials diferencials

A.3.1. Coordenades cartesianes

A.3.1.1. Gradient

$$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial \phi}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{u}_z$$

A.3.1.2. Divergència

$$\nabla \cdot \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

A.3.1.3. Rotacional

$$\nabla \times \vec{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \vec{u}_x - \left(\frac{\partial a_z}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial z} \right) \vec{u}_y + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \vec{u}_z$$

A.3.1.4. Laplacà

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$

A.3.1.5. Laplacà d'un camp vectorial $\vec{a}$

$$(\nabla^2 \vec{a})_x = \nabla^2 a_x$$

$$(\nabla^2 \vec{a})_y = \nabla^2 a_y$$

$$(\nabla^2 \vec{a})_z = \nabla^2 a_z$$

A.3.2. Coordenades cilíndriques

A.3.2.1. Gradient

$$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \vec{u}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{u}_z$$

A.3.2.2. Divergència

$$\nabla \cdot \vec{a} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho a_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

A.3.2.3. Rotacional

$$\nabla \times \vec{a} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial a_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial z} \right) \vec{u}_\rho - \left(\frac{\partial a_z}{\partial \rho} - \frac{\partial a_\rho}{\partial z} \right) \vec{u}_\varphi + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial (\rho a_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{\partial a_\rho}{\partial \varphi} \right) \vec{u}_z$$

A.3.2.4. Laplacà

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$

A.3.2.5. Laplacà d'un camp vectorial $\vec{a}$

$$(\nabla^2 \vec{a})_r = \nabla^2 a_r - \frac{a_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi}$$

$$(\nabla^2 \vec{a})_\varphi = \nabla^2 a_\varphi - \frac{a_\varphi}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial a_r}{\partial \varphi}$$

$$(\nabla^2 \vec{a})_z = \nabla^2 a_z$$

A.3.3. Coordenades esfèriques

A.3.3.1. Gradient

$$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi$$

A.3.3.2. Divergència

$$\nabla \cdot \vec{a} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta a_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi}$$

A.3.3.3. Rotacional

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{a} = & \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial(\sin \theta a_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial \varphi} \right) \vec{u}_r - \left[\frac{1}{r} \frac{\partial(r a_\varphi)}{\partial r} - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} \right] \vec{u}_\theta \\ & + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r a_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \right) \vec{u}_\varphi \end{aligned}$$

A.3.3.4. Laplacà

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2}$$

A.3.3.5. Laplacà d'un camp vectorial $\vec{a}$

$$(\nabla^2 \vec{a})_r = \nabla^2 a_r - \frac{2a_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \left(\frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} a_\theta + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} \right)$$

$$(\nabla^2 \vec{a})_\theta = \nabla^2 a_\theta - \frac{2a_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2} \left(\frac{\partial a_r}{\partial \theta} - \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} \right)$$

$$(\nabla^2 \vec{a})_\varphi = \nabla^2 a_\varphi - \frac{2a_\varphi}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} + \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \frac{\partial a_\theta}{\partial \varphi} \right)$$

A.4. Polinomis de Legendre

A.4.1. Definició

Els polinomis de Legendre, $P_n(x)$, són solució de l'equació diferencial

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0$$

amb $y = P_n(x)$.

De manera explícita, queden definits per:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{m=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^m \binom{n}{m} \binom{2n-2m}{n} x^{n-2m}$$

on n és un nombre enter no negatiu ($n = 0, 1, 2, \dots$) i $\lfloor n/2 \rfloor$ significa el nombre enter més gran menor o igual a $n/2$.

Recordem que

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)! m!}$$

La fórmula de Rodrigues permet una definició alternativa, a partir de:

$$P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(1 - x^2)]^n$$

Els primers polinomis de Legendre són:

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

A.4.2. Algunes propietats dels polinomis de Legendre

- Els polinomis de Legendre compleixen la relació de recurrència:

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)$$

- El valor per a l'argument unitat, $\forall n$, és:

$$P_n(1) = 1$$

- Són ortogonals:

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = \begin{cases} 0 & \forall n \neq m \\ \frac{2}{2n+1} & \text{si } n = m \end{cases}$$

I, per tant, es compleix:

$$\int_{-1}^1 [P_n(x)]^2 dx = \frac{2}{2n+1}$$

- Desigualtat:

$$|P_n(x)| \leq 1 ; -1 \leq x \leq 1$$

- Valor dels polinomis de Legendre en zero:

$$P_n(0) = \begin{cases} \text{si } n \text{ és parell} & P_n(0) \neq 0 \\ \text{si } n \text{ és imparell} & P_n(0) = 0 \end{cases}$$

$$P_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2^n n!}$$

- Paritat:

$$P_m(-x) = (-1)^m P_m(x)$$

Bibliografía general

- Apostol, Tom M., *Calculus: Cálculo con Funciones de Varias Variables y Álgebra Lineal*, vol. 2. Reverté, 1973.
- Arfken, George B. & Weber, Hans J., *Mathematical Methods for Physicists*. Elsevier, 6a edició, 2005.
- Benito, Emilio, *Problemas de campos electromagnéticos* / E. Benito Madrid: AC, D.L. 1985
- Cheng, David K. Fundamentos de Electromagnetismo para ingeniería. Pearson Educación, 1997.
- Costa Quintana, Joan & López Aguilar, Fernando, *Interacción Electromagnética. Teoría Clásica*. Reverté, 2007.
- Feynman, Richard, Leighton, Robert B. & Sands, Matthew. *Física vol. II: Electromagnetismo y Materia*. Addison-Wesley Iberoamericana, 1987.
- Griffiths, David J. *Introduction to Electrodynamics*. Prentice Hall, 1989.
- Jackson, John David, *Electrodinámica clásica*. Pearson Alhambra, 2a edició, 1980.
- Kittel, Charles, *Introduction to Solid State Physics*. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 9a edició (Global Edition), 2018.
- Macchi, Andrea, Moruzzi, Giovanni & Pegoraro, Francesco, *Problems in Classical Electromagnetism*. Springer, 2017.
- Marqués, Ricardo, *Notas de la asignatura Electromagnetismo*. Universidad de Sevilla, 2003.
- Marsden, Jerrold E. & Tromba, Anthony, *Vector Calculus*. W. H. Freeman & Company · New York, 6a edició, 2012.
- Morse, Philip M. & Feshbach, Herman. *Methods of Theoretical Physics. Vol. I*. New York: McGraw-Hill, 1953.
- Panofsky, Wolfgang K.H. & Phillips, Melba, *Classical Electricity and Magnetism*. Dover Addison-Wesley Publishing Company Inc., Series in Advanced Physics, 2a edició, 1962.
- Reitz, John R., Milford, Frederick J. & Christy, Robert W. *Fundamentos de la Teoría Electromagnética*. Addison-Wesley Iberoamericana, 6a edició, 1996.
- Wangsness, Roald K. *Campos Electromagnéticos*. Limusa-Noriega, 14a reimpressió, 2001.