
Mec X nica de Fwi2

ESTHER CABEZAS-RIVAS

15 de diciembre de 2020

Apuntes de teoría y colección de ejercicios para que contienen una aproximación matemática a la Mecánica de Fluidos para grados relacionados con Física, Matemáticas e Ingenierías.

Esta obra está bajo una licencia [Creative Commons](#) “Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional”.



Contenidos

Introducción	1
1. Propiedades básicas de un fluido	3
1.1. ¿Qué es un fluido?	3
1.1.1. Primeras ideas intuitivas	3
1.1.2. Estructura microscópica de los distintos estados de la materia	3
1.1.3. Definición rigurosa	4
1.2. ¿Cómo estudiar los fluidos? La hipótesis del continuo	5
1.3. Propiedades básicas de los fluidos	6
1.3.1. Viscosidad	6
Ley de viscosidad de Newton	7
Fluidos Newtonianos y no Newtonianos	9
1.3.2. Presión	10
1.3.3. Densidad	11
Densidad versus viscosidad	11
Fluidos compresibles e incompresibles	12
1.3.4. Relación entre propiedades: ecuación de estado	13
1.4. Otras propiedades de los líquidos	14
1.4.1. Cavitación	14
1.4.2. Tensión superficial	14
1.4.3. Capilaridad	15
1.5. Ejercicios	16
1.5.1. Viscosidad	16
1.5.2. Otras propiedades	17
2. Cinemática: análisis del movimiento de los fluidos	19
2.1. Enfoque lagrangiano y euleriano	19
2.2. Clasificación de los flujos según la velocidad	20
2.2.1. El campo de velocidad de un flujo	20
2.2.2. Clasificación según la dependencia espacio-temporal de la velocidad	21
2.3. Visualización de flujos	22
2.3.1. Técnicas experimentales	22
2.3.2. Trayectorias, trazas y líneas de corriente	23
2.4. Otras clasificaciones de los flujos	24
2.4.1. Flujo rotacional e irrotacional	25
2.4.2. Flujos reales e ideales	26

2.4.3.	Flujo laminar y turbulento	26
2.5.	Derivada material	28
2.6.	Ecuación de continuidad (forma diferencial)	29
2.6.1.	Teorema del Transporte General	30
2.6.2.	Ecuación de continuidad	31
2.7.	Ecuación de continuidad (forma integral)	32
2.7.1.	Sistema versus volumen de control	32
2.7.2.	Teorema del Transporte de Reynolds	33
2.7.3.	Ecuación de continuidad	33
2.8.	Ejercicios	35
2.8.1.	Visualización del flujo	35
2.8.2.	Derivada material y campo de velocidad	38
2.8.3.	Ecuación de continuidad (forma diferencial)	38
2.8.4.	Ecuación de continuidad y caudal	39
3.	Ecuaciones fundamentales de la Dinámica de fluidos	43
3.1.	Ecuación de Euler	43
3.1.1.	Fuerzas que actúan sobre una región fluida	43
3.1.2.	Movimiento de fluidos no viscosos	44
3.1.3.	Un par de soluciones exactas de Navier-Stokes	45
3.2.	Ecuaciones del momento lineal y angular	46
3.3.	Aplicaciones de la ecuación de Euler	47
3.3.1.	Estática de fluidos	47
	Instrumentos para medir la presión	49
3.3.2.	Ecuación de Bernoulli	50
3.3.3.	Principio de Arquímedes	51
3.4.	Ejercicios	52
3.4.1.	Deducción de las ecuaciones fundamentales	52
3.4.2.	Ecuación de Euler	53
3.4.3.	Ecuación del momento lineal	54
3.4.4.	Ecuación del momento angular	56
4.	Aplicaciones	59
4.1.	Fuerzas provocadas por la presión hidrostática	59
4.1.1.	Fuerzas sobre superficies sumergidas planas	59
4.1.2.	Caso particular: superficies planas rectangulares	60
4.1.3.	Fuerzas sobre superficies sumergidas curvas	61
4.2.	Flujo a presión y turbomáquinas	61
4.2.1.	Sistemas de flujo a presión	61
4.3.	Ejercicios	62
4.3.1.	Estática de fluidos	62
4.3.2.	Aplicaciones de la ecuación de Bernoulli	64
4.3.3.	Ejercicios de repaso	67
4.4.	Ejercicios de fuerzas provocadas por presión hidrostática.	73
4.4.1.	Superficies planas: método general	73
4.4.2.	Superficies planas rectangulares: prisma de presiones	74

4.4.3. Superficies curvas	78
4.5. Ejercicios de flujo a presión y turbomáquinas	82
4.5.1. Pérdidas de carga por fricción	82
4.5.2. Pérdidas localizadas o menores	84
4.5.3. Bombeo	87
4.6. Ejercicios de flujo en lámina libre	90
A. Problemas de todos los temas	96

Introducción

Las primeras preguntas obvias que debemos contestar son:

¿Qué estudia la mecánica de fluidos?
¿Por qué necesitamos una asignatura sobre ella?

La **mecánica de fluidos** puede definirse como la parte de la física que estudia los fluidos, pero no en general, sino centrándose en entender los aspectos mecánicos de su comportamiento, es decir, su movimiento, presión, cómo alteran el movimiento de los objetos sumergidos en ellos, etc. Del estudio de otras facetas que pudieran afectar a los medios fluidos se ocupan otras ramas, por ejemplo, la **termodinámica** aborda los cambios de temperatura.

Obviamente la descripción anterior carece de sentido si no definimos qué se entiende por fluido, pero a ello está dedicado el tema 1 en su totalidad. Así pues, por el momento nos basta con la noción intuitiva de que la palabra fluido engloba líquidos y gases.

Dentro de la mecánica de fluidos distinguiremos tres ramas básicas:

- **Cinemática:** describe el movimiento de los fluidos (trayectorias, velocidad, aceleración) sin tener en cuenta las causas que lo generan.
- **Dinámica:** estudia el movimiento con el foco puesto en las fuerzas que lo producen.
- **Estática:** analiza los fluidos en equilibrio o reposo.

Aunque se pueden mencionar multitud de aplicaciones más o menos sofisticadas de la mecánica de fluidos en ingeniería, vamos a justificar su estudio por dos motivos tan elementales como fundamentales: aproximadamente el 70 % de la superficie de nuestro planeta está cubierta por agua y el 100 % por aire; en consecuencia, toda actividad (ingenieril o no) ocurre dentro de un fluido. Por si esto fuera poco, la supervivencia del planeta depende de que seamos capaces de comprender el comportamiento y asegurar el suministro de estos dos fluidos.

Sin embargo, pese a dicha importancia, resulta tentador pensar que bastaría con aplicar la mecánica clásica al estudio de los fluidos. Recordemos que la mecánica es la rama de la física que analiza el movimiento de las partículas puntuales y establece principios generales

para explicar su comportamiento. Entonces, ¿por qué no aplicarla directamente al estudio de líquidos y gases?

Recordemos de los cursos de física elemental que la mecánica se aplica sin problemas al estudio del movimiento de una sola partícula. La situación se complica bastante si tenemos dos partículas que interactúan, y podemos imaginar lo difícil que sería si tuviéramos 100 partículas. Teniendo esto presente, pensemos que en un litro de agua habría aproximadamente 33 cuatrillones de moléculas, que además están en constante movimiento. Es por ello que no resulta práctico aplicar las leyes de Newton, por ejemplo, a cada molécula por separado. Así pues, necesitamos adaptarlas descubriendo nuevas leyes y principios que se apliquen a todas las moléculas en su conjunto.

Tema 1

Propiedades básicas de un fluido

1.1. ¿Qué es un fluido?

1.1.1. Primeras ideas intuitivas

En una primera aproximación, podemos definir los fluidos como sigue:

Definición 1.1: Fluido (intuición)

Los fluidos engloban aquellas sustancias que carecen de forma propia y, por tanto, se caracterizan por la capacidad de *fluir*, esto es, de cambiar de forma y adaptarse al recipiente que las contiene.

Esta idea nos permite diferenciar un ladrillo, del agua o el aire contenido en un globo. En efecto, el ladrillo no es capaz de fluir y tiene la misma forma dentro de un barril que encima de una mesa; sin embargo, el agua se adapta a la forma de la botella y lo mismo sucede con cualquier gas, como el aire dentro de un globo.

Pero esta distinción es una mera idealización de la realidad: no hay barreras rígidas que separen sólidos de fluidos, todo es cuestión de grado. Para obtener una medida cuantitativa de la fluidez o no de una sustancia, introduciremos posteriormente el concepto de **viscosidad**.

1.1.2. Estructura microscópica de los distintos estados de la materia

Los distintos estados de la materia (sólido, líquido y gas) poseen diferente estructura microscópica, lo que explica que el comportamiento difiera de unos a otros. Los tres estados tienen en común la naturaleza discreta de la materia, es decir, que está formada por partículas (moléculas, átomos, etc.), pero se diferencian en cómo dichas partículas están asociadas entre ellas.

-
- **Sólidos:** a nivel microscópico nos los podemos imaginar como pequeñas bolitas unidas formando una red por alambres muy resistentes e indeformables, los cuales representan las fuerzas eléctricas entre las partículas. Esta estructura explica que, a condiciones estables de temperatura, los sólidos se muevan como un todo, manteniendo constante la distancia entre las partículas. Esto justifica su estudio como objetos puntuales en mecánica clásica.
 - **Líquidos:** siguiendo con la analogía anterior, aquí desaparecen los alambres, por lo que las bolitas/partículas ya no ocupan posiciones fijas. No obstante, hemos de pensar en ellas como bolitas imantadas, de tal manera que las fuerzas intermoleculares son lo suficientemente intensas para que la distancia entre las partículas apenas cambie, pese a que puedan deslizarse y moverse unas respecto de otras. En definitiva, un líquido puede cambiar la forma pero no el volumen, mientras que en un sólido ambos se mantienen.
 - **Gases:** es el estado más caótico de la materia, pues las fuerzas intermoleculares son tan débiles que ya no se mantiene la distancia entre las moléculas. Estas se encuentran en constante y errático movimiento, chocando entre ellas y con las paredes del recipiente que contenga al gas en cuestión. Se trata de sustancias *compresibles*, ya que podemos forzar cambios también en el volumen de un gas, a diferencia de lo que ocurre con un líquido.

1.1.3. Definición rigurosa

En general los fluidos ejercen fuerzas tanto tangenciales como normales sobre las superficies con las que están en contacto (tanto de un recipiente como de elementos fluidos adyacentes). En este apartado nos centraremos en la componente tangencial de la fuerza:

Definición 1.2: Esfuerzo cortante

Se llama esfuerzo cortante (medio) a la fuerza tangencial por unidad de área:

$$\bar{\tau} = \frac{F^T}{A},$$

donde F es la fuerza aplicada sobre un área finita A .

La reacción ante dicho esfuerzo cortante cambia si se trata de sólidos o fluidos. En efecto, si aplicamos un esfuerzo cortante sobre un bloque de acero, este no empieza a deformarse hasta que no apliquemos una fuerza lo suficientemente extrema. Pero si hacemos lo mismo con agua, es indiferente cómo de pequeño sea el esfuerzo cortante, pues siempre se produce deformación. Esto nos motiva a definir:

Definición 1.3: Fluido

Un fluido es una sustancia que se deforma de manera continua al aplicarle un esfuerzo cortante, incluso si este es arbitrariamente pequeño.

Esta definición nos sirve para descartar sustancias que aparentemente fluyen. Pensemos en la diferencia entre volcar sobre una mesa una taza de azúcar y una de café:

- El azúcar se puede verter sobre una mesa, sin embargo, al hacerlo se acumula en forma de pila. Los granos de su superficie estarán entonces sometidos a algún esfuerzo cortante (dado por la proyección tangencial de las fuerzas gravitatorias). Pero la pila mantiene su forma, luego no se trata de un fluido.
- En contraste, si vertemos café sobre la mesa, se extiende mientras no encuentre algo que lo frene, pero no se apila. Luego no puede resistirse a los esfuerzos cortantes inducidos por las fuerzas gravitatorias, confirmando que se trata de un fluido.

1.2. ¿Cómo estudiar los fluidos? La hipótesis del continuo

Como hemos visto anteriormente, los fluidos son agregaciones de moléculas que no permanecen fijas en un retículo, sino que se mueven libre y constantemente unas respecto de otras. En los gases están ampliamente espaciadas, mientras que en los líquidos se encuentran muy próximas, pero en ambos casos la distancia entre moléculas (d_m) es mucho mayor que el diámetro molecular.

La consecuencia de esta estructura dinámica es que propiedades como la densidad (masa por unidad de volumen) carezcan de significado preciso para un fluido, pues el número de moléculas que ocupan un cierto volumen $\delta\mathcal{V}$ fijo está cambiando constantemente. Además, también es imposible controlar el movimiento (velocidad y posición) de cada partícula individual.

La manera de solventar esto es aumentar la escala y trabajar con una porción de fluido $\delta\mathcal{V}^*$ que cumpla simultáneamente dos características:

- $\delta\mathcal{V}^* \gg d_m^3$, pues así el número de moléculas dentro de $\delta\mathcal{V}$ es lo suficientemente grande para que permanezca aproximadamente constante, pese al enorme intercambio de partículas a través de sus fronteras. Esto hará que la densidad varíe de forma continua y suave (sin fluctuaciones bruscas).
- $\delta\mathcal{V}^* \ll D^3$, siendo D a la escala macroscópica (por ejemplo, representada por el diámetro de la tubería por donde transita el fluido). Nos conviene trabajar en este rango para poder seguir tratando a $\delta\mathcal{V}^*$ como un punto en el espacio. Esto difiere de un punto en el sentido tradicional (ya que tiene volumen distinto de cero), pero es perfectamente viable para nuestro objetivo ya que la mayoría de problemas en ingeniería se refieren a tamaños $\gg \delta\mathcal{V}^*$.

Al volumen crítico $\delta\mathcal{V}^*$ cumpliendo las dos características anteriores lo llamaremos **partícula o elemento fluido**. Intuitivamente resulta útil pensar en $\delta\mathcal{V}^*$ como una gota de agua. La consecuencia fundamental es que dentro del rango $\delta\mathcal{V}^* \leq \delta\mathcal{V} \ll D^3$ las propiedades del fluido son funciones suaves (diferenciables) independientemente del valor concreto de $\delta\mathcal{V}$.

Para hacernos una idea del orden de magnitud que estamos considerando, en fluidos a presión atmosférica, se tendría $\delta\mathcal{V}^* \approx 10^{-9} \text{ mm}^3$, dicho volumen contiene por ejemplo $3 \cdot 10^7$ moléculas de aire en condiciones estándar, lo cual es suficiente para que las variaciones entre las agregaciones moleculares no supongan distorsiones bruscas del valor de la densidad (ρ).

Propiedad 1.4: Hipótesis del continuo

Consiste en considerar los fluidos como un estado continuo y homogéneo de la materia, ignorando los espacios vacíos entre las moléculas. Esta idealización simplifica el estudio de los fluidos porque permite tratar cualquier propiedad como si fuera una función continua (de hecho, diferenciable) definida en todo punto de la región del espacio que ocupa el fluido, durante un intervalo de tiempo.

La ventaja de esta simplificación de la realidad es que las propiedades varían de un punto a otro de manera suave y, por tanto, podemos aplicar las técnicas del cálculo diferencial para analizar el comportamiento de los fluidos.

Por ejemplo, cuando hablamos de velocidad de una partícula fluida nos referimos a la velocidad media de todas las partículas que ocupan $\delta\mathcal{V}^*$ en un determinado instante. Por otro lado, ya podemos definir la densidad como función en todo punto de la región que ocupa un fluido (ver Definición 1.14), así como el esfuerzo cortante en cada punto de su superficie:

Definición 1.5: Esfuerzo cortante en un punto

El esfuerzo cortante en cualquier punto $p = (x, y, z)$ de la superficie de un fluido en un instante t viene dado por la función $\tau(p, t)$ con

$$\tau = \lim_{\delta A \rightarrow 0} \frac{\delta F^T}{\delta A},$$

donde “ $\delta A \rightarrow 0$ ” significa que el área se contrae a un área crítica alrededor del punto p : $\delta A \rightarrow \varepsilon^2$, siendo $\varepsilon > 0$ tal que $\delta\mathcal{V}^* \propto \varepsilon^3$.

En definitiva, podemos concluir que consideramos un fluido como toda materia sin discontinuidades, con propiedades físicas uniformes y fácilmente deformable.

1.3. Propiedades básicas de los fluidos

El análisis de estas propiedades nos permitirá distinguir unos fluidos de otros, para así poder hacer estimaciones sobre el comportamiento de cada fluido concreto.

1.3.1. Viscosidad

Cuando tenemos dos sólidos en contacto y movemos uno de ellos, se genera una fuerza de fricción o rozamiento (F_R) en la superficie de contacto que actúa en la dirección opuesta al

movimiento. Por ejemplo, para mover un mueble sobre el suelo, debemos ejercer una fuerza horizontal mayor a F_R .

Análogamente, cuando tenemos un fluido en movimiento respecto de otro sólido o fluido, también se desarrolla una especie de fricción interna entre las distintas capas (como las hojas de un libro) cuando se las fuerza a moverse unas respecto de otras.

Definición 1.6: Viscosidad

Es la propiedad que representa la resistencia interna de un fluido al movimiento o *fluidez*.

La definición anterior no entra en contradicción con el concepto de fluido (ver Definición 1.3), puesto que siempre se va a producir movimiento. Aquí por resistencia entendemos que a mayor viscosidad la velocidad de deformación es más lenta.

Por experiencia sabemos de la existencia de esta propiedad y también es fácil deducir que depende del tipo de fluido. Así, nos movemos con facilidad en el aire, lo hacemos con más dificultad en el agua parece claro que sería difícil desplazarse en una piscina de aceite o miel.

Intuitivamente, si consideramos agua y miel para someter a ambas al mismo esfuerzo cortante bajo condiciones físicas similares (especialmente, a temperatura parecida), esperamos que el agua se deforme más fácilmente. Esto sucede porque su viscosidad es menor.

La experiencia también nos dice que la viscosidad depende de la temperatura, pero no afecta de la misma manera a líquidos y gases. En los líquidos la viscosidad disminuye con la temperatura; en efecto, pensemos qué sucede si calentamos miel en el microondas. Por el contrario, la viscosidad de un gas aumenta con la temperatura; de ahí que, cuando hace mucho calor, se use la expresión *el aire se puede cortar con un cuchillo*.

En cuanto a las causas que generan una mayor o menor resistencia a la deformación o viscosidad, en los líquidos se debe a la fuerza de cohesión entre las moléculas, mientras que en los gases está ocasionada por las colisiones moleculares.

Ley de viscosidad de Newton

Consideramos que tenemos una capa de un fluido comprendido entre dos placas horizontales a distancia h y de área A lo suficientemente grande para que los bordes no influyan sobre el movimiento del fluido.

Aplicamos una fuerza F tangencial a la placa superior, la cual provoca que la placa se mueva a velocidad constante U en la dirección del eje x . La placa inferior se mantiene fija. Para calcular la magnitud de dicha fuerza, nos será útil el siguiente hecho experimental:

Propiedad 1.7

En las condiciones anteriores, la fuerza F necesaria para producir un movimiento de la placa superior con velocidad constante U es directamente proporcional al área de la placa y a la velocidad, e inversamente proporcional a la distancia entre las placas:

$$F = \mu \frac{A \cdot U}{h},$$

siendo μ la constante de proporcionalidad a la que se llama **viscosidad** (absoluta o dinámica).

Claramente, cuanto más velocidad queramos imprimir a la placa, más fuerza necesitamos y costará más moverla cuanto mayor sea su área. Además, la placa inferior opone resistencia al movimiento para no dejarse arrastrar, pero este efecto disminuye al aumentar la distancia entre las placas y, por tanto, también es menor la fuerza necesaria para mover la placa superior.

Con estas condiciones, queremos hallar el perfil de velocidad del fluido, esto es, la distribución espacial del campo de velocidad V del fluido. Por la configuración del experimento, sabemos que $V = (u, 0, 0)$ y nos falta averiguar la función $u(y)$, que dependerá de la altura (medida con la coordenada y situando el cero en la placa inferior). La siguiente observación experimental nos indica su valor en los extremos.

Propiedad 1.8: Condición de no deslizamiento

Todo fluido se adhiere a su superficie de contacto y se mueve a su misma velocidad.

Esta afirmación es fácil de aceptar si pensamos que ninguna superficie es perfectamente lisa, sino que presenta hendiduras que atrapan a las partículas fluidas, las cuales se moverán en consecuencia al mismo ritmo que dicha superficie. En definitiva, esto nos lleva a

$$u(0) = 0 \quad \text{y} \quad u(h) = U.$$

Combinando las dos propiedades que acabamos de enunciar, se deduce:

Teorema 1.9: Ley de viscosidad de Newton (1687)

Si un fluido se mueve a capas en la dirección horizontal y su velocidad u varía de manera lineal entre los valores U y 0, el esfuerzo cortante es proporcional a la tasa de deformación angular o, alternativamente, al gradiente de velocidad, siendo la **viscosidad** μ la constante de proporcionalidad.

$$\tau = \mu \frac{U}{h} = \mu \frac{du}{dy} = \mu \frac{d\beta}{dt},$$

siendo β el ángulo del perfil de velocidades respecto a la vertical.

De aquí se concluye que la tasa de deformación angular del fluido bajo un esfuerzo constante

equivale al gradiente de la velocidad, donde $\frac{du}{dy}$ representa la tasa a la que cada capa se mueve respecto a la adyacente.

La constante de proporcionalidad es distinta según el fluido concreto que se encuentre entre las placas, por eso se considera la viscosidad como una propiedad característica de los fluidos.

Unidades: En el SI la viscosidad se mide en $\text{N} \cdot \text{s}/\text{m}^2 = \text{Pa} \cdot \text{s}$ ($= 1 \text{ pouseuille}$) o, equivalentemente, en $\text{kg}/\text{m} \cdot \text{s}$. Otras unidades habituales son

$$1 \text{ poise} = 0.1 \text{ Pa} \cdot \text{s} \quad 1 \text{ centipoise (cP)} = 0,01 \text{ poise}$$

El centipoise es una referencia útil, dado que la viscosidad del agua a 20°C es de 1,002 cP.

Fluidos Newtonianos y no Newtonianos

Dado que hemos hecho una serie de supuestos y simplificaciones para llegar a enunciar la ley de viscosidad de Newton, no todos los fluidos la cumplen.

Definición 1.10: Fluido Newtoniano

Se trata de aquellos fluidos que cumplen la ley de viscosidad de Newton. En caso contrario, diremos que se trata de un fluido **no Newtoniano**.

Los fluidos Newtonianos son los más frecuentes a nuestro alrededor (agua, aire, aceite, gasolina), mientras que la sangre o los plásticos líquidos serían no Newtonianos.

En general, se tiene

$$\tau = f\left(\frac{du}{dy}\right),$$

siendo esta relación lineal en fluidos Newtonianos; por tanto, la gráfica sería una recta cuya pendiente es la viscosidad. En el caso no Newtoniano, la gráfica es una curva cuya pendiente se conoce como *viscosidad aparente* y, dependiendo de sus características se distinguen diferentes tipos:

- **Pseudoplásticos:** se vuelven menos viscosos al aumentar el esfuerzo cortante. Por ejemplo, las pinturas plásticas que se suelen remover antes de pintar una pared con ellas.
- **Fluidos dilatantes:** son aquellos en los que la viscosidad aparente aumenta conforme se incrementa la velocidad de deformación. Es el caso de las mezclas de maicena y agua o el alioli.
- **Plásticos de Bingham:** resisten cierta cantidad de esfuerzo cortante (y, por tanto, se comportan como un sólido) hasta pasado cierto umbral a partir del cual se empiezan a deformar (y entonces se comportan como líquidos). Este comportamiento lo observamos en el ketchup, que no empieza a fluir hasta que no lo agitamos lo suficientemente fuerte.

1.3.2. Presión

Si bien en la definición de fluido interviene la fuerza tangencial por unidad de área, en este apartado nos ocupamos de la componente normal de la fuerza que actúa sobre la superficie de un fluido.

Definición 1.11: Presión

- La **presión media** sobre un área finita A es la fuerza normal por unidad de área:

$$\bar{P} = \frac{F^N}{A},$$

donde F^N denota la componente normal de la fuerza F .

- La **presión en un punto** viene dada por

$$P = \lim_{\delta A \rightarrow 0} \frac{\delta F^N}{\delta A},$$

donde el límite debe entenderse en el contexto de la hipótesis del continuo (ver Definición 1.5)

A escala microscópica la presión se genera por colisiones de las moléculas del fluido, o bien entre ellas o con las paredes del recipiente que las contiene.

Unidades: En el SI la presión se mide en *pascales*, siendo $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$. Pero hay otras unidades muy usadas en la práctica, por ejemplo, en meteorología.

- $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$.
- $1 \text{ atm (atmósfera)} = 760 \text{ mm Hg}$ (milímetros de mercurio) es la presión que ejerce la atmósfera terrestre a nivel del mar y se corresponde con la presión de una columna de mercurio de 760 mm de altura a 0°C bajo la aceleración normal de la gravedad.

Proposición 1.12: la presión es un escalar

La presión es un escalar en fluidos en reposo, en movimiento uniforme o no viscosos; es decir, cuando las únicas fuerzas que actúan son perpendiculares a la superficie del fluido.

En consecuencia, aunque aparentemente pensemos en la presión como un vector, se trata de una cantidad escalar, que no depende de la dirección, pues un punto en un fluido en equilibrio recibe la misma presión en todas direcciones. Si se tratara de un fluido viscoso aparecerían fuerzas tangenciales de rozamiento.

1.3.3. Densidad

Tenemos un bloque de madera y uno de plomo con la misma masa (que comprobamos haciendo uso de una balanza); no obstante, al colocarlos en una cubeta con agua observamos que la madera flota, mientras que el trozo de plomo se hunde. Esta diferencia se debe a que tienen distinta densidad.

Definición 1.13: Densidad media y peso específico

- La **densidad media** es la relación entre la masa de un cuerpo m y el volumen $\mathcal{V}$ que ocupa:

$$\bar{\rho} = \frac{m}{\mathcal{V}} \quad (\sim \text{kg/m}^3).$$

- El **peso específico** γ se refiere al peso por unidad de volumen y viene dado por

$$\gamma = \rho g \quad (\sim \text{N/m}^3),$$

donde $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ es la aceleración de la gravedad.

Notemos que entre paréntesis se indican las unidades de medida en el SI.

La densidad no es una propiedad específica de los fluidos, también tiene sentido en los sólidos. De hecho, aunque es lo más habitual, no siempre los sólidos son más densos que los fluidos; por ejemplo, la densidad del mercurio es de 13.6 g/cm^3 , superando con creces la densidad del hormigón (2 g/cm^3).

Definición 1.14: Densidad en un punto

Si un fluido ocupa una región $R \subset \mathbb{R}^3$ del espacio durante un intervalo temporal $I \subset \mathbb{R}$, la densidad es una función diferenciable $\rho : R \times I \rightarrow (0, \infty)$ dada por

$$\rho(p, t) = \lim_{\delta \mathcal{V} \rightarrow 0} \frac{\delta m}{\delta \mathcal{V}},$$

donde δm es la masa contenida en el volumen $\delta \mathcal{V}$ centrado en el punto $p \in R$ en el instante t .

El límite anterior debe entenderse en el contexto de la hipótesis del continuo, es decir, $\delta \mathcal{V} \rightarrow \delta \mathcal{V}^*$.

Densidad versus viscosidad

No debemos confundir la viscosidad con la densidad de un fluido, puesto que son propiedades diferentes. La primera determina la fluidez y la segunda es la relación entre la masa y el volumen. Por ejemplo,

- el agua es más densa que el aceite: si ambos están en reposo en un mismo recipiente, el

aceite flota sobre el agua porque es menos denso.

- Pero el agua es menos viscosa: si llenamos dos botellas con la misma cantidad de agua y aceite para luego invertirlas, tardará más en vaciarse el aceite porque es más *espeso*.

Para comparar ambas propiedades, se introduce una nueva función:

Definición 1.15: Viscosidad cinemática

Se llama así a la razón entre la viscosidad y la densidad $\nu = \frac{\mu}{\rho}$. Se mide en m^2/s .

Fluidos compresibles e incompresibles

Aquellos fluidos cuya densidad es inalterable merecen una atención especial:

Definición 1.16: Fluido incompresible

Se dice que un fluido es incompresible cuando es imposible alterar su densidad por cualquier medio, es decir, ρ es constante se mantiene para cualesquiera condiciones termodinámicas realizables.

Esta definición es una idealización, ya que no existen fluidos perfectamente incompresibles en la realidad. Sin embargo, funciona como una muy buena aproximación para la mayoría de líquidos relevantes en ingeniería sin alteraciones de temperatura. Por ejemplo, pensemos en agua pura bajo condiciones ambiente; en efecto, resulta extremadamente difícil cambiar su densidad ejerciendo presión a temperatura constante.

Para cuantificar qué grado de incompresibilidad tiene un fluido se introduce el siguiente concepto:

Definición 1.17: Coeficiente de compresibilidad

Es una medida de la compresibilidad de un fluido a temperatura constante. Se define como la variación relativa de la densidad respecto de la presión o, alternativamente, como el cambio relativo del volumen por unidad de presión:

$$\alpha = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial P} = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial P}$$

Notemos que la definición implica que $\alpha > 0$, pues si aumenta la presión, disminuye el volumen.

Por tanto, a priori diríamos que un fluido es incompresible si tiene $\alpha = 0 \text{ Pa}^{-1}$, pero no encontraremos ningún fluido que cumpla esta condición exactamente; así pues, nos conformaremos con llamar incompresibles a aquellos en el que α sea tan pequeño que lo podamos considerar irrelevante. En concreto, el agua pura a temperatura ambiente tiene un coeficiente de compresibilidad $\alpha \approx 5 \cdot 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$. Por tanto, si la temperatura no cambia mucho, es

estándar considerar el agua como un fluido incompresible con densidad constante $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$.

La incomprensibilidad no implica que ρ sea constante como función del espacio, es decir, ρ podría cambiar de un punto a otro del fluido $\rho = \rho(x, y, z)$, pero dicha función no la podemos alterar aumentando la presión. Si ρ es independiente del punto (x, y, z) , se trata de otra propiedad adicional:

Definición 1.18: Fluido homogéneo

Un fluido se dice homogéneo si su densidad es constante en todo punto del fluido. Matemáticamente, el gradiente se anula ($\nabla\rho = 0$).

La inversa del coeficiente de compresibilidad se medirá en unidades de presión y es una cantidad relevante en la dinámica de gases (que son los únicos fluidos que se tratarán como compresibles en lo sucesivo).

Definición 1.19: Módulo de elasticidad

$$K = \frac{1}{\alpha} = -\mathcal{V} \frac{\partial P}{\partial \mathcal{V}}.$$

1.3.4. Relación entre propiedades: ecuación de estado

Las propiedades básicas de los fluidos no son en general independientes unas de otras; por ejemplo, la densidad es función de la presión y la temperatura, pero no siempre conocemos una relación explícita entre ellas. La excepción son los llamados gases ideales, los cuales cumplen una conocida relación entre presión, temperatura y volumen.

A nivel microscópico en los gases ideales se ignoran las fuerzas intermoleculares y solo se consideran las interacciones producidas por colisiones, de esta manera, se está suponiendo que dichos gases ocupan una fracción despreciable del volumen que los contiene (sus moléculas están más separadas que en un gas real). Esta suposición es bastante buena en el caso de gases a densidades o presiones bajas, o bien a temperaturas lo suficientemente altas para que no se produzcan fenómenos de licuación (por los que un gas pasa a estado líquido).

Propiedad 1.20: Ecuación de estado

Un gas ideal es aquel que verifica la relación

$$P \cdot \mathcal{V} = n \cdot R \cdot T,$$

donde $R = 8,315 \text{ J/mol}\cdot\text{K}$ (en SI) es la constante universal de los gases y

$$n = n^0 \text{ de moles} = \frac{\text{masa del gas}}{\text{masa molecular}} = \frac{m}{M_r}.$$

Si la queremos expresar en términos de la densidad, la ecuación de estado queda

$$P = \rho \cdot \mathcal{R} \cdot T, \quad \text{con} \quad \mathcal{R} = \frac{R}{M_r}.$$

Como en general consideramos fluidos a temperatura constante, interpretaremos las relaciones anteriores considerando que para gases ideales tanto el producto $P\mathcal{V}$ como el cociente P/ρ se mantienen constantes.

1.4. Otras propiedades de los líquidos

1.4.1. Cavitación

Como sabemos, un líquido, al alcanzar una determinada temperatura, se evapora y pasa a estado gaseoso. Pero, además, este tránsito de estado también se puede conseguir sin alterar la temperatura.

Definición 1.21: Cavitación

Se conoce como **cavitación** a la transición de líquido a gas producida por una disminución de la presión a temperatura constante. La presión crítica por debajo de la cual se produce depende de cada líquido concreto y se denomina **presión de vapor**.

Al alcanzar la presión de vapor, se formarán pequeñas burbujas de gas dentro del líquido. Si, con el tiempo, la presión vuelve a aumentar por encima del nivel crítico, estas burbujas se vuelven a convertir en líquido produciendo un micro-chorro que puede dañar a la superficie sobre la que implosiona. Este fenómeno se suele observar en las hélices de los submarinos.

1.4.2. Tensión superficial

Sucede en la **superficie libre** de un líquido, esto es, la superficie de contacto sólido-líquido, líquido-gas o bien entre dos líquidos inmiscibles. En dichas superficies se observa un comportamiento similar al de una membrana elástica tirante.

En consecuencia, esta propiedad es la causa de fenómenos como que algunos insectos permanezcan sostenidos sobre el agua. También explica hechos que todos hemos experimentado: que sea más fácil caminar sobre arena mojada, que una gota se sostenga *retando* a la gravedad antes de caer de un grifo, etc.

Todo lo anterior sucede porque en la superficie de un líquido las fuerzas están descompensadas y, por tanto, existe una fuerza neta hacia el interior del líquido. En efecto, en el interior del líquido las fuerzas atractivas de una molécula con todas las que tiene alrededor se

compensan unas con otras; sin embargo, en la superficie del líquido las fuerzas atractivas del aire por encima de dicha superficie son mucho más débiles que las de las partículas líquidas.

Pese a esa fuerza resultante que empujaría hacia el interior, sabemos que las partículas de la superficie no *se hunden*; por tanto, debe existir una fuerza en la superficie del líquido que la compense y que mantenga la superficie en equilibrio. Intuitivamente, la presencia de esta fuerza extra superficial la podemos experimentar comprobando que es más difícil mover un objeto a través de la superficie de un líquido que si está completamente sumergido, o viendo la resistencia si intentamos hundir una pelota en el agua.

Dado que mantener la superficie del líquido supone una fuerza y, por tanto, un gasto extra, todo líquido trata de minimizar el área superficial, es decir, de adoptar la forma con menor ratio de área/volumen. Es por ello que las gotas adoptan en equilibrio una forma esférica en lugar de plana.

Definición 1.22: Tensión superficial

La tensión superficial, denotada por σ , es la fuerza que ejerce la superficie libre de un fluido por unidad de longitud del borde de dicha superficie (la curva que actúa de frontera de la superficie). Dicha fuerza es tangencial a la superficie pero perpendicular a la curva. Se mide en N/m.

También se puede interpretar como la energía que almacena la superficie libre; bajo este punto de vista, se mide en J/m².

1.4.3. Capilaridad

No se trata de una propiedad independiente, sino de una consecuencia de la tensión superficial.

Definición 1.23: Capilaridad

Es la forma curvada que adoptan las superficies líquidas cerca de las paredes de recipientes cilíndricos de radio suficientemente pequeño para que la tensión superficial no sea despreciable.

La causa de este fenómeno es la descompensación entre

- las fuerzas de **adhesión** entre las moléculas del líquido y las paredes del sólido con el que está en contacto y
- las fuerzas de **cohesión** entre las propias partículas del líquido.

Esto crea una fuerza resultante en el punto de contacto entre la superficie libre y la pared del recipiente. Si llamamos α al ángulo de contacto entre la fuerza generada y la vertical, salvo que $\alpha = 90$ habrá una componente vertical de la fuerza. Suponiendo que el recipiente esté abierto a la atmósfera, podemos encontrar dos situaciones:

- $\alpha < 90$, entonces la componente vertical se opone a la gravedad y el líquido asciende ligeramente por las paredes del recipiente. Esto sucedería con el agua.
- $\alpha > 90$, la fuerza resultante actúa en el mismo sentido que la gravedad y el nivel del líquido desciende por la pared del recipiente; este caso se observa en el mercurio.

1.5. Ejercicios

1.5.1. Viscosidad

- 1 Tenemos dos placas horizontales tales que el espacio de separación entre ambas (2 mm) se llena con un aceite de viscosidad 0,2 Pa·s. Si la placa superior se mueve a una velocidad constante de 1,6 m/s, ¿cuál es el esfuerzo cortante en la placa inferior?

Sol: 160 Pa.

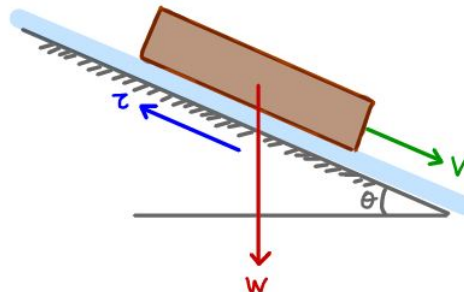
- 2 El perfil de velocidad de un fluido viscoso sobre una lámina viene dado por

$$u(y) = 3y - y^2$$

para $y \leq 1,5$ m, donde u es la velocidad en m/s de un punto a distancia y de la placa. Si el coeficiente de viscosidad es de 1,5 Pa·s, determina el esfuerzo cortante en $y = 0$ y en $y = 1,5$.

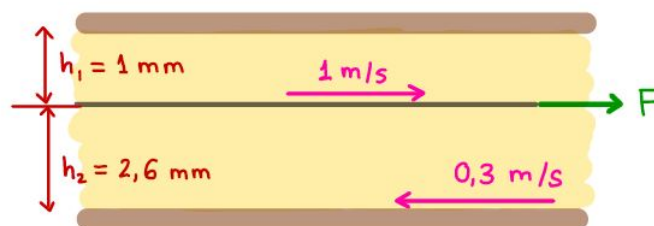
Sol: 4,5 Pa y 0 Pa.

- 3 Hallar el espesor h de un fluido cuya viscosidad es de 1 poise sobre el que hay un tablero de 60 cm $\times$ 30 cm que desciende a una velocidad constante de 1 m/s y cuya masa es de 40 kg. (Dato: la inclinación es de $\theta = 30^\circ$.)



Sol: $h = 0,092$ mm.

- 4 Una placa horizontal de 20 cm $\times$ 20 cm se mueve a velocidad de 1 m/s dentro de una capa de aceite encerrada entre otras dos placas, una fija y la otra en movimiento a una velocidad constante de 0,3 m/s, como muestra la figura.



Sabiendo que la viscosidad del aceite es de $0,027 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ y suponiendo que es un fluido Newtoniano, se pide:

- Dibuja el perfil de velocidades y localiza un punto donde la velocidad del aceite sea cero.
- Determina la fuerza que se debe aplicar a la placa central para mantener su movimiento.

Sol:(a) A 3 mm de la placa superior. (b) 1,62 N.

- Supongamos que tenemos una placa muy fina situada paralela a dos superficies planas horizontales separadas a h cm de distancia. La viscosidad de los fluidos sobre y por debajo de la placa viene dada por μ_1 y μ_2 , respectivamente. Suponemos que la placa se mueve a velocidad constante U . Determina la altura de la placa para que la resistencia de los fluidos al movimiento uniforme de dicha placa sea mínima.

Sol: h debe cumplir $\frac{y}{h-y} = \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}}$

1.5.2. Otras propiedades

- En el océano, a una profundidad $z = 9000 \text{ m}$, la presión P es de 1000 bar . Si en la superficie la densidad del agua y el módulo de elasticidad volumétrico medio valen $\rho = 1025 \text{ kg/m}^3$ y $K = 23000 \text{ bar}$ respectivamente, se pide calcular la densidad del agua a la profundidad indicada.

Sol: $1070,5 \text{ kg/m}^3$.

- ¿Qué cambio de módulo de elasticidad se necesita para comprimir un gas a un tercio de su volumen inicial en condiciones isotermas?

Sol: El doble de la presión inicial.

- ¿Qué volumen ocupan 16 g . de oxígeno a 800 mmHg y 20°C ?
Nota: la masa molecular del oxígeno es $M_r = 32 \text{ g/mol}$.
 - Calcula la masa molecular (M_r) de un gas sabiendo que $17,2 \text{ g}$ del mismo, en condiciones normales (1 atm y 273 K), ocupan 12 l .

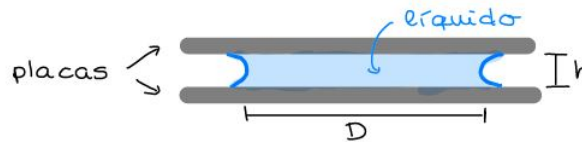
Recuerda que $R = 0,082 \text{ atm} \cdot \text{l/K} \cdot \text{mol}$; $760 \text{ mmHg} = 1 \text{ atm}$ y $273 \text{ K} = 0^\circ\text{C}$.

Sol: (a) $11,42 \text{ l}$. (b) $32,01 \text{ g/mol}$.

-
- 9) Calcula el incremento de presión $\delta P = P_{\text{in}} - P_{\text{out}}$ en la superficie de contacto causado por la tensión superficial en las siguientes situaciones:

- a) una gota semiesférica.
- b) una pompa de jabón.
- c) un canal lleno de agua cuya sección transversal es un semicírculo.

- 10) Una pequeña cantidad de líquido con tensión superficial σ forma una fina capa circular de diámetro D entre dos placas de vidrio separadas por una distancia h muy pequeña. Obtén una expresión para la fuerza necesaria para separar las placas.



Sol: $F = \frac{\pi \sigma D^2}{2h}$.

- 11) Sumergimos un tubo capilar en una cubeta con agua. Calcular la altura que alcanza el agua dentro del tubo (respecto al nivel inicial) en función del ángulo de contacto, el radio del tubo y la tensión superficial.

Aplicar la expresión anterior al cálculo de la altura que alcanzaría el agua en un tubo de 5 mm de diámetro, si el ángulo de contacto es de 20° y la tensión superficial es $\sigma = 0,0074 \text{ N/m}$.

Tema 2

Cinemática: análisis del movimiento de los fluidos

A diferencia del tema anterior, aquí nos centramos en las propiedades relacionadas con el movimiento de un fluido (flujo), no con la naturaleza del mismo. La cinemática se encarga precisamente de analizar cómo los fluidos *fluyen* y cómo describir su movimiento sin considerar las causas (fuerzas) que lo provocan, por tanto, se tratará con magnitudes como la velocidad y la aceleración.

2.1. Enfoque lagrangiano y euleriano

En este apartado explicamos dos maneras distintas de describir el movimiento de los fluidos en base a magnitudes cinemáticas.

Enfoque Lagrangiano: es el usado en mecánica clásica y básicamente consiste en seguir la trayectoria de cada objeto de interés. Así, las distintas posiciones del objeto y sus vectores velocidad son función del tiempo. En el contexto que nos ocupa, esto supone llevar cuenta de la posición y velocidad de cada partícula fluida.

Lo anterior no parece un punto de vista muy eficaz en la práctica, pues no es sencillo identificar y monitorizar partículas fluidas cuando estas se mueven y, además, un fluido se comporta a nivel macroscópico como un continuo. En consecuencia, las interacciones entre partículas no son tan fáciles de describir en este caso como si se tratara de movimientos de bolas de billar.

A pesar de ello, hay sistemas de visualización y de medida basados en el enfoque de seguimiento de las partículas (por ejemplo, para estudiar la difusión de un contaminante).

Enfoque Euleriano: consiste en fijar un punto (o una región) del espacio a través del cual transcurre el fluido (entra y sale). Esto significa que, en lugar de elegir una partícula concreta y seguirla, seleccionamos un punto o porción del espacio y analizamos las propiedades de

toda partícula que pase por ahí.

Con este enfoque, toda propiedad del flujo o del fluido se describe como una función dependiendo del espacio-tiempo, cuyo valor en un determinado instante es el valor de la propiedad para cualquier partícula fluida que ocupe esa posición en ese momento. Por ejemplo, la presión y la velocidad serán

$$P = P(p, t) \quad V = V(p, t),$$

donde V representa el vector velocidad de cualquier partícula fluida que pasa por el punto $p = (x, y, z)$ en el instante t .

En definitiva, en el enfoque euleriano no nos importa qué sucede con las partículas individuales, sino que nos interesan las propiedades (presión, velocidad, aceleración) de cualquier partícula fluida que pase por el lugar de interés en el instante indicado.

Por ejemplo, un investigador tratando de medir las propiedades de un río puede adoptar un método lagrangiano (si tira una sonda que se mueva con la corriente) o euleriano (si ancla la sonda a un lugar fijo del cauce). No obstante, la visión euleriana normalmente es más conveniente en aplicaciones de mecánica de fluidos en el momento de tomar medidas experimentales. En efecto, en un túnel de viento los sensores para medir velocidad y presión se colocan en un lugar fijo.

Sin embargo, no son todas ventajas: las ecuaciones del movimiento de un fluido no son obvias en el enfoque euleriano y deben ser cuidadosamente deducidas (tarea que nos llevará parte de este tema y los dos siguientes). Por el contrario, las ecuaciones del movimiento en la descripción lagrangiana son bien conocidas (por ejemplo, la segunda Ley de Newton), pues la mecánica clásica aplica la idea de seguir a las partículas individuales.

2.2. Clasificación de los flujos según la velocidad

2.2.1. El campo de velocidad de un flujo

Apoyándonos en la hipótesis del continuo (ver Propiedad 1.4), podemos definir un campo de vectores velocidad en todo punto del fluido y en cualquier instante de tiempo. Con más precisión, si el fluido ocupa una región $R \subset \mathbb{R}^3$ en un instante t , para todo punto $p = (x, y, z) \in R$, el vector velocidad lo denotaremos como

$$V = V(p, t) \in \mathbb{R}^3, \quad \text{con} \quad V = (u, v, w),$$

donde las componentes del vector velocidad u, v, w son funciones de (x, y, z, t) .

En concreto, la expresión $V = V(p, t)$ mide la velocidad de una partícula fluida que pasa por el punto p en el instante t , con el enfoque euleriano. En efecto, el punto p no representa una partícula móvil concreta, sino el punto que hemos fijado en el espacio para

medir las velocidades de las partículas que lo atraviesan. Por tanto, en la expresión anterior consideramos 4 variables independientes para el campo de velocidad del flujo, que representa el movimiento de todas las partículas en su conjunto según variemos la ubicación del punto p y no la rapidez de una partícula específica.

2.2.2. Clasificación según la dependencia espacio-temporal de la velocidad

Para clasificar los flujos, nos empezamos fijando en distintos aspectos del campo de velocidades del fluido. En general, sabemos que es una función de las coordenadas espacio-temporales $V = V(p, t)$, pero hay situaciones especiales en las que es independiente del tiempo $V = V(p)$ (flujo estacionario) o del espacio $V = V(t)$ (flujo uniforme), e incluso podría ser constante.

Si consideramos su dependencia o no del tiempo, tendremos

Definición 2.1: Flujos según su dependencia temporal

- Flujo **estacionario o permanente** es aquel en que todas las propiedades tanto del fluido como del flujo son independientes del tiempo, o sea, no cambian con el transcurso del tiempo. Esto significa que

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0,$$

siendo Φ cualquier propiedad del fluido.

- El flujo se dice **no estacionario o transitorio** si alguna de sus propiedades cambia con el tiempo.

En la realidad no existe ningún flujo completamente estacionario, si bien es cierto que en muchas ocasiones la dependencia temporal es lo suficientemente débil (es decir, los cambios se producen con tal lentitud) como para que se pueda suponer que se trata de un flujo estacionario.

En concreto, un flujo estacionario cumple que

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial V}{\partial t} = 0.$$

Lo anterior significa que el campo de velocidad no cambia con el tiempo, pero los vectores velocidad pueden ser distintos para diferentes puntos del fluido. Por tanto, también podemos distinguir:

Definición 2.2: Flujos según su dependencia espacial

- El flujo se llama **uniforme** cuando todos los vectores del campo velocidad son idénticos, tanto en magnitud como en dirección, en todo punto del fluido. Así pues, se cumple

$$\frac{\partial V}{\partial s} = 0,$$

donde s representa cualquier coordenada espacial. En caso contrario, se dice que el flujo es **no uniforme**.

Una simplificación muy útil que aplicaremos en la práctica es suponer que el flujo es uniforme en cada sección transversal.

Definición 2.3: Dimensionalidad y direccionalidad

- El flujo puede ser **k -direccional**, donde $k \in \{1, 2, 3\}$ es el número de componentes del campo velocidad $V = (u, v, w)$ que son distintas de cero.
- La dimensionalidad de un flujo es el número de coordenadas espaciales x, y, z que se necesitan para describir sus propiedades. Entonces el flujo puede ser **ℓ -dimensional**, con $\ell \in \{0, 1, 2, 3\}$. Un flujo uniforme es 0-dimensional.

Todos los flujos físicos son 3-dimensionales, pero a veces es conveniente y funciona la simplificación de considerar que el movimiento se produce en menos dimensiones. Lo mismo sucede con la direccionalidad.

2.3. Visualización de flujos

2.3.1. Técnicas experimentales

Existen distintas técnicas para visualizar y estudiar en un laboratorio el movimiento de un fluido:

- **Burbujas de hidrógeno:** se generan electrolíticamente mediante la aplicación de corriente eléctrica sobre un cátodo (fino hilo de platino) y un ánodo (chapa de acero) sumergidos en un flujo de agua. Mediante electrólisis se separan el hidrógeno y el oxígeno del agua, generándose burbujas de hidrógeno en el cátodo que son arrastradas fácilmente por el flujo debido a su pequeño tamaño.
- **Velocimetría por imágenes de partículas (PIV):** es una técnica que permite obtener el campo de velocidades de un fluido. Se basa en el procesamiento digital de la información suministrada por las imágenes generadas por el flujo mediante técnicas láser.
- **Generación de humo:** se usa para determinar el diseño óptimo de sistemas de ventilación, por ejemplo, para estudiar el efecto del flujo de aire y calor en la incorporación

de accesorios como parrillas protectoras o la placa base de un ordenador.

Otras técnicas habituales son inyección de tinta, trazadores reflectantes, simulaciones por ordenador (CFD),...

2.3.2. Trayectorias, trazas y líneas de corriente

La trayectoria es como el historial de una partícula concreta, pues recoge todos los puntos por los que pasa en un determinado intervalo temporal.

Definición 2.4: Trayectoria

Es el camino recorrido por una sola partícula en un intervalo de tiempo.

Si sabemos que en un punto que ha de atravesar el flujo existe un contaminante, la manera de analizar su difusión es poner un trazador (colorante) en el lugar contaminado que tinte a todas las partículas fluidas que pasen por él. La traza nos dirá dónde están todas las partículas contaminadas en un determinado instante T .

Definición 2.5: Traza

Se trata de la imagen instantánea en un momento fijo T de las posiciones en el espacio de las partículas que pasaron por un punto determinado en instantes anteriores $\tau < T$.

Analíticamente, para hallar la trayectoria de una partícula que en el instante τ pasa por el punto p , tenemos que resolver el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dc}{dt} = V(c(t), t),$$

con la condición inicial $c(\tau) = p$.

El siguiente tipo de curvas que nos sirve para hacernos una idea del recorrido del flujo es una imagen instantánea (o sea, en un tiempo fijo) de la dirección media que sigue un conjunto de partículas.

Definición 2.6: Líneas de corriente

En un determinado instante fijo, las líneas de corriente son curvas tangentes en todo punto al vector velocidad del flujo en ese punto.

Este concepto es una idealización conveniente para cálculos matemáticos, pero no se pueden fotografiar. Los otros dos casos son más fáciles de generar experimentalmente.

En la práctica, la definición se traduce en que las líneas de corriente (LDC) se obtienen a partir de

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}.$$

En la realidad los datos de velocidad solo se suelen conocer en un conjunto de puntos discreto; por tanto, normalmente hay un proceso de interpolación previo para determinar el campo continuo de velocidades.

Nota 2.7 ■ Las líneas de corriente dan una imagen instantánea del *flujo entero* (o una parte) en un momento fijado, con cada línea de corriente empezando en un punto distinto seleccionado dentro del flujo. En un flujo no estacionario, la visualización basada en líneas de corriente está cambiando constantemente.

- Dos líneas de corriente *no se pueden cortar*, pues si lo hicieran en un punto significaría que en ese punto habría dos vectores velocidad distintos, y esto no tiene sentido.
- En flujos rodeados de un sólido (canales, tuberías), la pared se puede considerar formada por líneas de corriente. La razón es que el flujo no puede atravesar la frontera sólida; por tanto, cuando nos acercamos a dicha barrera, la única componente no nula del vector velocidad es tangencial, es decir, la pared sigue la dirección de una línea de corriente.

La última observación motiva la siguiente

Definición 2.8: Tubo de corriente

Se trata de un tubo (de existencia real o imaginaria) cuyas paredes están formadas por líneas de corriente.

Si el flujo es independiente del tiempo, no hay diferencias entre todos los tipos de curvas que acabamos de describir.

Propiedad 2.9: Las curvas coinciden en flujos estacionarios

En un flujo estacionario, líneas de corriente, trazas y trayectorias coinciden.

Notemos que trazas y trayectorias son conceptos lagrangianos, mientras que las líneas de corriente se corresponden con un enfoque euleriano.

2.4. Otras clasificaciones de los flujos

Nos interesa conocer la interacción entre el flujo y los objetos con los que se encuentra a su paso:

Definición 2.10: Flujos externos/internos

- Se dice que el flujo es **externo** si el sólido está dentro del paso del fluido, por ejemplo, la aerodinámica de un avión.
- El flujo se llama **interno o confinado** si el sólido se encuentra fuera del paso del fluido, como en una tubería.

Para no adentrarnos en el terreno de la termodinámica, siempre consideraremos flujos cumpliendo las dos características siguientes:

Definición 2.11: Flujos y su relación con la temperatura

- El flujo se denomina **isotermo** si la temperatura se mantiene constante en todo el fluido para todo instante de tiempo.
- El flujo es **adiabático** si no hay intercambio de calor con el ambiente o medio que rodea al flujo. El ejemplo típico es una tubería cubierta de material aislante.

Las condiciones adiabáticas son interesantes para flujos en los que hay circulación de calor (chimeneas, tubos de ventilación,...), pues se trata de situaciones en las que la interacción con las tuberías puede causar variaciones térmicas.

Según si tenemos en cuenta los efectos de fricción (es decir, la presencia de esfuerzos cortantes), consideraremos que un flujo es o no viscoso, si la viscosidad del fluido es distinta de cero o igual a cero, respectivamente.

A este respecto, cabe resaltar que a una distancia lo suficientemente grande de los contornos del sólido el flujo no está perturbado por este; es por ello que en muchas ocasiones los flujos externos pueden analizarse como no viscosos. Sin embargo, aunque $\mu \approx 0$, siempre habrá una zona cercana al cuerpo de contacto, donde no se pueden ignorar los efectos de la viscosidad (**capa límite**).

2.4.1. Flujo rotacional e irrotacional

Intuitivamente, los flujos rotacionales son aquellos que contienen remolinos o vórtices, es decir, partículas fluidas que están rotando. Como esta es una noción bastante vaga, necesitamos una manera matemática rigurosa de distinguirlos.

Definición 2.12: Vorticidad

Dado un flujo con campo de velocidad $V = (u, v, w)$, su **vorticidad** ω viene dada por el operador rotacional de V :

$$\omega = \nabla \times V = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

La vorticidad nos da la herramienta para cuantificar si un flujo es o no rotacional:

Definición 2.13: Flujo rotacional e irrotacional

Se dice que un flujo es **irrotacional** si su vorticidad es siempre igual a cero. En caso contrario, se trata de un flujo **rotacional**.

Claramente, todo flujo uniforme es irrotacional; pero también pueden existir flujos cuyas componentes de la velocidad dependan de (x, y, z) , pero a la vez sean irrotacionales.

2.4.2. Flujos reales e ideales

Definición 2.14: Flujo ideal

Un flujo se llama **ideal** cuando es irrotacional (se ignoran las turbulencias) y no viscoso (no existen esfuerzos cortantes y, por tanto, $\mu = 0$). Cuando alguna de estas dos condiciones no se cumpla, estaremos ante un flujo **real**.

Los flujos ideales son hipotéticos, pues en la realidad todos los fluidos tienen $\mu > 0$.

2.4.3. Flujo laminar y turbulento

Sobre un sistema que involucre un fluido en movimiento pueden actuar diferentes fuerzas debidas a distintas causas: fuerzas viscosas o de fricción (ocasionadas por los esfuerzos cortantes durante el flujo), de presión (debidas a diferencias de presión), de gravedad, de capilaridad (causadas por la tensión superficial),... Según la segunda ley de Newton, la suma de las anteriores (F_{res}) es igual a la masa por la aceleración.

Por otro lado, el principio de acción y reacción predice la existencia de la fuerza de inercia, de igual magnitud pero sentido contrario que F_{res} .

Con el objetivo de conocer la influencia de las fuerzas viscosas en el movimiento global del fluido, estudiamos el cociente (en módulo) entre las fuerzas de inercia y las fuerzas viscosas, dicho cálculo nos lleva a la siguiente constante adimensional:

Definición 2.15: Número de Reynolds

$$\text{Re} = \frac{\rho DV}{\mu} = \frac{DV}{\nu},$$

donde V y D son la velocidad y longitud o escala características del flujo (normalmente representadas por el diámetro, si el flujo transcurre por una tubería de sección circular, y la velocidad media del flujo en dicha tubería).

Si el número de Reynolds es elevado, el flujo se vuelve más complicado de analizar. Un objetivo fundamental de la mecánica de fluidos es ser capaces de predecir cambios en el comportamiento del flujo conforme aumenta Re . En general, se trata de una tarea extraordinariamente difícil y va más allá de los objetivos del presente curso.

A grandes rasgos, la idea es que si el número de Reynolds es pequeño, los efectos viscosos son considerables. Sin embargo, si Re es grande (*flujo turbulento*), estos efectos serán pequeños o incluso despreciables. A continuación, describimos el experimento con el que históricamente se llegó a las primeras conclusiones acerca de la turbulencia.

Experimento de Reynolds: aproximadamente en 1883 Reynolds trató de observar el proceso de mezcla entre un trazador (tinta) y agua que fluyen paralelos entre sí. El objetivo era entender cómo evolucionan en función de la velocidad de ambas corrientes. Las principales conclusiones del experimento son:

- *A velocidades bajas:* las dos sustancias apenas se mezclan, sino que ambas fluyen ordenadamente en corrientes o capas paralelas de manera regular. Estamos ante un **flujo laminar**, donde $Re < 2300$.
- *A velocidad intermedia:* se produce mezcla limitada, es decir, aun se aprecia visualmente la separación entre fluidos, pero también se observan cambios espacio-temporales en la dirección del movimiento (ya no fluyen perfectamente en paralelo como antes). Se dice entonces que tenemos un **flujo de transición**. Bajo la mayoría de condiciones prácticas, se produce cuando $Re \in (2300, 4000)$.
- *A velocidades altas:* ambos fluidos se mezclan muy rápido y dicho proceso involucra complejas rotaciones, caóticas y sin estructura clara, incluso a diferentes escalas. Decimos que se trata de un **flujo turbulento** y, en este caso, se cumple $Re > 4000$.

Si consideramos el resto de variables involucradas en la definición del número de Reynolds, parece claro que la ausencia de fenómenos turbulentos se debe no solo a bajas velocidades, sino también a movimientos a pequeña escala (por ejemplo, la sangre se mueve por los vasos sanguíneos de muy pequeño diámetro) o a fluidos altamente viscosos.

Características del flujo turbulento:

- **Causa:** puede surgir como resultado de inestabilidades naturales (como el humo de una vela que se perturba conforme asciende) o bien por fluctuaciones inducidas.
- **Desordenado:** las partículas se entrecruzan y colisionan en su recorrido de manera caótica. En consecuencia, existe mucho intercambio de cantidad de movimiento y aparecen pequeñas recirculaciones
- Favorecen una **rápida homogeneización** de las propiedades del fluido. Esto resulta útil para algunas aplicaciones prácticas, por ejemplo, si queremos homogeneizar la temperatura con una inyección de agua caliente y una fría, la mezcla ocurrirá más rápido bajo condiciones turbulentas.
- Se puede **reconvertir en laminar** bajo la influencia de un aumento de la viscosidad, ocasionando que la energía cinética se transforme en térmica.
- **Fuertemente rotacional:** el flujo turbulento siempre involucra vórtices a distintas escalas, tanto temporales (remolinos rápidos y lentos) como espaciales (grandes y pequeños) y de distinta orientación.
- **Complejo de analizar:** no podemos hacer las simplificaciones habituales, como considerar el flujo 1 ó 2-direccional, ya que es imposible detectar una dirección prioritaria del movimiento. Tampoco se puede suponer que sea estacionario o de dimensión reducida (son siempre 3-dimensionales).

- **Impredecible a largo plazo:** incluso una perturbación ínfima se propagará tan rápido que nos llevará a un flujo completamente distinto pasado cierto tiempo.

El comportamiento de cualquier flujo laminar se puede predecir en un laboratorio o con simulaciones por ordenador, pero esto no es posible si el flujo presenta turbulencias. Pese a todas las dificultades que conlleva el estudio de flujos turbulentos, son de este tipo la mayoría de flujos relevantes en ingeniería.

2.5. Derivada material

Sea f una función que representa una propiedad cualquiera del fluido/flujo (densidad, componentes de la velocidad,...). Aquí vamos a calcular el cambio de la propiedad f siguiendo la trayectoria de las partículas fluidas.

En un sistema lagrangiano, las coordenadas espaciales de las partículas fluidas son funciones del tiempo, por tanto, cualquier propiedad asociada con dicha partícula cambiará a su vez con el paso del tiempo.

Para averiguar qué factores afectan a la evolución de f conforme la partícula fluye, consideramos la trayectoria $(x(t), y(t), z(t), t)$ de un elemento fluido y observamos el valor de la propiedad a lo largo de dicha trayectoria, esto es, $f(x(t), y(t), z(t), t)$. Derivando respecto del tiempo (haciendo uso de la regla de la cadena), llegamos a

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + w \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Esto nos motiva a definir

Definición 2.16: Derivada material o lagrangiana

Si V es el campo de velocidad del flujo y f un campo escalar definido sobre el fluido, la derivada material o lagrangiana viene dada por

$$\frac{Df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + V \cdot \nabla f.$$

Podemos interpretar $\frac{Df}{dt}$ como la representación euleriana de la derivada de Lagrange de la propiedad f , pues (x, y, z) son ahora variables independientes.

Notemos que la derivada material matemáticamente es la derivada total de la función y en ella intervienen dos aportes:

- **Derivada local o parcial** ($\frac{\partial f}{\partial t}$): refleja el cambio de f respecto de t en una posición fija o específica del espacio. Notemos que esta contribución será nula en un flujo estacionario (ver Definición 2.1).

- **Derivada convectiva o direccional** ($V \cdot \nabla f = D_V f$): representa la variación de f al movernos en el espacio en la dirección de V , pero en un instante fijo. Así pues, este término recoge los cambios espaciales de f debido al movimiento de las partículas fluidas al ser transportadas por el campo V . Esta parte se anula si no hay movimiento/flujo ($V = 0$), o bien si la propiedad f se mantiene constante a lo largo de las líneas de corriente (es decir, en la dirección de V).

Un ejemplo ilustrativo de los dos términos que influyen en la variación de f es cómo cambia la temperatura en una piscina: podemos notar el cambio de temperatura si nos quedamos quietos y dejamos pasar el tiempo, pero también puede haber distinta temperatura en un instante fijo según qué dirección consideremos (más o menos cerca de la fuente de calor).

En particular, en coordenadas eulerianas (x_0, y_0, z_0, t) , donde las coordenadas espaciales no dependen del tiempo, se tiene que $\frac{Df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t}$.

Ejemplo 2.17 Si tomamos $f = u$ la primera componente del campo velocidad, su derivada material nos dará la primera componente de la aceleración material (en coordenadas eulerianas):

$$a_x = \frac{Du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}$$

Si hacemos lo mismo con el resto de componentes del campo velocidad, llegamos a

Definición 2.18: Aceleración material o lagrangiana

$$a = \frac{DV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + u \frac{\partial V}{\partial x} + v \frac{\partial V}{\partial y} + w \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial V}{\partial t} + V \cdot \nabla V$$

Aunque suene extraña la afirmación, tengamos presente que en un flujo estacionario las partículas fluidas pueden estar aceleradas, pues por lo anterior la velocidad puede cambiar espacialmente (por ejemplo, porque se produzcan un estrechamiento en una tubería), incluso siendo constante respecto del tiempo.

2.6. Ecuación de continuidad (forma diferencial)

En esta sección vamos a deducir el teorema de transporte general para cualquier campo (escalar o vectorial) definido sobre una región fluida. Cuando apliquemos este teorema al caso particular de la densidad del fluido, en combinación con el principio de conservación de la masa, deduciremos la ecuación de continuidad (en su forma integral, válida para cualquier región fluida). Si a dicha ecuación le aplicamos el teorema de la divergencia, obtendremos la ecuación de continuidad (en forma diferencial, que se cumple en cada punto del fluido).

2.6.1. Teorema del Transporte General

Consideramos una región o volumen fluido $R \subset \mathbb{R}^3$ encerrada por una superficie S . En general, ambas dependen del tiempo aunque no escribamos esta dependencia explícitamente. Consideramos $\Phi = \Phi(p, t)$ un campo (escalar o vectorial) definido sobre todo punto $p = (x, y, z)$ de $R \cup S$ y que representa una propiedad del fluido o flujo.

Si $\delta\mathcal{V}_i$ representa un volumen infinitesimal centrado en un punto $p_i \in R$, la cantidad total de la propiedad Φ en R viene dada por

$$\lim_{\delta\mathcal{V}_i \rightarrow 0} \sum_i \Phi(p_i) \cdot \delta\mathcal{V}_i = \int_R \Phi d\mathcal{V}.$$

Por ejemplo, si $\Phi = \rho$, la integral anterior es la masa total de la región fluida R . Nos preguntamos cómo cambia con el tiempo dicha cantidad total.

En lugar de una deducción matemática rigurosa, analizaremos intuitivamente la situación física, lo que nos llevará a obtener una fórmula para $\frac{d}{dt} \int_R \Phi d\mathcal{V}$. Existen dos posibles razones para que dicha integral varíe con el tiempo:

- El cambio de la propiedad Φ con el paso del tiempo dentro de la región R , considerada aquí como fija. La variación total por esta causa vendrá dada por:

$$\int_R \frac{\partial \Phi}{\partial t} d\mathcal{V}$$

Notemos que esta contribución será nula si el flujo es estacionario.

- La deformación del volumen de la región fluida (que puede expandirse o contraerse con el tiempo), lo cual afecta indirectamente a la cantidad integral que nos interesa. En efecto, en este caso tendremos que tener en cuenta el flujo de Φ a través de S , el cual se calcula mediante la integral¹

$$\int_S \Phi V \cdot N dA,$$

donde N el vector normal unitario que apunta hacia fuera de la superficie S . Este aporte será igual a cero si R es indeformable.

¹**Recordatorio de Cálculo (tema 8).** Si X es un campo vectorial definido sobre una superficie S , en cada punto de S la cantidad neta o flujo de X , que pasa a través de S en ese punto, viene dada por la proyección de X en la dirección de la normal unitaria N que apunta hacia el exterior de S en dicho punto:

$$X \cdot N = |X| \cos \angle(X, N),$$

pues la componente tangencial no puede atravesar S . En consecuencia, la cantidad total de X que atraviesa la superficie S se calcula como la integral

$$\int_S X \cdot N dA,$$

que se define sumando el valor de $X \cdot N$ en pequeños cuadros de área infinitesimal δA que recubran toda S y haciendo dicha partición más y más fina.

Sumando ambos efectos, se llega a

Teorema 2.19: Teorema de Transporte General (TTG)

Para cualquier volumen $R \subset \mathbb{R}^3$ cuya frontera es la superficie orientada S , se verifica

$$\frac{d}{dt} \int_R \Phi dV = \int_R \frac{\partial \Phi}{\partial t} dV + \int_S \Phi V \cdot N dA,$$

siendo N el campo normal unitario hacia fuera de S y V el campo de velocidad en puntos de S .

2.6.2. Ecuación de continuidad

Por el **principio de conservación de la masa** la masa (total) de un volumen fluido no varía con el tiempo. Teniendo esto en cuenta y usando el teorema del transporte general con $\Phi = \rho$, queda

Corolario 2.20: Ecuación de continuidad (forma integral, región fluida)

Para cualquier volumen $R \subset \mathbb{R}^3$ cuya frontera es la superficie orientada S , se verifica

$$0 = \int_R \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_S \rho V \cdot N dA,$$

siendo N el campo normal unitario hacia fuera de S .

Si ahora aplicamos el teorema de la divergencia para reescribir lo anterior como una sola integral de volumen, usando que la ecuación de continuidad es válida para regiones arbitrarias, se deduce

Corolario 2.21: Ecuación de continuidad (forma diferencial)

Si ρ es la función densidad de un fluido, en cualquier punto del fluido y en cualquier instante se verifica

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho V) = 0 \quad (2.1)$$

siendo V el campo de velocidad del flujo.

Aquí $\nabla \cdot X$ representa la divergencia de un campo vectorial $X = (X_x, X_y, X_z)$, es decir,

$$\nabla \cdot X = \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}.$$

En concreto, en coordenadas cartesianas (x, y, z) , la ecuación se puede reescribir como sigue:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0$$

Si desarrollamos la *derivada* del producto que aparece en (2.1), se tiene

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\nabla \rho) \cdot V + \rho \nabla \cdot V = 0.$$

Esto lo podemos expresar en términos de la derivada material (ver Definición 2.16), lo cual nos da una fórmula alternativa para la ecuación de continuidad en forma diferencial:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot V = 0.$$

La interpretación de esta igualdad es la siguiente: la densidad de una partícula fluida, conforme se mueve arrastrada por el flujo, solo cambia si el flujo se expande (divergencia de la velocidad positiva) o se contrae (divergencia negativa $\nabla \cdot V < 0$).

La ecuación de continuidad se simplifica si el flujo es estacionario o incompresible:

Corolario 2.22: Ecuación de continuidad (diferencial, casos particulares)

- Si el flujo es estacionario, entonces se cumple $\nabla \cdot (\rho V) = 0$.
- Un flujo es incompresible (es decir, su densidad no cambia ni espacialmente ni con el tiempo) si y solo si $\nabla \cdot V = 0$.

2.7. Ecuación de continuidad (forma integral)

2.7.1. Sistema versus volumen de control

Para analizar cualquier dispositivo que involucre un fluido en movimiento, existen dos enfoques:

- **Sistema:** se trata de una cantidad fija de materia (es decir, con un número de partículas que se mantiene constante), la cual puede moverse e interactuar con el medio. Por tanto, en un sistema la masa se mantiene constante, aunque pueda cambiar de forma o tamaño con el paso del tiempo. Este es el método más utilizado para estudiar la mecánica de un cuerpo rígido; sin embargo, es difícil identificar y seguir una cantidad concreta de un fluido.
- **Volumen de control (VC):** consiste en elegir un volumen concreto en el espacio a través del cual circula el fluido. Dicha elección dependerá en cada caso de la geometría del problema que estemos estudiando y es independiente del fluido. Aquí en general la masa no se mantiene constante (por ejemplo, si el volumen de control es una ramificación de tuberías, puede estar entrando y saliendo fluido constantemente).

Nos puede interesar considerar volúmenes de control que cambian con el tiempo: una manguera que se deforma, un depósito cuyo nivel de agua varía, un globo que se desinfla, etc.

La frontera que delimita el volumen de control se denomina **superficie de control (SC)** y puede ser real (las paredes de una tubería) o imaginaria (elegir dos secciones transversales de una manguera), así como fija o en movimiento (un pistón que comprime un gas en un cilindro).

Antes de analizar cualquier dispositivo por donde transcurre un flujo, es fundamental una buena elección del volumen de control, pues esta determinará la forma de las ecuaciones fundamentales que rigen el comportamiento del fluido.

2.7.2. Teorema del Transporte de Reynolds

Sea R una región fluida delimitada por una superficie S . Sobre ellas consideramos definida una propiedad Φ dada por un campo escalar o vectorial.

Teorema 2.23: Teorema de Transporte de Reynolds (TTR)

Si VC es un volumen de control que depende del tiempo, coincide con la región fluida R en un instante t y cuya superficie de control se mueve a velocidad V_c , se tiene

$$\frac{d}{dt} \int_R \Phi dV = \frac{d}{dt} \int_{VC} \Phi dV + \int_{SC} \Phi (V - V_c) \cdot N dA,$$

siendo N el campo normal unitario hacia fuera de S y V el campo de velocidad del fluido en puntos de S .

La expresión anterior se interpreta como sigue: la tasa de cambio de una propiedad Φ en toda la región fluida R viene dada por la tasa de cambio de dicha propiedad dentro del volumen de control elegido (que coincide con R en ese instante) mas la cantidad de dicha propiedad que atraviesa (entra o sale) la superficie de control.

A partir de esta fórmula deduciremos las formas integrales (aplicadas a un volumen de control arbitrario) de las ecuaciones fundamentales que rigen el comportamiento de un fluido.

El término $V - V_c$ debe entenderse como una velocidad relativa, esto es, la velocidad a la que un observador que se mueve junto con el volumen de control vería que el flujo atraviesa la superficie de control. En otras palabras, es la velocidad del fluido expresada en un sistema de coordenadas móvil anclado al volumen de control. La fórmula anterior es completamente general, pues sirve para volúmenes de control en movimiento (como la turbina de un avión) y/o que se deforman con el tiempo (como un depósito que se vacía, que está fijo pero su volumen cambia con el tiempo).

2.7.3. Ecuación de continuidad

Si ahora combinamos el teorema de transporte de Reynolds aplicado para $\Phi = \rho$ con el principio de conservación de la masa, se llega a:

Corolario 2.24: Ecuación de continuidad (forma integral para VC)

Para cualquier volumen $R \subset \mathbb{R}^3$ cuya frontera es la superficie orientada S , se verifica

$$0 = \frac{d}{dt} \int_{VC} \rho dV + \int_{SC} \rho(V - V_c) \cdot N dA,$$

siendo N el campo normal unitario hacia fuera de S .

Físicamente esta ecuación expresa que la variación de la masa total contenida en el volumen de control es igual al flujo neto de masa que entra o sale a través de la superficie de control.

Cuando la superficie de control está fija ($V_c = 0$), la segunda integral tiene que ver con el caudal (de masa o volumen) de fluido que atraviesa dicha superficie:

Definición 2.25: Caudal másico y volumétrico

- **Caudal másico:** $\dot{m} = \int_{SC} \rho V \cdot N dA$ es la masa que entra o sale del volumen de control por unidad de tiempo a través de la superficie de control entera.
- **Caudal (volumétrico):** $Q = \int_{SC} V \cdot N dA$ es el volumen que atraviesa la superficie de control por unidad de tiempo.

En el SI el caudal másico y volumétrico se miden en kg/s y m³/s, respectivamente.

En términos del caudal másico, la ecuación de continuidad queda

$$\frac{dm_{VC}}{dt} = \sum_{in} \dot{m}_i - \sum_{out} \dot{m}_i,$$

donde m_{VC} representa la masa total contenida en el volumen de control y las sumas del lado derecho se refieren al caudal másico en todas las entradas/salidas de flujo por la superficie de control.

En ciertas situaciones particulares, la ecuación de continuidad adopta formas más simples

Corolario 2.26: Ecuación de continuidad (casos particulares)

- En un **flujo estacionario** el caudal másico de entrada es igual al de salida:

$$\sum_{in} \dot{m}_i = \sum_{out} \dot{m}_i.$$

- En un **flujo incompresible** la tasa de cambio del volumen en la región de control es igual al balance neto de caudal a través de la superficie de control:

$$\frac{d\mathcal{V}_{VC}}{dt} = \sum_{in} Q_i - \sum_{out} Q_i.$$

- En un **flujo incompresible** a través de un **VC indeformable** el caudal de entrada es igual al de salida:

$$\sum_{in} Q_i = \sum_{out} Q_i.$$

En la práctica, habitualmente supondremos que las propiedades del fluido son homogéneas en cada sección transversal, pues esto nos permite analizar los problemas como si se tratara de un flujo 1-dimensional. Esto implica que el vector velocidad es constante en cualquier punto de una sección transversal. Además, supondremos que V tiene la misma dirección que la normal unitaria N a dicha sección.

2.8. Ejercicios

2.8.1. Visualización del flujo

- ① Dado el siguiente campo de velocidad de un fluido $V = (\omega, ct, 0)$, donde ω y c son constantes.

- a) Clasifica el tipo de flujo
- b) Halla la línea de corriente en $t = t_0$ que pasa por (a, b) .
- c) Calcula la trayectoria de la partícula que en $t = 0$ pasó por el punto (a, b) .
- d) Deduce la ecuación de la traza de las partículas que en $t = 0$ pasaron por el punto (a, b) .

- ② Sea $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ y tomamos dos constantes α, β . Dada la siguiente curva en el espacio

$$\gamma(t) = (ae^{-\alpha t}, be^{-\alpha t}, c + \beta t),$$

que describe el movimiento de un fluido, se pide:

- a) Encuentra el campo de velocidad del fluido.

- b) Halla la trayectoria de una partícula que en el instante $t = 3$ se encuentra en el punto $(3, 2, 5)$.
- c) Determina la línea de traza de la partícula que en $t = 3$ está en $(3, 2, 5)$.

- 3 Consideramos el campo de velocidad de un fluido representado por

$$V = (\alpha \cos(\omega t), \alpha \sin(\omega t), 0),$$

donde α y ω son constantes.

- a) Obtén la trayectoria de la partícula fluida que en $t = 0$ ocupa la posición (a, b, c) .
- b) Encuentra la ecuación de las líneas de corriente para un instante genérico $t = \tau$.

Sol: (a) circunferencias de radio α/ω centradas en $(a, b + \alpha/\omega)$. (b) $y = \tan(\omega\tau)x + C$.

- 4 Se considera el flujo plano definido por el siguiente campo de velocidades:

$$u = \frac{x}{t + T} \quad v = c,$$

donde: $T = 1,111$ s y $c = 2,1$ m/s.

- a) Representa gráficamente las líneas de corriente (LDC) en el instante $t = 5$ s, que pasan por los puntos $(1, 0)$ y $(4, 0)$.
- b) Considerando la LDC que en $t = 5$ s pasa por $(4, 0)$ y la partícula fluida que pertenece a la misma y tiene coordenada $y = 4$, representa gráficamente la trayectoria de esta partícula fluida desde $t = 0$ s hasta $t = 8$ s.

Sol: (a) $y = 12,8331 \log x$ e $y = 12,8331 \log(x/4)$. (b) $y = 2,35(x - 0,993) - 6,5$.

- 5 En un cierto flujo las componentes de la velocidad son:

$$u = \frac{\alpha x}{t}, \quad v = \beta y,$$

siendo α y β constantes. Determina el tipo de fluido y la curva que describe en cada instante un colorante que se inyecta en el punto $(1, 2)$, suponiendo despreciables los efectos de difusión.

Sol: $y = 2e^{\beta t(1-x^{-1/\alpha})}$.

- 6 (Examen noviembre 2018) Consideramos el siguiente campo de velocidades en un fluido

$$V = \left(\frac{x}{1+t}, \frac{y}{1+2t} \right).$$

Se pide determinar, justificando las expresiones a emplear:

- a) La ecuación general de las líneas de corriente y en concreto la de que en $t = 0$ pasa por el punto $(2, 1)$.

- b) La ecuación general de la trayectoria y en concreto la de la partícula que en $t = 0$ pasa por el punto $(2, 1)$.
- c) Las expresiones de la velocidad y de la aceleración de una partícula genérica, en concreto la que en $t = 0$ pasa por el punto $(2, 1)$.

Sol: (a) $y = x/2$. (b) $y = \sqrt{x-1}$. (c) $V = (2, (1+2t)^{-1/2})$.

- 7 (Examen abril 2019) Dado el siguiente campo de velocidades en un fluido:

$$V = \left(6xt^2, \frac{y}{1+3t} \right)$$

Se pide determinar, justificando las expresiones a emplear:

- a) La ecuación general de la trayectoria y en concreto la de la partícula que en $t = 0$ pasa por el punto $(3, 1)$.
- b) Las expresiones de la velocidad y de la aceleración de una partícula genérica, en concreto la que en $t = 0$ pasa por el punto $(3, 1)$.
- c) La ecuación general de las líneas de corriente y en concreto la de que en $t=0$ pasa por el punto $(3, 1)$.

Sol: (a) $x = 3e^{2t^3}$, $y = (1+3t)^{1/3}$. (b) $V = (18t^2e^{2t^3}, (1+3t)^{-2/3})$. (c) $x = 3$.

- 8 (Examen noviembre 2019) Dado el campo de velocidades $V = \left(\frac{t}{x}, \frac{2}{y-1} \right)$, se pide:

- a) Clasificar el tipo de flujo, justificando brevemente cada afirmación.
- b) ¿Puede tratarse del flujo de un líquido? Razona la respuesta.
- c) Obtener la línea de corriente que pasa por el punto $(1, 2)$ en un instante t_0 . Dibuja la línea obtenida para $t_0 = 0$.
- d) Hallar la trayectoria de la partícula que en $t = 0$ pasa por el punto $(1, 2)$.
- e) Encuentra la traza en $t = 2$ de las partículas que pasaron por el punto $(1, 2)$ en un instante anterior.

Sol: (c) $x = 1$. (d) $x = \sqrt{t^2 + 1}$, $y(y/2-1) = 2t$. (e) $x = \sqrt{5 - \tau^2}$, $y(y/2-1) = 4-2\tau$.

- 9 (Examen enero 2020) Dado el campo de velocidades $V = (t^2, 1-t)$, se pide:

- a) Clasificar el tipo de flujo, justificando brevemente cada afirmación. ¿Puede tratarse de un fluido incompresible? ¿Y de un flujo rotacional? Razona las respuestas.
- b) Dibuja la línea de corriente que pasa por el punto $(0, 0)$ en el instante $t = 2$.
- c) Halla la trayectoria de la partícula que en $t = 2$ pasa por el punto $(0, 0)$.

Sol: (b) $y = -x/4$. (d) $x(t) = (t^3 - 8)/3$, $y(t) = t - t^2/2$.

2.8.2. Derivada material y campo de velocidad

- 10 Determinar las líneas de corriente en el flujo definido por:

$$V = (x, -y, 0).$$

Supóngase a continuación que en $y > 0$ existe cierto contaminante en el fluido cuya concentración puede expresarse mediante la función:

$$c(x, y, t) = x^2 y^n e^{-\alpha t},$$

siendo α una constante positiva y n un número natural. Determinar la variación en el tiempo de la concentración de contaminante siguiendo una partícula fluida y los posibles valores de α y n para los que dicha variación es nula.

Sol: $xy = C_1$, $z = C_2$ y la variación viene dada por $(2 - n - \alpha)x^2 y^n e^{-\alpha t}$.

- 11 a) Sea el campo de velocidades dado por las componentes

$$u = x + y + z + t, \quad v = x^2 y^3 zt \quad w = e^{xyzt}.$$

Calcula las componentes de la aceleración Lagrangiana.

- b) Comprueba que se cumple la siguiente igualdad:

$$\omega \times V + \frac{1}{2} \nabla |V|^2 = (V \cdot \nabla) V,$$

donde $V = (u, v, w)$ es el campo velocidad y ω es la vorticidad del flujo.

Sol: (a) $a_x = 1 + x + y + z + t + x^2 y^3 zt + e^{xyzt}$.

2.8.3. Ecuación de continuidad (forma diferencial)

- 12 a) ¿Puede el siguiente campo

$$u = 2x + y + z, \quad v = -y \quad w = -2z$$

representar la velocidad del flujo estacionario de un fluido incompresible?

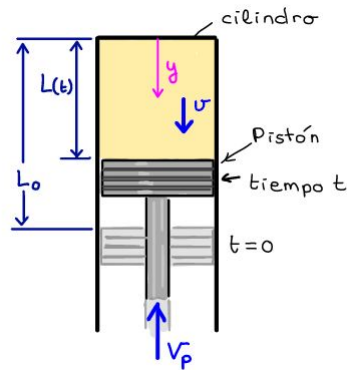
- b) Hemos conseguido calcular dos componentes del campo velocidad del flujo estacionario, 3-dimensional y 3-direccional de un fluido incompresible. En efecto, vienen dadas por las siguientes expresiones

$$u = ax^2 + by^2 + cz^2 \quad w = axz + byz^2,$$

donde a, b, c son constantes. Obtén la expresión para la componente de la velocidad que nos falta.

Sol: (a) No. (b) $v = -3axy - by^2 z + f(x, z)$.

- 13 Una mezcla de aire y combustible es comprimida por un pistón en un cilindro de un motor de combustión interna. Situamos el origen de la coordenada y en el extremo superior del cilindro y consideramos que y apunta hacia abajo, como en la figura.



Suponemos que el pistón sube con velocidad constante V_p . Por otro lado, la distancia L entre el extremo superior del cilindro y el pistón disminuye con el tiempo de manera lineal $L = L_0 - V_p t$, donde L_0 indica la posición inicial del pistón cuando $t = 0$. En dicho instante inicial, la densidad de la mezcla dentro del cilindro es constante $\rho(0) = \rho_0$. Determina la densidad de la mezcla durante el camino ascendente del pistón como función del tiempo y de los parámetros dados.

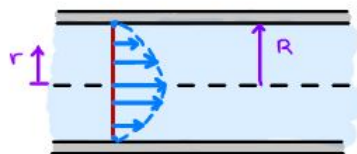
Sol: $\rho(t) = \rho_0 \frac{L_0}{L_0 - V_p t}$.

2.8.4. Ecuación de continuidad y caudal

- 14 Deduce la fórmula de la ecuación de continuidad para un tubo de corriente fijo con una entrada y una salida de flujo, en los siguientes casos:
- Flujo incompresible.
 - Flujo incompresible y volumen de control indeformable.
 - Flujo estacionario

- 15 Consideramos una cañería circular (de radio R) y horizontal por la que fluye en régimen laminar un aceite de densidad ρ y viscosidad μ . En la sección transversal el perfil de velocidades está determinado por la siguiente igualdad:

$$u(r) = u_0 - Kr^2, \quad \text{con} \quad 0 \leq r \leq R.$$

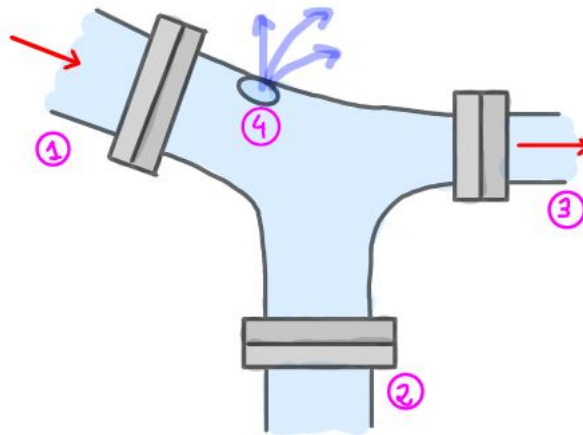


Determina:

- a) El valor de la constante K .
- b) El caudal que circula por la tubería.
- c) La fuerza por unidad de longitud que ejerce el aceite sobre la cañería debida a la viscosidad.

Sol: (a) $u(r) = u_0(1 - (r/R)^2)$. (b) $Q = \pi u_0 R^2 / 2$. (c) $F/L = -4\pi\mu u_0$ N/m.

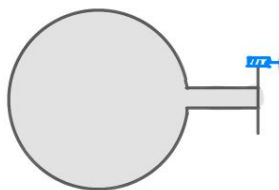
- 16** Consideramos un flujo estacionario de agua en una unión de tuberías como indica la figura, donde además se pierde caudal por un agujero.



- a) Encuentra una fórmula para la velocidad en la sección 2, en función de las áreas y velocidades del resto de secciones, así como del caudal que se pierde por el agujero.
- b) Calcula la velocidad en la sección 2 para las siguientes áreas $A_1 = 0,2 \text{ m}^2$, $A_2 = 0,2 \text{ m}^2$ y $A_3 = 0,15 \text{ m}^2$. Además el caudal se pierde a razón de $0,1 \text{ m}^3/\text{s}$ y las velocidades medias en las secciones 1 y 3 son $V_1 = 5 \text{ m/s}$ y $V_3 = 12 \text{ m/s}$, respectivamente.

Sol: 4,5 m/s.

- 17** Un tanque de $0,05 \text{ m}^3$ contiene aire a 800 kPa. En $t = 0$ el aire empieza a salir del tanque a través de un válvula por donde fluye un área de 65 mm^2 . El aire pasa a través de la válvula a una velocidad de 300 m/s y con una densidad de 6 kg/m^3 . Determina la tasa instantánea de cambio de la densidad del tanque en $t = 0$.



Sol: -2,34 (kg/m³)/s.

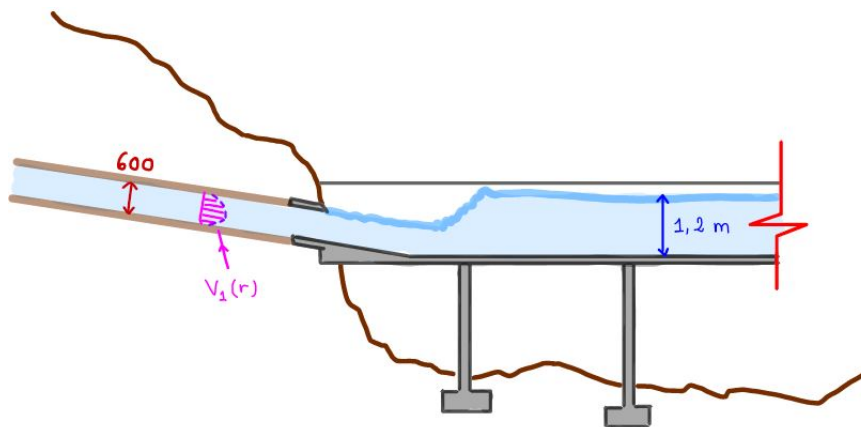
- 18 Dado un depósito de agua que se vacía por la parte inferior a través de un orificio de salida de área $A_s = 5 \text{ cm}^2$. Por su parte, la superficie libre en el depósito es de $A = 100 \text{ cm}^2$. Suponiendo que el agua se desaloja con una velocidad constante de $V_s = 2 \text{ m/s}$ por dicho orificio, ¿a qué velocidad desciende el nivel del agua?

Sol: -0,1 m/s.

- 19 Se introduce un pistón de diámetro $D_1 = 5 \text{ cm}$ a velocidad $v_p = 5 \text{ cm/s}$ en un cilindro de diámetro $D = 6 \text{ cm}$. Esto hace que el agua que contiene el cilindro salga en dirección opuesta al movimiento del pistón, con una velocidad media V_m a través del espacio que queda entre el cilindro y el pistón. Calcula V_m .

Sol: 11,36 cm/s.

- 20 En un tramo de un trasvase local de agua, el flujo sale de un túnel circular de diámetro 0,6 m a un tramo en acueducto en el que circula en lámina libre según se representa en la figura.

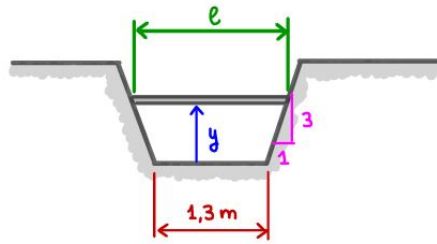


En el acueducto se detectan una serie de fugas cuya magnitud se desea evaluar. La distribución de velocidades en el tramo final de la tubería es:

$$V_1 = 150 \cdot (R_1^2 - r^2),$$

siendo R_1 el radio interior y r la distancia al eje de la tubería. Igualmente, se supone que la distribución de velocidades en una sección del canal trapezoidal viene dada por

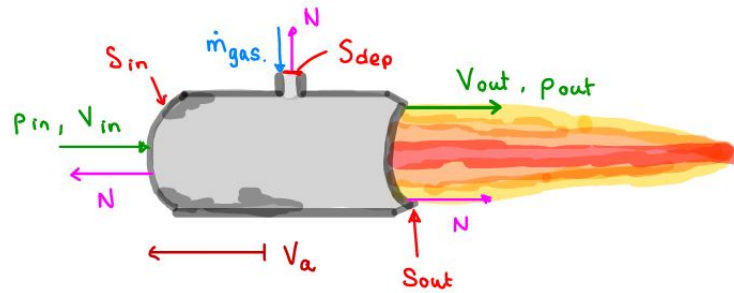
$$V_2 = 1,7 \cdot y^2.$$



Se pide obtener la pérdida de caudal.

Sol: $0,048 \text{ m}^3/\text{s}$.

- 21 Consideramos un avión a reacción en vuelo recto y a nivel constante a través de aire en calma a velocidad V_a . Determina el caudal de flujo de gasolina $\dot{m}_{gas}$ en un motor, suponiendo conocidos los siguientes datos: la densidad del aire ρ_{in} y el área de entrada A_{in} , así como el área A_{out} , densidad ρ_{out} y velocidad del flujo V_{out} en la boquilla de escape. Las velocidades se han medido respecto a un observador fijo en tierra. Un esquema suficiente para analizar la situación se muestra en la siguiente figura:



Tema 3

Ecuaciones fundamentales de la Dinámica de fluidos

En este capítulo nos ocupamos del movimiento de los fluidos, prestando especial atención a las fuerzas que lo causan. Así traduciremos la segunda ley de Newton a una expresión referida a un volumen de control (ecuación del momento lineal) usando el teorema del transporte de Reynolds. De la misma manera, pero combinada con el teorema de la divergencia y el teorema del transporte general, llegaremos a una versión diferencial de la misma ecuación: la ecuación de Euler, que es la versión para fluidos no viscosos de las **ecuaciones de Navier Stokes**, cuya solución general sigue siendo uno de los grandes misterios de la física clásica y de las matemáticas.

3.1. Ecuación de Euler

3.1.1. Fuerzas que actúan sobre una región fluida

A la hora de estudiar las fuerzas exteriores que actúan sobre un fluido, distinguimos dos tipos:

- **Fuerzas de volumen:** actúan sobre todas las partículas del volumen o región fluida. También se conocen como fuerzas másicas y son consecuencia de interacciones a distancia, como la gravedad, las fuerzas eléctricas o magnéticas.
- **Fuerzas de superficie:** son fuerzas que actúan por contacto sobre un elemento de superficie. De este tipo son las ya estudiadas presión, tensión superficial o fuerzas viscosas (debidas a la fricción).

La segunda ley de Newton nos dice que la fuerza neta es la tasa de variación instantánea

del **momento lineal o cantidad de movimiento**:

$$F = ma = \frac{d}{dt}(mV).$$

Como la densidad y la velocidad varían de manera continua de un punto a otro de una región fluida $R \subset \mathbb{R}^3$, podemos calcular el *momento total* de R como la suma de los momentos de volúmenes infinitesimales $\delta\mathcal{V}_i$ centrados en puntos $p_i \in R$ e ir haciendo la partición cada vez más fina:

$$\lim_{\delta\mathcal{V}_i \rightarrow 0} \sum_i (V\rho)(p_i) \cdot \delta\mathcal{V}_i = \int_R \rho V d\mathcal{V}.$$

En definitiva, la segunda ley de Newton reescrita en forma global para una región fluida R queda

$$\sum F_{ext} = \frac{d}{dt} \int_R \rho V d\mathcal{V}, \quad (3.1)$$

donde el lado derecho representa la resultante de las fuerzas exteriores que actúan sobre la región R . En este contexto, la segunda ley de Newton se enunciaría como sigue: *la suma de todas las fuerzas externas sobre una región fluida es igual a la tasa de cambio del momento lineal del sistema*.

3.1.2. Movimiento de fluidos no viscosos

Si consideramos un fluido no viscoso, solo bajo la acción de la gravedad y los efectos de la presión en su superficie S

Teorema 3.1: Ecuación de Euler

En un fluido no viscoso, sobre el que actúan fuerzas gravitatorias y de presión, la aceleración material es causada por la aceleración gravitatoria y por diferencias de presión. Con más precisión,

$$\frac{DV}{dt} = g - \frac{\nabla P}{\rho}.$$

La ecuación anterior es una buena aproximación lejos de la capa límite; en efecto, si tenemos un sólido cerca, la condición de no deslizamiento hace que no podamos ignorar los efectos de la fricción.

En general, cuando $\mu \neq 0$ las ecuaciones que gobiernan el movimiento de un fluido sometido a fuerzas másicas F_m y de presión incluye un término extra que se interpreta como la difusión del momento:

$$\rho \frac{DV}{dt} = \mu \Delta V + F_m - \nabla P \quad (\text{Navier-Stokes})$$

donde $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial y^2} + \frac{\partial f}{\partial z^2}$ es el operador de Laplace de una función $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$.

Notemos que aunque usemos notación vectorial para escribir las ecuaciones de manera compacta, tanto Euler como Navier-Stokes son sistemas de 3 ecuaciones en derivadas parciales.

3.1.3. Un par de soluciones exactas de Navier-Stokes

Vamos a estudiar dos situaciones sencillas en las que las ecuaciones de Navier-Stokes se pueden simplificar hasta convertirlas en una EDO que podemos resolver sin dificultad.

Consideramos un flujo estacionario e incompresible de un fluido viscoso entre dos placas horizontales infinitas separadas por una distancia h . Ignoramos toda fuerza másica (en particular, la fuerza gravitatoria). Para limitarnos a analizar un corte transversal plano, suponemos que se trata de un flujo 2-dimensional (que depende de lo que sucede en la dirección x de la longitud de las placas y la altura y del fluido entre las placas) y 1-direccional ($v = w = 0$), pues solo hay movimiento horizontal.

Consideramos dos situaciones distintas, según el elemento que induce el movimiento:

- **Flujo de Couette:** la placa superior se mueve a una velocidad U , mientras que la inferior permanece fija. Esta es la única causa del movimiento, por tanto, suponemos que la presión es constante en la dirección x . Sustituyendo las condiciones anteriores en la ecuación de continuidad, se deduce que la única componente no nula de la velocidad u solo depende de la coordenada y . Así, las ecuaciones de Navier-Stokes en este caso se reducen a $u''(y) = 0$. Combinando esto con la condición de no deslizamiento, se obtiene un perfil lineal de velocidad:

$$u(y) = \frac{U}{h}y, \quad \text{para} \quad 0 \leq y \leq h.$$

Cabe resaltar que hemos demostrado algo que para la ley de viscosidad de Newton (ver Teorema 1.9) suponíamos como hipótesis simplificativa.

- **Flujo de Pouseuille:** en este caso, las placas permanecen fijas y el flujo se mueve debido a una diferencia de presión en la dirección x . Razonando como antes, la velocidad no cambia en la dirección x y $\frac{\partial P}{\partial x}$ es una constante negativa, pero de Navier-Stokes ahora se obtiene un perfil parabólico para la velocidad

$$u(y) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial P}{\partial x} (y^2 - h^2) \quad -h \leq y \leq h.$$

Notemos que, por conveniencia de cálculo, aquí hemos llamado $2h$ a la separación de las placas y considerado el punto medio entre las placas como origen de alturas. En esta fórmula se aprecia claramente que a mayor viscosidad menor velocidad.

3.2. Ecuaciones del momento lineal y angular

Si a la segunda ley de Newton (3.1) para una región fluida R le aplicamos el teorema de transporte de Reynolds (ver Teorema 2.23), llegamos a

Corolario 3.2: Ecuación del momento lineal (EML)

Sobre un volumen de control VC inercial (no acelerado) encerrado por una superficie de control SC orientada con normal exterior N y que se mueve a velocidad constante V_c , se tiene que la resultante de las fuerzas exteriores viene dada por

$$\sum F_{ext} = \frac{d}{dt} \int_{VC} \rho V dV + \int_{SC} \rho V (V - V_c) \cdot N dA,$$

donde ρ y V representan la densidad y la velocidad del fluido, respectivamente.

La igualdad anterior se interpreta como sigue: la suma de todas las fuerzas externas que actúan sobre el volumen de control es igual al cambio temporal del momento dentro del volumen de control más el flujo neto de momento que entra o sale a través de la superficie de control.

Para un volumen de control fijo, suponiendo un flujo incompresible con condiciones uniformes en cada sección transversal, la ecuación anterior se reduce a

$$\sum F_{ext} = \frac{d}{dt} \int_{VC} \rho V dV + \sum_{out} \dot{m}V - \sum_{in} \dot{m}V,$$

donde el primer término del lado derecho se anula para un flujo estacionario si el VC tiene volumen constante.

Muchos problemas de ingeniería incluyen el estudio de la rotación producida por la corriente de un fluido, por ejemplo, en las turbomáquinas se incluyen elementos como bombas centrífugas, ventiladores o turbinas. Para analizar estos dispositivos, buscamos una versión del Corolario 3.2 para el momento de la fuerza exterior resultante sobre un fluido. Recordemos:

Definición 3.3: Momento angular y momento de una fuerza

Si un punto móvil gira alrededor de un punto fijo O (centro de giro) y r denota el vector de posición de dicho punto respecto de O , se define:

- **Momento angular o cinético (momento del momento):** es el momento de la cantidad de movimiento, esto es, el producto vectorial del vector de posición por el momento lineal

$$r \times mV.$$

- **Momento de una fuerza F** alrededor del punto O es el producto vectorial

$$M = r \times F.$$

Recordemos que la magnitud del momento viene dada por

$$|M| = |F| \cdot |r| \cdot \sin \angle(F, r),$$

donde $d = |r| \sin \angle(F, r)$ es la distancia (perpendicular) del centro de giro a la línea de acción de la fuerza. El momento es perpendicular al plano que contiene a F y r y tiene signo positivo si la fuerza se dirige en sentido antihorario.

Aplicando la segunda ley de Newton se llega a

$$M = \frac{d}{dt}(r \times mV)$$

Razonando como en (3.1), obtenemos que la suma de todos los momentos de las fuerzas exteriores sobre una región fluida R vienen dados por

$$\sum M_{ext} = \frac{d}{dt} \int_R \rho(r \times V) dV.$$

La aplicación del teorema de transporte de Reynolds (ver Teorema 2.23) nos lleva finalmente a:

Corolario 3.4: Ecuación del momento angular (EMA)

Sobre un volumen de control VC inercial (no acelerado) encerrado por una superficie de control SC orientada con normal exterior N y que se mueve a velocidad lineal constante V_c , se tiene que la suma de los momentos exteriores viene dada por

$$\sum M_{ext} = \frac{d}{dt} \int_{VC} \rho(r \times V) dV + \int_{SC} \rho(r \times V)(V - V_c) \cdot N dA,$$

donde ρ y V representan la densidad y la velocidad del fluido, respectivamente.

Esto significa que la suma de todos los momentos exteriores que actúan sobre un volumen de control es igual a la tasa de cambio temporal del momento angular dentro del volumen de control más el flujo neto de momento angular que atraviesa la superficie de control empujado por el flujo másico. Un momento exterior resultante no nulo se produce por cualquier objeto que gire mientras es atravesado por un fluido (no importa si el giro lo produce o no el fluido).

3.3. Aplicaciones de la ecuación de Euler

3.3.1. Estática de fluidos

Se trata de la parte de la mecánica de fluidos que estudia los fluidos en reposo. Así pues, si aplicamos la ecuación de Euler con la velocidad del fluido igual a cero, se deduce

Corolario 3.5: Ecuación fundamental de la estática de fluidos

El gradiente de la presión es igual a la acción de la gravedad sobre un fluido en reposo, es decir,

$$\nabla P = \rho g.$$

En coordenadas, usando que la gravedad solo actúa en la dirección negativa de z , se tiene

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 0.$$

Por tanto, la presión es independiente de las coordenadas (x, y) espaciales, es decir, la única variación posible de la presión ocurre con la altura. En concreto, la última componente de la ecuación de la estática nos dice que

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g = -\gamma,$$

donde γ es el peso específico del fluido. Esto significa que, en un fluido dado, la presión es la misma en todos los puntos de un plano horizontal a una altura fijada. Esta afirmación es independiente de la geometría del recipiente, en concreto, se cumple siempre que los puntos están a la misma altura e interconectados por el mismo fluido (es decir, que podamos trazar una curva entre un punto y otro que permanezca en todo momento en el mismo fluido).

Además, de aquí también se deduce que para un fluido incompresible bajo la acción del campo gravitatorio terrestre, la presión aumenta con la profundidad. En efecto, integrando entre dos alturas distintas z_0 y z , queda

$$P(z) - P(z_0) = -\gamma(z - z_0)$$

y, situando el origen de alturas en el punto más bajo del fluido, se llega a que si dos puntos están separados por una altura h .

$$P_{bajo} = P_{top} + \gamma h.$$

Si ahora ejercemos una presión extra sobre la superficie, nos preguntamos cómo afecta dicho aumento a otros puntos del interior del fluido:

Teorema 3.6: Principio de Pascal

En un fluido incompresible y en equilibrio un cambio de presión en cualquier punto se transmite con igual intensidad en todos los puntos del fluido.

Esta propiedad es la base del funcionamiento de muchos sistemas hidráulicos como, por ejemplo, el gato hidráulico. El objetivo de este dispositivo es levantar o mover objetos pesados aplicando una mínima cantidad de fuerza. Consiste en un tubo en forma de U, relleno de un fluido incompresible y con un pistón móvil en cada lado.

Suponemos la fricción despreciable y aplicamos la ecuación de la estática: cuando los dos platos del pistón están a la misma altura, las presiones serán iguales, esto es,

$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \implies F_2 = \frac{A_2}{A_1} F_1$$

Esto último hace que los sistemas hidráulicos puedan aumentar o disminuir la fuerza aplicada sobre ellos. Para que la fuerza se amplifique, basta aplicarla sobre un área menor. En consecuencia, la fuerza necesaria para levantar un coche con un gato hidráulico es menor al peso del coche.

Instrumentos para medir la presión

El **barómetro** más sencillo, inventado por Torricelli en 1643, consiste en un tubo colocado boca abajo sobre un recipiente que contiene un fluido en contacto con el ambiente, cuya presión (P_{atm}) se quiere medir. Con este instrumento, se deduce que la altura h alcanzada por la columna de fluido en el tubo es proporcional a la presión atmosférica.

Casi siempre se usaba como fluido el mercurio hasta que se descubrió que el vapor de mercurio era dañino. Esto explica que el mmHg sea una unidad común para medir la presión atmosférica. En general, se suele elegir un fluido cuya presión de vapor (ver Definición 1.21) sea aproximadamente cero. Así, se llega a

$$P_{atm} = \rho gh$$

En consecuencia, la medida de la presión atmosférica es sencilla, pues se reduce a medir la altura alcanzada por el fluido en el tubo. En este caso, P_{atm} es una presión absoluta, pues está medida respecto al vacío. En definitiva, los barómetros se usan para medir **presiones absolutas**.

El uso de un **manómetro** es la manera de medir simultáneamente presiones en distintas posiciones de objetos testados en un túnel de viento. Sirve para medir presiones distintas a la atmosférica o la ambiente. Por ejemplo, si queremos medir la presión P_2 de un fluido de densidad ρ_2 en un tanque, le conectamos un manómetro con otro fluido de densidad ρ_1 y dejamos el otro extremo abierto a la atmósfera (suponemos P_{atm} conocida o, de lo contrario, la mediríamos con un barómetro). Para que dicho dispositivo funcione necesitamos fluidos inmiscibles y con $\rho_1 > \rho_2$ (por ejemplo, un gas en el tanque y un líquido en el manómetro).

Los manómetros se suelen calibrar situando el cero en el valor de la presión atmosférica, por tanto, la lectura obtenida con estos instrumentos (midiendo alturas) es una **presión relativa**:

$$P_{rel} = P_{abs} - P_{atm},$$

que se calcula como la diferencia entre la presión absoluta y la presión atmosférica local.

A diferencia de las presiones absolutas (medidas respecto al vacío), donde todas las presiones medidas serán positivas, en la escala relativa de presiones, nos encontramos valores positivos y negativos, según se trate de presiones mayores o menores que la ambiente, respectivamente. Estas últimas (con $P_{rel} < 0$) también se conocen como **presiones de vacío**.

3.3.2. Ecuación de Bernoulli

La ecuación o principio de Bernoulli es esencial para relacionar valores de presión y velocidad en distintos puntos (normalmente a distintas alturas) a lo largo de una línea de corriente. Se obtiene reescribiendo e integrando la ecuación de Euler para ciertas condiciones específicas.

Teorema 3.7: Ecuación de Bernoulli

Para un fluido no viscoso bajo la acción de la gravedad que se mueve generando un flujo estacionario e incompresible, la cantidad

$$B = \frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz \quad (3.2)$$

es constante a lo largo de cada línea de corriente. Aquí V^2 significa $|V|^2$.

Si además suponemos que el flujo es irrotacional, entonces B se mantiene constante en todo punto del flujo, es decir, B tiene el mismo valor para todas las líneas de corriente. Sin embargo, los flujos irrotacionales no se encuentran a menudo en la práctica. Para flujos rotacionales, B no cambia si nos movemos a lo largo de una línea de corriente, pero puede tomar valores distintos de una línea de corriente a otra. Notemos que al tratarse de un flujo estacionario, las líneas de corriente coinciden con las trayectorias.

Suponiendo condiciones uniformes del flujo a lo largo de cada sección transversal, en la práctica fijamos dos puntos de interés a lo largo del flujo: una sección de entrada (S_1) y una de salida (S_2), entonces la ecuación de Bernoulli se traduce en

$$\frac{P_1}{\rho_1} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 = \frac{P_2}{\rho_2} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2,$$

donde los subíndices indican los valores de las funciones en las secciones correspondientes. Si no suponemos condiciones uniformes, se sigue cumpliendo la igualdad para los valores medios en cada sección, salvo para la altura que se suele escoger el centro geométrico de cada sección.

Notemos que no es necesario calcular una línea de corriente específica para poder aplicar la ecuación de Bernoulli.

Si nos fijamos en las unidades de los sumandos que aparecen en B , se trata de J/kg . Por tanto, la ecuación de Bernoulli se puede entender como un principio de conservación de la energía del flujo (por unidad de masa).

Corolario 3.8: Conservación de la energía

En un flujo estacionario, la suma de la energía cinética ($V^2/2$), potencial (gz) y de presión (P/ρ), todas ellas por unidad de masa, es constante a lo largo de una línea de corriente, siempre que los efectos de compresibilidad y fricción se puedan ignorar.

El único término nuevo que aparece es la energía de presión, pero es bien conocido que se puede generar trabajo usando una diferencia de presión, es decir, haciendo actuar la fuerza de presión.

En definitiva, puede haber intercambios de energía entre estas tres cantidades, pero la suma se mantiene constante. No obstante, durante el proceso de conversión de un tipo de energía en otra, los tres sumandos deben permanecer mayores o iguales que cero, si usamos el convenio de situar el origen de alturas ($z = 0$) en el punto más bajo del flujo considerado.

Si multiplicamos la cantidad (3.2) por g , los términos que aparecen se expresan en unidades de longitud. En consecuencia, podemos interpretar la ecuación de Bernoulli como:

Corolario 3.9: Conservación de la cota hidráulica o total

La suma de la cota de presión (P/γ), la cota dinámica ($V^2/2g$) y la cota de altura (z) se mantienen constantes en un flujo estacionario e incompresible a lo largo de una línea de corriente, ignorando la viscosidad. Por tanto, en estas condiciones se cumple que la cota hidráulica o total

$$H = \frac{P}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} + z = \text{constante}.$$

La suma $\frac{P}{\gamma} + z$ también se conoce como cota o **altura piezométrica**.

3.3.3. Principio de Arquímedes

Sea un sólido B de superficie S totalmente sumergido en un fluido incompresible de densidad ρ_f . La fuerza total sobre el cuerpo causada por la presión del fluido que lo rodea vendrá dada por

$$F_e = - \int_S P N dA = - \int_B \nabla P dV = - \int_B \rho_f g dV = -\rho_f g \mathcal{V}(B),$$

donde para la segunda y tercera igualdad hemos usado el teorema de la divergencia y la ecuación de la estática (ver Corolario 3.5), respectivamente. Aquí $\mathcal{V}(B)$ denota el volumen del cuerpo B . En definitiva, aparece una fuerza de empuje (F_e) que actúa en dirección opuesta a la gravedad y viene dada por

$$F_e = -m_f g,$$

con $m_f = \rho_f \mathcal{V}(B)$ es la masa del fluido desplazado, es decir, la fuerza de empuje es igual en módulo al peso del fluido que ocuparía $\mathcal{V}(B)$ si el sólido no estuviera.

Teorema 3.10: Principio de Arquímedes

Todo cuerpo sumergido en el seno de un fluido incompresible experimenta una fuerza de empuje vertical hacia arriba de magnitud igual al peso del fluido que desaloja.

Por tanto, dicha fuerza de empuje actúa sobre la misma línea de acción del peso del cuerpo, pero en sentido contrario. Notemos que la fuerza de empuje no es otra cosa que la resultante de la presión, solo que se le cambia de nombre en este contexto de cuerpos sumergidos; además, no depende de la profundidad a la que se encuentre el objeto sumergido.

Con lo anterior, resulta sencillo determinar la posición de equilibrio de un cuerpo sumergido en un líquido. Haciendo balance entre la fuerza gravitatoria y el empuje

$$F_g = \rho \mathcal{V}(B)g \quad F_e = -\rho_f \mathcal{V}(B)g,$$

la única diferencia entre ambas viene determinada por la comparativa entre la densidad del cuerpo (ρ) y la del fluido (ρ_f). Así pues, tenemos tres posibilidades:

- $\rho = \rho_f$: el cuerpo se mantiene en su posición sin experimentar ningún movimiento, aunque es muy raro encontrarse con un sólido y un fluido que tengan exactamente la misma densidad.
- $\rho > \rho_f$: la fuerza gravitatoria gana en magnitud al empuje y, por tanto, el cuerpo se mueve en la dirección $-z$ (se hunde), alcanzando una posición estable cuando llega al fondo.
- $\rho < \rho_f$: en este caso el empuje es mayor que el peso y, en consecuencia, el objeto se mueve hacia arriba alcanzando el equilibrio en la superficie del líquido (flota). Es el caso del hielo, que flota en el agua porque su densidad es menor.

Si ahora aplicamos el principio de Arquímedes a un cuerpo parcialmente sumergido en un fluido, llegamos a que la fuerza de empuje viene dada por

$$F_e = -\rho_f g \mathcal{V}(B_s),$$

donde B_s es la porción del objeto B que está sumergida en el fluido. Igualando esto a la fuerza gravitatoria en módulo, obtenemos que el cociente entre volumen sumergido y total está determinado por la razón entre la densidad del cuerpo y la del fluido:

$$\frac{\mathcal{V}(B_s)}{\mathcal{V}(B)} = \frac{\rho}{\rho_f}.$$

3.4. Ejercicios

3.4.1. Deducción de las ecuaciones fundamentales

- ① Aplica el teorema del transporte general para $\Phi = \rho \varphi$, donde φ es cualquier campo escalar o vectorial definido sobre una región fluida R y sobre la superficie S que la

delimita.

- a) Usa el teorema de la divergencia para reescribir la fórmula solo con integrales sobre R .
- b) Aplica la derivada del producto y la ecuación de continuidad para llegar a la expresión

$$\frac{d}{dt} \int_R \rho \varphi dV = \int_R \rho \frac{D\varphi}{dt} dV.$$

- 2 Partiendo de la expresión de la segunda ley de Newton para una región fluida R

$$\sum F_{ext} = \frac{d}{dt} \int_R \rho V dV,$$

aplica el teorema del transporte de Reynolds para obtener la fuerza exterior resultante en función de cantidades relacionadas con el volumen y la superficie de control elegidas.

- 3 El momento de una fuerza alrededor de un punto O es el producto vectorial $M = r \times F$, donde r es el vector de posición desde el punto O hasta cualquier punto de la línea de acción de F .

- a) Comprueba que el momento de una fuerza es la tasa de cambio instantáneo del momento angular

$$M = \frac{d}{dt}(r \times mV)$$

- b) Usa lo anterior para encontrar una expresión para el momento resultante de las fuerzas exteriores $\sum M_{ext}$ sobre una región fluida R y desarrolla la derivada temporal de la integral obtenida usando el teorema del transporte de Reynolds.

3.4.2. Ecuación de Euler

- 4 Consideramos el campo de velocidad

$$V = (ax + b, -ay + cx, 0)$$

de un fluido incompresible y no viscoso, donde a, b, c son constantes conocidas. Calcula la presión como función de (x, y) .

- 5 a) Consideramos el campo de velocidad

$$V = (ax + b, -ay + c, 0)$$

de un fluido incompresible y no viscoso, donde a, b, c son constantes conocidas. Calcula la presión como función de (x, y) .

b) Consideramos el campo de velocidad

$$V = (-ax^2, 2axy, 0)$$

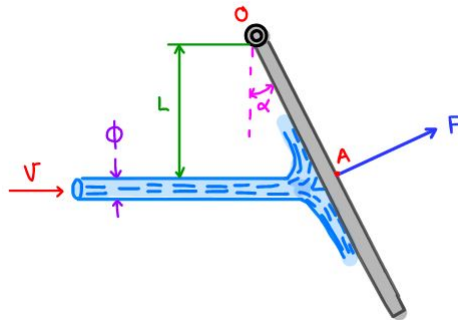
de un fluido incompresible y no viscoso, donde a, b, c son constantes conocidas. Calcula la presión como función de (x, y) .

- 6 (Examen enero 2020) Suponiendo que $V = (t^2, 1 - t)$ corresponde a un fluido no viscoso de densidad constante ρ , ¿puede $P(x, y, t) = -2xt\rho$ representar la presión en cada punto (x, y) del fluido en un instante t ? Justifica la respuesta.

- 7 (Examen mayo 2020) Considera el flujo de agua en una tubería vertical, suponiendo que es laminar y que se mueve paralelo a las paredes de la tubería hacia abajo. ¿Qué gradiente de presión será necesario para acelerar el agua a 20 m/s^2 ?
¿Y si el flujo se mueve hacia arriba? ¿Y si la tubería es horizontal?

3.4.3. Ecuación del momento lineal

- 8 Consideramos un chorro de agua horizontal que, moviéndose a velocidad de 6 m/s , incide en el centro de una placa cuadrada de espesor constante y longitud $2L = 30 \text{ cm}$, que está sostenida verticalmente por una bisagra anclada al techo que sostiene el extremo superior de la placa. Cuando el chorro golpea la placa, la desvía hasta formar un ángulo $\alpha = 30^\circ$ con la vertical, como muestra la figura.

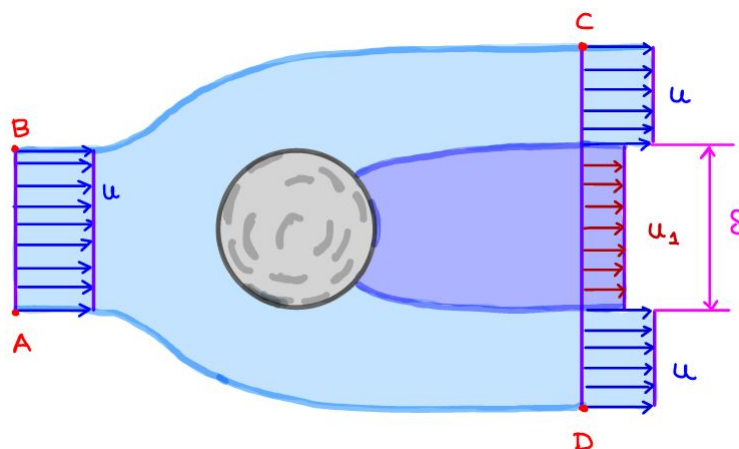


Teniendo en cuenta que el diámetro del chorro es de 25 mm , se pide calcular:

- a) El caudal que llega a la placa.
b) La fuerza que ejerce el chorro sobre la placa.

Sol: (a) $2,94 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$. (b) $15,28 \text{ N}$.

- 9 Consideramos un flujo uniforme que se encuentra un obstáculo cilíndrico en su camino (la figura muestra la vista desde arriba). Dicho obstáculo ocasiona un cambio de velocidad que se observa en la sombra que se produce en la parte posterior del obstáculo. Suponemos que el ancho de la sombra es δ y que en ella la velocidad es $u_1 = u - \alpha$, siendo α una constante positiva.



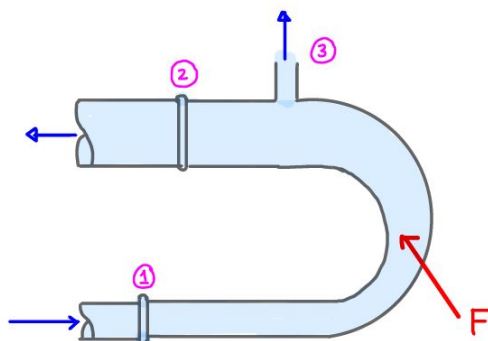
Como muestra la figura, tomamos un volumen de control $ABCD$ lo suficientemente alejado del obstáculo para que podamos considerar que en toda su superficie solo actúa la presión atmosférica (que consideramos igual a cero). Además, suponemos que la velocidad es igual a u , salvo en la sombra. Despreciamos las fuerzas másicas y suponemos profundidad constante. Se pide:

- Hallar la diferencia de longitud entre CD y AB .
- Obtener la fuerza por unidad de longitud (profundidad) ejercida sobre el obstáculo, como función de δ , u , ρ y α .

Aplica las fórmulas halladas en (a) y (b) para el caso particular de $\delta = 1$ m, $u = 5$ m/s, $\alpha = 0,5$ m/s y $\rho = 1,25$ kg/m³.

Sol: (a) $CD - AB = 0,1$ m. (b) $2,81$ N/m.

- 10 (Examen noviembre 2019) Tenemos una tubería en forma de U (como indica la figura) por la que circula un flujo estacionario de agua con una entrada y dos posibles salidas a la atmósfera. Nos referimos a las secciones marcadas en la figura como S_1 , S_2 y S_3 . Se ignora el peso de la tubería y cualquier rozamiento.

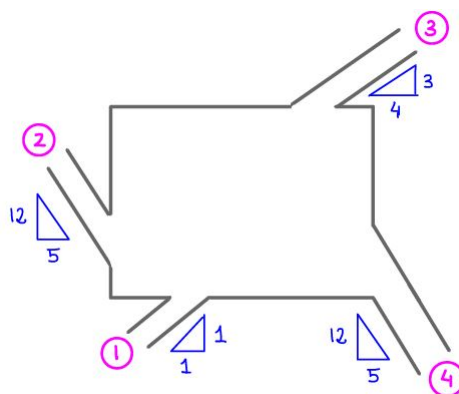


- Suponiendo que el área de S_1 es un cuarto del área de S_2 y que el área en S_3 es el 9% del área de S_2 , halla una relación entre las tres velocidades involucradas.

- b) En S_1 circula un caudal de 55 l/s, mientras que en S_2 (cuyo diámetro es de 10 cm) sale un caudal de 40 l/s. Con estos datos, calcula las velocidades en S_1 , S_2 y S_3 .
- c) En la arandela de unión de S_1 la presión es el doble que en S_2 . Teniendo en cuenta dichas presiones, plantea las ecuaciones para obtener las componentes de la fuerza F necesaria para anclar la tubería a una posición fija.
- d) Calcula la fuerza del apartado anterior, sabiendo que la presión en S_1 es de 100 kPa.

Sol: (a) $|V_1| = 28,01$ m/s, $|V_2| = 5,093$ m/s y $|V_3| = 21,22$ m/s. (b) $|F_x| = 2333,02$ N y $|F_y| = 318,3$ N.

- 11 (Examen mayo 2020)** Observa el volumen de control de la figura, donde tenemos dos entradas de flujo (1 y 2) y dos salidas (3 y 4).

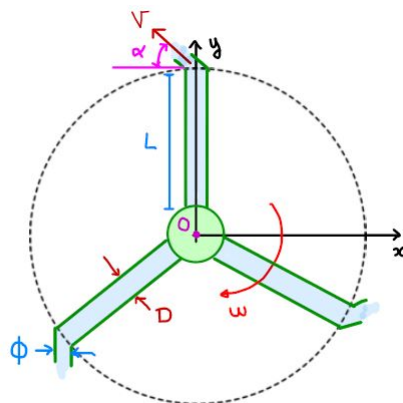


Se pide:

- (a) Si la densidad es constante en todo punto del fluido, calcular la variación total (respecto del tiempo) de la masa m_{VC} contenida en el volumen de control.
- (b) Considerando que se trata de un flujo estacionario, obtener las componentes horizontal y vertical de la fuerza necesaria para mantener fijo el dispositivo de la figura. Aquí se ignora el peso del dispositivo y se tiene en cuenta que las salidas forman parte de tuberías más largas (es decir, NO son salidas a la atmósfera).

3.4.4. Ecuación del momento angular

- 12** La figura muestra un aspersor de riego visto desde arriba, el cual gira respecto de un eje que pasa por el centro O. Dicho dispositivo está alimentado por un caudal de 1 l/s que entra por el punto O mediante una tubería perpendicular al mismo.

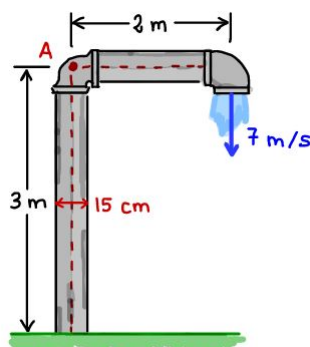


Suponemos que tenemos condiciones de flujo estacionario y que el aspersor se mueve sin rozamiento. Las dimensiones relevantes del problema son: la longitud de los brazos del aspersor $L = 20$ cm, el diámetro de dichos brazos $D = 10$ mm y el de la salida de cada boquilla $\phi = 6$ mm. Además, el ángulo entre el chorro de salida y la perpendicular a los brazos es $\alpha = 45^\circ$.

Con los datos anteriores, determina el par exterior M que es necesario aplicar sobre el aspersor para evitar que gire.

Sol: $1,67 \vec{k}$ N m.

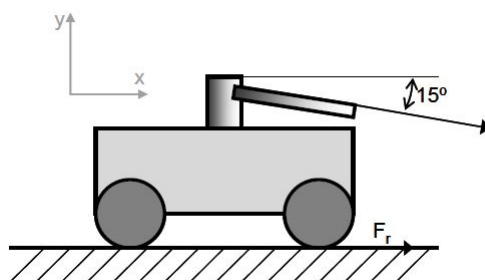
- 13 Tenemos un flujo de agua por una tubería de 15 cm de diámetro que consiste en un tramo vertical de 3 m de largo y un tramo horizontal de 2 m, el cual termina en un codo de 90° para forzar la salida del agua hacia abajo, como muestra la figura, en dirección vertical. El agua sale a la atmósfera a velocidad de 7 m/s, y la masa de la tubería acodada cuando está llena de agua es de 15 kg por metro. Determina el momento que actúa en el punto de intersección de los tramos horizontal y vertical. ¿Cuál sería la respuesta si la salida del chorro fuese hacia arriba?



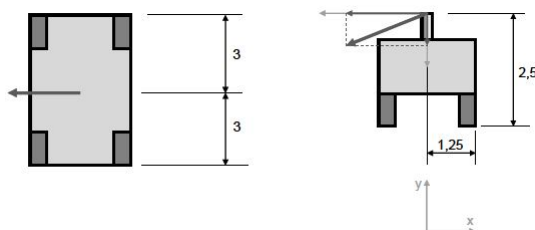
Sol: -1427,7 N·m y 2026 N·m (chorro hacia arriba)

- 14 Una tanqueta antidisturbios está equipada con un cañón de agua giratorio en su parte superior. El cañón puede girar 360° alrededor del eje vertical, formando siempre el chorro 15° con la horizontal. El caudal proyectado es de 80 l/s.

- a) Calcular el módulo que debe tener la F_r de las ruedas con el suelo para evitar que la salida del agua desplace la tanqueta hacia atrás, en la posición mostrada por la figura.



- b) Si ahora la fuerza de rozamiento con el suelo se calcula como $F_r = 0,27 \cdot N$ (siendo N la normal), determinar el caudal mínimo que sí sería capaz de desplazar la tanqueta hacia atrás.
- c) Con el caudal del apartado (a), determinar el máximo momento de vuelco que produce el chorro sobre la tanqueta en la posición que muestra la figura.



Datos: diámetro del cañón: 10 cm; masa de la tanqueta: 5 Tm. El cañón se encuentra situado en el centro geométrico del techo

Sol: (a) 787,2 N. (b) 0,317 m³/s. (c) 2232 $\vec{k}$ N·m

Tema 4

Aplicaciones

4.1. Fuerzas provocadas por la presión hidrostática

Recordemos que la estática de fluidos analiza el estado de los fluidos en reposo, cuando no se experimentan ni velocidades, ni aceleraciones, ni cantidad de movimiento en los mismos. En concreto, la estática nos sirve para conocer las presiones y fuerzas en el seno de los fluidos en reposo.

En este apartado nos interesan las interacciones del fluido con su entorno y consigo mismo. Los fluidos generan una acción sobre los sólidos que se encuentran en su entorno produciendo fuerzas y pares que deben ser estables. El conocimiento de dichas fuerzas y momentos resulta fundamental para el análisis de muchos elementos reales, como las compuertas o las presas hidrostáticas.

Entre las posibles aplicaciones del cálculo de esfuerzos sobre superficies, podemos mencionar que es necesario para dimensionar una presa, o también que se debe obtener el esfuerzo que soporta la pared de un canal para dimensionar su muro. Otra aplicación sería determinar el momento torsor o flector al que se ve sometido el eje de una válvula.

4.1.1. Fuerzas sobre superficies sumergidas planas

Supongamos que tenemos una superficie plana S sumergida en un fluido incompresible (líquido). Toda la superficie expuesta al líquido experimenta una fuerza hidrostática debida a la presión del fluido en todos los puntos de la superficie.

Las fuerzas sobre cada punto de S son perpendiculares a S , actúan en sentido contrario a la normal exterior a la superficie y dependen de la presión en la zona en que se encuentre la superficie, aumentando con la profundidad, como lo hace la presión. El objetivo es hallar la resultante de las fuerzas debidas a la presión; dado que la dirección y el sentido están claros, solo nos falta determinar la magnitud de la fuerza y su punto de aplicación, que se conoce

como **centro de presiones**.

El módulo de la fuerza resultante F_r se calcula mediante la integral de la presión en todo el área, puesto que actúa en toda la superficie. Así pues, tenemos

$$F_r = \int_S P dA. \quad (4.1)$$

Usando la ecuación de la estática, la definición de las coordenadas del centro de gravedad de una superficie y algo de trigonometría elemental, llegamos a

Teorema 4.1: Fuerza resultante (método general)

La magnitud de la fuerza resultante sobre una superficie plana completamente sumergida en un fluido homogéneo (de densidad constante) se puede calcular multiplicando la presión P_G en el centro de gravedad de dicha superficie por el valor A de su área:

$$F_r = P_G \cdot A = (P_0 + \gamma h_G)A,$$

donde P_0 es la presión en la superficie libre del fluido, h_G la distancia vertical del centro de gravedad (centroide) a la superficie libre y γ el peso específico del fluido.

Para determinar la ubicación vertical y_P del centro de presiones, argumentamos igualando el momento de la fuerza resultante al momento causado por la fuerza de presión distribuida por toda la superficie, ambos respecto al eje x . De esta manera, llegamos a

Propiedad 4.2: Ubicación vertical del centro de presiones

$$y_P = y_G + \frac{I_{x,G}}{A(y_G + P_0/\sin \theta)},$$

donde y_G es la coordenada y del centroide, θ es el ángulo de inclinación de S respecto a la superficie libre e $I_{x,G}$ es el momento de inercia respecto a un eje paralelo al eje x pasando por el centroide.

Trabajaremos con superficies geométricas sencillas para las cuales los momentos de inercia y la ubicación del centroide sean conocidos. Además, si tenemos superficies simétricas respecto al eje y , la ubicación del centro de presiones estará sobre el eje y por debajo del centroide (pues la presión aumenta con la profundidad). En caso contrario, se hallaría una fórmula similar para la coordenada x_P .

4.1.2. Caso particular: superficies planas rectangulares

Recordando el significado de la integrales de superficie, podemos re-interpretar la fórmula (4.1) como sigue:

Propiedad 4.3: Prisma de presiones

El módulo de la fuerza resultante sobre una superficie plana sumergida S es igual al volumen de un prisma imaginario de base S y altura dada por la presión $P(x, y)$ en cada punto $(x, y) \in S$. Este prisma se conoce como *prisma de presiones* (PP). En definitiva,

$$F_r = \mathcal{V}_{PP} = \text{volumen del prisma de presiones.}$$

Además la línea de acción de F_r pasa por el centroide de dicho prisma.

Esta propiedad nos da un método alternativo para calcular la magnitud de la fuerza resultante y la ubicación del centro de presiones en casos en que la geometría sea especialmente sencilla, como el caso de superficies planas rectangulares.

4.1.3. Fuerzas sobre superficies sumergidas curvas

En muchas aplicaciones prácticas, las superficies sumergidas no son planas. En este caso, la determinación de la fuerza hidrostática resultante es más complicada, pues se necesita la integración de las fuerzas de presión que cambian de dirección a lo largo de la superficie curva.

La diferencia básica con los apartados anteriores estriba en que ahora no se puede prescindir del tratamiento vectorial al tener ahora que la orientación de la fuerza va cambiando de un punto a otro. En el caso general 3-dimensional, la fuerza resultante debe proyectarse en las tres direcciones, descomponiendo la fuerza en sus tres componentes.

4.2. Flujo a presión y turbomáquinas

La mayor parte de este apartado se dedica al análisis del flujo a presión en régimen estacionario y, con el apoyo del programa EPAnet, se dan las directrices para estudiar el comportamiento de estos sistemas cuando las condiciones de funcionamiento varían muy lentamente. Esto se conoce como **simulación en periodo extendido**.

4.2.1. Sistemas de flujo a presión

En este y el siguiente apartado vamos a estudiar las dos modalidades básicas para el transporte de agua, cuya diferencia no radica en la presencia de una fuente energética exterior. En efecto, la fuerza de la gravedad es la que mueve el agua por los cauces naturales, por lo que no hay que recurrir a fuentes energéticas externas, como son las bombas. Pero tampoco las necesita el transporte de agua a presión si el fluido se desplaza desde una cota alta a otra inferior.

Hay dos opciones básicas para el transporte de agua:

-
- **A presión:** En el transporte de agua en conductos cerrados, la energía elástica que el agua almacena en forma de presión le confiere una gran versatilidad al trazado. El fluido, además de vencer el rozamiento que se opone a su movimiento, puede ganar cota a costa de perder energía de presión, una circunstancia clave para flexibilizar el trazado de una conducción.
 - **En lámina libre:** el agua está en contacto con la atmósfera y, en consecuencia no puede almacenar la energía elástica de presión, de tal manera que el trabajo que siempre hay que realizar para vencer las fuerzas de rozamiento sólo lo puede aportar la energía potencial gravitatoria. Dicho de otro modo, el régimen en lámina libre exige que el agua vaya siempre desde una cota superior a otra inferior. No hay alternativa posible.

Un flujo en lámina libre a la presión mínima que se encuentra el caudal es la atmosférica. Siempre hay una superficie a presión atmosférica.

Conviene diferenciar con claridad entre analizar, dimensionar y modelar sistemas hidráulicos a presión.

Una de las dificultades de los modelos es que con el paso de los años las características de las tuberías se han modificado. Su rugosidad por incrustaciones ha aumentado, e incluso el diámetro ha podido disminuir considerablemente. Además, estando las tuberías enterradas no se puede inspeccionar el estado real.

4.3. Ejercicios

4.3.1. Estática de fluidos

- 1 Se desea elevar un coche de 1500 kg utilizando una elevadora hidráulica de plato grande circular de 90 cm de radio y plato pequeño circular de 10 cm de radio. Calcula cuánta fuerza hay que hacer en el émbolo pequeño para elevar el coche.
- 2 Cuando el fluido es un gas perfecto en reposo, obtener la ecuación de variación de la presión en las siguientes circunstancias:
 - a) A temperatura constante.
 - b) Si la temperatura varía de manera constante con la altura.

A continuación, suponiendo que en la atmósfera prevalecen condiciones isotérmicas, calcular la presión y la densidad a una elevación de 2000 m si a nivel del mar la presión es 105 Pa y la densidad 1.24 kg/m^3 .

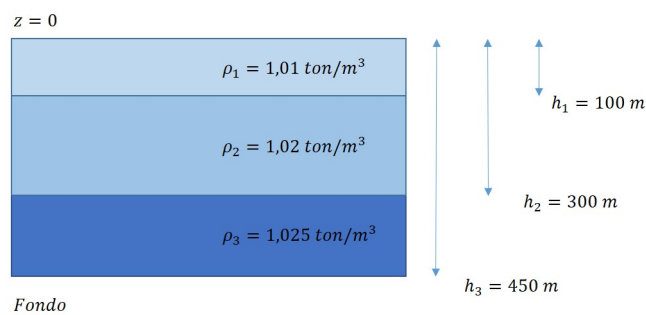
Sol: 78,4 kPa y $0,972 \text{ kg/m}^3$

- 3 Un oceanógrafo necesita diseñar un laboratorio marino de 5 m de altura que debe soportar una inmersión hasta 100 m, medida desde el nivel del mar hasta la parte superior del laboratorio. Encontrar la presión en la parte superior del laboratorio y la variación de presión en el lado.

Nota: Suponer que existe presión atmosférica en la superficie y que la densidad del agua salada es de 1027 kg/m^3 .

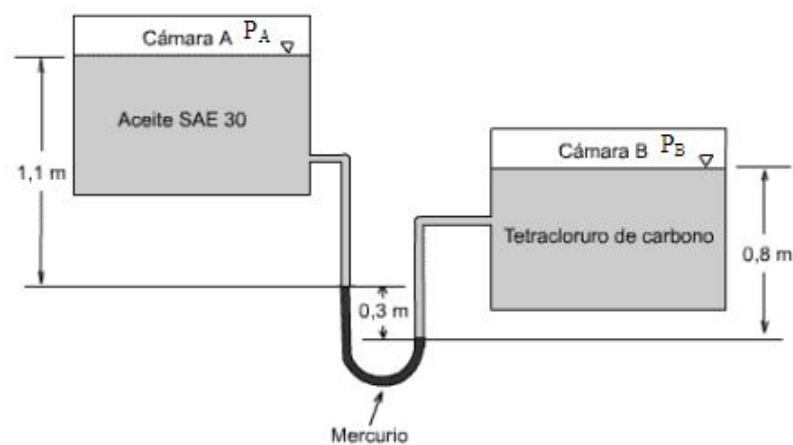
Sol: En la parte superior $P = 1 \cdot 10^6 \text{ Pa}$ y $P(z_{top} - h) = 10(h + 100) \text{ k Pa}$.

- 4 En un lugar del océano en donde la profundidad total es 450 m, los oceanógrafos miden datos a $h_1 = 100 \text{ m}$, $h_2 = 300 \text{ m}$ y $h_3 = 450 \text{ m}$. Los valores de densidad relativa para el agua salada en cada una de las capas de densidad constante son 1,01, 1,02 y 1,025 ton/m^3 , respectivamente. Encontrar las presiones en las superficies de contacto.



Sol: $P_1 = 990810 \text{ Pa}$, $P_2 = 2992050 \text{ Pa}$ y $P_3 = 45000337,5 \text{ Pa}$.

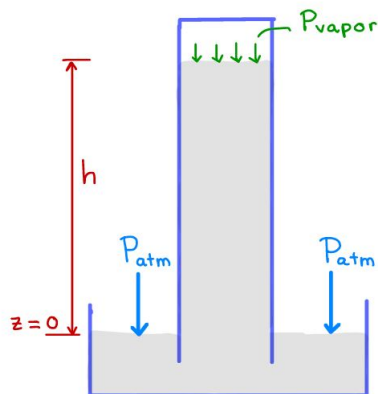
- 5 Conocidos los pesos específicos de las sustancias involucradas, determina la diferencia de presión entre las cámaras A y B.



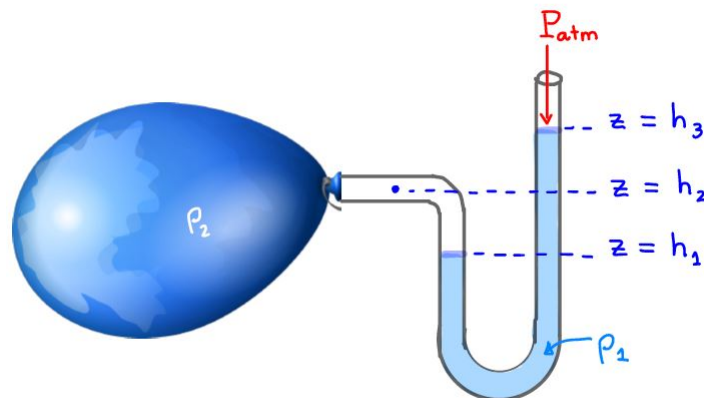
Pesos específicos en kN/m^3 : aceite 8,996, tetracloruro de carbono 15,97 y mercurio 132,8.

Sol: $37,28 \text{ kN/m}^2$.

- 6 En un barómetro como el de la figura, obtener la presión atmosférica P_{atm} en función de la altura h de la columna de líquido.



- 7 Queremos medir la presión P_2 de un fluido en un globo o tanque. Para ello, le conectamos un **manómetro** con un fluido de densidad ρ_1 y dejamos el otro extremo abierto a la atmósfera (suponemos P_{atm} conocida, la medimos con un barómetro si es necesario). Supongamos que las medidas se hacen a nivel del mar a temperatura conocida, que los fluidos empleados son incapaces de mezclarse y que $\rho_1 > \rho_2$. Obtener una expresión para P_2 en función del resto de datos del problema.



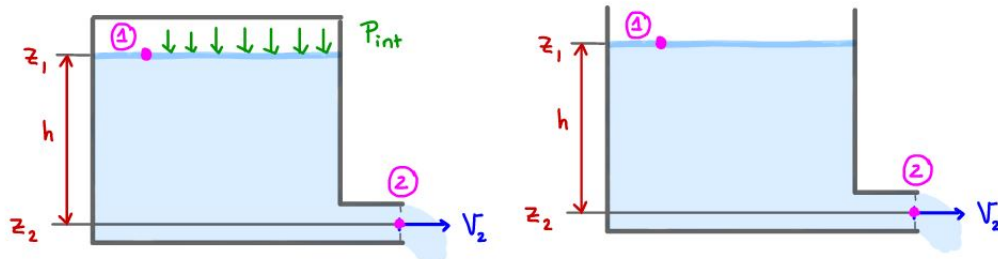
- 8 Se puede usar un barómetro para medir la altura de un edificio. Si las lecturas del barómetro fueron de 730 y 755 mmHg, respectivamente, determina la altura del edificio. Suponemos que el aire tiene densidad constante de 1.18 kg/m^3 .

Sol: 287,7 m.

4.3.2. Aplicaciones de la ecuación de Bernoulli

- 9 (Descarga libre de depósito atmosférico y presurizado) Un tanque presurizado tiene un orificio diminuto en el fondo, por donde el líquido contenido en el tanque se descarga hacia la atmósfera. Considera que sobre la superficie de dicho líquido la presión del aire es P_{int} . Despreciando los efectos de la fricción, se pide:

- a) Calcular la velocidad de salida del líquido por el orificio.
- b) Repetir el cálculo anterior, pero ahora para un tanque abierto a la atmósfera.

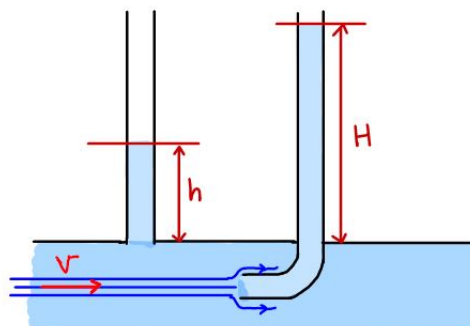


10 (Chorro libre ascendente y descendente) En ambos casos, considerar que la única fuerza externa que actúa es la gravedad.

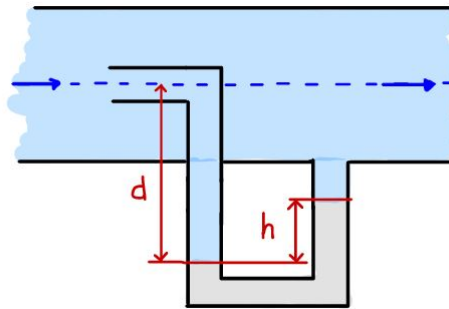
- a) Tenemos un chorro de agua que cae del grifo. Calcular la velocidad del chorro tras recorrer una distancia h vertical, en función de la velocidad de salida. Razonar por qué el chorro se estrecha conforme desciende.
- b) Tapamos parte de la boquilla de una manguera con un dedo y dejamos que salga agua verticalmente hacia arriba. Calcula la altura máxima que alcanza el chorro en función de la anchura de la boquilla y la velocidad de salida del flujo. Razonar por qué el chorro se ensancha a medida que asciende.

11 Vamos a estudiar varios dispositivos estándar que permiten medir la velocidad del flujo de un fluido haciendo medidas directas de la altura (o diferencia de alturas) de uno (o varios) líquidos involucrados en estos dispositivos.

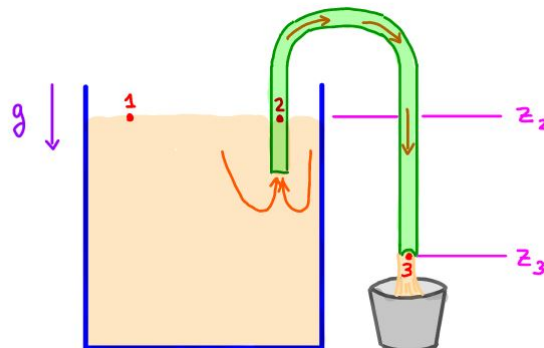
- a) **(Tubo piezométrico y de Pitot)** Se introducen un tubo piezométrico y un tubo de Pitot en una tubería horizontal por la que fluye agua. Para las alturas de las columnas de agua indicadas en la figura, determinar la velocidad del flujo en el centro de la tubería.



- b) **(Tubo Prandtl)** Consideramos un tubo de Pitot conectado a un manómetro como indica la figura. Halla la expresión que permite obtener de forma directa la velocidad del flujo en función de la diferencia de niveles h cuya lectura da el manómetro y de la densidad de los dos líquidos involucrados.

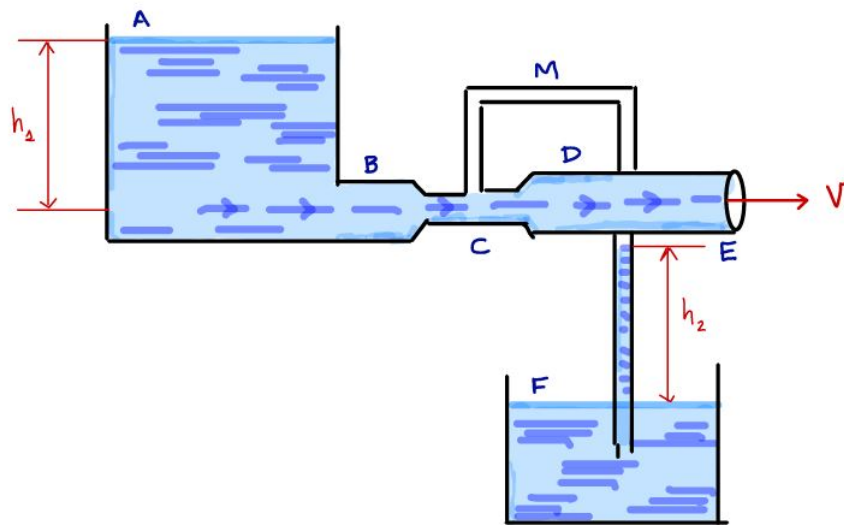


- 12 (Sifón)** La figura inferior muestra un esquema del funcionamiento de un sifón utilizado para extraer líquido de un tanque bajo la única acción de la gravedad. Las alturas z_2 y z_3 y las áreas A_1 , A_2 y A_3 se suponen conocidas; además $A_2 = A_3$. Tanto el tanque como la manguera se suponen abiertos a la atmósfera. Determina la velocidad del líquido que entra en el cubo y la presión en la manguera a la altura del punto 2 del esquema.



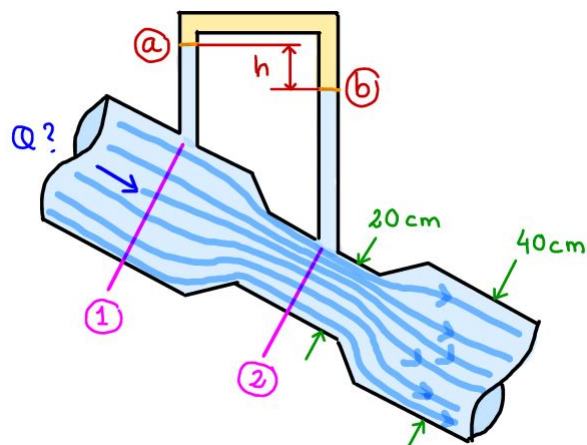
- 13** Se dispone de dos tanques grandes abiertos y que contienen el mismo líquido de densidad ρ . Del primer tanque sale una tubería horizontal, cuyo eje se sitúa a una altura h_1 por debajo del nivel de dicho tanque, como muestra la figura. Además, el tubo tiene un estrechamiento en el cual su área se reduce a la mitad de la original y descarga a la atmósfera el líquido que recibe del primer tanque.

A su vez, en la parte más estrecha se coloca un tubo de manera que su otro extremo desemboca en el líquido del segundo tanque. En estas condiciones, determina la altura h_2 que alcanza el fluido en este último tubo en función de h_1 .

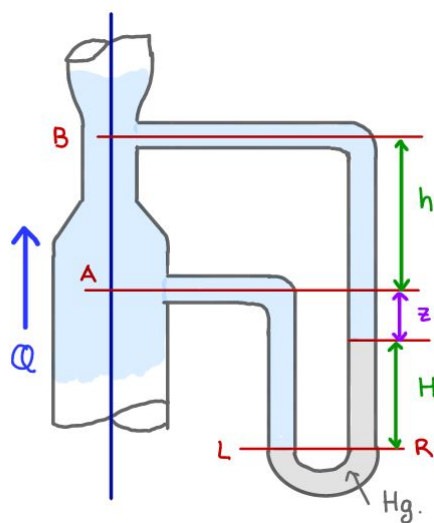


4.3.3. Ejercicios de repaso

- 14 Determinar el caudal circulante por el dispositivo Venturi de la figura. La densidad del aceite es $0,81 \text{ g/cm}^3$. Los diámetros de las secciones 1 y 2 son de 40 cm y 20 cm, respectivamente.



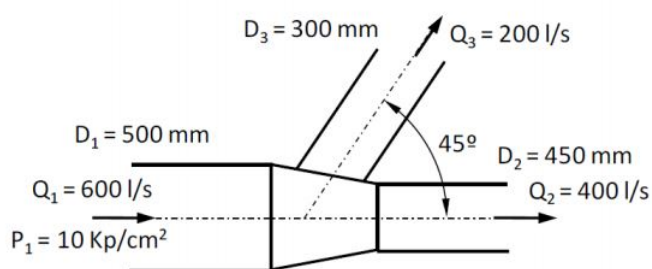
- 15 (Examen noviembre 2019) Queremos medir el caudal de agua que pasa por el tubo de Venturi vertical de la figura, donde suponemos que no hay pérdidas de carga. Para ello, conectamos un manómetro con mercurio.



- Halla la velocidad del flujo en la parte ancha de la tubería (A), sabiendo que su diámetro es el doble que en el estrechamiento. Expresa el resultado en función de los datos de la figura y las densidades de los líquidos involucrados.
- Sabiendo que el diámetro de la parte ancha $D_a = 300$ mm y la altura $H = 358$ mm, determina y expresa en l/s el caudal de agua que circula por la tubería. La densidad del mercurio es $\rho_m = 13600$ kg/m³.

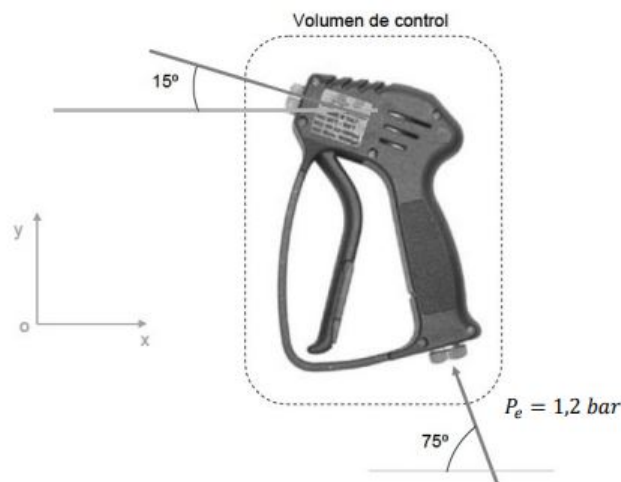
16 (Parcial Noviembre 2018) La bifurcación de una tubería de gran longitud tiene los diámetros y distribución de caudales indicados en la figura. Si transportando agua la presión en la sección de entrada es de 10 Kp/cm², calcular:

- Fuerzas, debidas a la presión, que actuarán sobre las secciones de entrada y de salida al volumen de control representado. Indicar estas fuerzas en forma vectorial.
- Fuerza con la cual el anclaje debería soportar dicha bifurcación para evitar que se desplace. Indicar estas fuerzas en forma vectorial.
- ¿Hacia dónde se desplazaría la unión de tuberías de la figura en caso de que no se construyese el anclaje del apartado anterior?

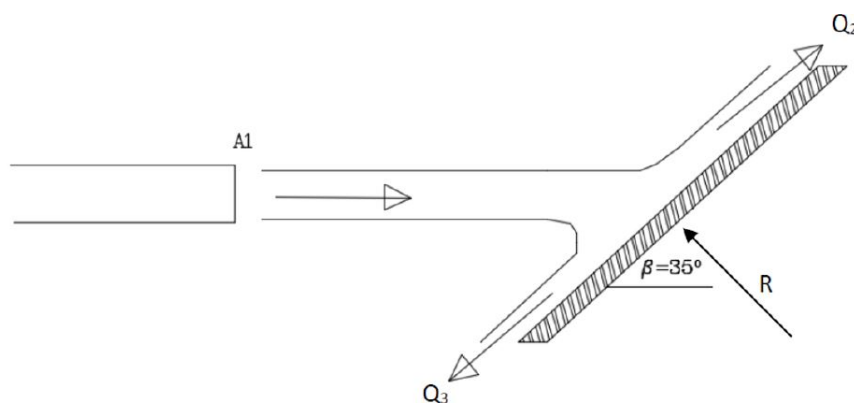


- 17 (Examen Enero 2019) Se está diseñando la pistola de agua para el lavado de vehículos que muestra la figura. En la parte inferior del mango de la pistola se encuentra la sección de entrada, de 1 cm de diámetro, a la que llega un caudal constante de 19 l/min con una presión en la sección de entrada de 1,2 bar.

Si el diámetro D de la boquilla de salida de la pistola es de 0.8 cm, se pide calcular qué fuerza deberá realizar el usuario de la pistola para mantenerla fija en la posición que muestra la figura. **Nota:** 1 bar = 10^5 Pa.



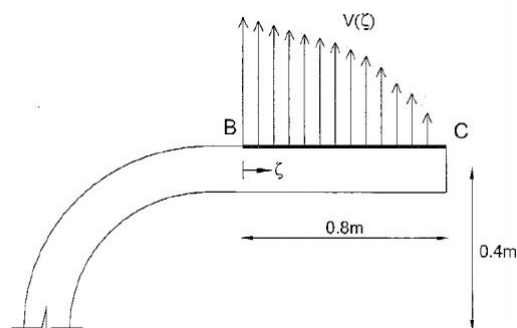
- 18 Un fluido de densidad relativa $1,2 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ sale impulsado desde una tubería de sección $A_1 = 0,9 \text{ m}^2$ e impacta sobre una placa plana inclinada, como puede verse en la figura.



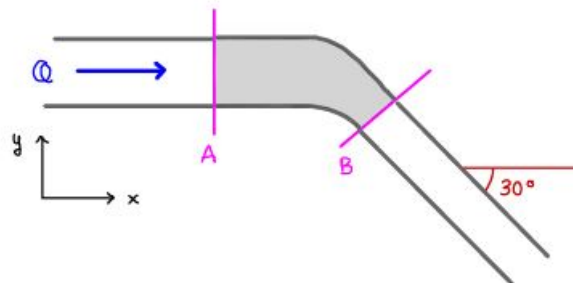
Si el caudal del chorro a la salida de la tubería es de $7,2 \text{ m}^3/\text{s}$, determinar:

- El reparto de caudales tras el impacto.
- La fuerza ejercida contra la placa.

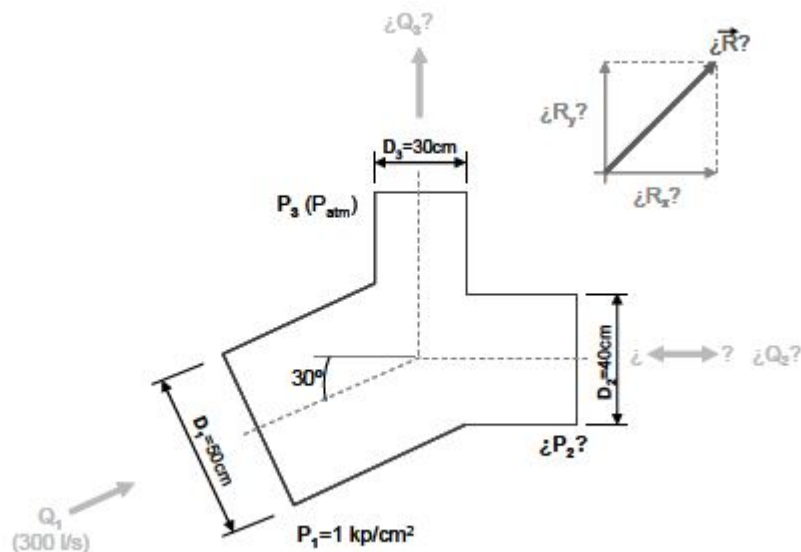
- 19 Aquí tenemos un dibujo esquemático del tramo final de la tubería de acero que forma parte de una fuente. Tal y como se indica, el agua entra por la sección A a presión (P_A) y sale a la atmósfera a en forma de chorro laminar por una ranura rectangular existente en la parte superior del tubo, a lo largo de sus últimos 80 cm de recorrido. El extremo final de aguas debajo de la tubería está cerrado, de modo que todo el caudal sale por la citada ranura, de longitud 80 cm y ancho 40,4 mm. El caudal es de 500 l/s. El eje de la tubería tiene un diámetro de 250 mm. Se considera que la pérdida de energía por unidad de longitud es constante a lo largo de los últimos 80 cm de tubería y que en la sección final la velocidad de salida por la ranura es prácticamente nula, como se indica en la distribución de velocidades del croquis. Se pide:



- Velocidad de salida máxima.
 - Altura que alcanza el agua.
 - Expresión para la distribución de velocidades.
- 20 La figura muestra el codo de una tubería conectando 2 tramos rectilíneos de secciones conocidas. También se conoce la presión en la sección B, el caudal de agua y el volumen de la tubería entre las dos secciones. Suponiendo despreciables las pérdidas en el codo, calcular la fuerza ejercida sobre el codo.



- 21 La figura muestra una conexión T, por la que circula agua, con todos los datos disponibles.



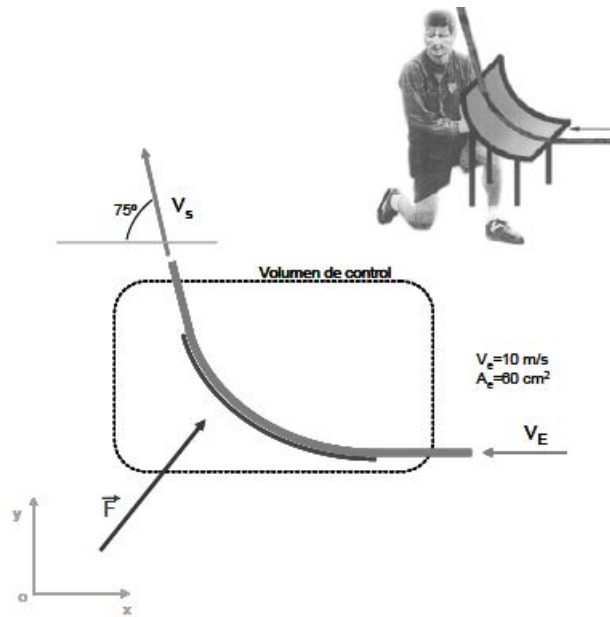
Suponemos que las 3 secciones se encuentran a la misma cota ($z_1 = z_2 = z_3$), que no se puede despreciar ninguna velocidad, pero sí se ignora cualquier peso y cualquier pérdida de carga. Se pide:

- Determinar los datos que faltan relativos a caudales, presiones y velocidades en las tres secciones.
- Determinar el valor de la reacción que debe ejercer el anclaje de la T para que esta se mantenga fija en su sitio.

Sol: (a) $Q_1 = 0,3 \text{ m}^3/\text{s}$, $Q_2 = 0,7 \text{ m}^3/\text{s}$ y $Q_3 = 1 \text{ m}^3/\text{s}$. (b) $R = (-2240,43, 4239,56) \text{ N}$.

- 22** Un hooligan decide protegerse de un cañón de agua usando una silla de diseño. De esta manera, logra desviar el chorro horizontal 75° . Si el hombre tiene una masa $m=85 \text{ kg}$, averiguar:

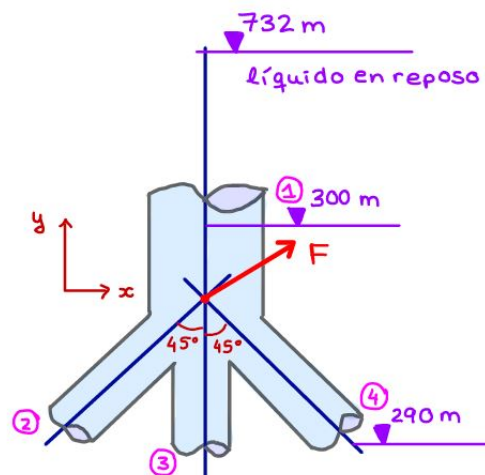
- ¿Cuál es la fuerza F necesaria para mantener la silla frente al chorro?
- Valor del coeficiente de rozamiento μ del seguidor con el suelo para que el chorro no lo arrastre hacia atrás.



Sol: (a) $F = (444,7, 579,6) \text{ N}$. (b) $\mu = 0,314$.

- 23 (Examen enero 2020) En una central hidroeléctrica fluye en condiciones estacionarias un caudal Q_1 por una tubería vertical de diámetro D_1 que se trifurca en tres tuberías exactamente iguales de diámetro D (como indica la figura).

Se ignora el peso de la tubería y cualquier rozamiento o pérdida. El dibujo indica solo una porción de la conducción, por tanto, ninguna de las 4 secciones marcadas está abierta a la atmósfera. La cota de 732 m se refiere a un depósito abierto.



- Determina las componentes de la fuerza necesaria F para mantener fija la tubería.
- Si $Q_1 = 105 \text{ m}^3/\text{s}$ y los diámetros son $D_1 = 4,8 \text{ m}$ y $D = 2,5 \text{ m}$, calcula las velocidades de entrada y salida del flujo.

- c) Calcula la presión de entrada y salida del flujo.
- d) Calcula un valor numérico para las componentes de la fuerza F obtenidas en (a).

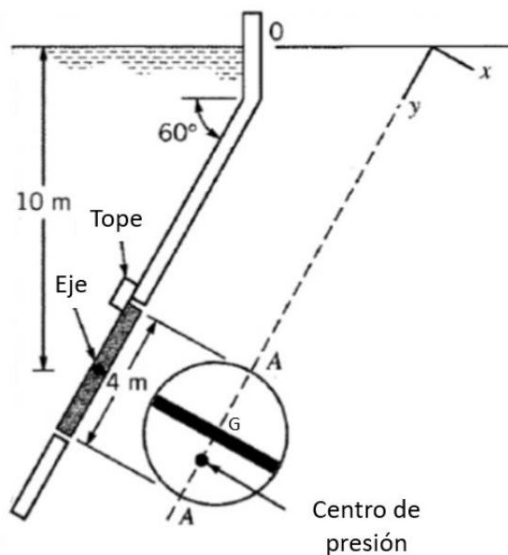
Sol: (d) $F = (0,25,26 \cdot 10^6) \text{ N}$.

4.4. Ejercicios de fuerzas provocadas por presión hidrostática.

4.4.1. Superficies planas: método general

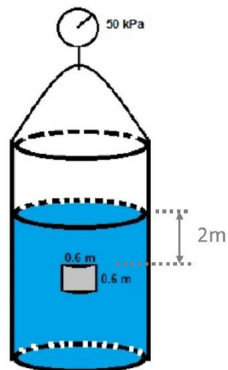
- 1 La compuerta circular de 4 m de diámetro que se muestra en la figura está situada en la pared inclinada de un gran depósito que contiene agua (peso específico $9,8 \text{ kN/m}^3$). La compuerta está montada sobre un eje a lo largo de su diámetro horizontal. Para una profundidad de agua de 10 m arriba del eje, determinar:

- a) La magnitud y la ubicación de la fuerza resultante que ejerce el agua sobre la compuerta
- b) Momento ejercido por la fuerza resultante sobre G



Sol: 1,23 MN y 11,63 m, (b) $1,07 \cdot 10^5 \text{ N m}$

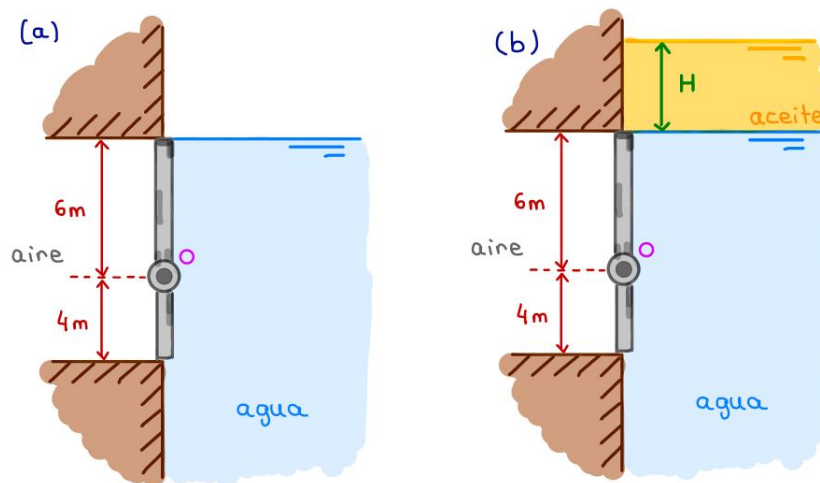
- 2 Un depósito a presión contiene aceite ($\rho=0,9 \text{ g/cm}^3$) y tiene remachada una placa cuadrada de lado 0,6 m en la pared vertical. Cuando la presión manométrica sobre la parte superior del depósito es de 50 kPa. ¿Cuál es la magnitud y ubicación de la fuerza resultante sobre la placa remachada?



Sol: 25,31 kN y 2,304 m

4.4.2. Superficies planas rectangulares: prisma de presiones

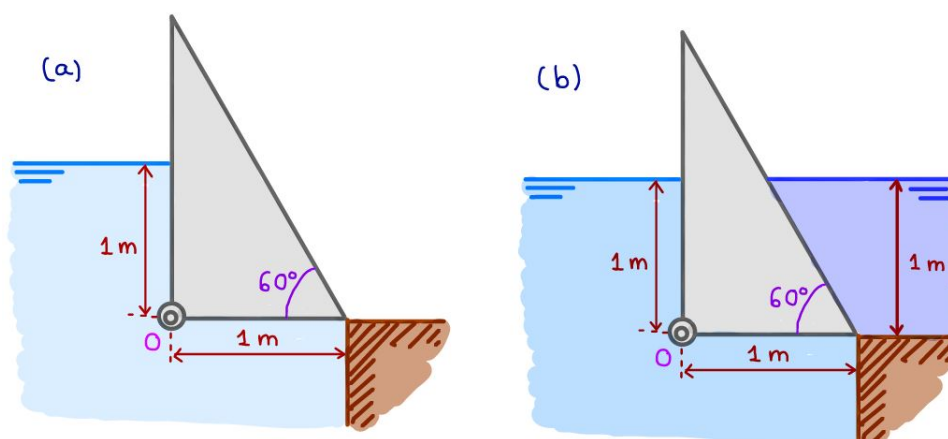
- 3 La compuerta de la figura (cuya anchura perpendicular al papel es de $b = 1$ m) puede girar alrededor de eje situado en O.
- A la derecha de la compuerta hay agua (cuyo nivel de lámina libre está enrasado con la parte superior de la compuerta), y por encima del agua, la atmósfera. A la izquierda de la compuerta hay aire a presión absoluta 1 atm. Se pide calcular el momento de giro que aparece sobre la compuerta.
 - Mismas condiciones que en a) pero añadiendo por encima del agua una capa de aceite de densidad 800 kg/m^3 de espesor H . Se pide calcular el valor de H que hace que la compuerta no gire.
 - Mismas condiciones que en (b) pero estando el aire situado a la izquierda de la compuerta a una presión absoluta de 1,2 atm. Se pide calcular el nuevo valor de H que hace que la compuerta no gire.



Sol: (a) 327 000 N m, (b) 4,167 m, (c) 6,75 m

- 4 La compuerta mostrada en la figura (cuya anchura perpendicular al papel es de $b = 1$ m) es maciza, de masa homogénea y puede girar alrededor de O. Para la misma, se pide:

- Si no hay agua a la derecha de la compuerta y el nivel del agua a su izquierda es de 1 m, tal como se indica, ¿cuál habría de ser la masa de la compuerta para que se mantenga en equilibrio (sin ningún par de giro resultante) en la posición mostrada?
- Si ahora (con la masa ya conocida) también hay agua a la derecha, con un nivel igual a 1 m, ¿cuál es el valor y sentido (horario o antihorario) del momento de giro resultante sobre la compuerta.

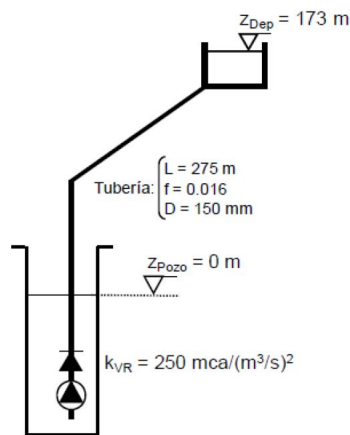


Sol: (a) 1000 kg, (b) 651, 9 N m (sentido horario)

- 5 En una balanza hidrostática, con las dimensiones de la figura, la masa móvil está dispuesta de tal manera que la superficie lateral del cuadrante toroidal se encuentra sobre un plano vertical que pasa por el eje de giro, cuando al poner a punto el equipo este se encuentra sin agua y el platillo vacío en la posición indicada.

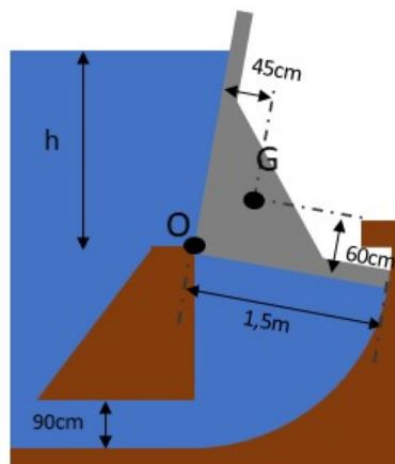
En una experiencia en la que se ha introducido en el equipo una cierta cantidad de agua, la cual alcanza el nivel H , la posición vertical de la superficie lateral se consigue de nuevo situando pesas en el platillo que suman en total una masa M .

- Si en la experiencia se miden los valores $H = 200$ mm y $M = 920$ g, justificar si estas mediciones son correctas o la experiencia se ha realizado de manera errónea.
- Imagina que no sabemos cómo de pura es el agua utilizada, con las mediciones anteriores calcula su densidad.



Sol: (a) mediciones correctas, (b) $1004,2 \text{ kg/m}^3$.

- 6 (Examen mayo 2020) La compuerta de la figura pesa 150 kg por metro de profundidad y tiene una profundidad de 2 m (en dirección normal al dibujo). Su centro de gravedad está situado a 45 cm de su cara izquierda y a 60 cm sobre la cara inferior, pudiendo girar alrededor de O .



Determinar:

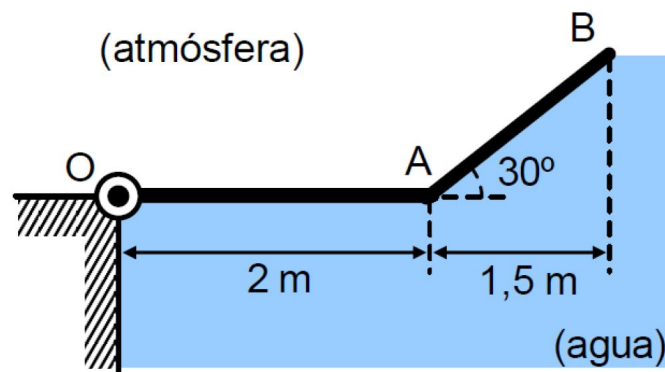
- Altura de la superficie libre del agua (h) en que la compuerta alcanza justamente la posición vertical.
- Altura de la superficie libre del agua por debajo del eje de giro O cuando la compuerta inicia el giro antihorario desde su posición horizontal.

Sol: (a) $0,06 \text{ m}$, (b) $0,97 \text{ m}$.

- 7 (Examen Enero 2019) Se La figura muestra el perfil de una compuerta rígida que consta de un tramo horizontal (OA) y un tramo inclinado (AB). La anchura de la misma, perpendicular al papel es de 1 m .

- a) Para la posición que muestra la figura, se pide calcular cuál es el valor de las fuerzas hidrostáticas del agua sobre cada tramo de la compuerta.
- b) Calcular cuál es la masa que deberá tener cada tramo de la compuerta para que ésta no gire, estando en la posición que muestra la misma figura.

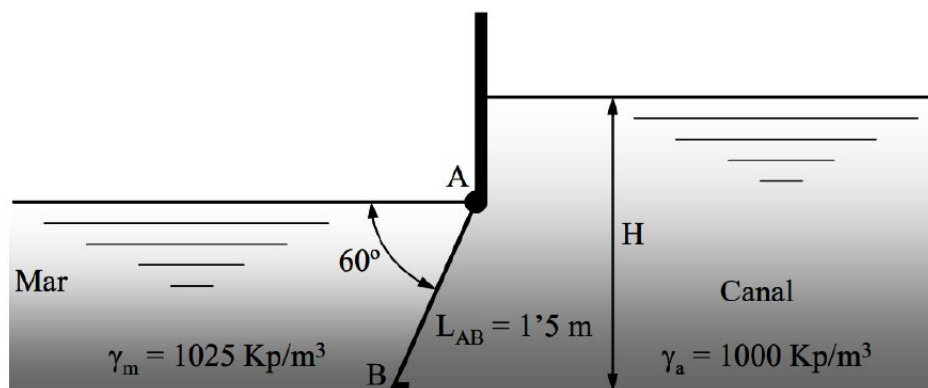
Nota: Tener en cuenta que el peso de cada tramo de la compuerta (OA y AB) es proporcional a su longitud.



Sol: (a) En OA 16991 N y en AB 7357,5 N. (b) En OA 1024,4 kg y en AB 887,16 kg.

- 8 Las descargas de aguas residuales depuradas desde el canal que las transporta hasta el mar están controladas por una compuerta rectangular AB de 1,50 m de longitud, 2 m de anchura y 400 Kp de peso. Esta compuerta se encuentra articulada en su arista superior A como indica la figura, y cuando está cerrada, tiene una inclinación de 60° respecto de la horizontal. Si el nivel del agua del lado del mar se considera constante, coincidente con el de la articulación A, determinar:

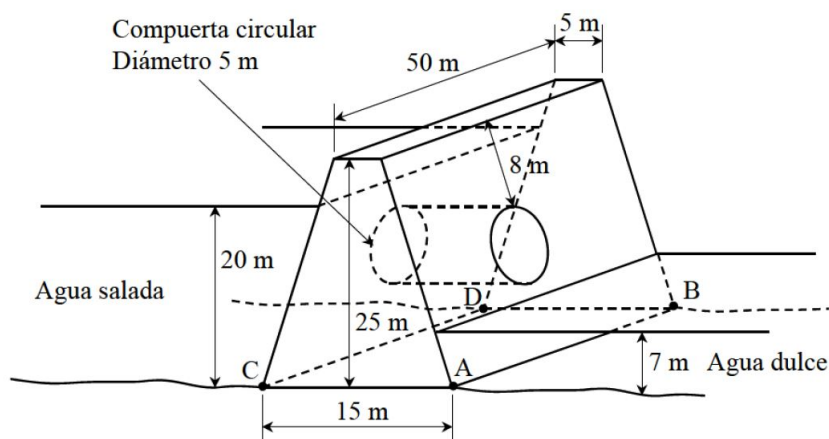
- a) Reacción que aparecerá en el tope inferior B de la compuerta, sobre el cual se apoya cuando está cerrada, en caso de que el canal esté vacío.
- b) Altura H que alcanzará el agua en el canal en el momento en que la compuerta esté a punto de abrirse para descargar agua hacia el mar.



Sol: (a) 1431,51 Kp, (b) 1,388 m.

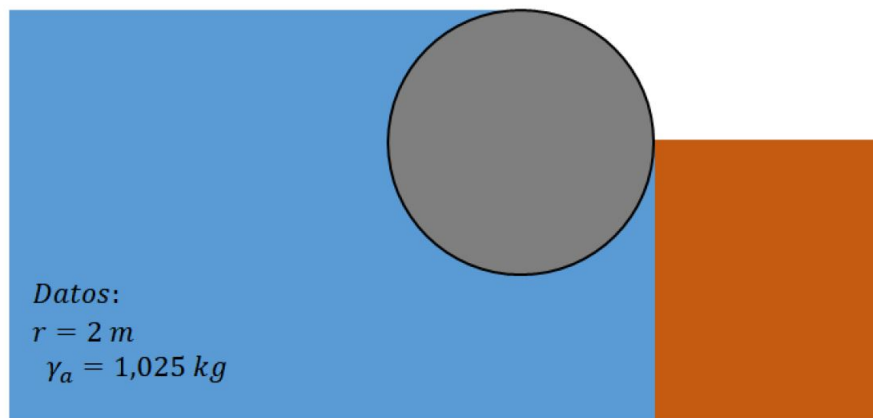
- 9 Se tiene un dique que separa agua dulce (peso específico 1000 Kp/m^3) de agua salada del mar (peso específico 1025 Kp/m^3), de 50 m de longitud, con las características del esquema de la figura. En este dique se ha dispuesto un orificio, de manera que en el lado del agua dulce está abierto, y en el lado del mar se cierra con una compuerta circular de 5 m de diámetro y 10 Tm de peso. La compuerta se ha montado en el plano inclinado del dique, y se articula en su punto superior a la distancia de 8 m de la coronación, medida en la dirección de dicho plano. Esta compuerta puede abrirse hacia el lado del mar por acción de la presión hidrostática del agua dulce cuando el nivel de ésta alcance un valor suficientemente alto. En estas condiciones, considerando que el nivel del agua del mar es en todo momento de 20 m, y admitiendo que la evolución de las presiones bajo el dique por efecto de las filtraciones en el terreno es lineal, determinar:

- Siendo el peso específico del material del dique de 4500 Kp/m^3 , comprobar si existirá o no tendencia al vuelco del mismo alrededor de la arista AB cuando el nivel de agua dulce alcance su valor mínimo de 7 m.
- Altura que deberá alcanzar el agua dulce para que empiece a abrirse la compuerta, hacia el lado del agua del mar, por efecto de las presiones hidrostáticas.

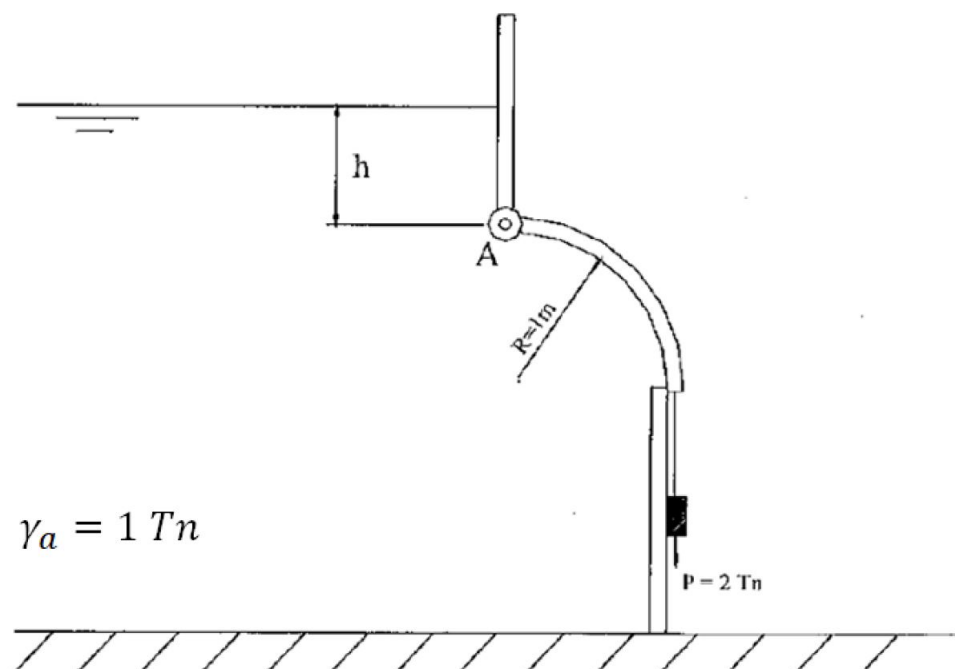


4.4.3. Superficies curvas

- 10 Una barrera cilíndrica mantiene el agua tal como se muestra en la siguiente figura. El contacto entre el cilindro y la pared es suave. Considerando un cilindro de 1 m de longitud, determinar las fuerzas verticales y horizontales sobre la barrera cilíndrica.

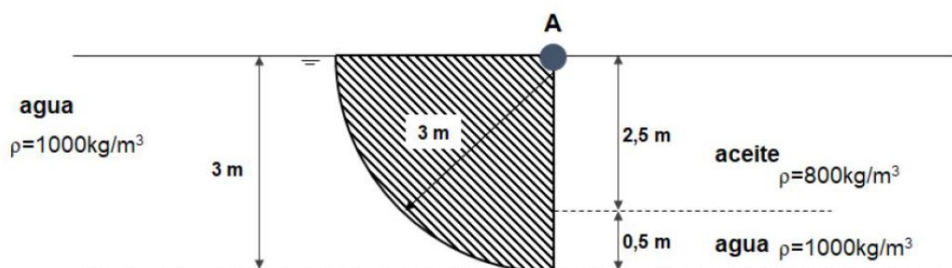


- 11 La compuerta de 2 m de anchura de la figura está articulada en A, colgando de su extremo inferior un peso $P = 2 \text{ Tn}$. Calcular:
- El ángulo α respecto a la horizontal que forma la resultante de presiones sobre la compuerta, en función de la altura h de agua.
 - La altura para la cual la compuerta empezará a abrirse.

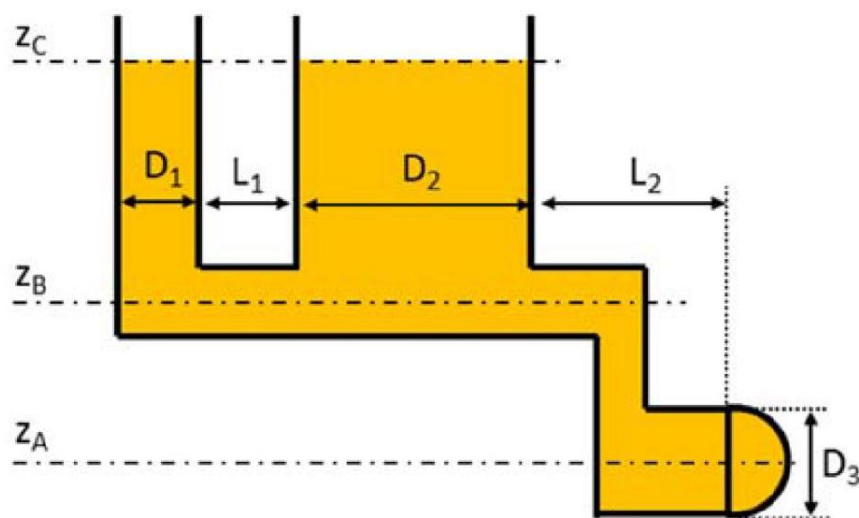


- 12 (Examen abril 2018) Suponiendo que la compuerta tiene 1 m de ancho, calcula:
- Fuerzas verticales y horizontales sobre la compuerta de la figura
 - Momentos en el punto A de la compuerta de la figura.
 - Dibuja las leyes de presión que actúan sobre la compuerta.

d) ¿Qué masa debe tener la compuerta para no girar?



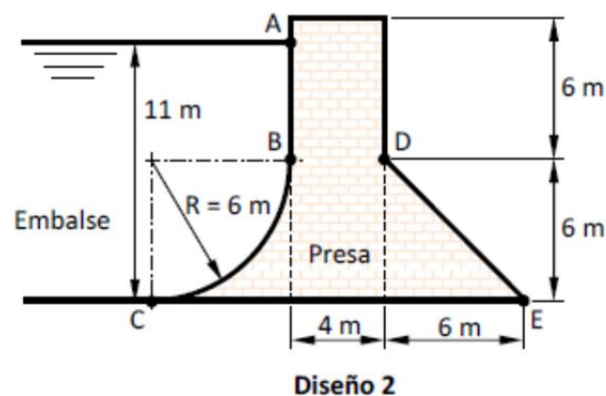
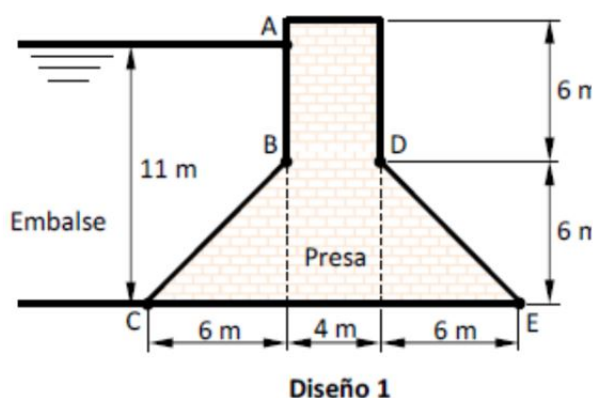
- 13 (Parcial noviembre 2018) La figura adjunta muestra el esquema de una prensa hidráulica rellena con un líquido, de densidad igual a 1500 kg/m^3 , y que en su parte inferior derecha se cierra con un casquete semiesférico. Se pide calcular las componentes horizontal y vertical de la fuerza que ejerce el líquido sobre dicho casquete.



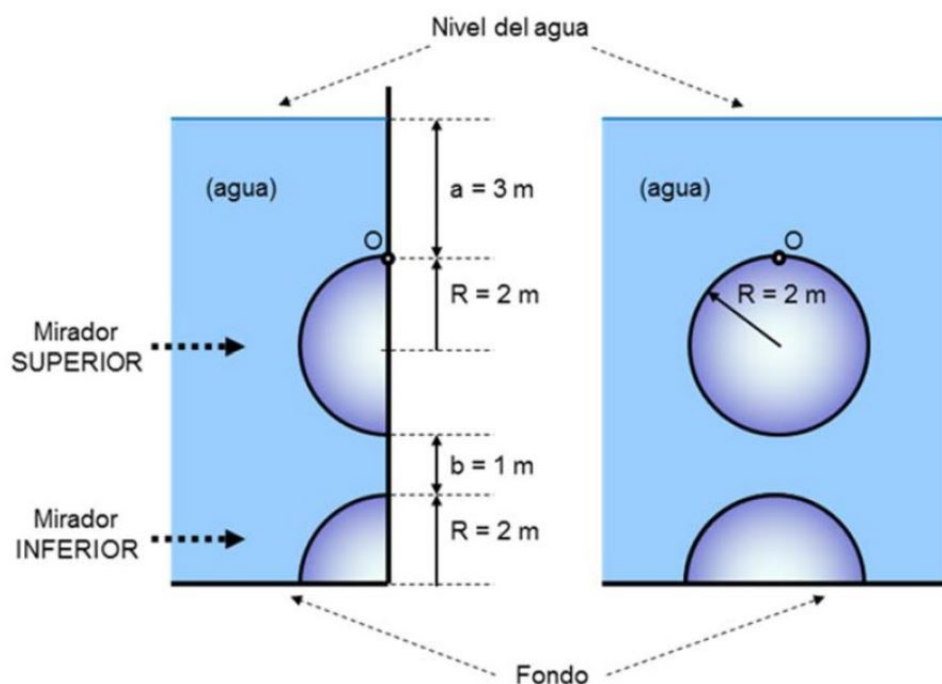
Datos adicionales del problema:
 $D_1 = 5.0 \text{ cm}$, $D_2 = 15.0 \text{ cm}$, $D_3 = 2.5 \text{ cm}$
 $L_1 = 3.0 \text{ m}$, $L_2 = 1.5 \text{ m}$
 $z_A = 1.0 \text{ m}$, $z_B = 1.4 \text{ m}$, $z_C = 2.1 \text{ m}$

- 14 (Examen abril 2019) Se va a proyectar la presa de un embalse con un nivel máximo de agua de 11 m. Para la sección de dicha presa se han propuesto diferentes diseños, de entre los cuales se han seleccionado en una primera iteración los dos que se indican en la figura adjunta. Para decidir el diseño definitivo se tendrá en cuenta que la presa no deberá tender a volcar alrededor del extremo E por acción de la presión del agua en el lado del embalse, sin considerar para ello el peso de la propia presa. En estas condiciones, y aplicando al caso de 1 m de ancho de presa, determinar:

- a) Momento, alrededor del extremo E, que ejercen las fuerzas de presión del agua sobre la presa en caso del diseño 1. Indicar si este momento es de vuelco o estabilizador.
- b) Igual que el apartado anterior pero aplicado al caso del diseño 2.
- c) Justificar, a partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores, cuál de los dos diseños podría ser el más adecuado.



- 15 (Examen enero 2020) La figura adjunta muestra una pared vertical en contacto con el agua de un gran acuario. En esa pared hay dos miradores a modo de burbuja de cristal. El superior es media esfera sobre la pared vertical, mientras que el inferior es la cuarta parte de una esfera, ya que está entre la pared vertical y el fondo del acuario.



Se pide:

- a) Para el mirador INFERIOR: Calcular módulo y sentido de la fuerza horizontal total sobre el mirador.
- b) Para el mirador INFERIOR: Calcular módulo y sentido de la fuerza vertical sobre el mirador.
- c) Para el mirador SUPERIOR: Calcular módulo y sentido de la fuerza horizontal total sobre el mirador.
- d) Para el mirador SUPERIOR: Calcular módulo y sentido de la fuerza vertical sobre el mirador.
- e) Para el mirador SUPERIOR: Calcular el momento total (módulo, dirección y sentido) de las fuerzas hidrostáticas sobre el punto O.

4.5. Ejercicios de flujo a presión y turbomáquinas

4.5.1. Pérdidas de carga por fricción

- 1 (Flujo de Hagen-Poiseuille) Supongamos un flujo estacionario, laminar e incompresible que circula por una tubería horizontal de sección circular (en ausencia de gravedad). Suponiendo simetría axial, la ecuación de continuidad y de Navier-Stokes en coordenadas cilíndricas se expresan como sigue:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rv) = 0$$

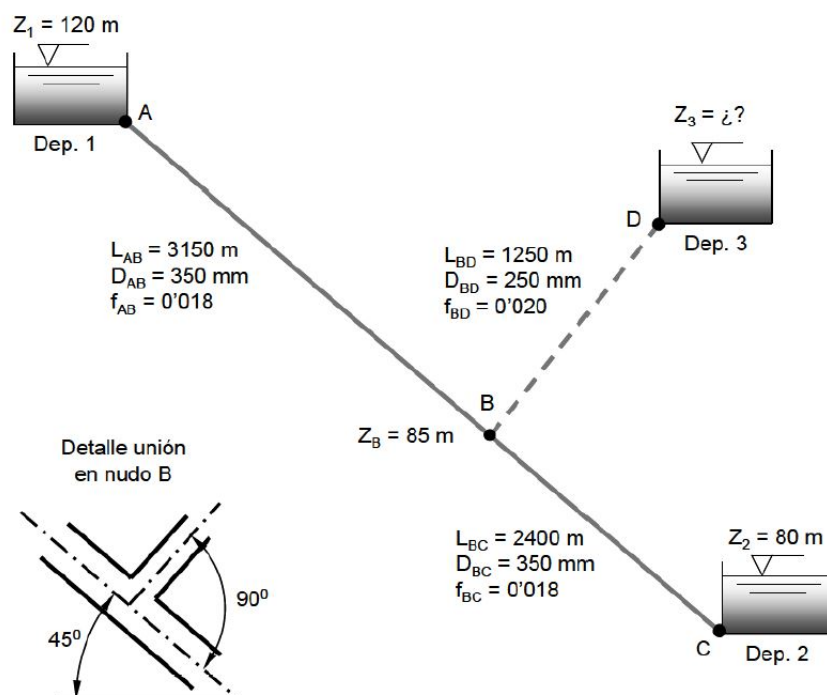
$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right]$$

$$\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + u \frac{\partial v}{\partial r} \right) = -\frac{\partial P}{\partial r} + \mu \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) \right]$$

Suponiendo que solo hay movimiento en la dirección x ($v = w = 0$), se pide:

- a) Obtener $u(r)$ el campo de velocidad del flujo.
 - b) Calcular la velocidad media $\bar{U}$ del flujo en una sección de la tubería.
 - c) Calcular el cociente entre la pérdida de presión $\delta P = P_1 - P_2$ entre dos puntos en el transcurso del flujo y la presión dinámica $\rho \bar{U}^2 / 2$. Expresa el resultado en función del número de Reynolds.
- 2 Se dispone de una instalación para transportar agua del depósito 1 al depósito 2, a las cotas respectivas de 120 y 80 m, como se indica en la figura. Esta instalación consta de una tubería ABC, de diámetro 350 mm, factor de fricción 0,018, y longitud de sus respectivos tramos LAB=3150 m y LBC=2400 m. Estando esta instalación en funcionamiento, se piensa construir un nuevo depósito, depósito 3, y conectarlo al punto B

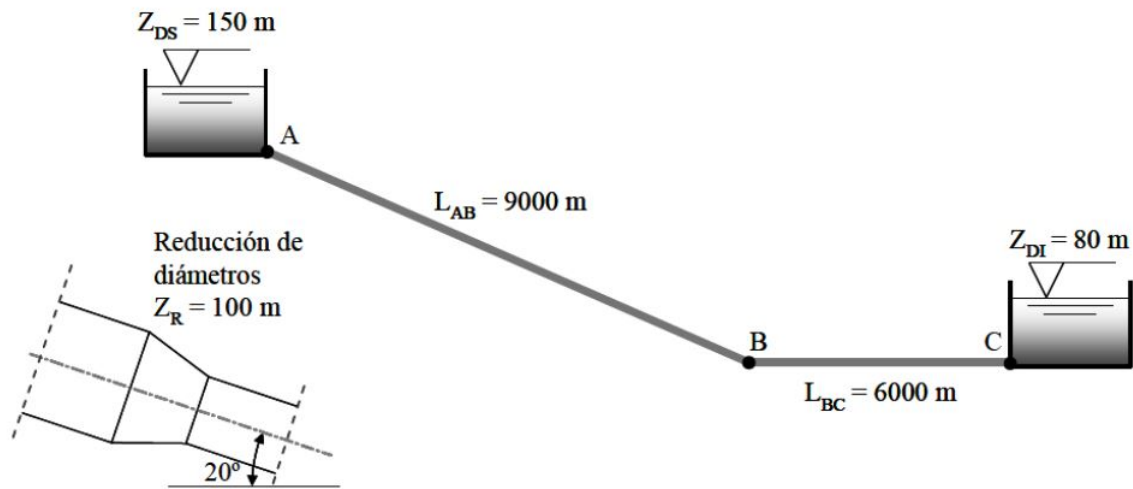
de la tubería anterior por medio de la conducción BD de diámetro 250 mm, factor de fricción 0,020, y longitud 1250 m.



Para esta instalación, y despreciando el efecto de las pérdidas menores, determinar:

- Caudal circulante por la tubería ABC antes de conectar el depósito 3.
- Cota a la que se deberá ubicar el depósito 3 para que el caudal transportado hacia el mismo, con la instalación ampliada, sea de 50 l/s. Caudal que llegará al depósito 2 en estas nuevas condiciones.
- Fuerza que deberá realizar el anclaje de la unión de tuberías en B, cuando la instalación esté ya ampliada y en funcionamiento.

- 3 Para el trasvase de agua entre dos depósitos, cuyos niveles libres se encuentran respectivamente a las cotas de 150 y 80 m, se va a instalar una tubería de hormigón de rugosidad absoluta 0,20 mm, tal como indica la figura. Por las características del terreno sobre el que discurre la tubería, ésta se puede suponer que estará constituida por dos tramos, el primero de ellos inclinado, de longitud 9000 m, y el segundo horizontal, de longitud 6000 m. Se supondrán despreciables las pérdidas menores de la instalación.



Si se desea trasvasar entre los depósitos un caudal de 600 l/s, determinar:

- Diámetro que debería tener la tubería para transportar el caudal deseado.
- Al no ser comercial el diámetro calculado en el apartado a), desdoblar la tubería en los diámetros comerciales anterior y posterior al calculado. Determinar en este caso la longitud de tubería a instalar de cada uno de estos diámetros, suponiendo que el factor de fricción para ambas tuberías es el calculado en el apartado anterior.
- Componentes de la fuerza necesaria para mantener en su posición el anclaje de la reducción a instalar en el punto de unión de ambos diámetros (ver figura). Esta reducción de diámetros se encuentra a la cota de 100 m, con una inclinación de las tuberías de 20° respecto de la horizontal.

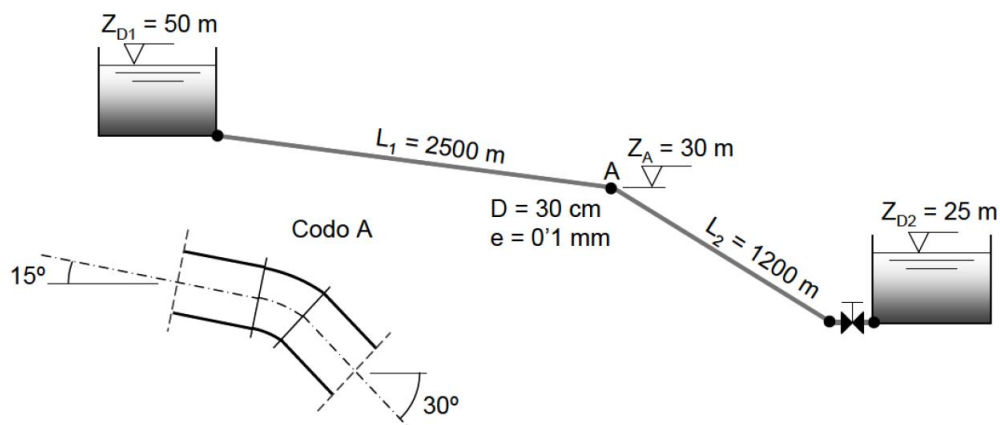
Viscosidad cinemática del agua $1,1 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$

Relación de diámetros comerciales: 300, 350, 400, 450, 500, 600, 700, 800, 900 mm.

Sol: (a)

4.5.2. Pérdidas localizadas o menores

- 4 Dos depósitos, cuyos niveles libres del agua se encuentran a las cotas respectivas de 50 y 25 m, están unidos entre sí por medio de una tubería de fundición de 30 cm de diámetro y rugosidad 0,1 mm, como indica la figura. Por las características del terreno entre los depósitos, esta tubería está constituida por dos tramos, aproximadamente rectos, de 2500 y 1200 m de longitud cada uno de ellos, y unidos por un codo A la cota 30 m. En el extremo inferior de la tubería, y antes de la entrada al depósito inferior, se ha instalado una válvula de mariposa, de 200 mm de diámetro, para regular el caudal circulante por la misma.



Si se suponen despreciables las pérdidas menores de la instalación, excepto en la válvula, determinar las pérdidas que se deberán producir en la válvula, parcialmente abierta, si se desea trasegar entre los depósitos un caudal de 75 l/s. Y el coeficiente de pérdidas que deberá tener la válvula en este caso.

- 5 Supóngase un cambio brusco de diámetro de 200 mm a 400 mm siendo el caudal circulante de 600 l/s. Calcular la pérdida localizada en ensanchamiento.

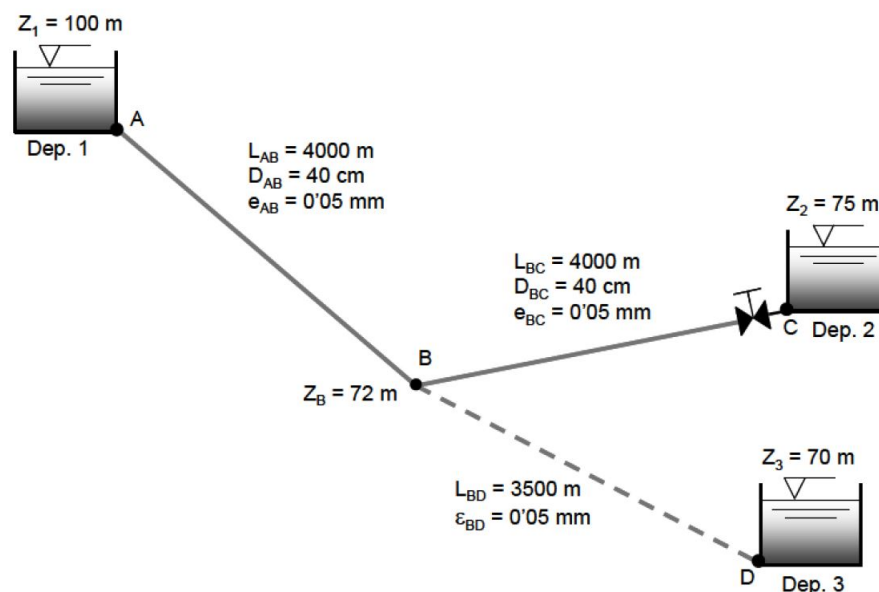
Si invertimos la dirección del flujo, ¿qué sucederá?

- 6 Un sistema de tuberías compuesto consta tres tuberías (todas con $f = 0,015$) conectadas en serie:

- Tubería 1: longitud 1800 m y diámetro de 50 cm
- Tubería 2: longitud 1200 m y diámetro de 40 cm
- Tubería 3: longitud 600 m y diámetro de 30 cm

¿Cuál es la longitud equivalente de una tubería de 40 cm del mismo material?

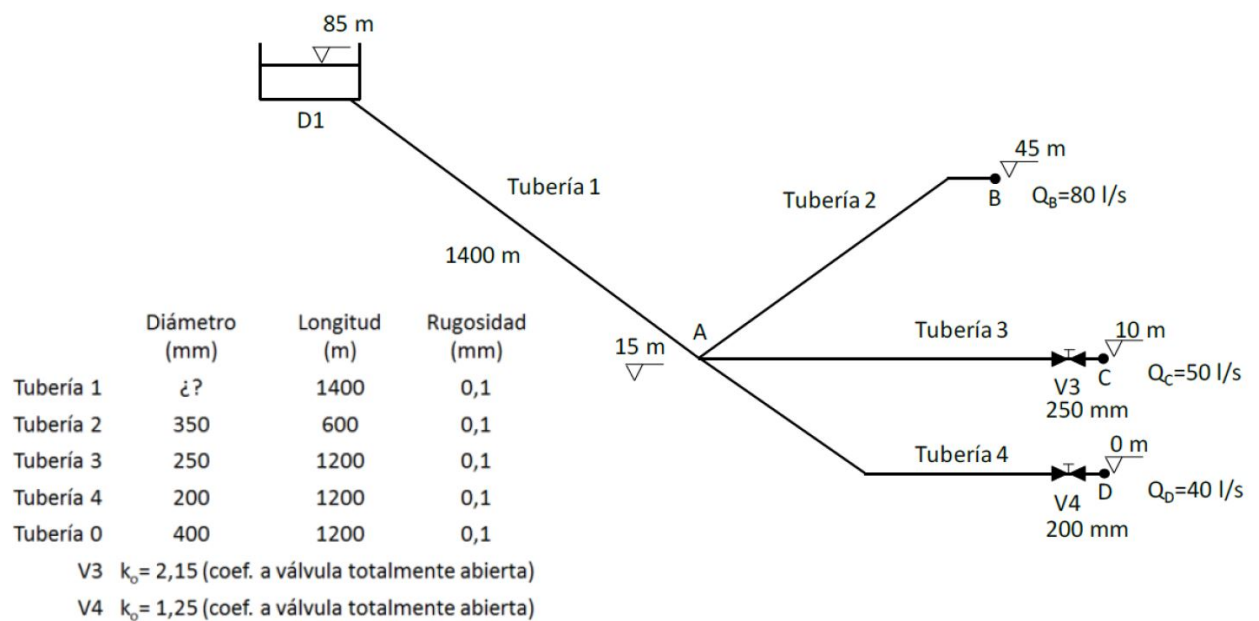
- 7 Se dispone de una instalación para transportar agua del depósito 1 al 2, a las cotas respectivas de 100 y 75 m. Esta instalación consta de una tubería ABC de longitud total 8000 m, diámetro 40 cm y rugosidad absoluta 0,05 mm, y en cuyo extremo final a la entrada del depósito 2 lleva incorporada una válvula de compuerta. Para esta instalación, determinar:



- Coeficiente de pérdidas que debería tener la válvula de compuerta, parcialmente cerrada, para que el caudal transportado hacia el depósito 2 sea de 125 l/s.
- Tiempo después de estar la instalación en funcionamiento, se plantea la necesidad de transportar agua desde el depósito 1 al depósito 3, a la cota 70 m, sin dejar de alimentar al depósito 2. Para ello se propone la solución de instalar una nueva tubería, BD, conectada al punto medio B de la tubería inicial. Determinar, en estas nuevas condiciones, el caudal que se podría transportar al depósito 3 manteniendo el caudal hacia el depósito 2 en 125 l/s, pero abriendo completamente la válvula de compuerta.
- Diámetro que debería tener la tubería BD, de longitud 3500 m y rugosidad absoluta 0,05 mm, para que la instalación funcione en las condiciones del apartado b). Desdoblar diámetros en caso necesario, siendo la relación de diámetros comerciales: 150, 175, 200, 250, 300 y 400 mm.

Se supondrán despreciables las pérdidas menores de la instalación, excepto las que correspondan a la válvula de compuerta cuando esté parcialmente cerrada. Se despreciará el término cinético en el interior de las tuberías. La viscosidad cinemática del agua es de $1,02 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$.

- 8 (Examen Abril 2018) La siguiente figura muestra una instalación que alimenta a una población (nudo B) y dos polígonos industriales (nudos C y D). Las demandas máximas de estos nudos son las que se indican en la figura, y la presión mínima que se debe mantener en los tres puntos debe ser de 30 mca.



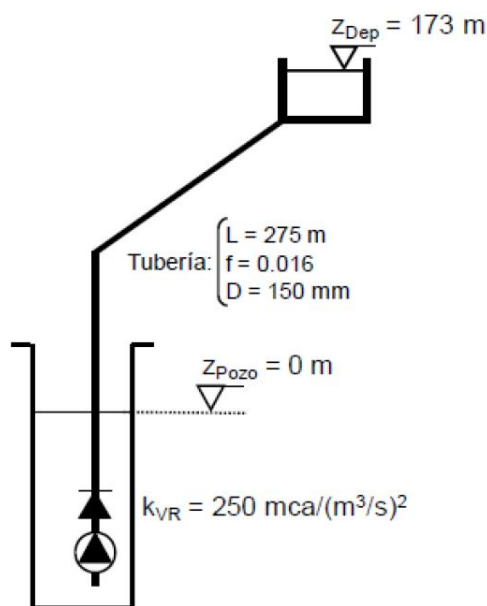
Estando el nivel de agua en el depósito D1 tal como se indica en la figura, y ambas válvulas (V3 y V4) totalmente abiertas. Determina el diámetro teórico mínimo de la tubería

- para garantizar la presión mínima (30 mca) en todos los nudos de consumo.
- Si fijamos un diámetro interior para la tubería 1 de 400 mm, determina cuál debe ser la k de la válvula V3 para no superar la presión de 40 mca en el nudo C.

Notas: Determinar todos los factores de fricción por la expresión de Swamee-Jain. Despreciar los términos cinéticos.

4.5.3. Bombeo

- En una balanza La figura adjunta muestra una instalación para bombear agua desde un pozo hasta un depósito, ambos abiertos a la atmósfera. Se desea que el caudal bombeado sea constante e igual a $5000 \text{ m}^3/\text{día}$.



- a) Calcular la altura de bombeo necesaria que deberá aportar la bomba instalada.
- b) Si se dispone de las tres siguientes bombas en el almacén, justificar mediante los cálculos necesarios cuál o cuáles de ellas serán adecuadas desde el punto de vista hidráulico, es decir, serán capaces de aportar el caudal y la altura necesarios.

Bomba B1	Bomba B2	Bomba B3	$\left(\begin{array}{l} Q \text{ en m}^3/\text{s} \\ h_B \text{ en mca} \\ \eta \text{ tanto por uno} \end{array} \right)$
$h_B = 149 - 38100 Q^2$	$h_B = 253 - 18830 Q^2$	$h_B = 359 - 50100 Q^2$	
$\eta = 23.2 Q - 240 Q^2$	$\eta = 16.8 Q - 168 Q^2$	$\eta = 40.6 Q - 486 Q^2$	

- c) Justificar, mediante los cálculos necesarios, cuál (de las seleccionadas en el apartado anterior) será la más adecuada desde el punto de vista energético. Y calcular la potencia que consume.

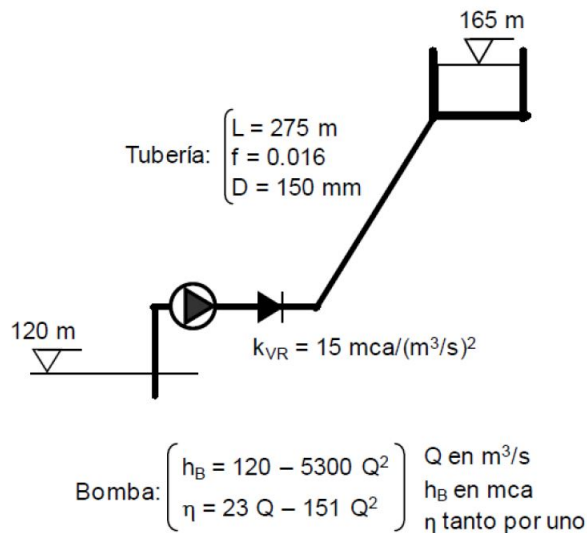
10 (Examen Abril 2018) Una bomba centrífuga funcionando a 1400 r.p.m. dio en un banco de pruebas los siguientes valores:

Q(l/s)	100	150	200	250	300
H(m)	35	34	32	29	24
Pconsumida(kW)	49	64	74	82	85

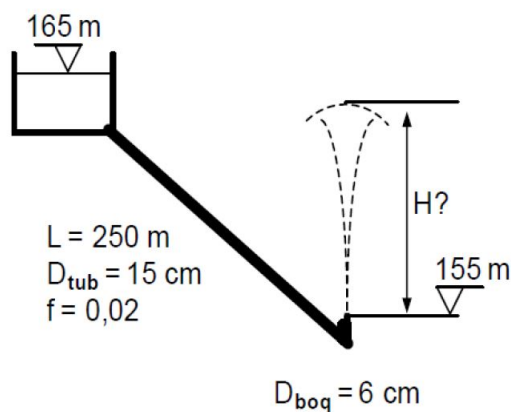
Esa bomba se precisa para elevar agua de un depósito a otro, cuya diferencia de cotas es de 20 m mediante una tubería de fundición ($f = 0.03$) de 300 mm de diámetro y 150 m de longitud. Para la velocidad de la prueba, hallar el rendimiento de la bomba y el caudal bombeado.

11 La primera figura muestra una instalación de bombeo para abastecer un depósito alto desde un pozo. Dicha instalación consta de una bomba, una tubería y una válvula de retención. Los niveles de agua de depósito y pozo se mantienen constantes en el tiempo. Se pide:

- Calcular el caudal que circulará por la tubería cuando se ponga en marcha la bomba.
- Si se desea que el caudal circulante sea de 85 l/s, calcular la K (en $\text{mca}/(\text{m}^3/\text{s})^2$) de la válvula de regulación que sería preciso instalar en la tubería para hacerlo posible.
- Calcular qué punto de funcionamiento será mejor para la bomba desde el punto de vista energético, si el del apartado a) o el del b).

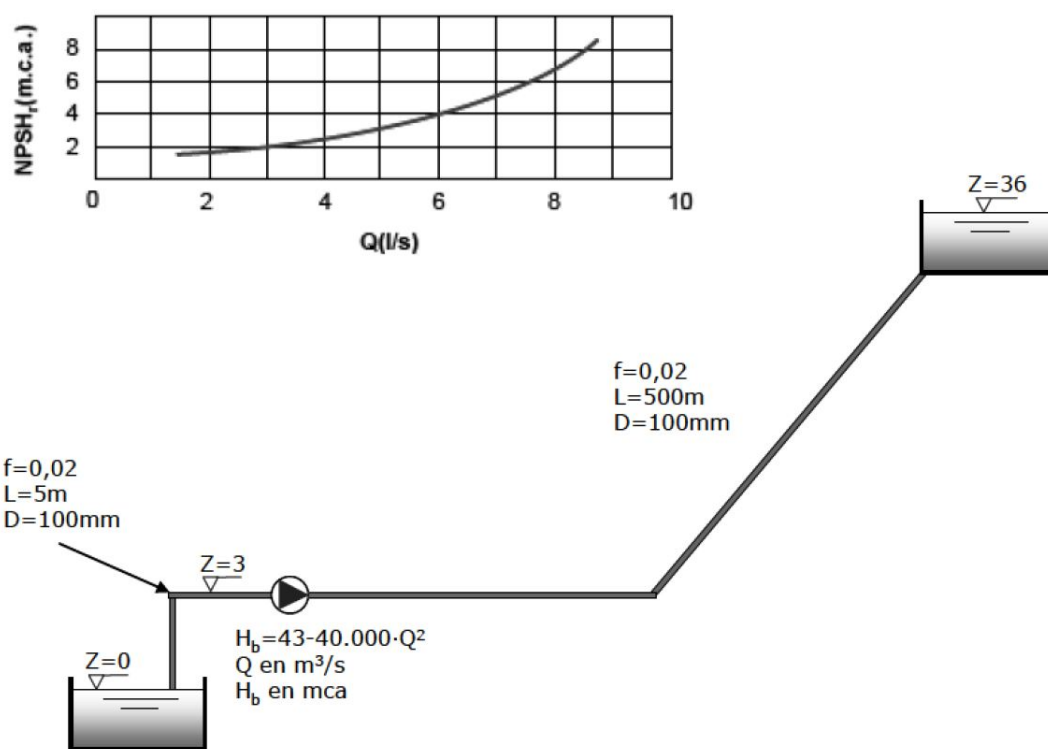


Ahora, desde el depósito se desea alimentar una fuente ornamental. Alguien ha decidido para ello llevar una pequeña conducción hasta la fuente, según muestra la figura de la izquierda. Se pide calcular la altura H del chorro vertical de la fuente. Despreciar pérdidas menores.



12 Con los datos de la figura determinar:

- El caudal circulante por la conducción y la altura que da la bomba en las condiciones de funcionamiento del problema.
- Potencia (en kW) si el rendimiento de la misma es de 0,7. Si la bomba funciona durante 10 horas al día, calcular el consumo energético diario de la misma y el coste del mismo (precio de la energía: 0,09 EUR/kWh).
- Si la P_v/γ es de 0,4 m, ¿existirán problemas de cavitación? Si el diámetro de la aspiración se redujese a 50 mm y el caudal circulante no cambiase, ¿mejoraría el problema? Calcular el mínimo diámetro que puede instalarse, para el mismo caudal circulante.



4.6. Ejercicios de flujo en lámina libre

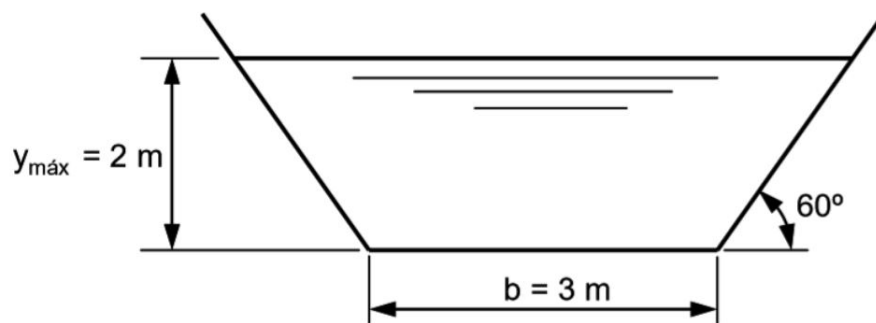
- Determina las dimensiones de la sección más eficiente para un canal rectangular.
- Se desea construir un canal de sección rectangular para transportar un caudal de agua de $3000 \text{ m}^3/\text{h}$ con una pendiente uniforme del 2 por mil. El canal será de hormigón, con un coeficiente de Manning de 0,015.
 - Calcular el ancho de solera que deberá tener este canal para transportar dicho caudal como sección más eficiente. Calcular también la velocidad de circulación

del agua por este canal.

- b) Calcular las dimensiones de la sección trapezoidal más eficiente para transportar el mismo caudal.

- 3 Se desea construir un canal de sección trapezoidal para transportar agua entre dos depósitos con una pendiente de solera del 2 por mil, siendo el ancho de solera $b = 3$ m y el calado máximo del agua de 2 m. El canal será de hormigón, con un coeficiente de Manning de 0,016. Con estos datos se pide:

- a) Calcular el caudal máximo que se podría transportar en régimen permanente con este canal.
- b) Calcular el ancho de solera de este canal si, para iguales valores máximos de calado y caudal transportado, la forma de la sección fuese rectangular.
- c) Indicar en cuál de los dos casos el volumen de excavación será menor, si el nivel máximo del agua en el canal se sitúa 0,50 m por debajo de la rasante del terreno.



- 4 Un colector de hormigón de sección circular (cuyo coeficiente de Manning es 0,014), tiene una pendiente de 0,0035. Se pide:

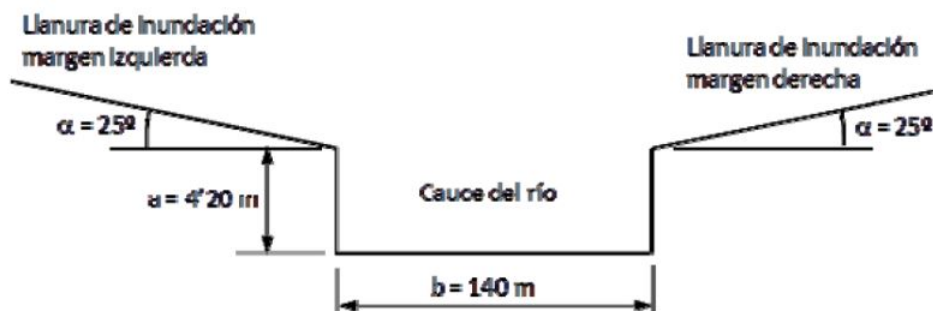
- a) Calcular el diámetro necesario para que el colector sea capaz de evacuar un caudal de 750 l/s con un calado relativo (y/D) de 0,856.
- b) Para el colector proyectado en el apartado anterior, determinar la velocidad media cuando por el mismo circule un caudal de 15 l/s.
- c) Indicar cuál debería ser la pendiente del anterior colector para que fuera capaz de transportar un caudal de 1200 l/s con un grado de llenado de 0,856.

- 5 Calcular la altura que deberá tener una tubería de sección ovoide para transportar un caudal de aguas residuales de 800 l/s con una pendiente del 10 por mil y un grado de llenado recomendado del 80 %. Se adoptará un coeficiente de Manning de 0,016.

Calcular también la velocidad y el calado con que circulará el caudal de diseño con el conducto comercial elegido.

Los valores de altura de ovoide comerciales son de 300, 400, 500, 600, 800, 1.000, 1.200, 1.400, 1.600 y 2.000 mm.

- 6 Se desea construir un colector de aguas residuales para transportar en régimen de lámina libre un caudal de $2 \text{ m}^3/\text{s}$ con una pendiente de solera del 2,5 por mil. Como solución de proyecto se plantea elegir un conducto circular de hormigón, con un coeficiente de Manning de 0,015, y cuyo grado de llenado (y/D) sea del orden del 70 % cuando se transporta dicho caudal máximo. Se pide:
- Determinar el diámetro de conducto necesario para cumplir con las especificaciones de diseño.
 - Elegir el diámetro del conducto a instalar a partir de la lista de diámetros comerciales disponible (500, 750, 1.000, 1.250, 1.500, 1.750 y 2.000 mm). Para el conducto elegido, calcular el calado y la velocidad cuando se transporte el caudal máximo indicado.
 - Para este colector, determinar el mínimo caudal que deberá transportar para que sea autolimpiable (velocidad de circulación 0,50 m/s). ¿Cuál será el calado en este caso?
- 7 El río Ebro, en un punto determinado de la provincia de Zaragoza, tiene una sección aproximada como la que se indica en la figura. En esta sección podemos apreciar, por una parte, el cauce de forma rectangular y, por otra, la llanura de inundación que se extiende a uno y otro lado del cauce. Esta zona del río tiene una pendiente de solera de 1.2 por mil y un coeficiente de Manning de 0.035, valor relativamente alto debido a las irregularidades de su contorno.



Según los registros hidrológicos, el caudal medio del río en mayo de 2013 es de $357 \text{ m}^3/\text{s}$, con un calado medio de 1.74 m. Para estos valores se pide:

- Determinar, aplicando la ecuación de Manning, si estos valores medios se corresponden entre sí o puede haber algún error de medición que haga que si uno de ellos es correcto el otro sea claramente desproporcionado. Debido a las lluvias intensas de los últimos días en la mitad norte de España, el caudal circulante por este tramo de río el miércoles 12 de junio de 2013 a las 7 de la mañana es de $1377 \text{ m}^3/\text{s}$. Ahora la pregunta es:
- ¿Está el río a punto de desbordarse o aún le queda suficiente margen? La respuesta se obtendrá calculando el calado con el cual se transporta dicho caudal.

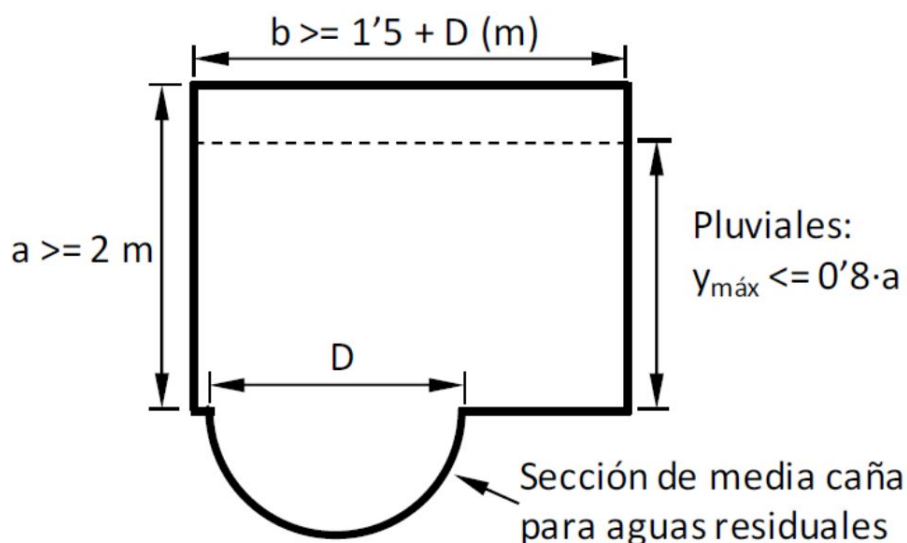
- 8 Se pretende diseñar un colector unitario (evacuación de aguas pluviales junto con residuales) con una pendiente del 4 por mil en hormigón (coeficiente de Manning 0,012). Se decide diseñar un colector visitable, con sección de media caña en el fondo para evacuar las aguas residuales como se indica en la figura adjunta.

El caudal punta de aguas de lluvia es de 5.000 l/s, y el caudal medio de aguas residuales de 15 l/s. Para la sección del colector, las especificaciones de diseño son:

- Altura a mínima = 2 m
- Anchura b mínima = $D + 1'5$ m, siendo D el diámetro, en m, de la sección de media caña
- El caudal punta de aguas pluviales debe proporcionar un calado y máximo de $0,8 \cdot a$
- Los diámetros comerciales para la sección de media caña son 300, 350, 400, 450, 500, 600, 800, 1.000 y 1.200 mm

Con todo ello, se pregunta:

- Diámetro comercial de la media caña, con el calado y la velocidad cuando se transporta 4 veces el caudal medio de aguas residuales.
- Comprobar si la velocidad para el caudal medio de aguas residuales supera los 0,5 m/s que corresponde a la velocidad autolimpiante. Determinar el calado para este caudal.
- Comprobar si las dimensiones mínimas del colector visitable son suficientes para evacuar el caudal de pluviales, cumpliendo las especificaciones de diseño impuestas. En el cálculo se deberá tener en cuenta la capacidad de transporte de la media caña, pero se despreciará el caudal medio de aguas residuales frente a los 5.000 l/s de pluviales.
- Para el caso de aguas pluviales, determinar el tipo de flujo. Calcular qué caudal de aguas pluviales daría lugar a un flujo crítico.



9 (Examen enero 2019) Una conducción está formada por dos tramos con los siguientes conductos con circulación del agua en lámina libre:

- Primer conducto, de longitud 1450 m, canal rectangular de hormigón con ancho de solera 4 m, altura de cajeros 2,50 m, y cota de solera en la sección inicial 179,88 m.
- Segundo conducto, de longitud 2070 m, conducto circular de diámetro interior 2.95 m. Los conductos se han proyectado con la misma pendiente de solera, de valor 0,315 por mil, siendo el coeficiente de Manning para todos ellos de 0,015.

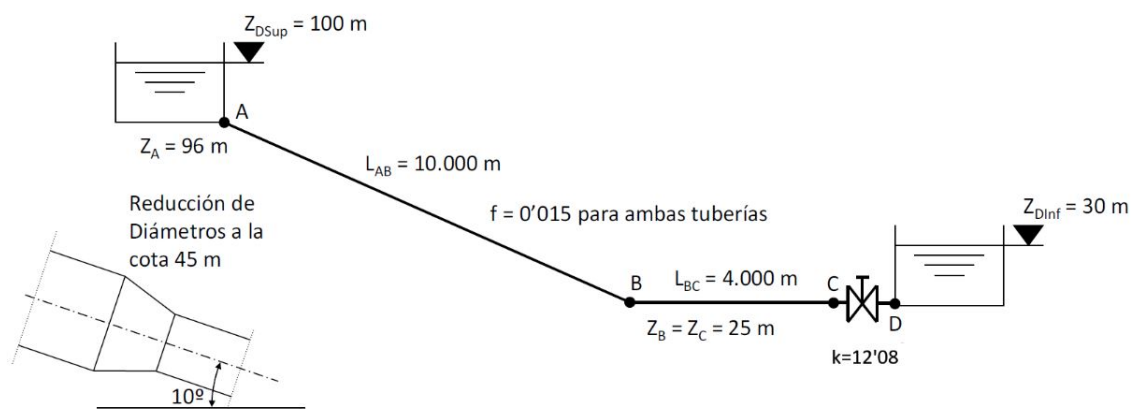
Para estos conductos, y considerando un caudal máximo de cálculo de $5,6 \text{ m}^3/\text{s}$, determinar:

- a) Calado y velocidad del agua en los dos conductos en que se divide.
- b) Si el primer conducto, rectangular, se pudiese sustituir por otra forma rectangular o trapecial de sección más eficiente, determinar las dimensiones de estas formas para transportar el caudal máximo de cálculo indicado.
- c) A tu entender, ¿cuál de las tres formas (la construida o las dos más eficientes) sería la más adecuada?

10 (Examen enero 2020) Se va a construir una conducción para transportar agua entre dos depósitos cuyos niveles libres se encuentran respectivamente a las cotas de 100 y 30 m. Para ello se instalará una tubería de fundición cuyo factor de fricción se estima en $f = 0,015$ tal como indica la figura. Por las características del terreno sobre el que discurre la tubería, ésta se puede suponer que estará constituida por dos tramos, el primero de ellos inclinado, de longitud 10 km, y el segundo horizontal, de longitud 4 km. Se supondrán despreciables las pérdidas menores de la instalación excepto las de la válvula, cuyo coeficiente de pérdidas es de 12,08. Si se desea trasvasar entre los depósitos un caudal de 600 l/s , determinar:

- a) Diámetro teórico que debería tener la tubería para transportar el caudal deseado.
- b) Al no ser comercial el diámetro calculado en el apartado a), desdoblar la tubería en los diámetros comerciales anterior y posterior al calculado. Determinar en este caso la longitud de tubería a instalar de cada uno de estos diámetros.
- c) Como alternativa a la solución anterior se plantea la posibilidad de transportar el caudal deseado, pero mediante un conducto en lámina libre de sección rectangular más eficiente. Calcular las dimensiones mínimas de este conducto si discurre con pendiente uniforme de $3,55 \text{ ‰}$ entre las soleras de ambos depósitos. Para este conducto el número de Manning se estima en 0,015. Considerando que se mantienen las soleras mostradas en la figura, ¿cuál es la longitud del conducto?

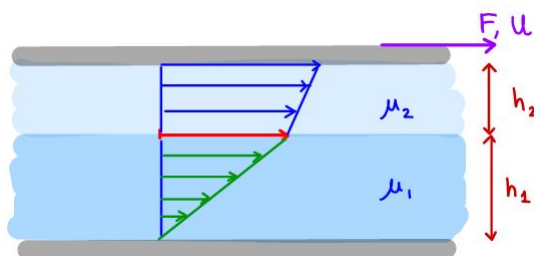
Relación de diámetros comerciales: 300, 350, 400, 450, 500, 600, 700, 800, 900 mm.



Apéndice A

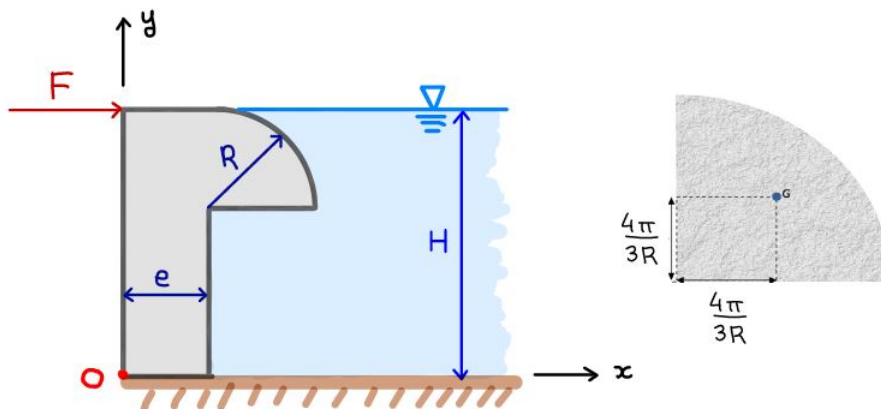
Problemas de todos los temas

- 1 Dado el campo de velocidades $V = \left(\frac{x}{1+t}, y \right)$, se pide:
- a) Clasificar el tipo de flujo, justificando brevemente cada afirmación.
 - b) Obtener la línea de corriente que pasa por el punto $(1,1)$ en un instante t_0 . Dibuja la línea obtenida para $t_0 = 1$.
 - c) Hallar la trayectoria de la partícula que en $t = 10$ pasa por el punto $(1, 1)$.
 - d) Encuentra la traza en $t = 1$ de las partículas que pasaron por el punto $(1,1)$ en un instante anterior.
- En (c) y (d) expresa el resultado como $y = f(x)$, o sea, determina de qué curva se trata en el plano (x, y) .
- 2 Tenemos dos fluidos de viscosidades $\mu_1 = 0,1 \text{ Pa} \cdot \text{s}$ y $\mu_2 = 0,15 \text{ Pa} \cdot \text{s}$ entre dos placas horizontales de 1 m^2 cada una. El espesor de cada capa de fluido es $h_1 = 0,5 \text{ mm}$ y $h_2 = 0,3 \text{ mm}$, respectivamente. El movimiento de la placa superior (a una velocidad constante $U = 1 \text{ m/s}$) genera un flujo con el perfil de velocidades que se muestra en la figura.



- a) Justifica que el esfuerzo cortante es el mismo a cualquier altura (no cambia con la profundidad).
- b) Usa lo anterior para calcular la velocidad del flujo en la capa de contacto (flecha roja).
- c) Determina qué fuerza hay que aplicar para mantener la placa superior en movimiento con velocidad constante de 1 m/s .

- 3 La compuerta de la figura tiene una profundidad de L m en la dirección normal al papel y un peso específico de γ_c N/m³. Además está articulada en torno al eje que pasa por O perpendicular al papel.



Se pide determinar las expresiones que nos permiten calcular:

- La fuerza F que debemos aplicar en la parte superior izquierda de la compuerta para mantenerla en la posición de la figura.
- Para la posición de equilibrio calculada en el apartado anterior, la componente horizontal R_h y vertical R_v de la reacción en el anclaje O de la compuerta.

Una vez realizados los apartados anteriores (sin sustituir ningún dato numérico), obtén los valores de F , R_h y R_v para la siguiente situación concreta: $R = 3$, $L = e = 2$, $\gamma_c = 3$ kN/m³, $H = 9$.

- 4 Dado el campo de velocidades $V = (ax(x^2 + y^2), -y(x^2 + y^2))$, donde la densidad viene dada por:

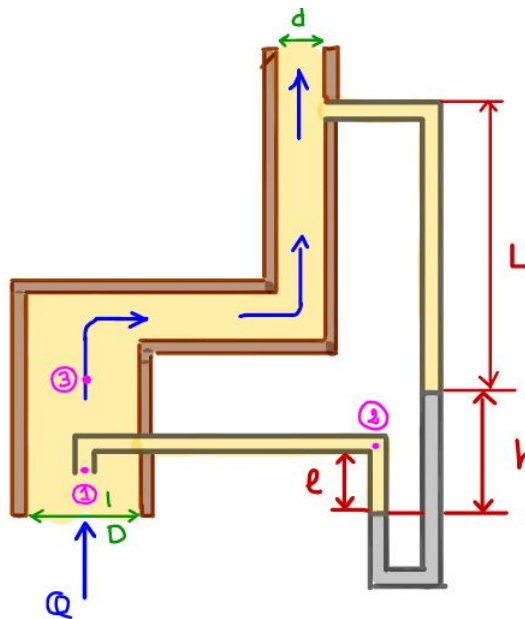
$$\rho(x, y) = \frac{b}{x^2 + y^2},$$

siendo a y b constantes.

- Determina el valor de a para que se trate de un flujo estacionario.
- Obtener la línea de corriente que pasa por el punto $(1, 1)$ en un instante t_0 .
- Hallar la trayectoria de la partícula que en $t = 10$ pasa por el punto $(1, 2)$ y la traza en $t = 1$ de las partículas que pasaron por el punto $(1, 1)$ en un instante anterior.
- ¿Es un flujo irrotacional?
- Considera el flujo estacionario, incompresible y laminar de un fluido viscoso entre dos placas horizontales paralelas (infinitas), separadas a distancia h . Considera que la velocidad solo tiene la primera componente no nula.

La placa superior permanece fija, mientras que la inferior se mueve a velocidad constante U . Además, la presión cambia solo en la dirección x , lo cual también contribuye al movimiento. En esta situación, se pide obtener el campo velocidad del flujo.

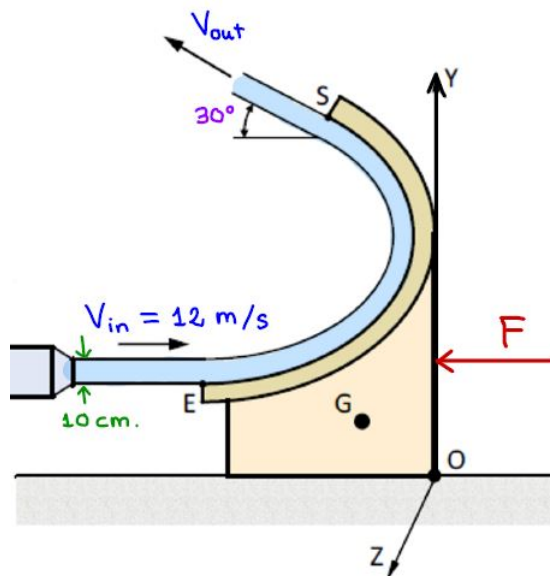
- 5 Aceite de densidad $\rho = 0,8 \text{ g/cm}^3$ fluye por el dispositivo de la figura:



- Calcula la velocidad del flujo en la parte estrecha de la tubería. Expresa el resultado en función de los datos de la figura y las densidades de los líquidos involucrados.
- Sabiendo que la densidad del mercurio es $\rho_m = 13600 \text{ kg/m}^3$, $d = 1$, $D = 3$ y $h = 4$ (todo en dm), halla el caudal (en l/s) que circula por la tubería y la velocidad en el punto 3.

Nota: los puntos 1 y 2 se consideran a la misma altura.

- 6 El chorro de agua que sale de una boquilla de diámetro 10 cm, a una velocidad de 12 m/s, incide sobre un álabe montado en una estructura de masa 150 kg como se indica en la figura. Esta estructura se encuentra apoyada en el suelo, presentando un coeficiente de rozamiento entre la estructura y el suelo de $\mu = 0,15$. Las coordenadas en el plano (x, y) de los puntos E (entrada del chorro al álabe), S (salida del chorro del álabe), y G (centro de gravedad de la estructura) son (en m): $E = (-3/2, 1/2)$, $S = (-1, 1)$ y $G = (-1/2, 1/2)$.

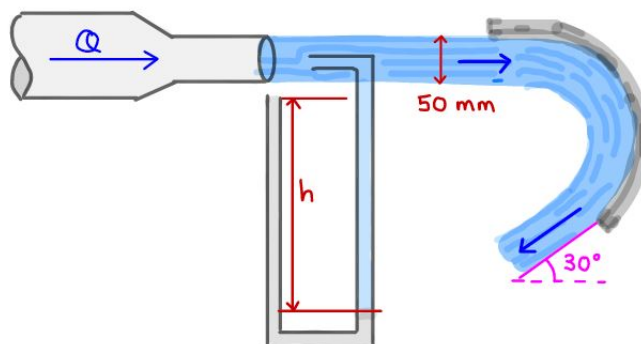


Calcula:

- Fuerza F a aplicar sobre la estructura para mantenerla en reposo cuando el chorro incide sobre el álabe. Expresa el resultado como un vector.
- Altura mínima sobre el suelo a la que habría que aplicar la fuerza exterior para que, evitando que la estructura se desplace, se evite también el vuelco de la misma alrededor del punto O.

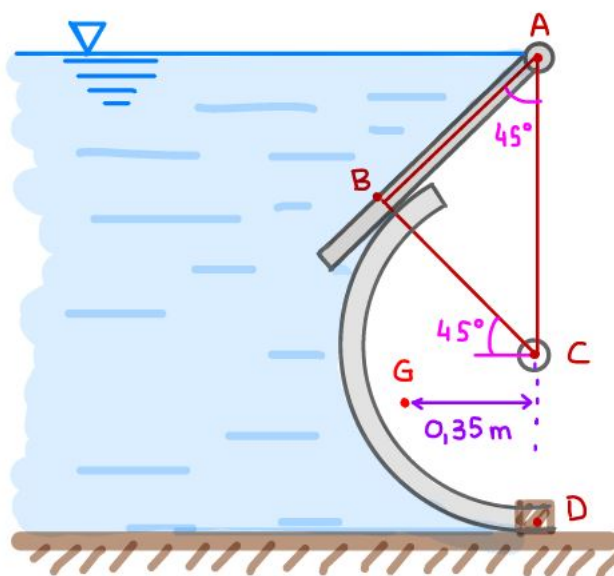
Para este apartado, recalcula F ignorando el rozamiento.

- 7 Un chorro de agua sale a la atmósfera por una boquilla de 50 mm de diámetro y golpea un álabe curvo, como muestra la figura. Situamos un tubo de Pitot lleno de mercurio de densidad $\rho_m = 13600 \text{ kg/m}^3$ para medir la velocidad del chorro. Calcula la componente horizontal la fuerza ejercida por el chorro sobre el álabe (no sustituyas los datos numéricos hasta el último paso)



Nota: El chorro siempre se considera con el mismo diámetro y la presión, salvo en el tubo de Pitot, es siempre atmosférica. Considera que la altura de la columna de agua dentro del tubo coincide con $h = 75$ cm. [2,75 puntos]

- 8 La compuerta de la figura tiene un metro de profundidad en la dirección perpendicular al papel y se compone de una compuerta plana de longitud 1 m y peso 3920 N, inclinada 45° con libertad de giro alrededor de la rótula A. Dicha compuerta se apoya a su vez sobre una segunda circular de radio $R = 0,75$ m, articulada en su centro sobre un eje D. Esta segunda compuerta pesa 4900 N y su centro de gravedad se denota por G.

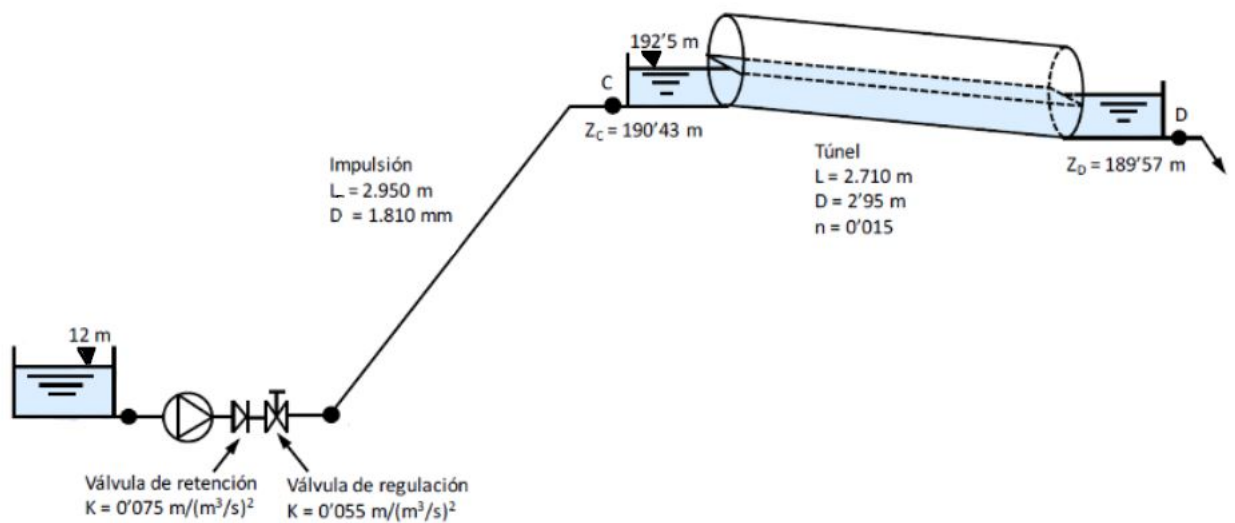


Se pide:

- Fuerza hidrostática sobre la compuerta plana y punto de aplicación
- Reacción en B producida por dicha fuerza y el peso de la compuerta plana.
- Fuerza hidrostática sobre la compuerta curva.
- Reacción (horizontal) en el tope D (no hace falta calcular los momentos en D).

Dibujar los prismas de presiones, así como la dirección y sentido de las fuerzas resultantes en cada caso.

- 9 La figura muestra el diseño de una estación de bombeo que debe alimentar un túnel circular por donde el agua fluye en lámina libre entre dos embalses.

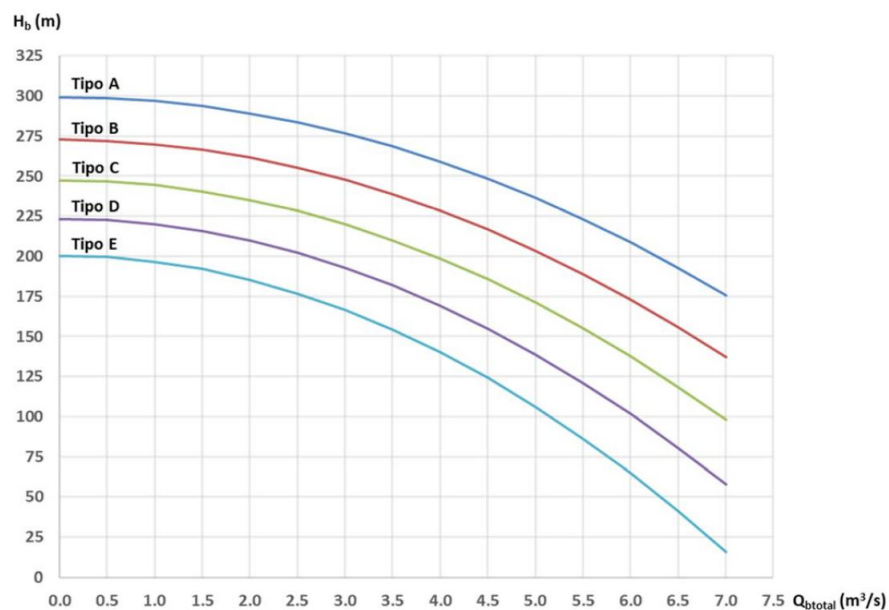


Teniendo en cuenta los datos indicados en la figura, y para un caudal total impulsado (caudal de diseño) de 4500 l/s, se pide:

- Calcula el factor de fricción de la tubería de impulsión, sabiendo que está hecha de un material cuya rugosidad absoluta es 0,19584743 mm. (Viscosidad cinemática del agua = $1.1 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$)

Haz los cálculos arrastrando todos los decimales y calcula f con 4 decimales.

- Justifica qué tipo de bomba se debería instalar en base a las siguientes curvas características que nos proporciona el fabricante.

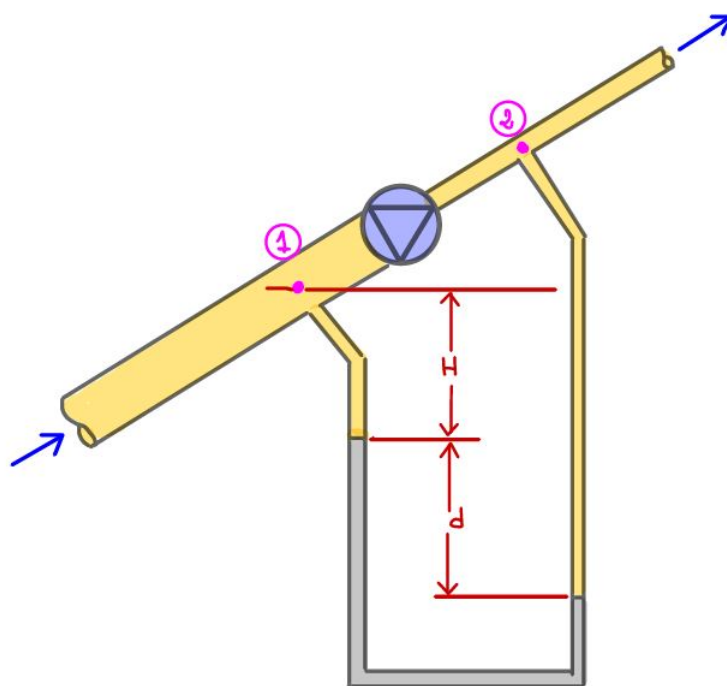


- Admitiendo un rendimiento de la bomba del 85 %, calcular la potencia para el funcionamiento de la instalación cuando se impulsa el caudal de diseño.

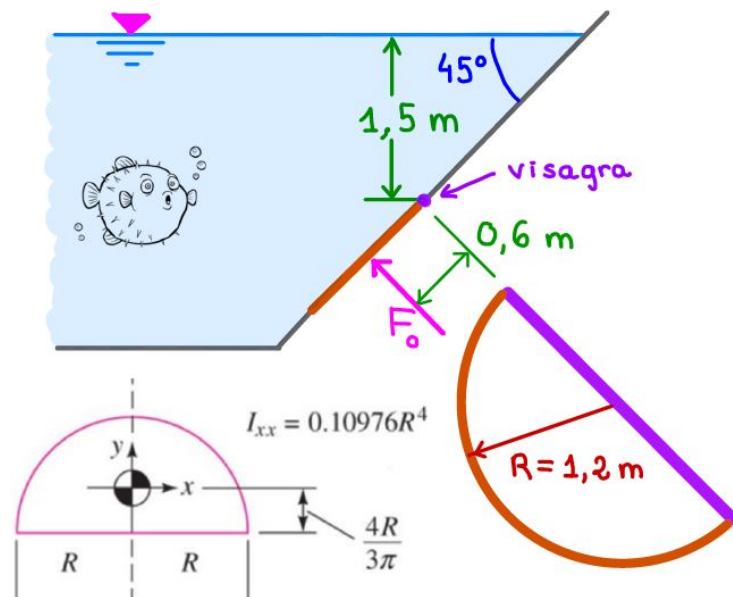
d) Calado y velocidad de circulación del caudal de diseño cuando circula por el túnel.

10 Montamos el dispositivo del dibujo para bombear aceite en una refinería, donde tenemos una tubería de sección circular, cuyo área se reduce a la mitad después de la bomba. Despreciando el peso de la tubería y las pérdidas por fricción, pero sin olvidar **pérdidas producidas por estrechamiento**, se pide:

- Calcula la altura que debe ser capaz de impulsar la bomba en función de la velocidad en el punto 2, de la lectura del manómetro (d) y del cociente de densidades ρ_{ac}/ρ_m .
- El gerente nos dice que el contador marca que la potencia consumida por la bomba es de 1,2 kW y nos pide que la reemplacemos si, al impulsar 20 ℓ/s de aceite, su eficiencia es inferior al 80 %. Tomando las mediciones $d = 4$ dm, diámetro de la tubería ancha = 2 dm, y sabiendo que $\rho_{ac} = 13600$ kg/m³ y $\rho_m = 880$ kg/m³, ¿tenemos que cambiar la bomba?
- Con los datos anteriores y sabiendo que la tubería tiene una inclinación de 30° respecto de la horizontal, si la presión antes y después de la bomba es la misma, calcula la componente vertical de la fuerza necesaria para mantener fijo el dispositivo.



- 11 a) Una compuerta semicircular puede girar alrededor de una bisagra montada sobre su diámetro en la parte superior, pero se mantiene cerrada por la acción de una fuerza F_0 que actúa a 0,6 m de dicha bisagra, como indica la figura. Calcular el valor de F_0 necesario para contrarrestar la fuerza hidrostática del agua.



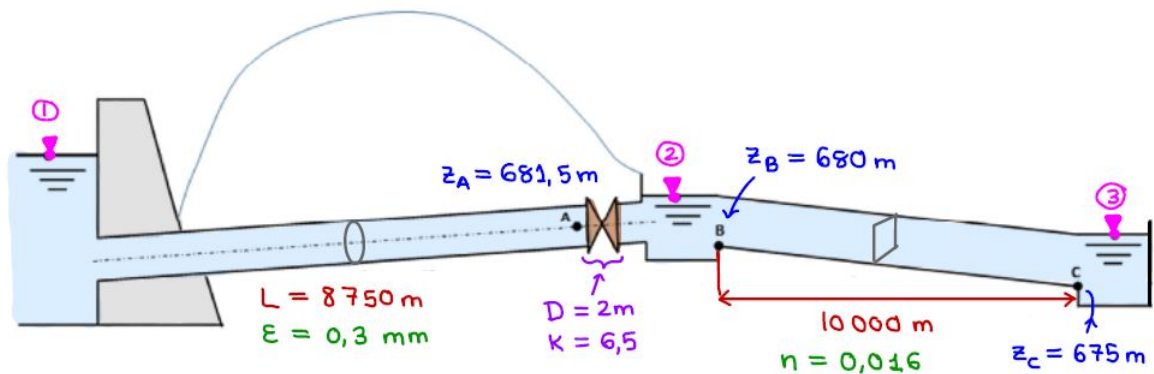
- b) Tenemos un líquido no viscoso, que fluye en régimen estacionario, 2-direccional y 2-dimensional, del cual solo conocemos la componente x del campo de velocidades:

$$u = x^2 - y$$

- ¿Qué información podemos obtener de la componente y de la velocidad?
- ¿Puede tratarse de un flujo sin remolinos?
- El gradiente de la presión en la dirección x , ¿es función solo de x , solo de y o de ambas? ¿Cambia la respuesta si se trata de un fluido viscoso? Razona las respuestas apelando a las ecuaciones adecuadas.

[3 puntos]

- 12 Se trasvasa agua desde un embalse como se indica en la figura: en un primer tramo, mediante una tubería de sección circular con flujo a presión, la cual conecta con un depósito desde donde, en un segundo tramo, el agua es conducida en lámina libre mediante un canal rectangular hasta el depósito final. El caudal durante todo el recorrido es de $10 \text{ m}^3/\text{s}$ y la viscosidad cinemática del agua $= 1.1 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$.



Se pide:

- a)* Dimensiones que deberá tener el canal para transportar ese caudal con sección rectangular más eficiente. También se pide (en estas condiciones) la cota del agua en 2.
- b)* Si tiramos una moneda en medio del canal para pedir un deseo, ¿en qué sentido se propagan las ondas (perturbaciones) que se producen en la superficie del fluido? ¿hacia 2 o hacia 3? Haz los cálculos necesarios para justificar tu respuesta.
- c)* Queremos reemplazar el canal rectangular por uno circular del mismo material, pero sin alterar la velocidad del flujo. Para ello, ¿cuál debe ser el grado de llenado del nuevo canal circular?
- d)* Diámetro de la tubería para que circule el caudal de diseño a presión, cuando el nivel del embalse (1) es de 688,64 m.