
Cálculo

ESTHER CABEZAS-RIVAS

30 de mayo de 2022

Apuntes de teoría y colección de ejercicios de Cálculo para primer curso de ingenierías. Incluye cálculo diferencial e integral de una variable, continuidad y campos numéricos (incluyendo números complejos), así como diferenciabilidad de funciones de varias variables. Como material extra adicional, incluye colecciones completas de ejercicios de integración en varias variables y de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDOs).

Esta obra está bajo una licencia [Creative Commons “Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional”](#).



Contenidos

Foundations	1
0.1. Funciones	1
0.1.1. Conceptos básicos	1
0.1.2. Funciones lineales	2
0.1.3. Operaciones con funciones	4
0.1.4. Función inyectiva y funciones inversas	4
0.2. Ejercicios	5
0.2.1. Funciones	5
0.2.2. Operatividad	6
0.2.3. Desigualdades y valor absoluto	7
1. Continuidad y diferenciabilidad	8
1.1. Motivación del concepto de derivada	8
1.1.1. Motivación geométrica	8
1.1.2. Motivación física	9
1.2. Límites de funciones	10
1.2.1. Definición informal de límite y límites laterales	10
1.2.2. Reglas y herramientas para el cálculo de límites	11
1.2.3. Variaciones sobre la noción de límite	12
1.3. La derivada: definición y reglas básicas	13
1.4. Continuidad y diferenciabilidad	14
1.4.1. Definición de continuidad y relación con la diferenciabilidad	14
1.4.2. Continuidad y operaciones	15
1.4.3. Tipos de discontinuidades	16
1.4.4. ¿Cuándo falla la diferenciabilidad?	17
1.4.5. Interpretación gráfica de la derivabilidad	17
1.5. La regla de la cadena y sus aplicaciones	18
1.6. Derivación implícita	19
1.7. La función exponencial	20
1.7.1. Definición y propiedades básicas	20
1.7.2. Funciones definidas a partir de la exponencial	21
1.8. Ejercicios	23
1.8.1. Derivadas: motivación geométrica y física	23
1.8.2. Límites	23
1.8.3. Definición de derivada y primeras reglas de derivación	25

1.8.4.	Continuidad y Derivabilidad	25
1.8.5.	Regla de la cadena	26
1.8.6.	Derivación implícita	26
1.8.7.	La función exponencial	28
2.	Campos numéricos	30
2.1.	De los naturales a los complejos	30
2.2.	Números naturales: razonamiento por inducción	31
2.3.	Los números reales	33
2.3.1.	Racionales e irracionales	33
2.3.2.	Desigualdades	33
2.4.	Números complejos	34
2.4.1.	Motivación y definición	34
2.4.2.	Operaciones y visualización en el plano	35
2.4.3.	Forma trigonométrica y polar	37
2.4.4.	La exponencial compleja	37
2.4.5.	Raíces complejas	38
2.5.	Valor absoluto	39
2.6.	Ejercicios	40
2.6.1.	Razonamiento por inducción	40
2.6.2.	Números irracionales y desigualdades	40
2.6.3.	Números complejos	41
3.	Aplicaciones de la derivada	44
3.1.	Monotonía, puntos extremos y críticos	44
3.1.1.	Definiciones básicas	44
3.1.2.	Condición necesaria de extremo	45
3.2.	Teoremas de continuidad y derivabilidad	46
3.2.1.	Funciones continuas en intervalos cerrados	46
3.2.2.	Teoremas para funciones derivables	47
3.2.3.	Aplicaciones del Teorema del Valor Medio	48
3.3.	Derivadas de orden superior	48
3.3.1.	Derivada n-ésima de una función	48
3.3.2.	Derivada segunda y concavidad	49
3.3.3.	Polinomio de Taylor	50
3.3.4.	Extremos relativos: test de la segunda derivada	52
3.3.5.	Problemas de optimización	53
3.3.6.	Serie de Taylor	54
3.4.	Ejercicios	55
3.4.1.	Teoremas de continuidad y derivabilidad	55
3.4.2.	Extremos y derivadas de orden superior. Polinomio y serie de Taylor	57
3.4.3.	Problemas de optimización	59

4. Funciones de varias variables: diferenciabilidad	60
4.1. Distintos tipos de funciones	60
4.2. La diferencial y las derivadas direccionales	62
4.2.1. Derivadas direccionales	62
4.2.2. Ecuación del plano tangente	63
4.2.3. Diferenciabilidad	65
4.2.4. Derivadas parciales de orden superior	67
4.3. Regla de la cadena y aplicaciones	68
4.3.1. Interpretación geométrica del gradiente	69
4.4. Optimización en varias variables	70
4.4.1. Extremos libres y puntos críticos	70
4.4.2. Test de la segunda derivada en varias variables	71
4.4.3. Extremos condicionados	72
4.5. Ejercicios	72
4.5.1. Derivada direccional y derivadas parciales	72
4.5.2. Plano tangente y aproximación lineal	73
4.5.3. Regla de la cadena	74
4.5.4. Interpretación del vector gradiente	75
4.5.5. Extremos libres y condicionados	76
5. Cálculo de primitivas e integración	78
5.1. La integral definida	78
5.1.1. Definición usando sumas de Riemann	78
5.1.2. Integrabilidad y propiedades	80
5.1.3. Valor medio usando integrales	81
5.2. Derivada versus Integral	82
5.2.1. Funciones primitivas o antiderivadas	82
5.2.2. Teorema Fundamental del Cálculo y consecuencias	84
5.3. Métodos de integración	85
5.4. Integrales impropias	86
5.5. Aplicaciones de la integral	88
5.5.1. Área entre dos gráficas	88
5.5.2. Cálculo de longitudes	88
5.5.3. Cálculo de volúmenes	89
5.6. Ejercicios	90
5.6.1. Integral definida. Propiedades y teorema del valor medio	90
5.6.2. Antiderivadas y teorema fundamental del cálculo	92
5.6.3. Métodos de integración	93
5.6.4. Cálculo de áreas en el plano	94
5.6.5. Cálculo de volúmenes	95
5.6.6. Integrales impropias	96
5.6.7. Cálculo de longitudes de curvas	97
A. Ejercicios de integración en varias variables	99
A.1. Integrales dobles. Centros de gravedad	99
B. Repaso de todos los temas	103

C. Colección de ejercicios de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias	111
C.1. Problemas de EDOs separables	111
C.2. EDOs de primer orden	115
C.2.1. EDOs lineales de orden 1	115
C.2.2. EDOs exactas y homogéneas	116
C.2.3. Existencia y unicidad de soluciones	118
C.2.4. Soluciones de equilibrio	118
C.3. EDOs de segundo orden	120
C.3.1. Conceptos básicos y EDOs reducibles a orden 1	120
C.3.2. EDOs lineales homogéneas de coeficientes constantes	121
C.3.3. EDOs lineales NO homogéneas de coeficientes constantes. Método de los coeficientes indeterminados	122
C.3.4. EDOs lineales de orden superior y método de variación de parámetros	123
C.3.5. Problemas de circuitos eléctricos	124
C.4. Sistemas de EDOs	125
C.5. La transformada de Laplace	129
C.5.1. Fórmulas y propiedades básicas	129
C.5.2. Resolución de EDOs usando transformadas de Laplace	130
C.5.3. Resolución de sistemas usando transformadas de Laplace	131
C.5.4. Impulsos: la función Delta de Dirac	132
C.6. Métodos numéricos para EDOs de orden 1	133
C.7. Ejercicios de repaso de EDOs	134

Foundations

0.1. Funciones

0.1.1. Conceptos básicos

Definición 0.1: Función

Una función f es una *regla* que asigna a cada elemento x en un conjunto A un único elemento y en un conjunto B . El elemento y se llama **imagen** de x por f , se representa por $f(x)$ y se lee “ f de x ”. Nos referimos a x como la **variable independiente** e y como **variable dependiente**.

Para definir una función normalmente usamos la notación

$$\begin{array}{ccc} f : & A & \longrightarrow & B \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array} .$$

Aunque en la mayoría de ocasiones abreviamos y simplemente se escribe $y = f(x)$.

Definición 0.2: Dominio y rango

Dada una función $f : A \rightarrow B$, se denomina:

- **Dominio** de f al conjunto $A = \text{Dom}(f)$ de valores que puede tomar la variable independiente.
- **Rango o imagen** de f al conjunto de valores que toma la variable dependiente:

$$f(A) = \text{Im}(f) = \{y \mid \text{existe } x \in A \text{ que cumple } y = f(x)\}.$$

Notemos que, en general, $f(A) \subset B$ pero no tienen por qué ser iguales. Muchas veces el conjunto A no se especifica y nos dan $f(x)$ como una fórmula; en ese caso, el **dominio natural** es el conjunto más grande en el que $f(x)$ tiene sentido como número real.

Si A y B son subconjuntos de los números reales ($A, B \subset \mathbb{R}$), f se dice que es una **función real de variable real**. En ese caso, A y B serán normalmente intervalos o uniones de intervalos. Si tomamos $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \leq b$, entonces tenemos los siguientes tipos de intervalos:

-
- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}.$
 - $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}.$
 - $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}.$
 - $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}.$
 - $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}.$
 - $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}.$
 - $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}.$
 - $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}.$

El propio conjunto de todos los números reales se puede representar como el intervalo $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$ y su representación gráfica es una recta horizontal (la recta real).

Para visualizar una función, consideramos

Definición 0.3: Gráfica

La gráfica de una función $f : A \rightarrow B$ es el conjunto de puntos de la forma

$$G_f = \{(x, f(x)), \text{ con } x \in A\} \subset A \times B,$$

donde $A \times B$ es el producto cartesiano de los pares de la forma (a, b) con $a \in A$ y $b \in B$.

En concreto, las funciones de variable real se representan como curvas en el plano. Sin embargo, no toda curva plana es la gráfica de una función:

Proposición 0.4: Test de la línea vertical

Una curva en el plano xy es la gráfica de una función si y solo si ninguna línea vertical corta a la curva en más de un punto.

Por ejemplo, el test anterior fallaría para cualquier circunferencia o para la parábola $y^2 = x$.

0.1.2. Funciones lineales

Definición 0.5: Función lineal

La función $y = \ell(x)$ se dice lineal si se puede escribir de la forma

$$y = mx + b, \tag{1}$$

donde m es la **pendiente** y b es la **ordenada en el origen**.

La gráfica de la función ℓ es una recta de pendiente m que corta al eje de ordenadas (eje y) en el punto $(0, b)$. La igualdad (1) se interpreta como sigue: por cada unidad que aumente la variable x , se produce un cambio en y de m unidades. Además, b es el valor de y cuando $x = 0$, es decir, representa lo que vale y debido a otros factores (distintos a x).

Podemos calcular la pendiente de una recta si conocemos un par de puntos cualesquiera sobre ella.

Lema 0.6: Cálculo de la pendiente

Si (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son dos puntos sobre una recta, la pendiente de la recta viene dada por

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Como consecuencia de lo anterior, la ecuación de una recta se puede calcular si conocemos su pendiente m y un punto (x_1, y_1) por el que pasa, de la siguiente manera:

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

Una manera gráfica de interpretar la pendiente es: si nos situamos en una recta de pendiente m y nos movemos una unidad hacia la derecha, entonces hemos de desplazarnos m unidades en la dirección y para volver a estar sobre la recta original. Si $m > 0$ subiremos en la dirección vertical, mientras que si $m < 0$, tendremos que bajar.

También es importante tener en cuenta los casos en que la pendiente es 0 o infinito:

$$\begin{aligned} y = c & \text{ línea horizontal } (m = 0) \\ x = c & \text{ línea vertical } (m = \infty) \end{aligned}.$$

Otro caso especial sucede cuando la recta pasa por el punto $(0, 0)$:

Definición 0.7: Proporcionalidad

Cuando dos magnitudes x e y están relacionadas linealmente de manera que se cumple

$$y = mx,$$

entonces se dice que y es **proporcional** a x , siendo m la **constante de proporcionalidad**. De forma abreviada, se escribe $y \propto x$.

Claramente dos rectas son paralelas si y solo si tienen la misma pendiente. También se deduce fácilmente la relación entre las pendientes si las rectas se cortan formando un ángulo de 90 grados:

Proposición 0.8: Pendiente de la recta normal/perpendicular

Si r_1 y r_2 son dos rectas con pendientes m_1 y m_2 , respectivamente, se cumple:

$$r_1 \perp r_2 \quad (r_1 \text{ y } r_2 \text{ son perpendiculares}) \quad \Longleftrightarrow \quad m_1 = -\frac{1}{m_2}$$

Esto se puede generalizar para calcular el ángulo α entre dos rectas r_1 y r_2 de pendientes m_1 y m_2 , respectivamente, el cual viene dado por la fórmula:

$$\tan \alpha = \left| \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \right|.$$

0.1.3. Operaciones con funciones

Dadas dos funciones $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ y un número real $\alpha \in \mathbb{R}$, existen distintas maneras de combinarlas, usando las operaciones algebraicas definidas entre números reales, para crear nuevas funciones:

$$f + g : D \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

$$f \cdot g : D \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x).$$

$$\alpha f : D \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \alpha f(x) = \alpha f(x).$$

En los puntos en los que g no se anula, también podemos definir el cociente

$$\frac{f}{g} : \{x \in D \mid g(x) \neq 0\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Si las funciones f y g tienen distinto dominio, las operaciones anteriores tendrían sentido sustituyendo D por la intersección de los dominios.

Como ejemplo de lo anterior, toda función que sea el cociente de dos polinomios se llama **función racional**.

Existe una manera de concatenar funciones que no procede de ninguna operación definida entre números reales:

Definición 0.9: Composición de funciones

Dadas dos funciones f, g , si $\text{Im}(g) \subset \text{Dom}(f)$, podemos definir la función composición $f \circ g$ (se lee *f compuesta con g*) como sigue:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

El dominio de $f \circ g$ son está formado por los elementos x en el dominio de g tales que $g(x)$ pertenece al dominio de f .

La composición de funciones es una operación asociativa, pero no es conmutativa.

0.1.4. Función inyectiva y funciones inversas

Una función se dice inyectiva si nunca toma dos veces el mismo valor o, en otras palabras, si no existen dos puntos en su dominio que tengan la misma imagen.

Definición 0.10: Función inyectiva

Una función $f : A \rightarrow B$ se dice inyectiva si no podemos encontrar dos elementos distintos en su dominio cuya imagen coincida:

$$\text{si } a \neq c, \text{ entonces } f(a) \neq f(c).$$

Equivalentemente, f será inyectiva cuando se cumpla lo siguiente para cualquier par de puntos $a, c \in \text{Dom}(f)$:

$$\text{si } f(a) = f(c), \text{ entonces } a = c.$$

Una función tiene inversa cuando es en cierto sentido *reversible*:

Definición 0.11: Función inversa

Si f es una función f inyectiva con dominio A , entonces se puede definir su función inversa f^{-1} , cuyo dominio es $f(A)$ y su rango es A , la cual viene dada por la siguiente regla:

$$f^{-1}(y) = x \iff y = f(x)$$

Sustituyendo $y = f(x)$ en la primera igualdad, tenemos que la función inversa cumple

$$f^{-1}(f(x)) = x, \quad \text{para todo } x \in A.$$

Esto significa que si la función f manda x a $f(x)$, su inversa deshace la operación y transforma $f(x)$ nuevamente en x .

En ocasiones se puede hallar una fórmula para f^{-1} aplicando el siguiente método:

1. Despejar x en la ecuación $y = f(x)$ para obtener x en función de y , es decir, para llegar a una fórmula $x = f^{-1}(y)$.
2. Intercambiar los roles de x e y para llegar a una expresión del tipo $y = f^{-1}(x)$.

0.2. Ejercicios

0.2.1. Funciones

- ① Encuentra el dominio y el rango de cada una de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = 1 + x^2$

(b) $f(x) = 1 - \sqrt{x}$

(c) $f(x) = \sqrt{5x + 10}$

(d) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x}$

(e) $f(x) = \frac{4}{3 - x}$

(f) $f(x) = \frac{2}{x^2 - 16}$

(g) $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$

2 Si $f(x) = x + 5$ y $g(x) = x^2 - 3$, encuentra las siguientes imágenes:

- | | |
|---------------|----------------|
| (a) $f(g(0))$ | (e) $f(f(-5))$ |
| (b) $g(f(0))$ | (f) $g(g(2))$ |
| (c) $f(g(x))$ | (g) $f(f(x))$ |
| (d) $g(f(x))$ | (h) $g(g(x))$ |

3 Escribe una fórmula para $f \circ g \circ h$ en los siguientes casos:

- (a) $f(x) = x + 1$, $g(x) = 3x$, $h(x) = 4 - x$
(b) $f(x) = 3x + 4$, $g(x) = 2x - 1$, $h(x) = x^2$
(c) $f(x) = \sqrt{x + 1}$, $g(x) = \frac{1}{x + 4}$, $h(x) = \frac{1}{x}$
(d) $f(x) = \frac{x + 2}{3 - x}$, $g(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$, $h(x) = \sqrt{2 - x}$

4 Encuentra unas fórmulas para $f \circ g$ y $g \circ f$ y sus correspondientes dominios y rangos en los siguientes casos:

- (a) $f(x) = \sqrt{x + 1}$, $g(x) = \frac{1}{x}$
(b) $f(x) = x^2$, $g(x) = 1 - \sqrt{x}$

5 Razona si las siguientes funciones son inyectivas:

- (a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x$
(b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x}$
(c) $f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty), f(x) = \sqrt{x}$
(d) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$
(e) $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty), f(x) = x^2$
(f) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

6 Se considera la función $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{x + 1}{x - 1}$. Encuentra la función inversa, razonando primero si existe y calculando su dominio.

0.2.2. Operatividad

7 Encuentra la derivada de las siguientes funciones con respecto de la variable apropiada:

-
- | | |
|---------------------------------------|--|
| (a) $y = (1 + 2x)e^{-2x}$ | (k) $y = \left(\frac{3t - 4}{5t + 2}\right)^{-5}$ |
| (b) $y = \log(\cos(3x))$ | (l) $y = x \tan(2\sqrt{x}) + 7$ |
| (c) $y = \frac{2x + 5}{3x - 2}$ | (m) $y = \cos^4(\sec^2(3t))$ |
| (d) $y = \frac{5x + 1}{2\sqrt{x}}$ | (n) $y = 4 \sin(\sqrt{1 + \sqrt{t}})$ |
| (e) $y = \frac{x^2 + 3e^x}{2e^x - x}$ | (ñ) $y = \frac{\log x}{1 + \log x}$ |
| (f) $y = (x^2 - 2x + 2)e^{5x/2}$ | (o) $y = \log(\tan^{-1}(x))$ |
| (g) $y = e^{4\sqrt{x} + x^2}$ | (p) $y = \cot^{-1}(\sqrt{t - 1})$ |
| (h) $y = (4x + 3)^4(x + 1)^{-3}$ | (q) $y = \csc^{-1}(x^2 + 1)$ |
| (i) $y = \sqrt{1 + \cos(t^2)}$ | (r) $y = \log(x^2 + 4) - x \tan^{-1}(x/2)$ |
| (j) $y = (x^2 \log x)^4$ | (s) $f(x) = \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 + 3}\right)^{\sin(2x)}$ |

0.2.3. Desigualdades y valor absoluto

- 8 Encuentra todos los números reales x que cumplen las siguientes desigualdades

- a) $\frac{2x - 3}{x + 2} < \frac{1}{3}$.
 b) $|2x - 1| \leq |x - 3|$.
 c) $||x - 1| - |x + 1|| \leq 1$.

Tema 1

Continuidad y diferenciabilidad

1.1. Motivación del concepto de derivada

1.1.1. Motivación geométrica

La pendiente de una recta que pasa por el punto (a, b) en el plano de coordenadas (x, y) viene dada por

$$m = \frac{y - b}{x - a}.$$

Este cociente dará el mismo valor para cualquier punto (x, y) sobre la recta, por tanto, la pendiente es una constante característica de cada recta del plano. En efecto, conocido un punto (a, b) sobre la recta y el valor m de la pendiente, la recta queda completamente determinada como el conjunto de puntos (x, y) del plano que satisfacen la ecuación:

$$y = b + m(x - a).$$

Leibniz (1646-1716) se planteó el problema de cómo medir la pendiente de una curva cualquiera en el plano (no necesariamente una recta). Parece claro que la pendiente de una curva no será una constante, sino que podrá variar en general de unos puntos a otros conforme recorremos dicha curva, luego se trata de definir qué entendemos por pendiente en un punto. Por otro lado, como solo sabemos calcular pendientes de rectas, es natural reducir el problema a obtener la pendiente de la tangente a la curva dada en cada punto.

Pero no está tan claro cómo definir la tangente a una curva C que pase por un punto p : intuitivamente, tangente significa que la recta no intersecta a la curva en ningún otro punto, al menos cerca de p . Sin embargo, dado un punto del plano, por él pasan infinitas rectas. Por el contrario, si nos dan dos puntos del plano, sabemos que por ellos pasa una única recta. Esta es la idea que usamos para definir la tangente en p : tomamos otro punto q sobre C y trazamos la recta (secante) que corta a C en los puntos p y q . Luego repetimos el proceso deslizando q a lo largo de C de manera que se acerque más y más a p ; así, el límite de las rectas secantes cuando q se aproxima a p será la buscada recta tangente en p .

Para materializar la idea anterior, suponemos que la curva viene dada por la gráfica de una función f y buscamos la recta tangente en el punto $(a, f(a))$, con $a \in \text{Dom}(f)$. Para cualquier otro $x \in \text{Dom}(f)$ con $x \neq a$, el **cociente incremental**

$$m_{\text{sec}} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad (1.1)$$

representa desde el punto de vista geométrico la pendiente de la *secante* que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(x, f(x))$. Tomando x cada vez más cerca de a , las pendientes de las correspondientes secantes convergen hacia la pendiente de la tangente:

$$m_T = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Este límite anterior describe cómo cambia el comportamiento de la función f alrededor del punto con $x = a$. Efectivamente, se trata de estudiar la función $x \mapsto f(x)$ en las proximidades de un punto a de su dominio; para ello, hemos de calcular el cambio en los valores de la función $f(x) - f(a)$, en comparación con el cambio en la variable independiente $x - a$, conforme x se acerca a a .

Definición 1.1: Recta tangente

La tangente a la gráfica de una función f en $x = a$ se define como la recta que pasa por el punto $(a, f(a))$ y tiene pendiente m_T dada por (1.1). Por tanto, se trata de la recta cuya ecuación es

$$y = f(a) + m_T(x - a) \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Claramente aquí estamos suponiendo que el límite m_T existe. En adelante veremos que podría suceder que una curva no tuviera tangente en un punto (curvas con *picos*) o bien que la tangente exista, pero el límite no sea un número finito (caso de curvas con tangente vertical).

En lo sucesivo consideramos $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida sobre un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ y tomamos un punto $a \in I$. El objetivo es definir la derivada de f en a . Geométricamente se trata de la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$. Por tanto, denotaremos $m_T = f'(a)$.

1.1.2. Motivación física

Un problema interesante desde el punto de vista de la física es cómo definir la velocidad instantánea. Tanto es así que **Newton (1642-1727)** desarrolló el cálculo diferencial para, entre otras cosas, justificar las leyes de Kepler sobre el movimiento de los planetas.

Si $s(t)$ representa la posición de un objeto en un instante t , el cual se desplaza a lo largo de una trayectoria recta, entonces la *velocidad media* en el intervalo temporal $[a, a + h]$ es el cociente entre la distancia recorrida y el tiempo empleado para ello, es decir, es igual a

$$\frac{s(a + h) - s(a)}{(a + h) - a}$$

Pero si nos preguntamos cuál es la velocidad justo en el instante $t = a$, la única manera es calcular la velocidad media en intervalos más y más pequeños, esto es, hemos de calcular la cantidad anterior haciendo que el incremento temporal h se aproxime a cero. En definitiva, la **velocidad instantánea** en el instante $t = a$ viene dada por

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(a+h) - s(a)}{h},$$

que se interpreta como la tasa de variación instantánea de la función desplazamiento s en $t = a$.

Otras magnitudes físicas conocidas tienen una interpretación similar, por ejemplo, la aceleración es la tasa de variación instantánea de la velocidad respecto del tiempo.

1.2. Límites de funciones

1.2.1. Definición informal de límite y límites laterales

Ya hemos visto que para definir la derivada o el cambio de una función alrededor de un punto necesitamos tomar límites. Así pues, vamos a ocuparnos en este apartado de la idea intuitiva de límite y algunas herramientas de cálculo de límites funcionales.

Sea $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ una función y $a \in \mathbb{R}$ un punto del interior o la frontera de D (por ejemplo, si $D = (0, 1)$, tanto 0 como 1 pertenecen a la frontera del intervalo D). La función f se considera definida en todo D , excepto posiblemente en $x = a$.

Definición 1.2: Límite (idea intuitiva)

Se dice que f se aproxima a un número finito $L \in \mathbb{R}$ cuando x se acerca al valor a si sucede lo siguiente: la cantidad $f(x)$ está *arbitrariamente* próxima a L , siempre que tomemos x lo *suficientemente cerca* de a (pero siempre $x \neq a$). En ese caso, se escribe

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L, \quad \text{o bien} \quad f(x) \rightarrow L \quad \text{cuando} \quad x \rightarrow a.$$

Diremos entonces que $f(x)$ se aproxima a L conforme x tiende a a . Alternativamente, se dice que $f(x)$ **converge** a L cuando x se acerca a a . Si el límite no existe o bien $L = \pm\infty$, entonces $f(x)$ **diverge** cuando $x \rightarrow a$. Notemos que el valor de $f(a)$ es irrelevante para el cálculo de $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, incluso podría no existir.

Cuando decimos que x se acerca al valor a , nos referimos a una aproximación por cualquier lado (derecha o izquierda del eje de abscisas). Pero podría suceder que, si nos acercamos por la izquierda, los valores de la función tiendan a un valor distinto al que se obtendría si nos aproximamos por la derecha. Para hacer esto más preciso se define

Definición 1.3: Límites laterales

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a, x > a} f(x) \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a, x < a} f(x).$$

El límite existe si y solo si ambos límites laterales existen y tienen el mismo valor.

Ejemplo 1.4 La función signo viene dada por

$$\text{sgn} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \begin{cases} 1, & \text{si } x > 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \\ -1, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

No existe $\lim_{x \rightarrow 0} \text{sgn}(x)$, dado que $-1 = \lim_{x \rightarrow 0^-} \text{sgn}(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} \text{sgn}(x) = 1$.

1.2.2. Reglas y herramientas para el cálculo de límites

Proposición 1.5: Reglas de cálculo de límites

Sean $D \subset \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}$ un punto en el interior o la frontera de D . Sean además dos funciones $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ cuyos límites $L := \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ y $M := \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ existen. Entonces se cumple:

- (a) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = L + M$.
- (b) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = L \cdot M$.
- (c) Si $M \neq 0$, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$.

El enunciado anterior significa que la operación de tomar límites (llamada de *paso al límite*) respeta las operaciones algebraicas, por ejemplo, el límite de la suma es la suma de los límites; lo mismo sucede con la multiplicación y la división, siempre que esta última tenga sentido. Adicionalmente, los límites preservan las relaciones de orden o, dicho de otra manera, las desigualdades:

Proposición 1.6: lím preserva el orden

Sea I un intervalo abierto con $a \in I$. Si $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in I$ (excepto quizá en $x = a$), entonces se cumple que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

El siguiente resultado nos dice cómo determinar el límite de una función en un punto si conseguimos encerrarla entre otras dos funciones que tengan el mismo límite en dicho punto.

Teorema 1.7: Teorema del sandwich

Sea I un intervalo abierto con $a \in I$. Si $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in I$ (excepto quizá en $x = a$) y, además,

$$\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L,$$

entonces el límite $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe y es igual a L .

La utilidad del teorema anterior está en que, si no sabemos calcular el límite de f , podemos intentar encerrarla entre dos funciones más sencillas cuyos límites sí sean fáciles de calcular.

Ejemplo 1.8 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$

1.2.3. Variaciones sobre la noción de límite

Para tener una idea completa de la gráfica de una función f , conviene estudiar la tendencia de los valores $f(x)$ cuando x se hace enormemente grande o pequeño.

Definición 1.9: Límites en el infinito

- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ si el valor $f(x)$ está arbitrariamente cerca de L , siempre que tomemos $x > 0$ lo suficientemente grande.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ si la cantidad $f(x)$ se acerca tanto como queramos a L , cuando elegimos $x < 0$ lo suficientemente grande (en valor absoluto).

En los casos anteriores, la línea $y = L$ se llama **asíntota horizontal**.

Podemos ampliar la noción de límite de manera que admitamos los valores $\pm\infty$. Esto significará que conforme x se acerca a un valor a , los valores de $f(x)$ se hacen tan grandes (o tan pequeños) como queramos.

Definición 1.10: Límites infinitos

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ si f crece sin cota superior conforme x tiende a a . En concreto, dado cualquier valor $N > 0$ tan grande como queramos, siempre podemos encontrar x lo suficientemente cerca de a tal que $f(x) > N$.
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ si f decrece sin cota inferior conforme x tiende a a . Esto significa que dado cualquier número $N > 0$, existen valores de x lo suficientemente próximos a a que verifican $f(x) < -N$.

En los casos anteriores, se dice que f tiene una **asíntota vertical** en $x = a$.

De manera similar, se puede extender el concepto de límite lateral admitiendo los valores $\pm\infty$. Pese a que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ se lea en ocasiones como $f(x)$ *tiende a infinito* o *tiene límite infinito* cuando $x \rightarrow a$, esto es un abuso del lenguaje, puesto que realmente en este caso $f(x)$

diverge conforme $x \rightarrow a$, lo que significa que el límite no existe. Pero la definición anterior refleja que la causa de la no existencia es un crecimiento/decrecimiento de la función sin cota (sin ninguna barrera por arriba o por abajo) conforme nos acercamos a $x = a$.

1.3. La derivada: definición y reglas básicas

Una vez vistos los conceptos básicos sobre límites funcionales, estamos en disposición de introducir la noción de derivada de una función. No todas las funciones admiten derivada en todo punto, por tanto, presentaremos simultáneamente el concepto de derivabilidad o diferenciabilidad de una función. A continuación, obtendremos algunas reglas elementales para el cálculo de derivadas.

Definición 1.11: Diferenciabilidad en un punto

Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ y $a \in I$. Se dice que la función f es **diferenciable** en a , cuando existe el límite

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Entonces este límite se conoce como **derivada** de f en a y se representa por $f'(a)$.

Nota 1.12 (1) Haciendo el cambio de variable $h = x - a$, se verifica:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

(2) No se admiten límites infinitos en la definición anterior.

(3) Si a está en la frontera del intervalo I , entendemos el límite de la definición como un límite lateral (pues x siempre debe permanecer en I).

Definición 1.13: Función derivada

Diremos que f es diferenciable, si f es diferenciable en a para todo punto a en su dominio. En este caso, se puede definir una nueva función

$$f' : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad a \mapsto f'(a),$$

que se conoce como **función derivada** o simplemente derivada de f .

Ejemplo 1.14 (1) Para una función constante, es decir, $f(x) = c \in \mathbb{R}$ para todo $x \in I$, se tiene $f' = 0$ (la función constante 0).

(2) Para $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, con $f(x) = x$ (función identidad), se cumple $f' = 1$.

(3) La función valor absoluto $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x|$, no es diferenciable en $a = 0$. Esta función tiene derivadas laterales en $a = 0$, pero toman valores distintos.

(4) La función raíz cuadrada $x \mapsto \sqrt{x}$ es diferenciable en todo $a > 0$, pero no lo es en $a = 0$.

Notaciones alternativas: Si $I \subset \mathbb{R}$ y $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable, también es habitual escribir $\frac{df}{dx}(x)$ en lugar de $f'(x)$. Esta notación puede resultar confusa, pues estamos usando la letra x por un lado como la variable, respecto la cual se deriva y, por otra parte, como el punto en el que se evalúa la derivada. Sin embargo, hemos de acostumbrarnos a esta notación porque es especialmente útil para aplicar la regla de la cadena.

Si ahora $a \in I$ es un punto fijado (con un valor concreto y conocido), no es correcto escribir $\frac{df}{da}$ en vez de $f'(a)$. En este caso, pondremos $\frac{df}{dx}(a)$, o bien $\frac{df}{dx}\Big|_{x=a}$.

Proposición 1.15: Reglas para el cálculo de derivadas

Sea $I \subset \mathbb{R}, a \in I, f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ funciones diferenciables en a y c una constante. Entonces se tiene:

- (a) $f + g : I \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en a con $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.
- (b) $cf : I \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en a con $(cf)'(a) = \lambda f'(a)$.
- (c) $fg : I \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en a con $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.
- (d) Si $g(a) \neq 0$, entonces auch $\frac{f}{g}$ también es diferenciable en a con

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$

1.4. Continuidad y diferenciabilidad

1.4.1. Definición de continuidad y relación con la diferenciabilidad

En la siguiente definición vemos que el concepto de continuidad está íntimamente ligado a la noción de límite. En efecto, dicho brevemente, una función f se dice continua en $x = a$ si $f(x) \rightarrow f(a)$ cuando $x \rightarrow a$. Con más precisión,

Definición 1.16: Continuidad en un punto

Sean $D \subset \mathbb{R}$ un subconjunto cualquiera y una función $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Dado $a \in \mathbb{R}$ se dice que f es continua en el punto a si se verifican las siguientes tres condiciones:

- $a \in D$, es decir, f está definida en $x = a$.
- Existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$.
- $L = f(a)$.

Entendemos entonces que $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ es continua (en D) si f es continua en a para todo $a \in D$.

A continuación, aclaramos la relación entre diferenciabilidad y continuidad.

Teorema 1.17: Diferenciable $\Rightarrow$ Continua

Si f es diferenciable en a , entonces f es continua en a .

Se entiende que el concepto de diferenciabilidad es más fuerte que el de continuidad porque toda función diferenciable es continua, pero existen funciones continuas que no son diferenciables (por ejemplo, la función $f(x) = |x|$).

1.4.2. Continuidad y operaciones

Como consecuencia de las propiedades de los límites (ver Proposición 1.15), se deduce

Corolario 1.18: Continuidad y operaciones algebraicas

- (a) Dadas $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ continuas en $a \in D$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ constantes, entonces las funciones $\alpha f + \beta g$, $f \cdot g$ y $\frac{f}{g}$ (siempre que $g(a) \neq 0$) son continuas en a .
- (b) Todos los polinomios y las funciones racionales (es decir, cociente de polinomios) son continuas en su dominio de definición.

La concatenación de funciones continuas da como resultado una nueva función continua:

Teorema 1.19: Composición de funciones continuas

Sean $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ con $f(D) \subset E$. Si f es continua en a y g es continua en $f(a)$, entonces la composición $g \circ f : D \rightarrow \mathbb{R}$ también es continua en a .

Este resultado conlleva que para funciones continuas las operaciones de composición y

paso al límite sean intercambiables, esto es,

$$\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = g\left(\lim_{x \rightarrow a} f(x)\right).$$

Los resultados anteriores nos permiten crear nuevas funciones continuas a partir de las ya conocidas.

1.4.3. Tipos de discontinuidades

Ante la pregunta de qué debe suceder para que falle la continuidad en un punto, recordemos que la definición de función continua requiere el cumplimiento simultáneo de tres condiciones (ver Definición 1.16), por tanto, para que la función no sea continua en ese punto bastará con que alguna dichas condiciones no se cumpla.

Definición 1.20: Discontinuidad evitable

Supongamos que $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe. Si el límite no coincide con el valor de $f(a)$ o f no está definida en $x = a$, entonces se dice que f tiene una discontinuidad evitable en a .

Este caso de fallo de continuidad, como su nombre indica, se puede *evitar*; en concreto, es posible definir una función que sea igual a f en todo punto $x \neq a$ pero que además sea continua en a :

Definición 1.21: Extensión continua

Sea f una función con una discontinuidad evitable en el punto $a \in \mathbb{R}$. Entonces definimos la función

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \neq a \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x), & \text{si } x = a \end{cases}$$

$\tilde{f}$ es continua en $x = a$ y se llama extensión continua de f en a .

Ejemplo 1.22 La función $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ admite la siguiente extensión continua (ver Ejemplo 1.8):

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

Si falla la existencia de límite, surgen distintos tipos de discontinuidades:

Definición 1.23: Discontinuidades no evitables

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ no existe, diremos que f tiene una discontinuidad no evitable en a . Puede suceder alguna de las siguientes posibilidades:

- **Discontinuidad de salto finito.** Los límites laterales cuando $x \rightarrow a^\pm$ existen ambos, pero $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$.
- **Discontinuidad de salto infinito.** Los límites laterales no coinciden y alguno de ellos es igual a $\pm\infty$.
- **Discontinuidad asintótica.** Los límites laterales coinciden y ambos tienden a ∞ (o bien ambos divergen a $-\infty$).
- **Discontinuidad oscilante.** Alguno de los límites laterales no existe, pero ninguno de ellos es $\pm\infty$.

1.4.4. ¿Cuándo falla la diferenciabilidad?

La existencia derivada de una función f en un punto a puede fallar por alguno de los siguientes motivos:

- f es **discontinua en a** : otra manera de interpretar el Teorema 1.17 es que si una función no es continua, entonces no puede ser diferenciable.
- f tiene una **esquina/pico en a** : las derivadas laterales son diferentes, es decir,

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \neq \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

- f tiene una **cúspide en a** : la pendiente de la recta tangente tiende a ∞ por un lado y a $-\infty$ por otro.
- f tiene **tangente vertical en a** . Por ejemplo, $f(x) = x^{1/3}$ cumple que $\lim_{x \rightarrow 0^\pm} f(x) = \infty$.

1.4.5. Interpretación gráfica de la derivabilidad

Gráficamente la diferenciabilidad de una función f en un punto a se identifica con la existencia de recta tangente a la gráfica en el punto $(a, f(a))$ (salvo en las ocasiones en que dicha tangente existe pero es vertical). Así pues, si hacemos zoom alrededor del punto $(a, f(a))$ en una función derivable, conforme más nos acercamos, más difícil es distinguir la gráfica de la función en las proximidades del punto $(a, f(a))$ de su recta tangente en $x = a$.

Analíticamente esto se expresaría de la siguiente manera:

Proposición 1.24: Tangente como mejor aproximación lineal

Entre todas las rectas que pasan por $(a, f(a))$, la tangente a f en $x = a$ es la recta que mejor aproxima a la función f cerca del punto $(a, f(a))$ en el sentido de que se cumple

$$m = f'(a) \iff \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - m(x - a)}{x - a} = 0.$$

Por el contrario, si la función tiene un pico o una cúspide en un punto, por mucho zoom que hagamos, no va a desaparecer dicho pico o cúspide, esto es, no conseguiremos que la función alrededor del punto de no diferenciabilidad se parezca a ninguna recta.

1.5. La regla de la cadena y sus aplicaciones

Ya hemos estudiado el comportamiento de la derivada con respecto a las operaciones algebraicas (ver Proposición 1.15) y ahora nos preguntamos qué sucede al derivar la composición de dos funciones o la inversa de una función.

Teorema 1.25: Regla de la cadena

Sean $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ con $f(I) \subset J$. Si f es diferenciable en $a \in I$ y g es diferenciable en $f(a) \in J$, entonces $g \circ f : I \rightarrow \mathbb{R}$ es también diferenciable en a y su derivada es

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a).$$

Resulta especialmente útil la notación de Leibniz para la utilización de la regla de la cadena. Leibniz escribía las funciones de la forma $y = y(x)$ y expresaba la derivada respecto de x como $\frac{dy}{dx}$. Así, la regla de la cadena se expresa de manera formal como una multiplicación de fracciones:

$$y = y(x), \quad z = z(y) \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Para que esta notación no nos lleve a equívoco, es importante tener siempre en cuenta la variable de la que depende cada función.

Una de las aplicaciones más útiles de la regla de la cadena es que nos permite calcular la tasa de variación de una magnitud (por ejemplo, respecto del tiempo) si conocemos la tasa de variación correspondiente a una cantidad relacionada con la magnitud que nos interesa. Esto lo veremos con ejercicios. Aquí la usamos para obtener una fórmula que nos permita calcular la derivada de la inversa de una función.

Corolario 1.26: Derivada de la función inversa

Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Si f es diferenciable en $a \in I$ y $f'(a) \neq 0$, entonces la derivada de f^{-1} en $f(a)$ (si existe) viene dada por

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}.$$

En la práctica a menudo conviene hacer el cambio de variable $a = f^{-1}(b)$ y entonces la fórmula anterior se escribe como sigue

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

Nota 1.27 La gráfica de f^{-1} se obtiene a partir de la gráfica de f reflejándola como en un espejo respecto de la recta $y = x$. Esta operación supone la transformación $(x, y) \mapsto (y, x)$ y, por tanto, la tangente de f en el punto $(a, f(a))$ con pendiente m se convierte en la tangente de f^{-1} en $(f(a), a)$ y cuya pendiente es $\frac{1}{m}$.

Con la notación de Leibniz, se tiene que la derivada de la inversa es la inversa (como fracción) de la derivada original:

$$y = y(x), \quad x = x(y) \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dy} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^{-1}.$$

Muchas de las fórmulas que encontramos en las típicas tablas de derivadas son simplemente aplicaciones sencillas de la regla de la cadena. Por otro lado, incluso el principio de conservación de la energía en física se puede obtener como una consecuencia sencilla de la regla de la cadena.

1.6. Derivación implícita

Diremos que una función $y = f(x)$ está definida *implícitamente* si viene descrita a través de una ecuación de la forma

$$F(x, y) = 0.$$

El procedimiento general para derivar implícitamente una igualdad seguiría los siguientes pasos:

- Derivar ambos lados de la igualdad *respecto de* x , considerando y como función de x .
- Pasar los términos que contengan y' al lado izquierdo de la igualdad, llevando al lado derecho el resto de términos.
- Sacar y' factor común y despejar y' .

1.7. La función exponencial

Aunque en cursos anteriores ya se ha visto una idea de qué es la función exponencial e^x , conviene re-aprender desde cero cómo se define dicha función, con el objetivo de tener una base sólida para responder a problemas más complicados, por ejemplo, ¿qué significan las potencias e^π o $3^{\sqrt{7}}$? Claramente la respuesta no es tan sencilla como la interpretación de e^3 que consiste en multiplicar el número e por sí mismo 3 veces.

1.7.1. Definición y propiedades básicas

Vamos a definir una función con una característica muy particular: su derivada es ella misma, dicho de otra manera, la función permanece inalterable ante el operador derivada.

Definición 1.28: Función exponencial

La función $y = \exp(x)$ se define como la única solución de la **ecuación diferencial**

$$y'(x) = y(x) \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R},$$

que además cumple $y(0) = 1$.

Usando la definición anterior y la idea de que la recta tangente es la mejor aproximación lineal de la función cerca de un punto, llegamos a la relación entre la función exponencial y el **número de Euler** $e \approx 2,71828$:

$$\exp(x) = e^x, \quad \text{donde} \quad e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

De la propia definición se deduce inmediatamente que $\exp$ es una función diferenciable (y por tanto continua) cuyo dominio es todo $\mathbb{R}$.

La propiedad más importante de la función exponencial es que transforma sumas en productos:

Teorema 1.29: Propiedad fundamental de $\exp$

La función exponencial verifica la siguiente igualdad

$$e^{x+y} = e^x \cdot e^y \quad \text{para todo} \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Como consecuencia de lo anterior, se obtienen las primeras características de la función que acabamos de definir

Corolario 1.30

- (a) Para cualquier $x \in \mathbb{R}$ se tiene que $\exp(x) \neq 0$ y $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$.
- (b) $\exp(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, es decir, $\exp : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$.
- (c) Para $x \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$ se verifica $e^{nx} = (e^x)^n$.

De aquí se deduce fácilmente el comportamiento asintótico de la aplicación exponencial:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0.$$

1.7.2. Funciones definidas a partir de la exponencial

Dado que la función exponencial es diferenciable y su derivada no se anula en ningún punto, al reflejarla respecto de la recta $y = x$ no existe peligro ni de que se formen picos ni de que una tangente horizontal se transforme en vertical. Por tanto, desde el punto de vista geométrico está clara la existencia de $\exp^{-1}$; por su importancia, esta función tiene nombre propio:

Definición 1.31: Logarimo (natural)

$\log : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ es la función inversa de la exponencial $\exp : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ y se conoce como logaritmo (natural).

También es frecuente usar la notación $\ln$ en lugar de $\log$, pues esta función también se conoce como logaritmo neperiano.

La función $\log$ es diferenciable y verifica las siguientes propiedades:

$$\log(1) = 0; \quad \log(e) = 1; \quad \log(x \cdot y) = \log x + \log y \quad \text{para todo } x, y \in (0, \infty).$$

Para $a \in (0, \infty)$ y $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $a^n = e^{n \log a}$. Esto motiva la siguiente definición

Definición 1.32: Potencias de exponente real

Fijado $a \in (0, \infty)$, se define

$$a^x = e^{x \log a} \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Dado $a > 0$ fijo, tanto la función $x \mapsto a^x$ como la función $x \mapsto x^a$ son diferenciables en sus respectivos dominios de definición (que son $\mathbb{R}$ y $(0, \infty)$, respectivamente) por ser composición de funciones diferenciables.

Usando la definición y la propiedad fundamental de la función exponencial, se comprueba fácilmente que las potencias generalizadas cumplen las mismas propiedades que las potencias de exponente natural.

Proposición 1.33: Reglas para las potencias generalizadas

Para $a, b \in (0, \infty)$ y $x, y \in \mathbb{R}$ se verifican las siguientes propiedades:

$$(a) \quad (ab)^x = a^x b^x, \quad a^{xy} = (a^x)^y, \quad a^{x+y} = a^x a^y, \quad \log(a^x) = x \log a.$$

$$(b) \quad \text{Si } x < y, \text{ entonces } \begin{cases} a^x < a^y, & \text{para } a > 1, \\ a^x > a^y, & \text{para } a < 1 \end{cases}$$

$$(c) \quad \text{Si } a < b, \text{ entonces } \begin{cases} a^x < b^x, & \text{para } x > 0, \\ a^x > b^x, & \text{para } x < 0 \end{cases}.$$

Como la función $x \mapsto a^x$ es composición de funciones invertibles, también tiene inversa:

Definición 1.34: Logaritmo en base a

Si $a > 0$ y $a \neq 1$, la función $\log_a : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ es la inversa de la función $x \mapsto a^x$.

Cumple propiedades parecidas a las del logaritmo natural, puesto se trata de la propia función logaritmo multiplicada por una constante. Con más precisión, se cumple

$$\log_a(x) = \frac{\log x}{\log a}.$$

Aunque son menos conocidas que las anteriores, las funciones trigonométricas hiperbólicas también se definen a partir de la exponencial:

Definición 1.35: Funciones hiperbólicas

Las funciones **seno y coseno hiperbólico** $\sinh, \cosh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vienen dadas por

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

La función coseno hiperbólico representa la forma de un cable colgante sujeto solo por los extremos y bajo la acción de la gravedad (la curva obtenida como gráfica del $\cosh$ se conoce como catenaria).

Directamente de la definición se comprueba que dichas funciones cumplen la identidad fundamental:

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1.$$

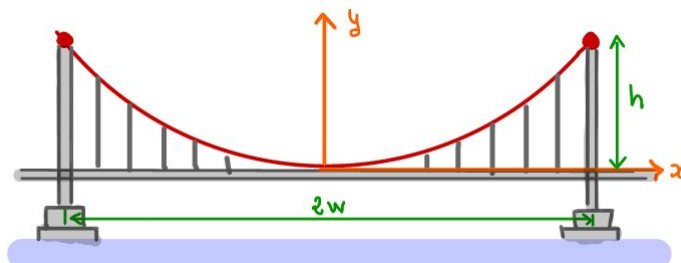
Además, se verifican las siguientes reglas de derivación:

$$(\cosh)' = \sinh \quad \text{y} \quad (\sinh)' = \cosh.$$

1.8. Ejercicios

1.8.1. Derivadas: motivación geométrica y física

- 1 Encuentra el ángulo que forman las curvas $y = x^3 - x$ e $y = x^2 - 1$ en los puntos de intersección.
- 2 Dada $f(x) = \arctan\left(\frac{\sin x}{1 + \cos x}\right)$, halla las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica de f en $x = 0$.
- 3 El cable en suspensión de un puente colgante está unido a pilares que distan 250 metros uno de otro. Además tiene forma de parábola cuyo punto más bajo se encuentra a 50 m por debajo del punto de suspensión. Calcula el ángulo entre el cable y el pilar.



- 4 La posición de una partícula sobre el eje horizontal en un cierto instante t viene dada por la función
$$x(t) = 10 \cos(t + \pi/4)$$
 - (a) ¿Cuál es la posición inicial de la partícula en el instante $t = 0$?
 - (b) ¿Cuáles son los puntos más lejanos a izquierda y derecha en los que la partícula puede situarse?
 - (c) Calcula la velocidad y la aceleración de la partícula en los puntos obtenidos en (b).
 - (d) ¿En qué instante la partícula se situará en el origen? ¿Cuál es la velocidad y la aceleración de la partícula en ese instante?
- 5 Una hormiga se mueve sobre la parte de la parábola $x = y^2$ situada en el primer cuadrante, de manera que avanza horizontalmente a razón de 5 cm/s. Calcula la velocidad a la que la hormiga se aleja del origen en el instante en que $x = 9$.

1.8.2. Límites

- 6 Si $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 5$,
 - (a) ¿está f necesariamente definida en $x = 1$?

(b) ¿ $f(1)=5$?

(c) ¿qué podemos decir sobre $f(1)$?

7 Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1, & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 2, & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

(a) ¿En qué puntos c existe $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$?

(b) ¿En qué puntos solamente existe límite a izquierda?

(c) ¿En qué puntos solamente existe límite a derecha?

8 Supongamos que $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow 4} g(x) = -3$. Calcula los siguientes límites:

(a) $\lim_{x \rightarrow 4} (g(x) + 3)$

(c) $\lim_{x \rightarrow 4} g(x)^2$

(b) $\lim_{x \rightarrow 4} xf(x)$

(d) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{g(x)}{f(x) - 1}$

9 Supongamos que $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = 7$ y $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = -3$. Calcula los siguientes límites:

(a) $\lim_{x \rightarrow b} (f(x) + g(x))$

(c) $\lim_{x \rightarrow b} 4g(x)$

(b) $\lim_{x \rightarrow b} f(x) \cdot g(x)$

(d) $\lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)}$

10 Si $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - 5}{x - 2} = 1$, calcula $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$.

11 Calcula usando el teorema del sandwich (esto incluye usar que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, visto en clase):

a) $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{\pi}{x}$

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\cos x + x^2}$

b) $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\tan \theta}{\theta}$

f) $\lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{\pi}{x}$

c) $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\theta}{\sin \theta}$

g) $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2}$

d) $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin(2\alpha)}{\sin(\alpha)}$

h) $\lim_{x \rightarrow \infty} 2 + \frac{\sin x}{x}$

1.8.3. Definición de derivada y primeras reglas de derivación

12 Utilizando la definición de derivada, calcula las siguientes derivadas en los puntos dados:

(a) $f(x) = 4 - x^2$; $f'(3)$; $f'(0)$

(b) $f(x) = \sqrt{2x+1}$; $f'(0)$; $f'(1)$

(c) $f(x) = x^2 - 3x + 4$; $f'(0)$

(d) $f(x) = \frac{1}{x+2}$; $f'(1)$

13 Usa la definición de derivada para comprobar las siguientes reglas de derivación:

(a) $\frac{d}{dx}(c) = 0$, donde c es cualquier constante.

(b) $(cf)'(x) = cf'(x)$.

(c) $(x^n)' = nx^{n-1}$.

14 Estudiar la derivabilidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} -(2x+1), & \text{si } x \leq -1 \\ x^2, & \text{si } -1 < x < 0 \\ \sin x, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

1.8.4. Continuidad y Derivabilidad

15 Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3}, & \text{si } x \neq 3 \\ 5, & \text{si } x = 3 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}, & \text{si } x \neq \pm 2 \\ 3, & \text{si } x = 2 \\ 4, & \text{si } x = -2 \end{cases}$

16 Encontrar los valores de a y b para los que la siguiente función es continua para todo x .

$$f(x) = \begin{cases} ax + 2b, & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 + 3a - b, & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ 3x - 5, & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

-
- 17** Estudiar la continuidad de las siguientes funciones

$$f(x) = \frac{x-2}{|x-2|}, \quad g(x) = \frac{x \sin x}{|x|} \quad \text{y} \quad h(x) = \cos \frac{1}{x}$$

- 18** Estudiar la continuidad de la función $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{1}{x}}}.$$

¿Se puede ampliar el dominio de f al punto $x = 0$ de manera que sea continua en $\mathbb{R}$?

1.8.5. Regla de la cadena

- 19** Aplica la regla de la cadena para calcular las derivadas de las siguientes funciones:

a) x^{-n} , $1/f(x)$.

c) $\frac{1}{\sqrt{f(x)}}$.

b) $f(x)^n$.

d) $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ en $x = 1$.

- 20** Un globo se infla de manera que su volumen aumenta a razón de $36 \pi \text{ cm}^3/\text{s}$. Halla la variación del radio cuando $R = 3 \text{ cm}$.

- 21** Calcula con detalle la derivada del arcoseno y el arcotangente.

- 22** Dos trenes salen de la misma estación con 3 h de diferencia. El primero se dirige hacia el norte con una velocidad de 100 km/h. El otro tren va en dirección este a 60 km/h. ¿A qué velocidad está cambiando la distancia entre los trenes 2 h después de la partida del segundo tren?

1.8.6. Derivación implícita

- 23** Calcula y' mediante derivación implícita:

(a) $x^2y + xy^2 = 6$

(b) $x^2(x-y)^2 = x^2 - y^2$

(c) $y^2 = \frac{x-1}{x+1}$

(d) $e^{x^2y} = 2x + 2y$

(e) $(3xy + 7)^2 = 6y$

(f) $x \cos(2x + 3y) = y \sin x$

- 24 En condiciones isotermas, la ley que gobierna la expansión de un gas relaciona la presión y la temperatura mediante la fórmula:

$$PV^{1,4} = C,$$

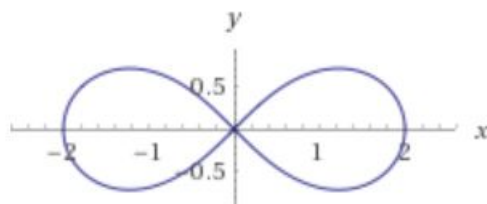
siendo C una constante. Si en cierto instante la presión es de 80 kPa, el volumen es de 400 cm^3 y, además, la presión descende a razón de 10 kPa/min, ¿cuál es la tasa de cambio del volumen en ese momento?

- 25 a) Encuentra los puntos de la curva $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 20$ en los que la recta tangente es paralela al eje de abscisas.
b) Encuentra la ecuación de la recta tangente a la curva $y^2 + x^2 = y^4 - 2x$ en el punto $(-2, 1)$.

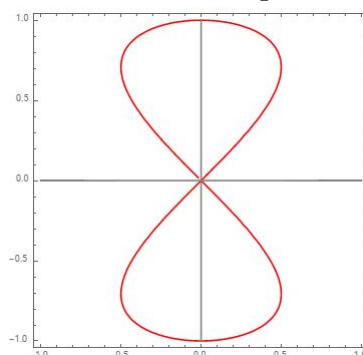
- 26 Encuentra las coordenadas de los 4 puntos para los que la curva lemniscata

$$(x^2 + y^2)^2 = 4(x^2 - y^2)$$

tiene tangente horizontal.

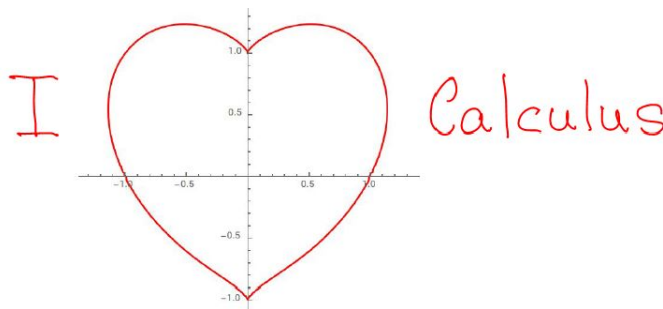


- 27 (Examen parcial 2019) La curva de la figura se define mediante la ecuación $y^2(1 - y^2) = x^2$. Calcula los puntos de la curva con tangente vertical.



- 28 Encuentra la ecuación de la recta tangente a la hipérbola $y^2 - x^2 = 1$ en un punto (u, v) de dicha curva.

- 29** (Examen enero 2020) Consideramos la curva corazón dada por la ecuación $x^2 + y^2 - 1 = x^{2/3}y$. Halla la ecuación de la recta tangente en los puntos con $x = \pm 1$.



1.8.7. La función exponencial

- 30** Encuentra el dominio y el rango de cada una de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = 1 + e^{-\sin x}$ (c) $f(x) = \log(\cos^{-1} x)$
(b) $f(x) = e^{1/x^2}$ (d) $f(x) = e^x + \log \sqrt{x}$

- 31** Usa la definición de logaritmo y de potencia generalizada para comprobar las siguientes propiedades: para $a, b \in (0, \infty)$ y $x, y \in \mathbb{R}$ se cumple:

a) $\log(xy) = \log x + \log y$. Además $\log(e) = 1$.
b) $(ab)^x = a^x b^x$
c) $a^{x+y} = a^x a^y$
d) $\log(a^x) = x \log a$
e) $a^{xy} = (a^x)^y$
f) Si $x < y$, entonces se cumple $\begin{cases} a^x < a^y, & \text{si } a > 1, \\ a^x > a^y, & \text{si } a < 1 \end{cases}$
g) Si $a < b$, entonces se cumple $\begin{cases} a^x < b^x, & \text{si } x > 0, \\ a^x > b^x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

- 32** Aplica la regla de la cadena para calcular las derivadas de las siguientes funciones:

a) $e^{f(x)}$ c) $f(x) = a^x$, con $a > 0$
b) $\log(x)$. d) $f(x) = x^a$, con $a \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$.
e) $\log_a x$.

-
- 33** Usa el teorema del sandwich para justificar que $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 e^{\sin \frac{1}{x}} = 0$ y para calcular razonadamente $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2(\sin x + \cos^3 x)}{(x^2 + 1)(x - 3)}$.
- 34** Calcula con detalle la derivada de la función inversa del cosh.

Tema 2

Campos numéricos

2.1. De los naturales a los complejos

Los números naturales sirven para contar y en ellos tienen completo sentido las operaciones de suma y multiplicación, es decir, se trata de operaciones internas: la suma o multiplicación de cualquier par de números naturales da como resultado otro número natural.

Sin embargo, el conjunto de los **números naturales** $\mathbb{N}$ se nos queda pequeño si queremos dar sentido a la resta de cualquier par de números. Es entonces cuando se introducen los **números enteros**:

$$\mathbb{Z} := \{x \in \mathbb{N} \text{ ó } x = 0 \text{ ó } -x \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-n \mid n \in \mathbb{N}\},$$

Dentro de los números reales las operaciones de suma y multiplicación deben verificar los siguientes axiomas (afirmaciones que se asumen sin demostración):

- Para todo $x, y \in \mathbb{R}$ se cumplen las **leyes conmutativas**:
$$\begin{cases} x + y = y + x \\ x \cdot y = y \cdot x \end{cases}.$$
- Para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$ se verifican las **leyes asociativas**:
$$\begin{cases} x + (y + z) = (x + y) + z \\ x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z \end{cases}.$$
- **Elemento neutro**: existen dos elementos distintos $0, 1 \in \mathbb{R}$ tales que
$$\begin{cases} x + 0 = x \\ x \cdot 1 = x \end{cases}$$
 para todo $x \in \mathbb{R}$.
- **Existencia de elemento opuesto/inverso**:
 - Dado cualquier $a \in \mathbb{R}$ existe un elemento $x \in \mathbb{R}$ tal que $a + x = 0$.
 - Si $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, entonces hay un $y \in \mathbb{R}$ con $b \cdot y = 1$.

- Para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$ se cumple la **ley distributiva**: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

El opuesto de a se denota como $-a$ y el inverso de $b \neq 0$ se escribe $\frac{1}{b}$ o bien b^{-1} . A partir de aquí se escribe:

$$a - b := a + (-b)$$

$$\frac{a}{b} := a \cdot \frac{1}{b} = a \cdot b^{-1} \quad \text{para } b \neq 0.$$

Por tanto, la resta no es más que sumar el opuesto y dividir es multiplicar por el inverso.

La división no es una operación interna dentro de los números enteros, es por ello que se introducen los **números racionales**:

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{p}{q}, \text{ con } p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}.$$

Cualquier número entero m se puede escribir en forma de fracción como $\frac{m}{1}$, por tanto, cada campo numérico que se define es una ampliación del anterior

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}.$$

Los números racionales, cuando se expresan en forma decimal, admiten una expresión finita o periódica. Pero existen números (como $\sqrt{2}, \pi, e, \dots$) con expresión decimal infinita no periódica, se trata de los **números irracionales**. Si juntamos todos los racionales e irracionales, obtenemos un conjunto completo, en el sentido de que cubre perfectamente la recta real sin dejar ningún hueco, se obtiene así el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$.

Pese a la completitud de los números reales y a que dentro de ellos se pueden efectuar las 4 operaciones aritméticas básicas, todavía se quedan cortos para la resolución de algunas ecuaciones algebraicas. En particular, la ecuación $x^2 = -1$ no tiene ninguna solución en $\mathbb{R}$. En este tema nos pararemos a estudiar los **números complejos**, que constituyen una ampliación de los reales para posibilitar el cálculo de raíces de números negativos.

2.2. Números naturales: razonamiento por inducción

Para abreviar sumas muy largas (o incluso de infinitos términos) se introduce el símbolo del sumatorio que se representa por la letra griega sigma mayúscula:

Definición 2.1: Notación Sigma/Sumatorio

Sean $m \leq n$ números enteros. Para todo número entero k con $m \leq k \leq n$, a_k representa un número real. Entonces se define

$$\sum_{k=m}^n a_k := a_m + a_{m+1} + \dots + a_n.$$

Para demostrar cualquier afirmación sobre los números naturales, no sería adecuado tener que probar que se cumple para cada uno de ellos (puesto que hay infinitos y no acabaríamos nunca). En lugar de eso, existe un procedimiento estándar (demostración por inducción) que nos permite realizar la comprobación en solo dos pasos:

Teorema 2.2: Razonamiento por inducción

Para cualquier $n \in \mathbb{N}$ sea A_n una afirmación sobre el número natural n . Si se cumple lo siguiente:

- A_n es cierta para $n = 1$.
- Para todo $n \in \mathbb{N}$ se comprueba: siempre que A_n sea cierta, se puede deducir que A_{n+1} también se verifica.

Entonces podemos concluir que A_n es cierta para todos los números naturales $n \in \mathbb{N}$.

Nota 2.3 El primer paso no necesariamente se hace para $n = 1$, en concreto, se refiere a comprobar que la propiedad se cumple con el primer número con el que tiene sentido. Por ejemplo, si queremos demostrar por inducción el número de diagonales de un polígono de n lados, lo lógico es empezar comprobando el caso $n = 3$ (triángulo).

La suposición “ A_n se cumple” se conoce como **hipótesis de inducción**. A partir de ella, se trata de comprobar que “de A_n se deduce A_{n+1} ”.

Ejemplo 2.4 (*Suma aritmética*) $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

La idea del razonamiento por inducción se usa para definir operaciones/rutinas que se pueden programar fácilmente en un ordenador, pues basta con dar una entrada ($n = 1$) y una regla de cálculo que permita calcular el siguiente paso conocido el valor del anterior. Estas definiciones se llaman **recursivas**; por ejemplo,

Definición 2.5: Potencias de exponente entero

- Para $x \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$ se define x^n la (**n -ésima potencia**) de manera inductiva como sigue:

$$\begin{cases} x^1 & := x \\ x^{n+1} & := x^n \cdot x, \text{ si } n \geq 2 \end{cases}$$

- Para $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y $n \in \mathbb{N}$, se tiene $x^{-n} := \left(\frac{1}{x}\right)^n$.

Aplicando lo anterior, se deduce la propiedad fundamental de las potencias:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad \text{para } a \in \mathbb{R} \text{ y } n, m \in \mathbb{N}.$$

A partir de aquí se obtiene que $a^0 = 1$, así como todas las propiedades de las potencias.

2.3. Los números reales

2.3.1. Racionales e irracionales

La propiedad que diferencia los números racionales de los enteros es su densidad dentro de la recta real, es decir, entre cualquier par de números racionales existen infinitos números racionales. En efecto, dados $p, q \in \mathbb{Q}$ con $p \neq q$, podemos asegurar que el punto medio entre ambos $\frac{p+q}{2} \in \mathbb{Q}$. Ahora calcularíamos el punto medio entre p y $\frac{p+q}{2}$ y así sucesivamente; este proceso se alargaría indefinidamente. Es más, se cumple una afirmación más general:

Teorema 2.6: Densidad de los racionales

Dados cualquier par de números reales $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, siempre existe un número racional $q \in \mathbb{Q}$ con $a < q < b$.

Aunque aparentemente los números racionales cubren toda la recta real sin dejar huecos (por la propiedad de densidad), la aparición del número inconmensurable $\sqrt{2}$ acaba con esta idea, pues se trata de un número irracional, esto es, que no se puede escribir como cociente de enteros.

Teorema 2.7: Raíz de 2 es irracional

La ecuación $x^2 = 2$ no tiene soluciones en $\mathbb{Q}$.

En definitiva, $\mathbb{Q}$ no es el conjunto adecuado para medir con exactitud. Para subsanar esto y además completar $\mathbb{Q}$, surge el conjunto de los números reales, que se obtiene al unir los racionales junto con los irracionales (aquellos números decimales infinitos no periódicos). Así, los números reales cubren toda la recta y forman un conjunto ordenado (dados cualquier par de números reales, existe una relación de orden entre ellos: o son iguales o uno es mayor que el otro), denso y completo.

2.3.2. Desigualdades

Dado que los números reales forman un conjunto ordenado, vamos a revisar las propiedades de las relaciones de orden o desigualdades.

Denotaremos por $\leq$ la relación de orden en los números reales y la llamaremos *menor o igual que*. Si dos números reales, $a, b \in \mathbb{R}$ verifican la relación $a \leq b$ pero $a \neq b$, entonces se escribe $a < b$ y se lee a (estrictamente) menor que b .

Teorema 2.8: Operar con desigualdades

- (1) $a < b$ implica que $a + c < b + c$ para cualquier $c \in \mathbb{R}$.
- (2) Si $a < b$, entonces se tiene que $\begin{cases} a \cdot c < b \cdot c, & \text{si } c > 0 \\ a \cdot c > b \cdot c, & \text{si } c < 0 \end{cases}$
- (3) De $a > b$ y $c > d$ se sigue $\begin{cases} a + c > b + d, \\ a \cdot c > b \cdot d, \end{cases}$ si $b, d > 0$
- (4) Si $a > b > 0$, entonces se cumple $0 < \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

Además, para todo número real $x \neq 0$ se tiene que $x^2 > 0$. Si sumamos 1 a ambos lados de la desigualdad, se deduce que $x^2 + 1 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Por tanto, la ecuación $x^2 = -1$ no puede tener solución dentro del conjunto de los números reales. Es por ello que debemos permitir una nueva ampliación del campo numérico para ser capaces de calcular raíces de números negativos.

2.4. Números complejos

Fueron durante muchos años motivo de controversia en la comunidad matemática. Poco a poco, por la creciente evidencia de su utilidad, acabaron por ser aceptados. En ingeniería, destaca su aplicación en *tecnología eléctrica*.

2.4.1. Motivación y definición

Ejemplo 2.9 *Supongamos que tenemos un objeto de masa m unido a un muelle elástico. Dicho muelle cumplirá:*

Ley de Hooke: *Un muelle ejerce una fuerza sobre la partícula de masa m que es proporcional al desplazamiento x y de sentido contrario.*

*Si combinamos tal afirmación con la **segunda Ley de Newton**, llegamos a*

$$x''(t) = c \cdot x(t), \quad \text{donde} \quad c = -k/m \quad (2.1)$$

siendo $k > 0$ una constante que representa la resistencia del muelle.

La igualdad (2.1) es una ecuación diferencial y podemos comprobar que $x(t) = e^{\sqrt{c}t}$ es solución. Sin embargo, para que dicha expresión tenga sentido, necesitamos poder calcular raíces de números negativos.

Este mismo objetivo lo podemos expresar de manera más sencilla: buscamos resolver la ecuación $x^2 = -1$, que claramente no tiene solución en $\mathbb{R}$ porque todo número real elevado

al cuadrado es mayor o igual que 0. Por tanto, como no existe ningún número real con la característica que nos interesa, tenemos que ampliar nuestro *universo numérico*.

Definición 2.10: Unidad imaginaria

i se define como la solución de la ecuación $x^2 = -1$.

A partir de la definición anterior, podemos resolver cualquier ecuación de la forma $x^2 = -n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. En efecto, bastaría tomar $x = \pm\sqrt{n}i$.

Esto lo podemos generalizar y definir el conjunto de los números complejos, que son una extensión de los números reales que permiten calcular raíces de números negativos.

Definición 2.11: El conjunto de los números complejos

$$\mathbb{C} = \{z = a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}, \quad \text{con } i^2 = -1.$$

- el número real a se llama **parte real** de z y se escribe $a = \text{Re}(z)$.
- el número real b se llama **parte imaginaria** de z y se escribe $b = \text{Im}(z)$.
- Los elementos del conjunto $\mathbb{C}$ se llaman **números complejos**.

Los números reales están incluidos dentro de los enteros porque todo número real x se puede escribir de la forma $x + i0 \in \mathbb{C}$.

Tradicionalmente, las letras z y w se usan para denotar números complejos.

2.4.2. Operaciones y visualización en el plano

Partiendo de la definición de la unidad imaginaria i , identificamos la multiplicación por i con rotaciones de 90° , con lo que solo existen cuatro posibles resultados para cualquier potencia de i :

$$i^k = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 4n \\ i & \text{si } k = 4n + 1 \\ -1 & \text{si } k = 4n + 2 \\ -i & \text{si } k = 4n + 3 \end{cases}.$$

La suma y la multiplicación de números complejos cumple las mismas propiedades que en los números reales, usando además la definición de i :

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(c + d),$$

$$(a + ib) \cdot (c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc).$$

Interpretación geométrica de $\mathbb{C}$:

Como todo número complejo se especifica si conocemos dos números reales (su parte real e imaginaria), podemos visualizar cualquier número complejo $z = a + ib$ (con $a, b \in \mathbb{R}$) dibujando un punto (a, b) en el plano coordenado. Así, tendremos:

- Los números reales se sitúan en el eje horizontal (**eje real**).
- Los números de la forma ib , con $b \in \mathbb{R}$ forman el eje vertical (**eje imaginario**).

Como necesitamos dos dimensiones para representar los números complejos (a diferencia de los reales que *caben* en una recta), $\mathbb{C}$ es un **conjunto no ordenado**, es decir, no tiene sentido preguntarse si un número complejo es mayor o menor que otro, ni hablar de complejos positivos o negativos.

La distancia de z al origen $0 \in \mathbb{C}$ y la reflexión de z respecto del eje real tienen nombre propio:

Definición 2.12: Conjugado y módulo

- (a) Si $z = a + ib \in \mathbb{C}$ es un número complejo, se dice que $\bar{z} := a - ib$ es el **conjugado** de z .
- (b) El **módulo** o valor absoluto de z es el número real $|z| := \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$.

Para dividir números complejos, usamos siempre el mismo truco: multiplicar el numerador y el denominador por el conjugado del denominador. A continuación, incluimos listas con las principales propiedades operativas tanto del módulo como del conjugado de un número complejo.

Lema 2.13: Propiedades del conjugado

1. $\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$ y $\operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$.
2. $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = z$.
3. $\bar{\bar{z}} = z$.
4. $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$ y $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$.
5. $z \cdot \bar{z} = |z|^2$.

Lema 2.14: Propiedades del módulo

1. $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$ und $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$.
2. $|z| \geq 0$, y $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.
3. $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$.
4. $|z + w| \leq |z| + |w|$ (Desigualdad triangular).

2.4.3. Forma trigonométrica y polar

Definición 2.15: Argumento

Para todo número complejo z , si $\theta \in \mathbb{R}$ mide el ángulo con el eje real, se cumple que

$$z = |z| \cdot (\cos \theta + i \sin \theta). \quad (2.2)$$

Decimos entonces que θ es un argumento de z , pues cualquier otro ángulo de la forma $\theta + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, también satisface la igualdad anterior.

θ se llama **argumento (principal)** de z y se escribe $\theta = \arg(z)$ si verifica (2.2) y, además, $\theta \in [0, 2\pi)$.

La expresión (2.2) se conoce como **forma trigonométrica** del número complejo z , mientras que $z = a + bi$ es la **forma binómica**. Dichas expresiones están relacionadas:

$$a = |z| \cos \theta \quad y \quad b = |z| \sin \theta.$$

Además, si $a \neq 0$, se tiene que $\theta = \tan(b/a)$.

Lema 2.16: Multiplicación en forma trigonométrica

Para multiplicar dos números complejos z y w , se multiplican los módulos y se suman los argumentos:

$$|z \cdot w| = |z| \cdot |w| \quad y \quad \arg(z \cdot w) = \arg(z) + \arg(w).$$

Iterando lo anterior, obtenemos la manera de calcular potencias de números complejos:

Proposición 2.17: Fórmula de Moivre

Para todo número entero n y todo complejo z de la forma (2.2), se tiene

$$z^n = |z|^n \cdot (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)).$$

En lugar de escribir cada vez $\cos \theta + i \sin \theta$, esto se suele abreviar y escribimos simplemente $e^{i\theta}$. Así, si un número complejo z tiene módulo $r = |z|$ y argumento θ , ponemos

$$z = re^{i\theta} \quad (\text{forma polar}).$$

Con esta notación, podemos expresar la fórmula de Moivre de manera mucho más compacta

$$(re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}.$$

2.4.4. La exponencial compleja

La expresión de un número complejo en forma polar está estrechamente relacionada con la noción de función exponencial.

Definición 2.18: Fórmula de Euler

La exponencial de un número imaginario puro se define como

$$e^{it} = \cos t + i \sin t,$$

donde $t \in \mathbb{R}$. Se trata por tanto de un número complejo de módulo 1 (está sobre la circunferencia unidad) y argumento t .

En particular, si $t = \pi$, obtenemos una de las fórmulas más famosas en matemáticas:

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Dado que para multiplicar dos números complejos se suman los argumentos (ver Lema 2.16), se deduce que la exponencial compleja cumple la propiedad fundamental por la que merece el nombre de *exponencial*:

$$e^{it} \cdot e^{is} = e^{i(t+s)}.$$

Por otro lado, las funciones trigonométricas clásicas se pueden reescribir usando exponenciales complejas y esta es de hecho la manera más sencilla de comprobar las fórmulas de las derivadas de $\sin$ y $\cos$. En concreto, se tiene que

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \quad \text{y} \quad \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2}.$$

Hasta ahora solo hemos definido la exponencial para números imaginarios puros, pero se puede dar sentido a la exponencial de cualquier número complejo como sigue:

Definición 2.19: Exponencial compleja

La exponencial de un número complejo $z = a + bi$ viene dada por

$$e^z = e^a e^{bi}.$$

Notemos que así definida la exponencial compleja no es inyectiva (a diferencia de lo que sucede con la exponencial definida sobre números reales), ya que $e^z = e^{z+2k\pi i}$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.

2.4.5. Raíces complejas

Dado el número complejo $z = re^{i\theta}$ (distinto de cero) y $n \in \mathbb{N}$, busquemos un número complejo ω verificando que $\omega^n = z$. Dicho problema no tiene solución única, sino que dado un número complejo existen n raíces n -ésimas:

Proposición 2.20: Raíces n -ésimas de un complejo

Dado $n \in \mathbb{N}$ y $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}$, los números complejos de la forma

$$z_k = r^{1/n} e^{i \frac{\theta + 2k\pi}{n}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

cumplen que $(z_k)^n = z$. Decimos entonces que cada z_k es una raíz n -ésima de z .

Geoméricamente los puntos z_k sobre el plano complejo forman los vértices de un polígono regular de n -lados inscrito en la circunferencia de radio $r^{1/n}$.

2.5. Valor absoluto

Dados dos puntos del plano $p, q \in \mathbb{R}$ se define el valor absoluto o módulo de $p - q$ como la distancia entre p y q o la longitud del vector $p - q$. Así, si $p = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ se tiene que

$$|p| = |p - 0| = \text{distancia de } p \text{ al origen} = \sqrt{a^2 + b^2},$$

lo que coincide con la definición del módulo del complejo $a + ib$.

Para adaptar esta noción a los números reales, identificamos $a \in \mathbb{R}$ con el par $(a, 0) \in \mathbb{R}^2$. Así, haciendo $b = 0$ en la fórmula anterior, llegamos a

Definición 2.21: Valor absoluto

Para $a \in \mathbb{R}$ se define el **valor absoluto** $|a| \in \mathbb{R}$ como

$$|a| = \sqrt{a^2} = \begin{cases} a, & \text{si } a \geq 0, \\ -a, & \text{si } a < 0 \end{cases}.$$

Teniendo en mente la idea de que los valores absolutos representan distancias, las propiedades que siguen resultan prácticamente obvias:

Lema 2.22: Propiedades del valor absoluto

Para cualquier par a, b de números reales, se verifica:

- (1) $|a| \geq 0$ y $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$.
- (2) $|-a| = |a|$ y $a \leq |a|$.
- (3) $|x - a| \leq k$ si y solo si $a - k \leq x \leq a + k$.
- (4) $|x - a| \geq k$ si y solo si $x \leq a - k$ ó $x \geq a + k$.
- (5) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$.
- (6) $|a + b| \leq |a| + |b|$ (**desigualdad triangular**)

2.6. Ejercicios

2.6.1. Razonamiento por inducción

- ① (Exámenes varios 2019/20) Demuestra por inducción las siguientes propiedades:

- a) $\sum_{i=0}^{n-1} 2^i = 2^n - 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- b) $\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$.
- c) $n! < n^{n-1}$ para todo número natural $n \geq 3$.
- d) $2^n \leq n!$ para todo número natural $n \geq 4$.

- ② Demuestra las siguientes afirmaciones, razonando por inducción:

- a) (**Suma geométrica**) Sea $r \in \mathbb{R}$, $r \neq 1$. Entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ se satisface la igualdad

$$1 + r + \dots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

- b) $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

- c) (**Desigualdad de Bernoulli**) Sea $x \geq -1$. Entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple la desigualdad $(1+x)^n \geq 1+nx$.

- ③ Prueba que $n^3 - n$ es múltiplo de 3 para todo $n \in \mathbb{N}$.

- ④ Comprueba, razonando por inducción:

- a) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 + k} = \frac{n}{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

- b) $\frac{1}{3}(n^3 + 2n) \in \mathbb{Z}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

- c) $2^{n+4} > (n+4)^2$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

2.6.2. Números irracionales y desigualdades

- ⑤
- a) Demuestra que $\sqrt{2}$ es un número irracional.
 - b) Prueba que no existe ningún número racional cuyo cubo es 24.
 - c) Comprueba que $\sqrt{3} + \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

6 (Prueba EC 2019) Demuestra que $\log_{10} 5$ es irracional.

7 Resuelve las siguientes desigualdades y dibuja en la recta real las soluciones:

(a) $3x + 1 > 2x + 2$

(b) $x > \frac{1}{x}$

(c) $\frac{x^2 - 1}{x + 3} \geq 0$

8 Acota la función $\frac{2x+1}{1-3x}$ en el intervalo $(1, 4)$.

9 Encuentra todos los números reales x que cumplen las siguientes desigualdades

a) $\frac{2x-3}{x+2} < \frac{1}{3}$.

b) $|2x-1| \leq |x-3|$.

c) $||x-1| - |x+1|| \leq 1$.

10 Comprueba que para todo $x \in \mathbb{R}$ se cumple

$$\left| \frac{1}{x^2 + 4} + \frac{1}{|x| + 3} \right| \leq \frac{7}{12}.$$

11 Tenemos un circuito eléctrico con dos resistencias en paralelo R_1 y R_2 . La resistencia total del circuito se mide en ohmios y se calcula como sigue:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Las resistencias R_1 y R_2 son variables: R_1 puede oscilar entre 3 y 10 ohmios y R_2 varía de 15 a 25 ohmios. Encuentra la gama de valores que puede tomar la resistencia R .

2.6.3. Números complejos

12 a) (Examen parcial 2019) Calcula razonadamente $z = (1+i)^{16} e^{-i\pi/2} i^{44444445}$.

b) (Examen enero 2020) Calcula razonadamente $z = (1-i)^{32} e^{i3\pi/2} i^{88888888888888887}$.

13 Calcula la parte real e imaginaria de los siguientes números complejos:

$$(1+i)^4 \quad \frac{3+5i}{7-2i} \quad \left(\frac{1+i}{1-i} \right)^k, k \in \mathbb{Z}$$

14 Demuestra las siguientes propiedades de los números conjugados:

- a) $\operatorname{Re}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$ y $\operatorname{Im}(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$.
- b) $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = z$.
- c) $\bar{\bar{z}} = z$.
- d) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ y $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$.
- e) $z \cdot \bar{z} = |z|^2$.

15 Demuestra que el módulo de un número complejo satisface las siguientes propiedades:

- a) $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$ y $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$.
- b) $|z| \geq 0$, y $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.
- c) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$.
- d) $|z + w| \leq |z| + |w|$ (Desigualdad triangular).

- 16** a) Calcula y simplifica: $\left| \frac{(2 + i\sqrt{5})(1 + i\sqrt{3})^3}{\sqrt{5} + i\sqrt{3}} \right|$.
- b) Dibuja en el plano complejo las regiones de puntos que se pueden describir mediante cada una de las siguientes propiedades:

$$z + \bar{z} = 1; \quad z - \bar{z} = 1; \quad z \cdot \bar{z} = 1; \quad |z - \bar{z}| < 1; \quad |z - 1| < 1.$$

- c) Determina todos los números complejos $z \in \mathbb{C}$ para los cuales se tiene que $\omega = \frac{z - 1 - i}{z + 1 + i}$

(c-1) es un número real; (c-2) tiene módulo 1.

- 17** a) Calcula las soluciones de la ecuación $z^4 = -16$ y exprésalas en forma $(x + iy)$.
Dibuja las soluciones en el plano complejo.
- b) Dibuja los conjuntos

$$\{z \in \mathbb{C} : z = 1 + \alpha + \alpha i, -1 \leq \alpha \leq 2\} \quad \text{y} \quad \{z \in \mathbb{C} : z = 3 + 4i + 5e^{2\alpha i}, 0 \leq \alpha \leq \frac{3\pi}{4}\}.$$

- 18** a) Prueba: $8 \cos^4 \varphi = \cos(4\varphi) + 4 \cos(2\varphi) + 3$.
- b) Calcula: $2^{-1000000} \left(\frac{5 + 3\sqrt{3}i}{4} - \frac{1}{1 + \sqrt{3}i} \right)^{999999}$.
- c) **(Prueba EC 2019)** Calcula: $(1,5)^{222222} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}i} \right)^{444444}$. Expresa el resultado en la forma $a + ib$.

19 Expresa en forma polar los siguientes números complejos:

- (a) $w_1 = 1$ y $w_2 = i$
- (b) $w = 1 - i$ y $w = (1 - \sqrt{3}i)$
- (c) $w = 4(1 + i)^4$
- (d) $w = \frac{2+2i}{i}$

20 Calcula $|1 + z|^2 + |1 - z|^2$, si $z \in \mathbb{C}$ y $|z| = 1$.

21 Sean z_1 y z_2 dos números complejos distintos tales que

$$r = \frac{(z_1 + z_2)i}{z_1 - z_2}.$$

Halla la relación que deben cumplir z_1 y z_2 para que r sea un número real.

22 Expresa en forma binómica los siguientes números complejos:

- (a) $z = \sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{4}i}$
- (b) $(4 + 3i)^2$
- (c) $\frac{3 + 2i}{3 - 2i}$
- (d) $\left(\frac{1 + i}{\sqrt{2}}\right)^4$
- (e) e^{1-i}

23 Hallar los números complejos z tales que $z^6 - 9z^3 + 8 = 0$.

24 Determinar los números complejos no nulos z tales que su cuadrado es igual a su conjugado.

Tema 3

Aplicaciones de la derivada

3.1. Monotonía, puntos extremos y críticos

3.1.1. Definiciones básicas

Un problema central dentro del cálculo matemático es deducir propiedades de las funciones a partir del conocimiento de propiedades de su derivada. Para abordar este tema, necesitamos definiciones básicas para explicar el comportamiento de una función (crecimiento o decrecimiento) y detectar cambios de tendencia (extremos relativos).

Definición 3.1: Funciones crecientes/decrecientes

Sea I un intervalo cualquiera. Una función $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ se denomina

- **(monótona) creciente**, si para todo $x, y \in I$ se tiene: $x > y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$,
- **estrictamente creciente**, si para todo $x, y \in I$ se cumple: $x > y \Rightarrow f(x) > f(y)$,
- **(monótona) decreciente**, si para todo $x, y \in I$ se verifica: $x > y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$,
- **estrictamente decreciente**, si para todo $x, y \in I$ se da: $x > y \Rightarrow f(x) < f(y)$.

Ahora nos fijamos en puntos en los que la función pasa de crecer a decrecer, o viceversa:

Definición 3.2: Extremos relativos

Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función y $a \in I$.

- f tiene en el punto $a \in I$ un **máximo relativo**, si existe un intervalo $J \subset I$ donde se cumple: $f(x) \leq f(a)$ para todo $x \in J$.
- f tiene en el punto $a \in I$ un **mínimo relativo**, si existe un intervalo $J \subset I$ donde se cumple: $f(x) \geq f(a)$ para todo $x \in J$.

Cualquiera de las dos situaciones anteriores se expresa diciendo que f tiene un **extremo relativo** en a .

El intervalo J mencionado en la definición será de la forma $(a-r, a+r)$ para algún $r > 0$. Notemos que implícitamente cuando hablamos de un extremo relativo nos referimos a un punto interior del intervalo.

La noción de extremo relativo se fija solo en lo que sucede en las proximidades del punto en cuestión, si buscamos globalmente en qué puntos alcanzan las cotas más altas o bajas en cuanto a valores de la función, llegamos a:

Definición 3.3: Extremos relativos

Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función y $a \in I$.

- f tiene en el punto $a \in I$ un **máximo absoluto**, si $f(x) \leq f(a)$ para todo $x \in I$.
- f tiene en el punto $a \in I$ un **mínimo absoluto**, si $f(x) \geq f(a)$ para todo $x \in I$.

Cualquiera de las dos situaciones anteriores se expresa diciendo que f tiene un **extremo absoluto** en a .

En cualquiera de las situaciones de las definiciones anteriores, el número real $f(a)$ se denomina **valor extremo** de f , mientras que a es un **punto extremo**.

3.1.2. Condición necesaria de extremo

Una condición necesaria (pero no suficiente) para que un punto interior sea un extremo relativo viene dada por el siguiente resultado:

Teorema 3.4: Teorema de Fermat

Sei $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ y $a \in I$. Si f alcanza en a un extremo local y f es diferenciable en a , entonces se verifica $f'(a) = 0$.

Por la definición de extremo relativo, el teorema anterior se refiere a puntos a en el interior del intervalo. Es necesaria la hipótesis de que la función sea diferenciable en a , pues existen funciones con extremos relativos en puntos donde la función no es derivable (por ejemplo, la función valor absoluto tiene un mínimo en $x = 0$ pero no es derivable en ese punto).

Los puntos en los que la derivada se anula tienen un significado específico por lo que también merecen un nombre propio:

Definición 3.5: Puntos críticos y de inflexión

- Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable en a y con $f'(a) = 0$, entonces se dice que a es un **punto crítico** o **estacionario** de la función f .
- Un punto crítico que no es un extremo local se denomina **punto de inflexión**.

Así, podemos interpretar el teorema de Fermat como la afirmación de que un punto extremo de una función diferenciable es necesariamente un punto crítico. Sin embargo, la

implicación contraria no es cierta: un punto crítico no tiene por qué ser un extremo (por ejemplo, la función $f(x) = x^3$ tiene un punto crítico en $x = 0$, pero ese punto no es un extremo porque la función no cambia de tendencia, es siempre creciente).

Desde el punto de vista geométrico, la gráfica de f tiene tangente horizontal en todo punto crítico.

3.2. Teoremas de continuidad y derivabilidad

Vamos a pararnos a analizar las propiedades especiales que cumplen las funciones continuas y/o derivables cuyo dominio es un intervalo cerrado.

3.2.1. Funciones continuas en intervalos cerrados

Los enunciados que veremos a continuación tienen la ventaja de que podemos entenderlos gráficamente, por lo que nos centraremos en sus aplicaciones.

El primer resultado nos dice que toda función continua definida en un intervalo cerrado alcanza los valores máximo y mínimo absoluto.

Teorema 3.6: Teorema del Máximo y Mínimo

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, entonces f alcanza un máximo y un mínimo absolutos. Con más precisión, existen puntos $c, d \in [a, b]$, tales que para todo $x \in [a, b]$ se cumple:

$$f(c) \leq f(x) \leq f(d).$$

El siguiente teorema nos sirve para averiguar si una ecuación de la forma $f(x) = 0$, donde f es cualquier función continua, tiene al menos una solución en un intervalo dado:

Teorema 3.7: Teorema de Bolzano

Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua y $f(a) \cdot f(b) < 0$, entonces f tiene en (a, b) al menos un cero (es decir, existe un punto $c \in (a, b)$ con $f(c) = 0$).

Gráficamente, lo anterior significa que si hay un cambio de signo entre $f(a)$ y $f(b)$ entonces la gráfica de f debe cruzar el eje x al menos una vez en intervalo (a, b) . Como aplicación, el teorema de Bolzano garantiza que todo polinomio de grado impar tiene al menos una solución real.

Este enunciado se puede generalizar como sigue:

Teorema 3.8: Teorema del valor intermedio (TVI)

Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Entonces se alcanza todo valor entre $f(a)$ y $f(b)$, por tanto, para todo número real y entre $f(a)$ y $f(b)$ existe al menos un punto $c \in (a, b)$ con $f(c) = y$.

Geoméricamente, esto significa que si f es continua y definida en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces para cualquier número real h con $f(a) < h < f(b)$, la gráfica de f debe cortar la línea horizontal $y = h$ al menos una vez en el intervalo abierto (a, b) .

3.2.2. Teoremas para funciones derivables

Empezamos con un teorema que nos garantiza la existencia de un punto crítico (y, por tanto, de tangente horizontal) si los valores de la función coinciden en los extremos del intervalo. Con más precisión,

Teorema 3.9: Teorema de Rolle

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y además diferenciable en (a, b) . Si $f(a) = f(b)$, entonces existe un $c \in (a, b)$ con $f'(c) = 0$.

En el resultado anterior parece tentador suponer simplemente que f sea diferenciable (y, por tanto, continua) en todo el intervalo $[a, b]$. Sin embargo, esto eliminaría ciertas funciones, por ejemplo, $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ no es diferenciable en $x = 0$. Si solo pedimos diferenciable en el interior del intervalo, conseguimos que el teorema sea aplicable a un mayor número de funciones.

Teorema 3.10: Teorema del Valor Medio (TVM)

Dados $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, consideramos una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b) . Entonces existe un $c \in (a, b)$ con

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Tratemos de entender la igualdad que acabamos de escribir: el lado derecho es la pendiente de la recta secante que corta a la gráfica de f en los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$; a su vez, el lado izquierdo representa la pendiente de la recta tangente en el punto $(c, f(c))$. En definitiva, el TVM afirma que, si recorremos la gráfica de f entre $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$, encontraremos un punto donde la recta tangente es paralela a la secante antes mencionada.

Cabe resaltar que el TVM es un resultado que garantiza solamente la existencia, es decir, ni nos dice cuántos puntos hay ni dónde encontrarlos dentro del intervalo (a, b) . El teorema de Rolle es un caso particular del teorema del valor medio, pues si $f(b) = f(a)$ se tiene que $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$. Por otra parte, el TVM lo hemos demostrado usando el teorema de Rolle; en consecuencia, ambos resultados son equivalentes.

3.2.3. Aplicaciones del Teorema del Valor Medio

Tras los teoremas anteriores estamos en condiciones de traducir información conocida sobre el signo de la derivada en consecuencias acerca de la monotonía de la función, aunque no conozcamos la expresión explícita de dicha función:

Corolario 3.11: Criterio de monotonía

Sea $a < b$ y $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b) . Entonces se cumple:

- (1) $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b) \Leftrightarrow f$ es constante.
- (2) $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in (a, b) \Leftrightarrow f$ es monótona creciente.
- (3) $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b) \Rightarrow f$ es estrictamente creciente.
- (4) $f'(x) \leq 0$ para todo $x \in (a, b) \Leftrightarrow f$ es monótona decreciente.
- (5) $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a, b) \Rightarrow f$ es estrictamente decreciente.

Notemos que en (3) y (5) no se cumplen las implicaciones recíprocas. En efecto, la función $f(x) = x^3$ es estrictamente creciente, pero $f'(0) = 0$.

Este criterio nos sirve para encontrar subintervalos en los que una función crece o decrece, siguiendo los pasos descritos a continuación:

- Resolver la ecuación $f'(x) = 0$ para hallar los puntos críticos de f .
- Colocamos dichos puntos críticos sobre la recta real y determinamos el signo de f' en un valor de prueba en cada uno de los subintervalos en que los puntos críticos dividen a la recta real.
- Aplicamos el criterio de monotonía para decidir si f es creciente o decreciente en cada subintervalo.
- Los extremos relativos serán aquellos puntos críticos donde detectemos un cambio de tendencia.

3.3. Derivadas de orden superior

3.3.1. Derivada n-ésima de una función

Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en I , entonces podemos definir la función derivada $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$. Esta función no es necesariamente derivable, ni siquiera continua. En el caso de que f' sea de nuevo diferenciable en I , entonces decimos que f es 2 veces diferenciable y se escribe:

$$f''(x) := (f')'(x).$$

Si iteramos este proceso, llegamos a

Definición 3.12: Derivadas de orden superior

Se define la **derivada n -ésima** $f^{(n)} : I \rightarrow \mathbb{R}$ de manera recursiva como sigue:

$$f^{(0)} := f \quad \text{y} \quad f^{(n)} := (f^{(n-1)})' \quad \text{para } n \in \mathbb{N}.$$

Notaciones especiales: f' , f'' , f''' en lugar de $f^{(1)}$, $f^{(2)}$ y $f^{(3)}$, respectivamente.

Otras maneras habituales de representar las derivadas n -ésimas son $\partial^n f$, o bien $D^n f$.

Definición 3.13: Derivadas de orden superior

Se dice que una función f es **n -veces diferenciable** cuando existen las derivadas hasta orden n : $f, f', \dots, f^{(n)}$.

3.3.2. Derivada segunda y concavidad

La segunda derivada de una función nos da información acerca de su curvatura. Efectivamente, si tenemos un movimiento no acelerado, la trayectoria es recta; para que el movimiento se produzca sobre una curva la velocidad no puede ser constante, es decir, la aceleración (segunda derivada de la trayectoria) tiene que ser no nula.

Definición 3.14: Concavidad

Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable.

- f se dice **cóncava hacia arriba** si la derivada f' es una función creciente en I .
- f es **cóncava hacia abajo** si la derivada f' es una función decreciente en I .

Una función cóncava hacia arriba se curva hacia arriba como indica su nombre, siendo el ejemplo típico la parábola $y = x^2$, cuyas tangentes tienen pendiente $y' = 2x$ (que es una función creciente). No existe un acuerdo unánime sobre cuál de las dos opciones se denomina **convexa**, por eso mantenemos la nomenclatura anterior por considerar que lleva a menos equívocos.

Usando el criterio de monotonía, podemos traducir las propiedades sobre el crecimiento de f' en afirmaciones sobre el signo de f'' :

Corolario 3.15: Test de concavidad

Supongamos que f es dos veces diferenciable en un intervalo abierto I .

- Si $f'' \geq 0$ para todo $x \in I \Leftrightarrow f$ es cóncava hacia arriba en I .
- Si $f'' \leq 0$ para todo $x \in I \Leftrightarrow f$ es cóncava hacia abajo en I .

Para reconocer fácilmente la concavidad mirando la gráfica de una función, resulta útil la siguiente interpretación geométrica:

- f cóncava hacia arriba: el segmento que une cualquier par de puntos de la gráfica de f se sitúa por encima de dicha gráfica.
- f cóncava hacia abajo: el segmento que une cualquier par de puntos de la gráfica de f se sitúa por debajo de dicha gráfica.

Una interpretación alternativa es que si la función es cóncava hacia arriba, entonces las tangentes en cada punto están por debajo de la gráfica de f , mientras que si es cóncava hacia abajo, las tangentes son rectas por encima de la gráfica de f .

3.3.3. Polinomio de Taylor

Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función cualquiera y $a \in I$. Nos planteamos el objetivo de calcular $f(x)$ para valores de x cercanos al punto a . Notemos que esto ya lo hemos hecho anteriormente:

- Si f es continua en a , $f(x)$ está cerca de $f(a)$ (y el error de la aproximación tiende a 0 cuando $x \rightarrow a$).
- Si f es diferenciable en a (de acuerdo con la Proposición 1.24): $f(x)$ es aproximadamente $f(a) + f'(a)(x - a)$, donde el error de la aproximación partido por $x - a$ tiende a cero cuando $x \rightarrow a$ (*aproximación lineal o de primer orden*).

¿Podemos continuar esta lógica? En concreto, nos preguntamos si, pidiendo que la función tenga más derivadas en a , conseguiremos aproximaciones con un error cada vez más pequeño. Para responder a esta pregunta, tomamos $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in I$ y $n \in \mathbb{N}$.

- Buscamos si existen números $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, tales que el polinomio de grado n

$$T_n(x) = a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2 + a_3(x - a)^3 + \dots + a_n(x - a)^n$$

cumpla:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{|f(x) - T(x)|}{|x - a|^n} = 0.$$

- Para que se verifique la propiedad anterior (que supone una mejora del error respecto a lo que sucede con la recta tangente) no nos servirá cualquier polinomio, por tanto, hemos de encontrar qué coeficientes a_i concretos cumplen dicha propiedad.

- Una vez encontrado el polinomio, la siguiente tarea será hallar una manera eficiente de estimar cómo de grande puede ser (en el peor de los casos) el error de la aproximación.

¿Cómo podemos obtener una fórmula que nos permita calcular los coeficientes a_i ? Comparando con la ecuación de la recta tangente, ya sabemos que $a_0 = f(a)$ y $a_1 = f'(a)$.

Recordemos que la recta tangente tiene el mismo valor y la misma pendiente que f en el punto de tangencia $x = a$. Siguiendo esta lógica, pediremos que el polinomio buscado y sus derivadas hasta orden n coincidan con f y sus derivadas en el punto $x = a$, es decir, queremos que se cumpla

$$f^{(k)}(a) = T^{(k)}(a) \quad \text{para todo} \quad 0 \leq k \leq n. \quad (3.1)$$

Las derivadas sucesivas de un polinomio son fáciles de calcular:

$$T^{(k)}(a) = k! a_k.$$

Sustituyendo en (3.1) y despejando el valor del coeficiente a_k , llegamos a

$$a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}.$$

Este argumento motiva la siguiente definición.

Definición 3.16: Polinomio de Taylor

Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in I$, $n \in \mathbb{N}$. Si f es n -veces diferenciable en I , entonces el **polinomio de Taylor** de grado n de f alrededor de a se define como:

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n.$$

Si queremos especificar el punto alrededor del cual se calcula la aproximación y de qué función se trata, utilizaremos la notación más completa $T_n[f, a](x)$, en lugar de simplemente $T_n(x)$. El polinomio de Taylor para el caso particular de $a = 0$ también se llama **polinomio de McLaurin**.

Una vez claro cómo encontrar el polinomio que aproxima a una función f cerca de un punto a de su dominio, resulta fundamental ser capaces de averiguar cómo de buena es la aproximación encontrada, esto es, cómo de grande es el error cometido si hacemos cálculos con el polinomio en lugar de con la función.

Definición 3.17: Resto de Taylor

La diferencia entre la función f y su n -ésimo polinomio de Taylor alrededor de a , es decir,

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x)$$

se llama resto de Taylor de orden n de la función f cerca de a .

Así pues, el error de la aproximación vendrá dado por $|R_n(x)|$. El siguiente resultado, cuya demostración es una aplicación algo más sofisticada del teorema del valor medio (ver Teorema 3.10), nos da la forma práctica de calcular dicho error.

Teorema 3.18: Fórmula del resto de Taylor

Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ $(n + 1)$ -veces diferenciable en I . Entonces para todo $a, x \in I$ con $a \neq x$ existe un t entre a y x con

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}.$$

Notemos que la fórmula anterior indica que el error aumenta si x se aleja de a y disminuye cuanto mayor sea el grado del polinomio usado en la aproximación. En cualquier caso, el resto de Taylor tiende a cero más rápido que $(x-a)^n$ cuando nos acercamos al punto a . Con más precisión,

Corolario 3.19: Resto de Taylor tiende a 0

Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in I$, $n \in \mathbb{N}$. Si f es $(n + 1)$ -veces diferenciable en I , entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

3.3.4. Extremos relativos: test de la segunda derivada

Como aplicación del polinomio de Taylor encontramos la siguiente relación entre derivadas de orden superior y extremos relativos:

Teorema 3.20: Extremos según el signo de la n -ésima derivada

Dada una función $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ sobre un intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Sea a un punto interior de I , f n -veces diferenciable en I , donde $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$. Además, suponemos que $f^{(n)}$ es continua en a y que $f'(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0$, pero $f^{(n)}(a) \neq 0$. Entonces se tiene:

- Cuando n es par:
 - Si $f^{(n)}(a) < 0$, entonces f tiene en a un máximo relativo.
 - Si $f^{(n)}(a) > 0$, entonces f tiene en a un mínimo relativo.
- Cuando n es impar: a es un punto de inflexión de f .

Si usamos este resultado para $n = 2$ obtenemos inmediatamente la siguiente consecuencia.

Corolario 3.21: Test de la segunda derivada

Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable y $a \in I$ un punto interior. En a se cumple que $f'(a) = 0$ y $f''(a)$ se puede calcular (existe). Entonces podemos afirmar:

- Si $f''(a) > 0$, entonces f tiene en a un mínimo relativo.
- Si f tiene en a un máximo relativo, entonces se verifica $f''(a) \leq 0$.

Afirmaciones análogas se cumplen con las desigualdades contrarias, por ejemplo, si la segunda derivada es negativa en a , podemos afirmar que la función tiene en a un máximo relativo.

3.3.5. Problemas de optimización

Muchos problemas prácticos requieren la búsqueda del máximo o mínimo absoluto de una cierta cantidad: minimizar costes o tiempo, maximizar beneficios, minimizar el material empleado para construir algo,... Aquí lo difícil es interpretar el problema real en términos matemáticos para convertirlo en un problema mecánico de cálculo de extremos absolutos.

A continuación damos algunas indicaciones sobre los pasos a seguir para resolver problemas aplicados de optimización:

- Identificar dentro del problema las cantidades conocidas y las deben ser determinadas.
- Escribir una primera fórmula sobre la cantidad que se busca maximizar o minimizar. ¿De cuántas variables o incógnitas depende?
- Revisar los datos del problema para encontrar relaciones que permitan reducir la fórmula anterior a una función f con una sola variable independiente x . Tomar nota del significado de x y f dentro del contexto del problema a resolver.
- Encontrar el dominio de f para que el problema tenga sentido, es decir, determinar el intervalo de valores admisibles para x .
- Traducir el problema en términos matemáticos como sigue:

Maximizar/Minimizar la función $f(x)$ para valores de x en el intervalo $[a, b]$.

Una vez formulado el problema de optimización, procedemos a los pasos siguientes en la búsqueda de extremos absolutos.

Paso 1: Puntos críticos. Resolvemos la ecuación $f'(x) = 0$.

Paso 2: Extremos relativos. Determinamos si los puntos críticos son extremos relativos. Para ello, podemos usar el Corolario 3.11 estudiar el crecimiento o decrecimiento de la función en los intervalos en que los puntos críticos subdividen a $[a, b]$, o bien usar el test de la segunda derivada (ver Corolario 3.21).

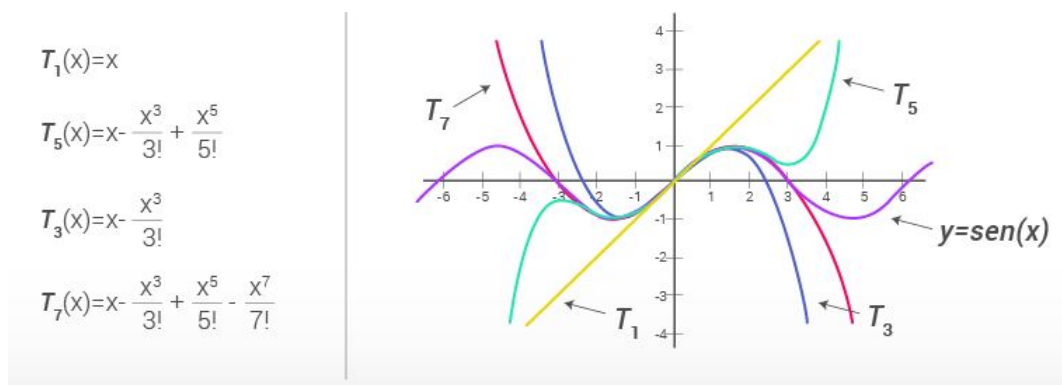
Paso 3: Valores de f en la frontera del intervalo. Calcular $f(a)$ y $f(b)$ y comparar con el valor de f en los extremos relativos. El mayor de todos los valores obtenidos será el máximo absoluto y el menor corresponderá al mínimo absoluto.

Paso 4: Interpretación del resultado en el contexto del problema para responder a la pregunta original.

3.3.6. Serie de Taylor

Hemos visto que el polinomio de Taylor ofrece una buena aproximación de una función f cerca de un punto a y que, además, dicha aproximación mejora cuanto mayor es el grado del polinomio.

Por otro lado, en la siguiente figura vemos que, adicionalmente, cuanto mayor es el grado del polinomio conseguimos que sea una buena aproximación en un intervalo más alejado del punto a que tomamos como base.



Resulta natural preguntarnos si, al tomar límites cuando $n \rightarrow \infty$ conseguiremos una aproximación en todo el dominio de definición que además sea exacta (con error 0). Esto es, nos preguntamos si toda función f se puede escribir como límite de su polinomio de Taylor cuando el grado tiende a infinito:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k.$$

En matemáticas una suma infinita recibe el nombre de serie. En concreto,

Definición 3.22: Serie de Taylor

Si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$, entonces la suma que aparece en el lado derecho se denomina **serie de Taylor** de la función f alrededor del punto a .

Como la serie de Taylor se define tomando límites, no está claro que siempre exista el límite y necesitamos averiguar condiciones que garanticen su existencia. Razonando con el criterio del sandwich (ver Teorema 1.7), deducimos el siguiente resultado.

Teorema 3.23: Existencia de la serie de Taylor

Si f es una función infinitamente diferenciable en un intervalo abierto que contiene al punto a y si $R_n(x)$ representa el resto de la fórmula de Taylor, entonces

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0.$$

La acotación de las derivadas es por tanto una condición sencilla de comprobar en la práctica y que nos asegura la convergencia de la serie de Taylor.

Corolario 3.24: Derivadas acotadas $\Rightarrow$ Existencia de la serie de Taylor

Si existe una constante $C > 0$ tal que

$$|f^{(n)}(x)| \leq C \quad \text{para todo } x \in I \text{ y para todo } n \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

entonces $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$ para todo $x \in I$.

3.4. Ejercicios

3.4.1. Teoremas de continuidad y derivabilidad

- 1 a) Sea $a > 1$. Demuestra que la ecuación $x + e^{-x} = a$ tiene al menos una solución positiva y otra negativa.
 b) Supongamos que la temperatura en la superficie de la Tierra cambia de manera continua con la posición. Muestra que entonces podemos encontrar un punto sobre el ecuador, el cual tiene la misma temperatura que su antípoda. (El punto antipodal es aquel que se encuentra exactamente al otro lado del mundo, por ejemplo, la antípoda de Valencia está en el Océano cerca de Nueva Zelanda).
- 2 Demuestra que la ecuación $x^3 - 15x + 1 = 0$ tiene tres soluciones en el intervalo $[-4, 4]$.
- 3 Demuestra que $\frac{2}{1+x^2} + 3\cos(\pi x) = 0$ tiene
 - a) al menos dos soluciones con $x \in [-1, 1]$ (**Prueba EC 2019**);
 - b) una única solución en el intervalo $[0, 1]$.

-
- 4 (Examen parcial 2019) Aplica los teoremas de Bolzano y Rolle para constatar que la ecuación $\sin x = e^{-x}$ tiene una única solución en el intervalo $[0, \pi/2]$.

- 5 Se consideran las siguientes funciones:

$$f(x) = \begin{cases} x + \log x, & \text{si } x > 1 \\ x^2, & \text{si } x \leq 1 \end{cases} \quad \text{y} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{si } x > 0 \\ e^x, & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

- (a) Probar que f y g son continuas en todo $\mathbb{R}$.
- (b) ¿Está acotada $g \circ f$ en el intervalo $[-1, 2]$?
- (c) Probar que existen dos puntos a y b en el intervalo $(1, e^2)$ tales que $f(a) = \frac{\pi}{2}$ y $f(b) = \frac{3\pi}{2}$.
- (d) Deducir del apartado anterior que existe $c \in (1, e^2)$ tal que $(g \circ f)(c) = 0$.
- 6 Analizar si es posible aplicar el teorema de Rolle a las funciones siguientes en los intervalos dados:
- a) $f(x) = |x|$ en $[-1, 1]$.
- b) $g(x) = x$ en $[1, 2]$.
- c) $h(x) = x^2 - (a+b)x + ba$ en $[a, b]$.
- d) $k(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ en $[-1, 1]$.
- 7 Se considera la función $f(x) = xe^{-x^2}$. Obtener razonadamente el valor del parámetro a para que se pueda aplicar el teorema de Rolle en el intervalo $[0, 1]$ a la función $g(x) = f(x) + ax$.
- 8 Encontrar una función f definida en $[-1, 1]$ que no verifique las hipótesis del teorema de Rolle, y sin embargo cumpla $f'(c) = 0$ para algún $c \in (-1, 1)$.
- 9 Demostrar que la ecuación $e^x = 1 + x$ tiene exactamente una solución real.
- 10 Sea $f(x) = x^3 - 3x + 1$. Explica razonadamente por qué solo existe un punto $c \in [-1, 1]$ tal que $f(c) = 0$.
- 11 A las cuatro de la tarde un coche pasa, circulando a una velocidad de 70 km/h, por el punto kilométrico 400 de la autopista A-7. Diez minutos más tarde pasa, esta vez a 80 km/h, por el kilómetro 425 de dicha autopista. Le para la guardia civil y le pone una multa por exceso de velocidad. ¿Es esto justo si la velocidad máxima permitida era de 120 km/h?

-
- 12 Sea $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3-x^2}{2} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Estudiar si existe $c \in [0, 2]$ tal que $f'(c) = -1/2$.

- 13 (**Examen parcial 2019**) Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable con $|f'(x)| < 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Deduce razonadamente que f tiene como mucho un punto fijo, es decir, existe un $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(c) = c$.

- 14 (**Examen enero 2020**) Un punto de duplicación (PD) de una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es un punto p tal que $f(p) = 2p$.

- a) Enuncia el teorema del valor medio. Aplícalo para comprobar que si f es derivable y $f'(x) \leq 1$ para todo $x \in [a, b]$, entonces f tiene como mucho 1 PD en $[a, b]$.
- b) Enuncia el teorema de Bolzano. Como aplicación, muestra que si además $f(a) > 2a$ y $f(b) < 2b$, entonces existe 1 PD de f en $[a, b]$.

3.4.2. Extremos y derivadas de orden superior. Polinomio y serie de Taylor

- 15 Dada la función f cuya derivada es

$$f'(x) = \frac{x^3(x-1)^2(x-2)^3(x-3)^4}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Encuentra los puntos donde f tiene extremos relativos.

- 16 Comprueba que la siguiente función es derivable pero que su derivada no es continua :

$$\begin{aligned} f : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} . \end{aligned}$$

- 17 Calcula la derivada n -ésima de las siguientes funciones:

$$e^x, \quad \cos(x), \quad \log(x).$$

-
- 18** a) Aproxima $f(x) = e^x$ mediante un polinomio de grado 8 y con dicho polinomio calcula e con una precisión de 5 decimales.
- b) Encuentra un polinomio que te permita calcular $\cos 1$ con una precisión de 6 decimales.

- 19** Aproxima la función $f(x) = x \sin x$ mediante un polinomio de grado 3. Utiliza dicho polinomio para aproximar $\frac{1}{3} \sin\left(\frac{1}{3}\right)$ con dos decimales de exactitud. Justifica la exactitud obtenida.

- 20** Aproxima la función $f(x) = x \log(1+x)$ mediante un polinomio de grado 3. Utiliza dicho polinomio para aproximar $0,2 \log(1,2)$. Obtén una cota del error cometido.

- 21** Aproxima la función $f(x) = x^2 \log(x)$ mediante un polinomio de grado 2, expresado en potencias de $(x-1)$. Utiliza dicho polinomio para aproximar $\frac{1}{4} \log\left(\frac{1}{2}\right)$ con dos decimales de exactitud.

- 22** (**Examen parcial 2019**) Calcula el polinomio de Taylor $T_3(x)$ de grado 3 en $a = 0$ de la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) := e^x \sin x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Comprueba que el error $|f(x) - T_3(x)|$ en el intervalo $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ es más pequeño que $\frac{\sqrt{e}}{96}$.

- 23** (**Examen enero 2020**) Considera la función $f(x) = \log(x^2)$.

- a) Halla el polinomio de Taylor $T_4(x)$ de f centrado en $a = 1$. Basta con expresarlo en potencias de $(x-1)$.
- b) Si $x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$, ¿puede el error de la aproximación ser menor o igual que $2 \cdot 10^{-6}$? Justifica tu respuesta usando el término de error del desarrollo de Taylor.

- 24** Consideramos la función $f(x) = x^2 + \log x$ en el intervalo $[1/2, 2]$.

- a) Encuentra el polinomio de Taylor de grado 2 de $f(x)$ centrado en $x = 1$.
- b) ¿Cuál sería el error cometido al sustituir f por el anterior polinomio en dicho intervalo?

3.4.3. Problemas de optimización

- 25 ¿Qué rectángulo tiene área máxima entre todos los de perímetro 1?
- 26 **(Examen parcial 2019)** Tenemos un alambre de 1 metro de longitud. Lo cortamos con unas tenazas en dos trozos: con el primero construimos un triángulo equilátero y con el segundo trozo formamos un cuadrado. ¿En qué punto debemos cortar el alambre para que el área total de las dos figuras sea máxima? Para contestar, plantea y resuelve el problema de optimización correspondiente.
- 27 Un rectángulo tiene su base en el eje x y sus dos vértices superiores en la parábola $y = 12 - x^2$. ¿Cuál es el área máxima del rectángulo y sus dimensiones?
- 28
- a) Encuentra el volumen del cono circular recto más grande que puede ser inscrito en una esfera de radio 3.
 - b) Encuentra las dimensiones del cilindro de volumen máximo que puede ser inscrito en una esfera de 10 cm de radio.
- 29 Una hoja rectangular de perímetro de 36 cm y dimensiones x cm por y cm debe ser enrollada para crear un cilindro sin bases. ¿Qué valores de x e y proporcionan el mayor volumen?
- 30 Juan está en el mar a 2 kilómetros de la costa de La Marina Real en un barco y desea llegar a EDEM que está situado 6 kilómetros en línea recta desde el punto más cercano de la costa al barco. Juan puede remar a 2 km/h y puede caminar 5 km/h. ¿Dónde debería amarrar el barco para llegar a EDEM en el menor tiempo posible?

Tema 4

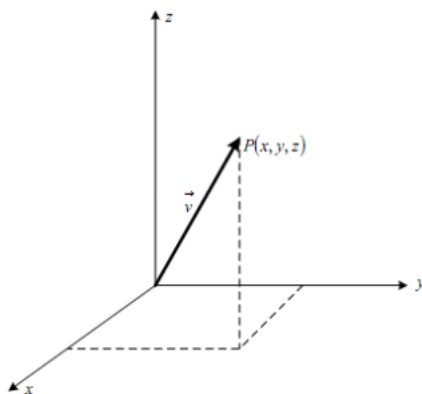
Funciones de varias variables: diferenciabilidad

4.1. Distintos tipos de funciones

Definición 4.1: Curvas

Sea $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$, $a < b$. Una función continua $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ se denomina **curva**.

Ejemplo 4.2 (1) $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ con $n = 2, 3$ dada por $c(t) = p + tV$ representa una recta que pasa por el punto $p \in \mathbb{R}^n$ en la dirección $V \in \mathbb{R}^n$. Aquí estamos usando que $\mathbb{R}^3$ es un espacio vectorial, lo que significa que podemos interpretar sus elementos como puntos $p = (x, y, z)$ o como vectores $V = (u, v, w)$.



(2) $c(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in \mathbb{R}$ es una circunferencia, a la cual le damos infinitas vueltas (una vuelta corresponde al dominio $[0, 2\pi]$).

(3) $\mathbb{R} \ni t \mapsto (\cos t, \sin t, t) \in \mathbb{R}^3$ es una hélice o curva espiral.

Definición 4.3: Campos escalares o vectoriales

- Un **campo escalar** en $D \subset \mathbb{R}^n$ es una función que toma valores reales $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. También se llama **función de varias variables**.
- Un **campo vectorial** sobre D es una función $X : D \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Ejemplo 4.4 $[n = 2]$ Las funciones de 2 variables se pueden visualizar mediante su gráfica, que es una superficie en el espacio de la forma $z = f(x, y)$, donde z da la altura de cada punto (x, y) en el dominio de la función.

$[n = 3]$ Las funciones de 3 variables también son bastante habituales, por ejemplo, la distribución de la temperatura en una habitación: para cada $p = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ el valor $T(p)$ representa la temperatura en el punto p (en un instante concreto).

$[n = 4]$ Si queremos contemplar cambios temporales de la temperatura, se obtiene una función de 4 variables: $T(p, t)$ es la temperatura en el punto p en el instante t .

Ejemplo matemático: El Determinante $\det : M(n \times n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de n^2 variables.

$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ cambio de coordenadas (por ejemplo, coordenadas polares), campos de fuerzas (gravitatorias, eléctricas, magnéticas): $F(p)$ = fuerza, que actúa sobre una masa puntual situada en la posición p del plano o del espacio.

Una manera de imaginarnos el comportamiento cualitativo de las funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$:

Definición 4.5: Curvas de nivel

Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ y $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Sea $c \in \mathbb{R}$. Entonces se dice que

$$N_c := f^{-1}(c) = \{p \in D : f(p) = c\}$$

es un **conjunto/curva de nivel** (de f).

Si conocemos las curvas de nivel, podemos reconstruir fácilmente la gráfica de una función.

Una curva de nivel N_c se obtiene al cortar la gráfica G_f de f con planos horizontales de altura c que luego se proyectan sobre el plano $z = 0$ para obtener en una misma figura todas las curvas de nivel (como las isobaras del mapa del tiempo).

4.2. La diferencial y las derivadas direccionales

4.2.1. Derivadas direccionales

Para hacernos una idea, de cómo encontrar una noción que tenga sentido para la derivada de un campo escalar $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ($D \subset \mathbb{R}^n$), lo primero es tratar de imitar el concepto de derivada para funciones de una variable.

En primer lugar, la derivada representa la tasa de variación instantánea de los valores de la función. Para $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ con $n > 1$ la gran diferencia es que nos podemos alejar del punto $a \in D$ en distintas direcciones (de hecho, en infinitas direcciones). El cambio de la función puede por tanto ser distinto según la dirección que tomemos; así, para cada dirección se puede definir una derivada distinta:

Definición 4.6: Derivada direccional

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ y $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Para $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ y $a \in D$ el límite (si existe)

$$D_v f(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}$$

se denomina **derivada direccional** de f en el punto a en la dirección v . Notemos que se trata simplemente de la derivada de la función $t \mapsto f(a + tv)$ en el instante $t = 0$.

De especial utilidad, para no tener que calcular infinitas derivadas direccionales, es estudiar la variación de la función en las direcciones de los ejes coordenados. Para ello, introducimos la siguiente notación: sea $\{e_i\}_{i=1}^n$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$, es decir, $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ con un 1 en la i -ésima posición.

Definición 4.7: Derivadas parciales

La derivada direccional

$$(D_{e_i} f)(a) =: \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$$

se denomina **derivada parcial** de f respecto de x_i en el punto a . Esto significa que solo tomamos derivadas respecto de la i -ésima variable, manteniendo las demás como si fueran constantes:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_i + t, \dots, a_n) - f(a)}{t} \\ &= \lim_{x \rightarrow a_i} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(a)}{x - a_i}. \end{aligned}$$

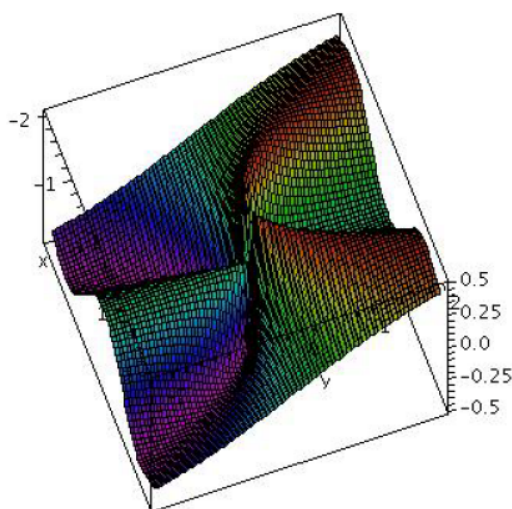
Nota 4.8 1. *Significado de la derivada direccional:* $D_v f(a)$ representa la tasa de cambio instantáneo de $f(x)$, cuando x se aleja de a con vector velocidad v .

2. Otras notaciones frecuentes para las derivadas parciales o direccionales son:

$$\partial_v f, \quad \partial_{x_i} f, \quad \partial_i f, \quad f_{x_i}.$$

Ejemplo 4.9 Existen funciones, cuyas derivadas direccionales en p existen para cualquier dirección, pero que no son continuas en p :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$



Toda la información sobre las derivadas parciales se recoge en forma de vector:

Definición 4.10: Vector gradiente

El **gradiente** de un campo escalar $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es el siguiente campo vectorial:

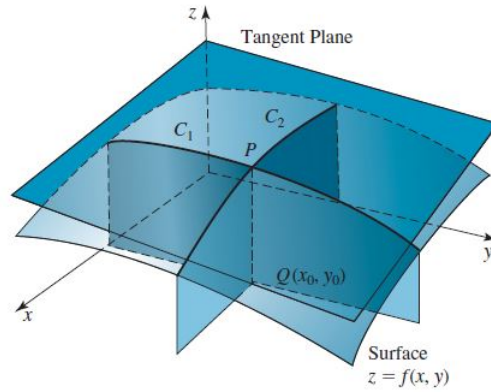
$$\nabla f : D \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad a \mapsto \nabla f|_a = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right).$$

4.2.2. Ecuación del plano tangente

Como la existencia de todas las derivadas direccionales no garantiza la continuidad, hemos de buscar una nueva noción de diferenciabilidad que sí mantenga esta propiedad. Para ello, acudimos a la interpretación de la derivada como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función. Así pues, la noción de diferenciabilidad que buscamos debe mantener ese significado de aproximación lineal de la gráfica de la función en las proximidades del punto de tangencia.

Para ello, en primer lugar buscamos una ecuación que describa el plano tangente a una función con gráfica $z = f(x, y)$. Por la interpretación geométrica de las derivadas direccionales, si $z = f(x, y)$ es una función de dos variables, las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$, evaluadas en el punto (a, b) , representan las pendientes de las rectas tangentes en el punto (a, b, c) , con $c = f(a, b)$ a curvas contenidas en la superficie. Estas dos rectas tangentes, una en la dirección x y la otra en la dirección y , definen un único plano.

Con más precisión, llamamos C_1 a la curva obtenida como intersección de la superficie $z = f(x, y)$ con un plano paralelo al plano yz que pasa por el punto $p = (a, b, c)$, es decir, el plano $x = a$. La recta tangente a dicha curva en p estará contenida en el plano tangente buscado. Repetimos el procedimiento, pero ahora tomando la curva C_2 definida al cortar el plano $y = b$ con la superficie.



Definición 4.11: Vector tangente/velocidad de una curva

Sea $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva que representa el movimiento de un objeto puntual en el espacio $\mathbb{R}^n$. Dado $a \in I$, el vector velocidad viene dado por

$$\gamma'(a) = (\gamma'_1(a), \dots, \gamma'_n(a)) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\gamma(a+h) - \gamma(a)}{h} \in \mathbb{R}^n.$$

En concreto, para una curva en el plano $c(t) = (x(t), y(t))$ el vector velocidad en el instante t_0 viene dado por $c'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0))$.

Geoméricamente, el vector $\gamma'(a)$ es el vector tangente a la gráfica de γ en el punto a , es decir,

$$\{\gamma(a) + t\gamma'(a) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

es la recta tangente a la gráfica de la curva γ en el punto $(a, \gamma(a))$.

Definición 4.12: Ecuación del plano tangente

Si el plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto (a, b, c) existe, entonces satisface la igualdad

$$z = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b).$$

Aquí $c = f(a, b)$, siendo (a, b) un punto del dominio de f .

4.2.3. Diferenciabilidad

Buscamos cómo cambia una función de dos variables $f(x, y)$ cuando ambas variables se someten a un pequeño cambio. Con más precisión, si tenemos una gráfica $z = f(x, y)$ y conocemos el valor de f en un punto (a, b) , la pregunta es cómo cambia el valor de f si nos movemos dentro del dominio de (a, b) a un punto cercano $(a + \delta x, b + \delta y)$, es decir, buscamos calcular el incremento de f dado por

$$\delta f = f(a + \delta x, b + \delta y) - f(a, b).$$

Recordemos que para una función $y = f(x)$ tenemos que para valores pequeños del incremento de la variable independiente δx se tiene que

$$\delta f = f(x + \delta x) - f(x) = (f'(x) + \varepsilon) \cdot \delta x,$$

con $\varepsilon \rightarrow 0$ cuando $\delta x \rightarrow 0$. Esto es una manera de expresar que la recta tangente es una buena aproximación a los valores de la función cuando x está cerca del punto de tangencia. Cuando una aproximación similar es posible para una función de dos variables usando el plano tangente, diremos que la función es diferenciable en el punto de tangencia.

Definición 4.13: Diferenciabilidad

Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ con $(a, b) \in D$ y $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Diremos que f es diferenciable en (a, b) si el plano tangente es una buena aproximación a la gráfica de f para valores de (x, y) cercanos a (a, b) , es decir, si podemos escribir

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \cdot \delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \cdot \delta y + \varepsilon_1 \cdot \delta x + \varepsilon_2 \cdot \delta y, \quad (4.1)$$

donde los errores $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ tienden a cero cuando $\delta x \rightarrow 0$ y $\delta y \rightarrow 0$, respectivamente.

f se dice diferenciable en D si es diferenciable en todo punto $(a, b) \in D$ en el sentido de la definición anterior, la cual implica inmediatamente que toda función diferenciable es continua.

Teorema 4.14: diferenciable $\Rightarrow$ continua

Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ con $a \in D$ y $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable en a . Entonces f es continua en a .

En consecuencia, cabe destacar que en este apartado el término diferenciable se usa de manera distinta que para funciones de una variable, donde equivale a la existencia de derivada en un punto. Por el contrario, en dos variables, la existencia de derivadas parciales no garantiza la derivabilidad (ver Ejemplo 4.9), pero esto sí se cumple si dichas parciales son además funciones continuas:

Teorema 4.15: Condición suficiente de diferenciabilidad

Supongamos que $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ está definida en un disco abierto D centrado en el punto (a, b) y que las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ existen y son continuas en D . Entonces f es diferenciable en el punto (a, b) .

Este teorema nos da un criterio especialmente práctico para comprobar si una función es diferenciable, pues a menudo el cálculo de las derivadas parciales y la comprobación de si son funciones continuas es bastante evidente (si se trata de polinomios, exponenciales, funciones trigonométricas, etc.).

Si tomamos límites en (4.1) para obtener una fórmula sin errores, cuando los incrementos son *infinitamente pequeños*, llegamos a

Definición 4.16: Diferencial

Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ y $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Definimos la diferencial de f como la tasa de variación total de la función respecto de cada una de sus variables:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy. \quad (4.2)$$

Diremos que una función es diferenciable si $df \approx \delta f$ para $\delta x = dx$ y $dy = \delta y$, es decir, tomando incrementos pequeños (≈ 0 , infinitesimales) de las variables independientes.

La fórmula (4.2) se interpreta como sigue: para cambios infinitesimalmente pequeños en las variables independientes x e y , de magnitudes $\delta x = dx$ y $\delta y = dy$, respectivamente, se produce un cambio en la función f de magnitud df y la fórmula (4.2) nos da una manera de calcularlo conociendo dx y dy .

Geoméricamente, si nos situamos en un punto (x, y) en las proximidades de (a, b) , df representa el cambio en la altura del plano que es tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto $(a, b, f(a, b))$. Como la ecuación de un plano en el espacio es lineal en x e y , la aproximación de δf por df se llama **aproximación lineal**.

Es frecuente el uso de df en lugar de δf porque su cálculo es más sencillo, en ese caso, la diferencial nos da una aproximación para el cálculo de errores absolutos, mientras que $\frac{df}{f}$ sería el error relativo o porcentual. Una aplicación común es la estimación de la propagación de errores de medida: por ejemplo, en la ecuación de los gases perfectos, $P = cT/V$ si medimos

T y V con errores $\delta V = dV$ y $\delta T = dT$, podemos estimar cómo esto afectaría al cálculo de la presión; en efecto, se aproximaría el error relativo por la cantidad $\frac{dP}{P}$.

En definitiva, a nivel geométrico, la diferenciabilidad de una función $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ en un punto $(a, b) \in D$ significa la existencia de un plano tangente a la superficie dada por la gráfica de f con punto de tangencia $p = (a, b, f(a, b))$.

4.2.4. Derivadas parciales de orden superior

Dada la función $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, supongamos que existe la derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x}$ en D . Si existe la derivada parcial de la función $\frac{\partial f}{\partial x} : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ respecto de la coordenada y , entonces la denotamos como

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) =: \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Esto se generaliza para definir cualquier derivada parcial de orden superior.

Definición 4.17: Derivada parcial de orden k

Sea $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. La función

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}} := \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \left(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_k}} \right)$$

se denomina (si existe) **k -ésima derivada parcial** de f respecto de las variables $x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$

Notación: $\frac{\partial^k f}{\partial x \cdots \partial x} =: \frac{\partial^k f}{\partial x^k}$.

Nos preguntamos si el orden de derivación se puede intercambiar a la hora de calcular derivadas parciales en distintas direcciones coordenadas. El siguiente resultado garantiza que para funciones suficientemente suaves dicho orden es irrelevante:

Teorema 4.18: Teorema de Schwarz (igualdad de las derivadas cruzadas)

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función cuyas derivadas parciales existen hasta orden 2 y son continuas. Entonces se verifica la igualdad

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

para todo $i, j = 1, \dots, n$.

Este teorema nos asegura que la matriz Hessiana definida a continuación es una matriz simétrica.

Definición 4.19: Matriz Hessiana

Dada una función f cumpliendo las hipótesis del teorema de Schwarz, la matriz simétrica

$$\mathcal{H}_f(a) = \begin{pmatrix} \partial_{11}^2 f(a) & \dots & \dots & \partial_{1n}^2 f(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \partial_{n1}^2 f(a) & \dots & \dots & \partial_{nn}^2 f(a) \end{pmatrix} \in M(n \times n, \mathbb{R}),$$

donde $\partial_{ij}^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$, se llama **matriz Hessiana** de f en el punto a .

4.3. Regla de la cadena y aplicaciones

Dada una función $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, nos preguntamos cómo cambia la función a lo largo de una curva en el plano $c(t) = (x(t), y(t))$. Por ejemplo, nos puede interesar cómo cambia la temperatura de un dron a lo largo de su trayectoria de vuelo, pues si rebasa una temperatura máxima la batería puede explotar.

Para responder a la pregunta anterior, dividimos (4.1) por un incremento temporal δt y tomamos límites cuando $\delta t \rightarrow 0$. De esta manera, llegamos a

$$\frac{df}{dt}(c(t)) = \frac{\partial f}{\partial x}(c(t)) \cdot x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(c(t)) \cdot y'(t).$$

El lado izquierdo de la igualdad anterior se interpreta como la tasa de variación total de la función f cuando se recorre la trayectoria c . Dicho cambio es debido al cambio en f causado por el cambio en sus componentes x e y , que a su vez varían con el tiempo.

Corolario 4.20: Regla de la cadena para curvas

Sea $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva diferenciable y $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable, entonces también lo es la composición $f \circ c : I \rightarrow \mathbb{R}$ y se cumple

$$(f \circ c)'(t) = \nabla f|_{c(t)} \cdot c'(t), \quad t \in I.$$

En notación de Leibniz, la igualdad anterior queda como sigue:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

Si aplicamos la regla de la cadena a la curva más sencilla posible, esto es, a una recta $c(t) = p + tv$ que pasa por $p \in \mathbb{R}^n$ en la dirección no nula $v \in \mathbb{R}^n$, obtenemos una manera práctica de calcular derivadas direccionales:

Corolario 4.21: Relación entre el gradiente y la derivada direccional

$f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable en $p \in D$. Entonces para $v \neq 0$ se cumple:

$$D_v f(p) = \nabla f|_p \cdot v = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} v_i = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

4.3.1. Interpretación geométrica del gradiente

Nos preguntamos cuál es el significado geométrico del vector gradiente (ver Definición 4.10). Concluiremos las siguientes afirmaciones:

- El vector $\nabla f|_a$ apunta en la dirección, en la cual f crece lo más rápido posible..
- El gradiente es perpendicular a los conjuntos de nivel (recordar Definición 4.5).

Para demostrar lo anterior, consideramos $u \in \mathbb{R}^2$ un vector de longitud unidad y denotamos por α al ángulo comprendido entre ∇f y u , considerando que ambos vectores se trasladan para tener inicio en el punto p . Por definición de producto escalar, se tiene

$$D_u f = \nabla f \cdot u = |\nabla f| |u| \cos \alpha = |\nabla f| \cos \alpha \leq |\nabla f|.$$

En consecuencia, si $\alpha = 0$, se cumple que $\cos \alpha = 1$ y entonces $D_u f$ alcanza su máximo valor, siendo este igual a $|\nabla f|$. En general, se tiene

Teorema 4.22: Gradiente como máxima derivada direccional

$|\nabla f|_p = \max \{ D_u f(p) \mid u \in \mathbb{R}^n, |u| = 1 \}$. Este máximo existe (siempre que $\nabla f|_p \neq 0$) y se alcanza precisamente para el siguiente valor de la dirección unitaria:

$$\frac{\nabla f|_p}{|\nabla f|_p} = u$$

Expresado en palabras: $\nabla f|_p$ tiene la dirección de máximo crecimiento de $f(x)$, cuando x se aleja de p con velocidad 1 (en caso de que $\nabla f|_p \neq 0$); además, $\|\nabla f|_p\|$ con la tasa de variación de f en la dirección unitaria paralela al gradiente.

La segunda afirmación sobre el gradiente se deduce de una aplicación de la regla de la cadena:

Corolario 4.23: Gradiente perpendicular a las curvas de nivel

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable y sea $\gamma(t)$ una curva diferenciable contenida en el conjunto de nivel $N_c \subset D$ y con $\gamma(0) = p$. Entonces se tiene

$$\nabla f|_p \perp \gamma'(0), \quad \text{es decir,} \quad \nabla f|_p \cdot \gamma'(0) = 0.$$

4.4. Optimización en varias variables

4.4.1. Extremos libres y puntos críticos

En este apartado abordamos el asunto de optimizar funciones de varias variables, para lo cual generalizaremos las correspondientes nociones y criterios vistos para funciones de una variable. Para ello, el plano tangente sustituirá a la recta tangente en el teorema de Fermat (Teorema 3.4) y buscaremos planos horizontales. Por otro lado, la matriz Hessiana será fundamental para adaptar a la presente situación el test de la segunda derivada (ver Corolario 3.21).

Empezamos con definiciones similares a las ya vistas para funciones de una variable (ver Definición 3.3):

Definición 4.24: Extremos absolutos y relativos

Sea $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Entonces f alcanza en $p \in D$ un

- **máximo relativo**, si $f(q) \leq f(p)$ para todo q cerca de p .
- **mínimo relativo**, si $f(q) \geq f(p)$ para todo q cerca de p .

En cualquiera de los casos anteriores, se dice que f tiene en p un **extremo relativo**. Si, además, las desigualdades se cumplen para todo $q \in D$, entonces se habla de extremos (máximos o mínimos) **absolutos**.

Si las desigualdades anteriores son estrictas (por ejemplo, $<$ en lugar de $\leq$) y añadimos que se cumplan cuando $q \neq p$, entonces diremos que se trata de un extremo aislado o estricto. En el caso de que $D \subset \mathbb{R}^2$ la afirmación de que q esté cerca de p significa que existe un $r > 0$ y un círculo de radio r centrado en p tal que la desigualdad se cumple para todo punto q en el interior de dicho círculo.

Teorema 4.25: Condición necesaria de extremo

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ abierto (= sin frontera), y $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ una función con un extremo local en $p \in D$. Si f es diferenciable en p , entonces se tiene que $\nabla f|_p = 0$.

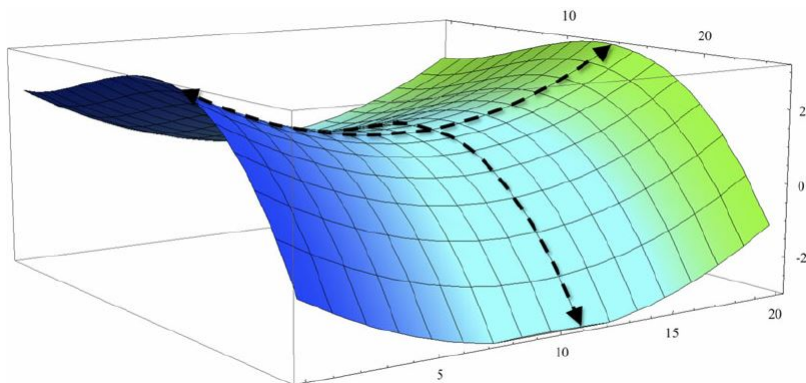
En el caso particular de que $D \subset \mathbb{R}^2$ la condición anterior implica que $\frac{\partial f}{\partial x}(p) = \frac{\partial f}{\partial y}(p) = 0$ y, por tanto, en todo extremo local el plano tangente a la gráfica de f tiene que ser horizontal. Pero existen puntos con plano tangente horizontal que no son extremos relativos de la función:

Definición 4.26: Puntos críticos y de silla

Un punto $p \in D$ con $\nabla f|_p = 0$ se denomina **punto crítico** de f . Un punto crítico p de f se dice que es un **punto de silla** de f , si en todo entorno del punto p encontramos puntos q y s , tales que $f(q) < f(p) < f(s)$.

En consecuencia, los puntos críticos son posibles candidatos a extremos; sin embargo, el

ejemplo $f(x, y) = x^2 - y^2$ constata que un punto crítico no tiene por qué ser un extremo local. Para poder analizar esto con más precisión, buscamos un resultado análogo al test de la segunda derivada.



4.4.2. Test de la segunda derivada en varias variables

De los temas anteriores, sabemos que: para un punto a en el interior del dominio de f , si se cumplen las propiedades $f'(a) = 0$ y $f''(a) > 0$, entonces podemos deducir que se trata de un mínimo relativo. Precisamente esta afirmación es lo que queremos adaptar y generalizar a varias variables, pero sabemos que aquí no hay una única segunda derivada, sino que la información sobre las segundas derivadas, en el caso más sencillo de dominio plano, nos viene dada en forma de matriz (ver Definición 4.19).

Así, obtenemos la siguiente condición suficiente de extremo local (cuya demostración requiere de conocimientos de álgebra lineal que se escapan de los objetivos del presente curso):

Teorema 4.27: Test de la segunda derivada

Sei $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ función con derivadas continuas hasta orden 2, y sea un punto $p \in D$ con $\nabla f|_p = 0$. Entonces se tiene:

- (1) Si $\det \mathcal{H}_f(p) > 0$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p) > 0$, entonces f tiene en p un mínimo relativo (estricto).
- (2) Si $\det \mathcal{H}_f(p) > 0$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p) < 0$, entonces f tiene en p un máximo relativo (estricto).
- (3) Si $\det \mathcal{H}_f(p) < 0$, entonces f tiene en p un punto de silla.

Notemos que el resultado anterior no nos proporciona información en el caso de que $\det \mathcal{H}_f(p) = 0$.

4.4.3. Extremos condicionados

Ahora queremos abordar la resolución de problemas del tipo: maximizar/minimizar una función $f(x, y)$ sujeto a que se cumpla una restricción de la forma $g(x, y) = k$, siendo k una constante. Esto lo abordaremos en base al siguiente resultado:

Teorema 4.28: Método de los multiplicadores de Lagrange

Sea p un punto del dominio de f cumpliendo que $g(p) = 0$. Si f tiene un extremo local en p , entonces existe una constante $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\nabla f|_p = \lambda \nabla g|_p.$$

La constante λ se denomina **multiplicador de Lagrange**.

4.5. Ejercicios

4.5.1. Derivada direccional y derivadas parciales

- 1) Calcula las derivadas parciales de las siguientes funciones:

a) $f(x, y) = x \arctan(xy)$.

b) $f(x, y) = x^3 e^x - x \cos y$.

- 2) Calcula, si existen, las derivadas parciales en el origen de la función

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 + y^2}{x^4 + y^4}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

- 3) Calcula el gradiente de los campos escalares

a) $f(x, y) = x e^y - y e^x$.

b) $f(x, y, z) = x \sin(\pi y) + y \cos(\pi z)$. Calcula también $\nabla f|_{(0,1,2)}$.

- 4) Dada la siguiente función:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Comprueba que todas sus derivadas direccionales existen, pero la función no es continua.

4.5.2. Plano tangente y aproximación lineal

- 5) Calcula la ecuación del plano tangente a la gráfica de la función $f(x, y) = xy$:
- a) En el origen.
 - b) En el punto $(2, 1, 2)$. Halla los puntos de intersección de dicho plano con los ejes coordenados.
 - c) Compara la aproximación lineal en el punto $(2, 1, 2)$ con el valor exacto de f en ese punto.
- 6) a) Calcula la ecuación del plano tangente a la gráfica de la función $f(x, y) = xe^{xy}$ en el punto $(1, 0, 1)$.
- b) El punto (a, b, c) se encuentra en la parte superior de una semiesfera de radio 4 centrada en el origen. Encuentra la ecuación del plano tangente a la esfera en dicho punto para $(a, b) = (1, 3)$.
- 7) Medimos el largo y ancho de un rectángulo y obtenemos, respectivamente, 52 cm y 50 cm. Sabemos que el error en la medida es, como mucho, de 0,02 cm en cada longitud. Usa diferenciales para estimar el error máximo que cometeríamos al calcular el área del rectángulo.
- 8) a) Comprueba que $f(x, y) = xe^{xy} - x^2$ es diferenciable en $(0, 1)$ y encuentra su linealización en ese punto.
- b) Si $f(x, y) = x^3 + 2xy - y^2$, encuentra la diferencial df . Además, si x cambia de 2 a 2,03 e y decrece de 3 a 2,95, compara los valores de δf y df .
- 9) La deflexión y en el centro de una placa circular suspendida por el borde y uniformemente cargada viene dada por

$$y = \frac{Kwd^4}{t^3}$$

donde w = carga total, d = diámetro de la placa, t = amplitud y K es una constante. Calcula el cambio aproximado en y si se aumenta w en un 3 %, se disminuye d en un 2 % y se aumenta t en un 4 %.

- 10) Según la ley de Pouseuille, la resistencia al flujo de sangre que ofrece un vaso sanguíneo cilíndrico de radio r y longitud x es

$$R = \frac{cx}{r^4}$$

donde c es constante. Estimar la variación de R cuando x aumenta un 3 % y r decrece un 2 %.

4.5.3. Regla de la cadena

- 11** La presión P (en kilopascales), el volumen V (en litros) y la temperatura (en grados Kelvin) de un mol de un gas ideal están relacionados por la ecuación

$$PV = 8,31T.$$

Encuentra la velocidad a la que cambia la presión cuando la temperatura es de 300 K y crece a una velocidad de 0,1 K/s, siendo en ese instante el volumen de 100 l, el cual crece a razón de 0,2 l/s.

- 12** a) Dado que

$$z = e^{xy}, \quad x = 2u + v, \quad y = u/v,$$

halla $\frac{\partial z}{\partial u}$ y $\frac{\partial z}{\partial v}$ usando la regla de la cadena.

- b) Suponiendo que

$$\omega = e^{xyz}, \quad x = 3u + v, \quad y = 3u - v, \quad z = u^2v,$$

usa una versión apropiada de la regla de la cadena para encontrar $\frac{\partial \omega}{\partial u}$ y $\frac{\partial \omega}{\partial v}$.

- c) Expresamos $\omega = x^2 + y^2 - z^2$ en coordenadas esféricas dadas por

$$x = r \sin \phi \cos \theta, \quad y = r \sin \phi \sin \theta, \quad z = r \cos \phi.$$

Usa una versión apropiada de la regla de la cadena para encontrar $\frac{\partial \omega}{\partial r}$ y $\frac{\partial \omega}{\partial \theta}$.

- d) Sean

$$\omega = xy + yz, \quad y = \sin x, \quad z = e^x.$$

Calcula $\frac{d\omega}{dx}$ usando una versión adecuada de la regla de la cadena.

- e) Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ y hacemos un cambio a coordenadas polares dado por $g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$. Calcula el valor de $\nabla f|_{(x,y)}$ en función de g , r y θ .

- 13** La temperatura T en un punto de un líquido está dada por la fórmula

$$T(z, t) = e^{-t}z,$$

donde t representa el tiempo y z la profundidad.

- a) Calcular la tasa de variación de la temperatura con respecto al tiempo en un punto, situado a una profundidad $f(t)$ en el instante t .
b) Obtener dicha tasa para el caso $f(t) = e^t$ e interpretar el resultado obtenido.

-
- 14 La intensidad E de un campo eléctrico en un punto dado del espacio se calcula mediante una ecuación de la forma $E = f(x, y, z, t)$ donde (x, y, z) son las coordenadas del punto y t se refiere al tiempo. ¿Cuál es la tasa de variación con respecto al tiempo de la intensidad del campo eléctrico si se mide E con ayuda de un instrumento que se desplaza en el espacio siguiendo una trayectoria helicoidal de ecuaciones

$$x = \sin t, \quad y = \cos t, \quad z = t.$$

- 15 Un punto P se mueve a lo largo de la curva que es la intersección de las superficies $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = z$ y $x^2 + y^2 = 5$, con x, y, z expresados en cm. Si x aumenta a razón de 0,2 cm por minuto, ¿con qué rapidez está cambiando z cuando $x = 2$?

4.5.4. Interpretación del vector gradiente

- 16 Estás escalando una montaña cuya forma viene dada por la ecuación $z = 1100 - 2x^2 - y^2$, donde x, y, z se miden en metros. Supongamos que has alcanzado un punto de coordenadas $(10, 20, 500)$, donde el eje x positivo apunta hacia el este y el eje y positivo marca la dirección norte.

- a) Si caminas hacia el sur, ¿empezarás a ascender o a descender?
- b) ¿En qué dirección la pendiente es máxima? ¿Cuál es la velocidad máxima de escalada?

- 17 Encuentra la ecuación de la recta tangente y de la recta normal:

- a) A la curva $x^2 + xy + y^2 = 3$ en el punto $(-1, -1)$.
- b) A la curva $2x^3 - x^2y^2 = 3x - y - 7$ en el punto $(1, -2)$.

- 18 Encuentra las ecuaciones del plano tangente y la recta normal al elipsoide $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 6$ en el punto $(3, 2, 2)$.

- 19 Para hacer pruebas de cara al diseño de misiles termodirigidos, colocamos una partícula en el punto $(2, 3)$ de una placa metálica plana, cuya temperatura en cualquier punto (x, y) viene dada por

$$T(x, y) = 10 - 8x^2 - 2y^2.$$

Encontrar una ecuación para la trayectoria de la partícula si se mueve continuamente en la dirección de aumento máximo de temperatura.

-
- 20** Dada la función de densidad

$$\lambda(x, y) = 48 - \frac{4}{3}x^2 - 3y^2,$$

encontrar la tasa de variación de la misma en las siguientes circunstancias:

- (a) En $(1, -1)$ en la dirección en la que la densidad decrece más rápidamente.
 - (b) En $(1, 2)$ en la dirección del eje x .
 - (c) En $(2, 2)$ alejándose del origen.
- 21** a) (**Examen enero 2020**) Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y, z) = xy + z^2(x + y)$ y $v = (1, 1, 1)$. Calcula la derivada direccional $D_v f(3, 2, 1)$.
- b) Dada la función $f(x, y) = e^{ax+by} \cos(x+y)$. Encuentra los valores de a y b para que su máxima derivada direccional en el punto $(0, 0)$ sea $3\sqrt{2}$ y apunte en la dirección de la bisectriz del primer cuadrante.

4.5.5. Extremos libres y condicionados

- 22** Estudia los extremos de las funciones

- a) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4x - 2y + 18$.
- b) $f(x, y) = y^2 - x^2$.

- 23** Estudia los máximos/mínimos relativos y puntos de silla de

- a) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy + 4$.
- b) $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3x^2 - 3y^2 - 7$.

- 24** Clasifica los puntos críticos de los siguientes campos escalares:

- a) $f(x, y) = -xye^{-(x^2+y^2)/2}$.
- b) $f(x, y) = (x^2 + 3y^2)e^{1-x^2-y^2}$.
- c) $f(x, y) = 2x^2 + y^2 - xy - 7y$.

- 25** Estudia los máximos/mínimos absolutos de la función $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y$ en el rectángulo

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2\}.$$

- 26** Encuentra el valor máximo y el valor mínimo del campo escalar $f(x, y) = xy - 2x - 3y$ en la región triangular

$$T = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 2x\}$$

27 Encuentra los extremos absolutos del campo escalar $f(x, y) = \sin x + \cos y$ en el rectángulo R definido por $0 \leq x \leq 2\pi$, $0 \leq y \leq 2\pi$.

28 Encuentra los extremos de

a) $f(x, y) = 2x + 6y$ en la región D descrita por la ecuación $x^2 + y^2 = 10$.

b) $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 2$ en la circunferencia dada por $x^2 + y^2 = 1$.

c) $f(x, y) = x^2 + y^2$, que verifican la restricción $x^2 + 2y^2 = 2$.

29 Tenemos cartón de 24 m^2 para construir una caja rectangular. ¿Cuál es el máximo volumen que podemos conseguir?

30 a) Estudia los extremos absolutos de la función $f(x, y) = (x - 1)^2 + (y - 2)^2$ bajo la restricción $x^2 + y^2 \leq 45$.

b) Encuentra los valores máximo y mínimo que alcanza la función $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ en el círculo unidad.

31 Esta Navidad Mercadona vende dos tipos de cava que compra a su proveedor habitual por 3 y 4 euros por litro. El primer tipo de cava tiene un precio de venta al público de x euros por litro y el segundo tipo de y euros; además, el número de litros que se puede vender diariamente de cada uno viene dado por

$$f_1(x, y) = 90(2y - x) \quad \text{y} \quad f_2(x, y) = 30(73 - 7x - 5y).$$

Calcula cuál debe ser el precio de venta para alcanzar el máximo beneficio, las cantidades óptimas que se deben vender de cada tipo y el beneficio diario obtenido.

32 Tenemos una placa metálica circular de radio 5, cuya temperatura en un punto cualquiera (x, y) viene dada por la función

$$T(x, y) = 25 + 4x^2 - 4xy + y^2.$$

Colocamos una alarma térmica en distintos puntos del interior y el borde de la placa, la cual se dispara a temperaturas por encima de 180 grados o por debajo de 20 grados. ¿Saltará la alarma?

33 **(Examen enero 2020)** Usa el método de los multiplicadores de Lagrange para encontrar los extremos absolutos de la función $f(x, y) := 4x^2 + 9y^2 - x^2y^2$ en el conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + y^2 \leq 4\}$.

Tema 5

Cálculo de primitivas e integración

*A Dios no le importan nuestras dificultades matemáticas.
Él integra empíricamente.*

[Albert Einstein]

A nivel histórico el cálculo integral se introduce como herramienta para el cálculo de áreas. También mostraremos a lo largo de este tema que integrar es la operación inversa a la derivación en cierto sentido, que precisaremos a través del Teorema Fundamental del Cálculo.

5.1. La integral definida

5.1.1. Definición usando sumas de Riemann

La **integral definida** $\int_a^b f(x) dx$ de una función no negativa $f : [a, b] \rightarrow [0, \infty)$ se define gráficamente como un **área**, en concreto, como el valor que da la medida del área de la superficie encerrada por el intervalo $[a, b]$ por encima del eje x y por debajo de la gráfica G_f de f y, por otra parte, contenida entre las dos líneas verticales $x = a$ y $x = b$.

Pero esta definición no puede ser válida si no viene acompañada de una explicación de cómo calcular dicha área.

Definición 5.1: Partición

Una **partición** del intervalo $I = [a, b]$ es un conjunto ordenado de puntos $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Denotaremos por $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ al k -ésimo subintervalo que se ha formado, para $k = 1, \dots, n$, y representamos la longitud de dicho intervalo como

$$|I_k| = x_k - x_{k-1}.$$

De ahora en adelante, tomamos $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$ y escribimos $I = [a, b]$.

Definición 5.2: Sumas de Riemann

Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada y $\{x_0, \dots, x_n\}$ una partición del intervalo I . Escogemos un punto cualquiera en $c_k \in I_k$ en cada subintervalo formado y construimos una **suma de Riemann**:

$$\sum_{k=1}^n f(c_k) \cdot |I_k|$$

Geométricamente $f(c_k) \cdot |I_k|$ es el área de un rectángulo de base I_k y altura $f(c_k)$, luego la suma de Riemann es la suma de las áreas de rectángulos y, por tanto, trata de aproximar el valor del área bajo la curva que representa la gráfica de f , en el caso de que $f \geq 0$. Esta aproximación será tanto mejor cuanto más fina sea la partición del intervalo original, es decir, cuanto más pequeñas sean las bases de cada uno de los rectángulos.

Así pues, si tomamos límites cuando las longitudes de todos los subintervalos tienden a cero, el valor obtenido (caso de que exista el límite) será el área buscada, y es a lo que llamaremos integral definida. Dicho concepto, como límite de las sumas de Riemann, se puede definir para cualquier función acotada y, si además su gráfica está por encima del eje x , entonces el valor de la integral se interpreta como el área bajo la curva.

Definición 5.3: Integral definida

Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada. Con la notación introducida anteriormente, definimos

$$\int_I f = \int_a^b f = \lim_{\max |I_k| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(c_k) \cdot |I_k| \quad (5.1)$$

la integral de la función f sobre el intervalo I o entre a y b .

Los valores a y b se llaman extremos o límites de integración y la función f es el integrando. En lo sucesivo también usaremos la siguiente notación

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x) dx,$$

donde x se conoce como la variable de integración. Esta manera de escribir las integrales es especialmente útil cuando la función f , además de x , depende de otras variables $y, z, \dots$, pues entonces es necesario especificar respecto de cuál de todas las variables se realiza la operación de integración.

Si la función admite valores negativos, las sumas de Riemann de esa parte serán negativas y entonces el área encerrada entre la parte de la gráfica por debajo del eje x y el propio eje la estamos calculando con signo negativo. En definitiva,

$$\int_I f = \text{área bajo } G_f \text{ sobre } OX - \text{área sobre } G_f \text{ bajo } OX.$$

La elección más sencilla para la partición sería escoger todos los subintervalos de la misma

longitud $|I_k| = \frac{(b-a)}{n}$, entonces el límite (5.1) quedaría

$$\int_I f = \int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(c_k) \cdot |I_k|.$$

Para los puntos c_k lo más cómodo es escoger siempre el punto medio de cada intervalo.

5.1.2. Integrabilidad y propiedades

Como acabamos de ver, existen distintas posibilidades de elegir tanto la partición del intervalo como los puntos donde se evalúa la función en cada subintervalo, además, podría suceder que el límite de las sumas de Riemann no existiera.

Definición 5.4: Función integrable

Se dice que una función $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable cuando existe el límite (5.1) (es decir, se obtiene un número real finito) y su valor es único, independientemente de las elecciones realizadas para la partición del intervalo o para los puntos c_k en cada subintervalo.

Antes de preguntarnos en qué condiciones podemos asegurar que una función es integrable, necesitamos revisar las propiedades que satisfacen las integrales definidas, cuya ventaja es que son fáciles de entender y deducir si pensamos en áreas.

Lema 5.5: La integral es lineal

Sean $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ funciones integrables en I y $c \in \mathbb{R}$. Entonces se cumple:

(1) $\int_a^a f = 0$.

(2) cf es integrable en I y $\int_I (cf) = c \int_I f$.

(3) $f + g$ es integrable en I y $\int_I (f + g) = \int_I f + \int_I g$.

Por otro lado, la integración preserva las desigualdades y podemos descomponer el intervalo de integración en dos trozos que no se solapan e integrar en dos pasos, como muestra la siguiente lista de propiedades:

Lema 5.6: Propiedades de la integral definida

Sean $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ funciones integrables en I . Entonces se cumple:

- (1) Si $f \leq g$ (es decir, $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in I$), se tiene que

$$\int_I f \leq \int_I g.$$

- (2) $\min_I f \cdot (b - a) \leq \int_I f \leq \max_I f \cdot (b - a)$.

- (3) Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ y $c \in (a, b)$. En este caso, f es integrable si y solo si $f|_{[a, c]}$ y $f|_{[c, b]}$ son integrables ($f|_J$ significa que tomamos solo como dominio el subconjunto $J \subset I$). Además, se verifica

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

La última propiedad nos sirve para integrar, por ejemplo, funciones que se pueden descomponer en trozos más sencillos, como por ejemplo, $f(x) = |x|$.

Notemos que toda función derivable es continua (ver Teorema 1.17) y, a su vez, toda función continua es integrable. En efecto, si una función es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces estará acotada (ver Teorema 3.6) y, en consecuencia, el área limitada entre la gráfica y el eje será un valor finito. Pero existen funciones integrables que no necesariamente son continuas:

Teorema 5.7: Criterio de integrabilidad

Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada. Si f es continua a excepción de un número finito de puntos, entonces f es integrable en I .

5.1.3. Valor medio usando integrales

La media aritmética de un número finito n de valores $x_1, \dots, x_n$ se calcula de manera sencilla sumando todos los valores y dividiendo entre n , es decir,

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n).$$

Pero puede suceder que el valor de la media no se alcance por ningún x_i concreto. Por ejemplo, que la nota media de la clase en un examen sea un 6, pero ningún alumno haya sacado exactamente un 6.

Si nos planteamos calcular la media de una función sobre un intervalo e imitamos el proceso de la media aritmética, acabaremos haciendo una suma infinita para todos los puntos

del intervalo y dividiendo por la longitud del mismo, lo cual nos lleva en el límite a calcular una integral:

Definición 5.8: Valor medio de una función

Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $I := [a, b]$, así como $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función integrable en I . El valor medio de f en el intervalo I se calcula como sigue:

$$\bar{f} = \frac{1}{|I|} \int_I f = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

A diferencia de lo que sucede en el caso discreto cuando calculamos la media aritmética, si la función es continua el valor de la media siempre se alcanza en un punto concreto, como asegura el siguiente resultado:

Corolario 5.9: Teorema del valor medio integral

Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $[a, b]$ y $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Entonces existe un $c \in [a, b]$ con

$$\int_a^b f = f(c) \cdot (b-a),$$

en otras palabras, $f(c) = \bar{f}$.

Gráficamente, si $f \geq 0$, este teorema garantiza que existe un rectángulo de base el intervalo $[a, b]$ y altura $f(c)$ cuya área es exactamente igual que el área por debajo de la gráfica de f sobre el intervalo $[a, b]$. Notemos que esto solo se puede asegurar cuando la función es continua.

5.2. Derivada versus Integral

En este apartado nos vamos a centrar en la relación fundamental, estudiada tanto por Leibniz como por Newton, entre derivación e integración.

5.2.1. Funciones primitivas o antiderivadas

Imaginemos que conocemos la velocidad de un objeto puntual y queremos averiguar su trayectoria. Por tanto, estamos buscando la operación contraria de derivar, ya que nos dan la derivada y nos piden *antiderivar*, es decir, encontrar una función cuya derivada sea la función que conocemos. Esto motiva la siguiente definición.

Definición 5.10: Primitiva o antiderivada

Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Una función $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ se denomina **primitiva o antiderivada** de f , si F es diferenciable en I y cumple que $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in I$. (En breve: $F' = f$ en I).

Como la derivada de una constante es cero, la operación de calcular primitivas o antiderivadas no se puede resolver de manera única, sino salvo una constante. Con más precisión,

Teorema 5.11: Unicidad de primitivas salvo una constante

Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

- (1) Si F es una primitiva de f , entonces $F + c$ también es primitiva de f , para cualquier constante $c \in \mathbb{R}$.
- (2) Si F, G son dos primitivas de la misma función f , se tiene que $F - G$ es constante, es decir, existe un valor $c \in \mathbb{R}$ con $F = G + c$.

Por tanto, cuando nos referimos a una primitiva o antiderivada no estamos hablando de una sola función, sino de un conjunto de funciones. El resultado anterior garantiza que, una vez seamos capaces de determinar una primitiva F , ese conjunto siempre es de la forma $F + c$, para cualquier constante $c \in \mathbb{R}$.

Definición 5.12: Integral indefinida

Sea f una función definida sobre un intervalo. La **integral indefinida** de f (si existe), $\int f(x) dx$, es el conjunto de todas las funciones primitivas de f , es decir,

$$\int f(x) dx = \{F + c \mid c \in \mathbb{R} \text{ y } F' = f\}.$$

Notemos la diferencia de lo anterior con la integral definida $\int_a^b f$ sobre el intervalo $[a, b]$: la integral indefinida es una función (en concreto, un conjunto infinito de funciones), mientras que la integral definida es un número. Por abreviar, solemos escribir simplemente

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

donde $C \in \mathbb{R}$ se conoce como la constante de integración.

La igualdad $F' = f$ es un ejemplo elemental de lo que se conoce como una **ecuación diferencial ordinaria (EDO)**. Con este lenguaje, el teorema anterior nos dice que una solución de dicha ecuación (si existe) está definida de manera única salvo la inclusión de una constante aditiva $c \in \mathbb{R}$. Así, nos surge de manera natural e inmediata la pregunta sobre la existencia de solución/antiderivada:

¿Para qué tipo de funciones f se puede resolver la EDO $F' = f$ en el intervalo I ?

El Teorema Fundamental del Cálculo nos garantizará que si f es continua entonces la ecuación anterior siempre tiene solución, y adicionalmente nos dirá cómo la podemos calcular.

5.2.2. Teorema Fundamental del Cálculo y consecuencias

De ahora en adelante, salvo que se diga lo contrario, I representa un intervalo de longitud positiva y finita.

¿Cómo se calculan las integrales en la práctica? Hasta ahora hemos visto una definición conceptual que se podría aplicar a funciones muy sencillas, pero no es práctico tener que construir en cada caso las sumas de Riemann para luego tomar límites. Una manera mucho más sencilla y aplicable nos la proporciona el siguiente resultado:

Teorema 5.13: Teorema Fundamental del Cálculo (TFC)

Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continua, $a \in I$ y $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ definida mediante

$$F(x) := \int_a^x f(t) dt \quad \text{para } x \in I.$$

Entonces se tiene:

- F es una primitiva/antiderivada de f .
- **Regla de Barrow:** Sea $b \in I$ y $G : I \rightarrow \mathbb{R}$ cualquier función primitiva de f . Entonces se sigue que

$$\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a)$$

Notación práctica: Se escribe $G \Big|_a^b = G(x) \Big|_a^b = G(x) \Big|_{x=a}^{x=b}$ en lugar de $G(b) - G(a)$.

Formas alternativas de expresar el TFC:

- Toda función continua admite una primitiva/antiderivada.
- Dicha primitiva o integral indefinida se calcula usando una integral definida, en la cual el extremo superior de integración es variable. En concreto, con la notación del teorema, se verifica

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x) \quad (5.2)$$

Notemos que si x aparece como extremo de integración, podemos usar cualquier letra menos x para representar la variable respecto de la que se integra.

- Las integrales definidas se obtienen una vez se conoce cualquier antiderivada del integrando.

- Si F es una función diferenciable con derivada F' continua, se tiene que

$$\int_a^b F'(t) dt = F(b) - F(a). \quad (5.3)$$

En particular, si $F(a) = 0$, se tiene que $\int_a^b F'(t) dt = F(b)$. En este sentido, junto con la igualdad (5.2), entendemos que las operaciones de derivación e integración son inversas, pues se cancelan una a la otra si se aplican sucesivamente.

En la práctica, el Teorema Fundamental del Cálculo nos da una estrategia para calcular primitivas sencillas, las llamadas **integrales inmediatas**. En ellas simplemente debemos encontrar una antiderivada F de la función que aparece en el integrando y calcular $F(b) - F(a)$, siendo a y b los límites de integración.

También justifica la generalización del concepto de derivada a situaciones en que el extremo inferior de integración es mayor que el superior; en concreto, si $b > a$, se define

$$\int_b^a f := - \int_a^b f.$$

Por otro lado, como consecuencia de la igualdad (5.3), el cambio neto de una función F en un intervalo $[a, b]$, es decir, la diferencia $F(b) - F(a)$ es la integral de su tasa de variación. Dicho de otra manera, el valor final se calcula sumando al valor inicial el cambio neto:

$$F(b) = F(a) + \int_a^b F'(x) dx.$$

Finalmente, cabe destacar que una integral definida es un número y, por tanto, el nombre de la variable de integración es completamente irrelevante; en efecto, si F es una primitiva de f , se obtiene

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t) dt.$$

5.3. Métodos de integración

Cuando no somos capaces de vislumbrar la función antiderivada, existen una serie de trucos que permiten calcular integrales de funciones más complejas. Aquí nos centraremos en los dos métodos más importantes:

Teorema 5.14: Sustitución o cambio de variable

Sean $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continua y $g : [a, b] \rightarrow I$ con derivada continua. Entonces

$$\int_a^b f(g(t)) \cdot g'(t) dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x) dx.$$

Para calcular una integral por sustitución, se aplica la siguiente *receta*: si nos piden una integral de la forma $\int_a^b f(y) dy$ y queremos sustituir $y = y(x)$, entonces diferenciamos a ambos lados de la igualdad:

$$y = y(x) \quad \Rightarrow \quad dy = y'(x) dx.$$

Para los extremos de integración, tenemos que despejar x de la igualdad anterior y obtener los valores de x correspondientes a $y = \alpha$ e $y = \beta$:

$$x = x(y) \quad \Rightarrow \quad a = x(\alpha), \quad b = x(\beta).$$

Con lo anterior, se llega a

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(y) dy = \int_a^b f(y(x)) y'(x) dx.$$

Cuando se trata de integrar el producto de dos funciones en el que una de ellas es complicada, entonces usamos

Teorema 5.15: Integración por partes

Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, y sean $u, v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones definidas sobre el intervalo $[a, b]$ con derivada continua. Entonces se verifica

$$\int_a^b uv' = [uv]_a^b - \int_a^b u'v.$$

La expresión anterior se obtiene al integrar a ambos lados la regla de la derivada del producto de dos funciones. Normalmente se elige como u la función que resulte más complicada y que sea más sencilla si la derivamos, por ejemplo, $u = \log x$.

5.4. Integrales impropias

Hasta ahora hemos definido integrales sobre intervalos cerrados, donde además las funciones están acotadas. En este apartado, consideraremos cómo se podrían integrar funciones tanto no acotadas como funciones definidas sobre intervalos infinitos. Una integral de este último tipo sería necesaria, por ejemplo, para calcular la energía de escape de un cohete, es decir, el trabajo necesario para que en su lanzamiento llegue a *escapar* del campo gravitatorio terrestre.

Definición 5.16: Integral impropia - intervalo no acotado

- Tomamos una función $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ que sea integrable sobre el intervalo $[a, b]$ para cualquier $b < \infty$. La integral impropia de f sobre $[a, \infty)$ viene dada por el límite (si existe):

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$$

Si el límite existe, diremos que la integral converge y, en otro caso, se dice que es divergente.

- Si la integral de f sobre el intervalo $[a, b]$ existe para todo $a \leq b$, entonces

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$$

si el límite existe (es un valor finito)

Usando las dos definiciones anteriores, combinadas con las propiedades de las integrales, podemos incluso definir la integral de una función sobre toda la recta real $\mathbb{R}$:

$$\int_{\mathbb{R}} f = \int_{-\infty}^\infty f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^\infty f(x) dx,$$

para cualquier $c \in \mathbb{R}$. Esta integral es convergente si las dos integrales impropias del lado derecho son convergentes en el sentido de la definición anterior.

Si una función positiva tiene una asíntota vertical, tampoco está claro que el área bajo la gráfica sobre el eje x sea finita. Esto nos lleva a considerar un segundo tipo de integrales impropias.

Definición 5.17: Integral impropia - integrando no acotado

- Si f es continua en $(a, b]$ y $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$, entonces

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b f(x) dx$$

- Si f es continua en $[a, b)$ y $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \pm\infty$, entonces

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f(x) dx$$

Si f tiene una asíntota vertical en $c \in [a, b]$, entonces combinamos las dos definiciones anteriores para calcular

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Ejemplo 5.18 Se cumple

$$\int_1^{\infty} t^{\alpha} dt < \infty \Leftrightarrow \alpha < -1, \quad \int_0^1 t^{\alpha} dt < \infty \Leftrightarrow \alpha > -1.$$

Además ambas integrales divergen para $\alpha = -1$.

5.5. Aplicaciones de la integral

5.5.1. Área entre dos gráficas

Hasta ahora sabemos cómo calcular el área entre la gráfica de una función y el eje x . Si ahora tenemos dos funciones $f \geq g \geq 0$, el área entre las gráficas de f y g vendrá dada por

$$\begin{aligned} A &= [\text{área entre } f \text{ y el eje } x] - [\text{área entre } g \text{ y el eje } x] \\ &= \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx. \end{aligned}$$

Cuando las funciones pueden cambiar de signo, la misma fórmula es válida porque el área entre ellas seguiría siendo la misma.

Definición 5.19: Área entre dos gráficas

Si f y g son integrables en $[a, b]$, con $f \geq g$ (es decir, $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$), entonces el área de la región del plano encerrada entre las curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ desde a hasta b es igual a

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx.$$

En general, para funciones donde $f - g$ cambie de signo, el área anterior se calcularía como

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$

En la práctica, buscamos los puntos de intersección entre las curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ y estudiamos el signo de $f - g$ en cada tramo comprendido entre dichos puntos, así se decide si integramos $f - g$ (caso de que $f \geq g$) o $g - f$ (si sucede que $f \leq g$).

5.5.2. Cálculo de longitudes

La longitud de una curva no la podemos calcular directamente porque solo sabemos calcular longitudes de segmentos, pero podemos ir aproximando la longitud de una curva por líneas poligonales con trozos cada vez más pequeños, hasta formar una suma de Riemann que convergerá a la integral correspondiente.

Proposición 5.20: Longitud de una curva dada por una gráfica

Si f es diferenciable en (a, b) y f' es continua en (a, b) , entonces la longitud de la curva $y = f(x)$ desde a hasta b es

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

Si tenemos una curva general $c(t)$ para $t \in [a, b]$, que no necesariamente provenga de la gráfica de una función, su longitud se calcula integrando la longitud del vector tangente a la curva en todo punto

$$V = \int_a^b |c'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt.$$

Notemos que la primera igualdad es válida para cualquier curva en el espacio o el plano, mientras que la segunda se verifica para el caso concreto de una curva en el plano de la forma $c(t) = (x(t), y(t))$. Si ponemos $c(t) = (t, f(t))$ recuperamos la fórmula de la proposición anterior.

5.5.3. Cálculo de volúmenes

Proposición 5.21: Método de las rebanadas

El volumen de un sólido, si conocemos el área $A(x)$ de una sección transversal que lo recorre entre $x = a$ y $x = b$, viene dado por

$$V = \int_a^b A(x) dx.$$

Sea S el sólido de revolución obtenido al girar la gráfica de una función f alrededor del eje x para valores de x comprendidos entre a y b . Como el corte de dicho sólido con planos paralelos al plano yz nos da secciones circulares de área $\pi \cdot f(x)^2$, aplicando el método de las rebanadas llegamos a que el volumen de S se calcula como sigue:

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx.$$

Podemos aplicar un razonamiento similar para obtener el volumen generado al girar alrededor de un eje el área comprendida entre dos gráficas:

Corolario 5.22: Método de las arandelas

Sean dos funciones $f \geq g \geq 0$ continuas en $[a, b]$ y R la región comprendida entre sus gráficas y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$. El volumen del sólido de revolución obtenido al girar R alrededor del eje x viene dado por la integral

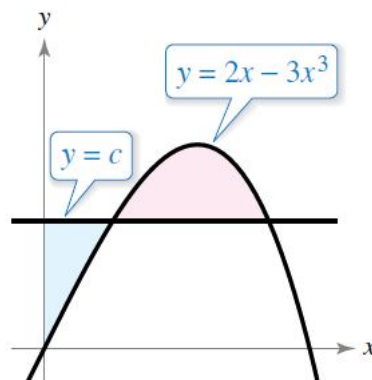
$$V = \pi \int_a^b (f(x)^2 - g(x)^2) dx.$$

5.6. Ejercicios

5.6.1. Integral definida. Propiedades y teorema del valor medio

1 Usa el significado de la integral definida para responder a las siguientes cuestiones:

- a) Calcula $\int_0^1 (5 - 3\sqrt{1-x^2}) dx$.
- b) (Prueba EC diciembre 2019) Encuentra c para que las áreas de las regiones sombreadas sean iguales.



2 Usa las propiedades de la integral definida para responder a las siguientes cuestiones:

- a) Sabiendo que $\int_{-1}^1 f(x) dx = 5$, $\int_1^4 f(x) dx = -2$ y $\int_{-1}^1 h(x) dx = 7$, calcula

$$\int_{-1}^1 (2f(x) + 3h(x)) dx \quad \text{y} \quad \int_{-1}^4 f(x) dx$$

- b) Justifica la desigualdad $\int_0^1 \sqrt{1 + \cos x} dx \leq \sqrt{2}$

- c) Encuentra dos números $a, b \in \mathbb{R}$ que cumplan $a \leq \int_0^1 e^{-x^2} dx \leq b$.

-
- 3 a) Sea f una función continua en $[a, b]$ con $a \neq b$ que cumple $\int_a^b f(x) dx = 0$. Justifica que entonces $f(x) = 0$ al menos para un valor $x \in [a, b]$.

- b) Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que $|f(x)| < 1$ para todo $x \in [a, b]$. Justificar que

$$\alpha(n) = \int_a^b [f(x)]^n dx$$

tiene límite 0 cuando $n \rightarrow \infty$.

- 4 a) Supongamos que $C(t)$ representa el coste diario de calefacción en EDEM, calculado en euros por día, donde t es el tiempo medido en días y $t = 0$ corresponde al 1 de enero de 2019. Interpreta las cantidades $\int_0^{90} C(t) dt$ y $\frac{1}{90-0} \int_0^{90} C(t) dt$

- b) El 1 de enero de 2018 la población mundial era de 5,9 billones de habitantes con un crecimiento a razón de un 1,34 % anual. Tomando esa fecha como instante inicial y suponiendo que la tasa de crecimiento se mantiene, la población pasados t años vendría dada por la siguiente ley de crecimiento exponencial:

$$P(t) = 5,9 \cdot e^{0,134t}$$

Determina la población media durante los próximos 30 años (Esta media es importante para la planificación a largo plazo de la producción agrícola o de la gestión de bienes y servicios.)

- 5 Sea $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua que cumple

$$\int_0^x f(t) dt = \int_x^1 f(t) dt \quad \text{para todo} \quad x \in (0, 1)$$

Probar que $f(x) = 0$ para todo x del intervalo $[0, 1]$.

- 6 Una barra larga y muy fina está hecha de un material cuya densidad varía a lo largo de la longitud de la barra, siendo x la distancia a uno de los extremos de dicha barra. Supongamos que la función de densidad viene dada por

$$\rho(x) = ax, \quad 0 \leq x \leq L,$$

donde a es una constante conocida.

- Encuentra la masa total de la barra.
- Halla la densidad media a lo largo de la barra. ¿Existe algún punto de la barra que tenga exactamente esa densidad? Razona la respuesta.
- Encuentra el centro de masas de la barra.
- ¿Dónde debemos cortar la barra para obtener dos trozos de igual masa?

5.6.2. Antiderivadas y teorema fundamental del cálculo

- 7 Un cohete se lanza verticalmente al espacio. Su velocidad t segundos después del despegue es $v(t) = 6t + 0,5$ metros por segundo. Antes del lanzamiento, la parte superior del cohete está a 8 metros sobre la plataforma de lanzamiento. Encuentra la altura del cohete (medida desde la parte superior del cohete hasta la plataforma de lanzamiento) en el momento t .
- 8 Encuentra la función $f(x)$ para la cual $f'(x) = x^2 - 2$ y $f(1) = \frac{4}{3}$. [Equivalentemente, en este problema lo que se está pidiendo es resolver la ecuación diferencial $y' = x^2 - 2$, con la condición inicial $y(1) = \frac{4}{3}$.
- 9 Un cohete se lanza verticalmente al espacio. Su velocidad t segundos después del despegue es $v(t) = 160 - 32t$ metros por segundo.
- Encuentra el desplazamiento del cohete en el intervalo temporal $0 \leq t \leq 8$. Interpreta el resultado en términos del área bajo la gráfica de $v(t)$.
 - Encuentra la distancia total recorrida por el cohete en el intervalo temporal $0 \leq t \leq 8$. Interpreta esta distancia como un área.
- 10
- Encontrar la primitiva de $f(x) = x + \frac{4}{x^2}$ que vale 5 en el 2.
 - Determinar la ecuación de la función polinómica f cuya gráfica pasa por los puntos $(0, 1)$ y $(1, 1)$ y para la que además $f''(x) = 6x + 4$.
 - Obtener dos funciones cuya derivada sea $f(x) = \frac{1}{x+1} + e^{2x}$ tales que en el punto $x = 0$ una tenga doble valor que la otra.
- 11
- Sea $F(x) = \int_{x^2}^{x^2+1} e^{-t^2} dt$. Calcular $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x)$.
 - Dada $F(x) = \int_1^{\sin^3 x + e^{-x^2}} (2 - 5t) dt$, calcula $F'(x)$
- 12
- Encuentra una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y un punto $a \in \mathbb{R}$ que cumplan
$$\int_a^x t f(t) dt = \sin x - x \cos x - \frac{1}{2}x^2,$$
para todo $x \in \mathbb{R}$.
 - Sea una función $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ que verifica $f(1) = 1$ y $f'(x^2) = x^3$ para cualquier $x > 0$. Halla el valor de $f(4)$.
 - Dada una función continua $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definimos

$$f(x, y, z) = \int_{x^2+y^2}^{\sin(xyz)} \varphi(t) dt.$$

Calcula la derivada parcial de f con respecto a x .

5.6.3. Métodos de integración

- 13** Usa integración por partes o por cambio de variable para calcular las siguientes integrales o primitivas:

(a) $\int_0^1 \frac{e^{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}} dx$

(b) $\int_1^x \log u \, du$

(c) $\int x \sin(x^2) \, dx$

(d) Calcula el área del semicírculo de radio 1: $\int \sqrt{1-x^2} \, dx$.

- 14** Comprueba las siguientes afirmaciones:

(a) Si una función es par, o sea, si $f(x) = f(-x)$, se cumple $\int_{-a}^a f(x) \, dx = 2 \int_0^a f(x) \, dx$.

(b) Si una función es impar, o sea, si $f(x) = -f(-x)$, se cumple $\int_{-a}^a f(x) \, dx = 0$.

- 15** Calcula $\int_{-1}^4 |3x| \, dx$, y $\int_{-1}^1 (x + |x|) \, dx$.

- 16** Evaluar las siguientes integrales usando integración por partes:

(a) $\int x e^x \, dx$

(e) $\int \log(x+1) \, dx$

(b) $\int \frac{x}{2^x} \, dx$

(f) $\int \frac{\log(x)}{x^2} \, dx$

(c) $\int \arctan(x) \, dx$

(g) $\int x \log(x) \, dx$

(d) $\int \sin^2 x \, dx$

(h) $\int x \log(x)^2 \, dx$

(i) $\int e^x \cos(3x) \, dx$

- 17** Evaluar las siguientes integrales haciendo (si es necesario) un cambio de variable adecuado:

(a) $\int e^{2x} \sin(e^x) dx$ (b) $\int \sin(\sin x) \cos x dx$ (c) $\int \frac{e^x}{(e^x + 1)^3} dx$ (d) $\int \frac{e^{-2x}}{1 + e^{-4x}} dx$	(e) $\int \frac{\cos(\log x)}{x} dx$ (f) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x} + 1} dx$ (g) $\int \frac{x}{x^4 + 1} dx$ (h) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x - 1} + 4x - 2}$
--	---

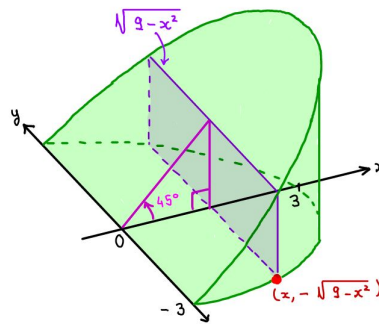
5.6.4. Cálculo de áreas en el plano

- 18** Calcula el área encerrada entre las curvas $f(x) = 3x^3 - x^2 - 10x$ y $g(x) = -x^2 + 2x$.
- 19** Halla el área determinada por la curva $y = (x - 1)(x + 2)$, las rectas $x = -3$ y $x = 2$ y el eje de abscisas.
- 20** Encuentra la función que mide el área de las regiones limitadas por el eje horizontal y las rectas:
- (a) $y = 3x - 3$ y la recta vertical trazada por el punto de abscisa x con $x > 1$.
 - (b) $y = x$ si $x \leq 3$; $y = -x + 6$ si $x > 3$; la recta vertical trazada por el punto de abscisa x . Distingue entre $0 \leq x \leq 3$ y $3 \leq x \leq 6$.
- 21** Calcula el área de la región limitada por:
- a) la gráfica $y = x^2$, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = 2$.
 - b) La gráfica de $y = 1/x$, el eje horizontal y las rectas verticales $x = 1$ y $x = 2$.
 - c) El eje horizontal y la gráfica de $y = x^2 - 2x - 3$.
 - d) Las gráficas de $f(x) = 2x - x^2$ y $g(x) = x^2 - 3/2$.
 - e) Las curvas $y = x + 6$ e $y = x^2$.
 - f) La gráfica de la función $g(x) = x^3 - 9x$ y el eje OX.
 - g) La gráfica de $f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{si } -2 \leq x \leq 0 \\ 4 - x & \text{si } 0 < x \leq 4 \end{cases}$ y el eje de abscisas.
- 22** Dada la función $f(x) = x^2 + a$ con $a > 0$, calcula el valor de a para que el área determinada por la gráfica de la función, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 3$ valga 27.

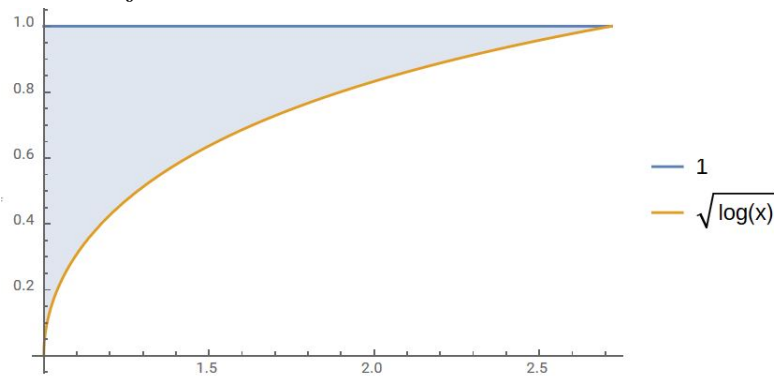
- 23 Representa gráficamente y halla el área del recinto ABC , donde $A = (0, 0)$, $B = (0, 2)$, $C = (1, 1)$, las líneas AB y BC son rectas, y la línea AC tiene por ecuación $y = 2x - x^2$.
- 24 Obtener el área encerrada por la curva lemniscata de ecuación $y^2 = x^2 - x^4$.

5.6.5. Cálculo de volúmenes

- 25 Cortamos una cuña curva de un cilindro circular de radio 3 con dos planos. Un plano es perpendicular al eje de rotación del cilindro. El segundo plano corta al primero en un ángulo de 45° en el centro del cilindro. Encuentra el volumen de la cuña.



- 26 (Prueba EC diciembre 2019) Calcula el volumen obtenido al girar la región sombreada alrededor del eje x .



- 27 Encuentra el volumen del sólido generado al rotar la región de plano entre la parábola $x = y^2 + 1$ y la recta $x = 3$ en torno a la recta $x = 3$.
- 28 a) Encuentra el volumen del sólido formado por revolución alrededor del eje x de la región limitada por las gráficas de las funciones $y = \sqrt{x}$ e $y = x^2$.

b) Calcula el volumen del sólido obtenido al girar las gráficas de

$$y = x^2 + 1, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 1$$

alrededor del eje y .

29 Justifica que el volumen de una pirámide de base cuadrada y altura h viene dado por

$$V = \frac{1}{3}hA_B,$$

donde A_B representa el área de la base.

30 La región de plano acotada por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = 2x$ en el primer cuadrante se hace rotar en torno al eje y para generar un sólido. Encuentra el volumen del sólido.

31 Se taladra una esfera metálica con una broca cilíndrica justo por el centro de la esfera, creando un agujero de altura h . Calcular el volumen de la esfera agujereada resultante.

5.6.6. Integrales impropias

32 Determina si las siguientes integrales son convergentes o divergentes:

(a) $\int_1^\infty e^{-x^2} dx$

(b) $\int_1^\infty \frac{4}{x^3} dx$

(c) $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{e^x}} dx$

(d) $\int_0^\infty \sin x dx$

(e) $\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{2x^2-1}} dx$

(f) $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt[4]{5e^x}} dx$

(g) $\int_{-\infty}^1 \frac{x}{(x^2+9)^2} dx$

(h) $\int_{-1}^0 \frac{x^5}{\sqrt{1+x^3}} dx$

(i) $\int_0^2 \frac{1}{x-2} dx$

(j) $\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

(k) $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$

(l) $\int_{-\infty}^\infty |x|e^{-x^2} dx$

(m) $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^2+2x+2} dx$

(n) $\int_{-\infty}^\infty e^{-|x|} dx$

(ñ) $\int_{-\infty}^\infty xe^{2x} dx$

(o) $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{2^x}$

(p) $\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} dx$

(q) $\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

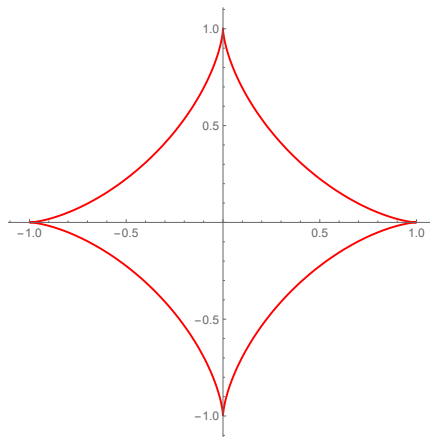
(r) $\int_4^5 \frac{x}{\sqrt[5]{(5-x)^2}} dx$

(s) $\int_0^1 x \log x dx$

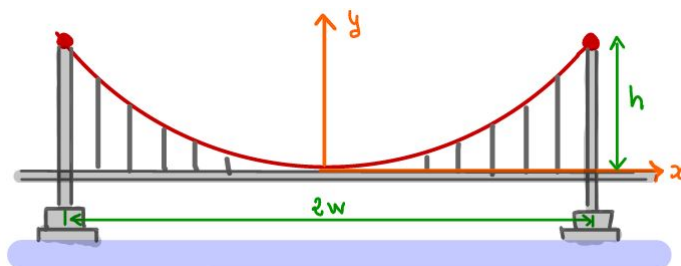
-
- 33** (Prueba EC diciembre 2019) Estudia la convergencia o divergencia de la integral impropia $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x+1|} dx$.

5.6.7. Cálculo de longitudes de curvas

- 34**
- Calcula la longitud de arco de la circunferencia unidad y de una hélice.
 - Justifica que la línea recta da la distancia más corta entre dos puntos.
- 35** Calcula la longitud de la curva astroide definida por la ecuación $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$:



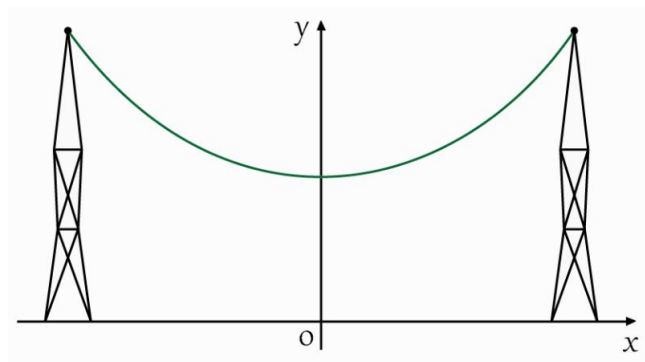
- 36**
- Un cable para un puente colgante tiene forma de parábola de ecuación $y = kx^2$. Sea h la altura del cable desde su punto más bajo al más alto y $2w$ representa la longitud total del puente (ver figura).



Razona que la longitud L del cable viene dada por

$$L = 2 \int_0^w \sqrt{1 + \frac{4h^2}{w^4} x^2} dx$$

- Un cable eléctrico está colgado entre dos torres que están a 200 metros de distancia como indica la figura.



Bajo la acción de la gravedad el cable toma la forma de una catenaria dada por la ecuación

$$y = 75(e^{x/150} + e^{-x/150}) =: 150 \cosh \frac{x}{150}$$

Encuentra la longitud del cable que cuelga entre las dos torres.

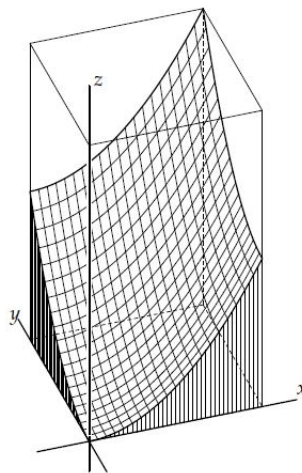
- 37** (Prueba EC diciembre 2019) Calcula la longitud de la curva $y = \int_x^1 \sqrt{t^3 - 1} dt$ para $1 \leq x \leq 4$.

Apéndice A

Ejercicios de integración en varias variables

A.1. Integrales dobles. Centros de gravedad

- 1 a) Calcula el volumen bajo la gráfica del paraboloide $z = x^2 + y^2$ sobre el cuadrado $R = [0, 1] \times [0, 1]$.



- b) Encuentra el volumen del sólido cuya base es el triángulo en el plano xy limitado por el eje x y las líneas $y = x$ y $x = 1$ y cuya parte superior se encuentra sobre el plano $z = f(x, y) = 3 - x - y$. Calcula la integral doble correspondiente de dos maneras distintas.
- 2 a) Calcula $\int_R f(x, y) dA$ de dos maneras distintas (cambiando el orden de integración) para
- $$f(x, y) = 100 - 6x^2y \quad \text{y} \quad R = [0, 2] \times [-1, 1].$$
- b) Encuentra el volumen de la región por debajo del paraboloide elíptico $z = 10 + x^2 + 3y^2$ y sobre el rectángulo $R = [0, 1] \times [0, 2]$

-
- 3 Sea $I = \int_D (x - y) dA$, siendo D la región del plano dada por
- $$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq x^2, x + y \leq 2\}.$$
- a) Calcula la integral integrando primero respecto de la variable y .
b) Calcula la integral integrando primero respecto de la variable x .
- 4 Calcula $\int_D xy dA$, siendo D la región limitada por la recta $y = x + 1$, la porción de la elipse $4x^2 + 9y^2 = 36$ que está en el primer cuadrante y el eje OX .
- 5 Sea D el recinto acotado por las rectas
- $$y = 0, \quad y = 1, \quad x = -1, \quad x = y.$$
- a) Hallar $I = \int_D (xy - y^3) dA$ por medio de una integral iterada utilizando x como primera variable de integración.
b) Comprobar el valor de I hallando la integral iterada usando y como primera variable de integración.
- 6 La superficie que bordea la cavidad de una copa de vino tiene la expresión $z = x^2 + y^2$ con una altura de 10 cm. Si se sabe que una persona empieza a estar *piripi* al haber bebido 1,5 litros de vino, hallar el número de copas de vino, suponiendo que se llenan enteras, que deberá tomar para alcanzar este estado.
- 7 a) Considera un triángulo rectángulo de base b y altura h . Utiliza integrales dobles para calcular que el centro de gravedad de dicha figura está a distancia $h/3$ de la base y dista $b/3$ del lado perpendicular a la base.
b) Considera un semicírculo de radio r centrado en el origen de coordenadas. Calcula que las coordenadas de su centro de gravedad vienen dadas por $(x_G, y_G) = (0, \frac{4r}{3\pi})$.
c) Sea ahora un cuarto de círculo de radio r centrado en el origen de coordenadas. Deduce que las coordenadas de su centro de gravedad vienen dadas por $(x_G, y_G) = (\frac{4r}{3\pi}, \frac{4r}{3\pi})$.
- 8 Calcula $\int_D (x^2 - y) dA$ siendo D la región comprendida entre las gráficas de las curvas $y = x^2$, $y = -x^2$ y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.
- 9 Hallar $\int_D xy dA$ siendo D la región del primer cuadrante encerrada entre las parábolas $y^2 = x$ e $y = x^2$. Haz la integral de las dos maneras posibles (intercambiando el orden de integración).
- 10 Tenemos una placa situada en la región $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 25\}$ y cuya temperatura es proporcional a su distancia al origen. Sabiendo que en el punto $(1, 0)$ su temperatura es de 100°C , hallar la temperatura media de dicha placa.

Integrales triples y de flujo

- 11 Calcula $\int_E y$ donde E es la región del espacio limitada por los planos

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0 \quad \text{y} \quad x + y + z = 1.$$

- 12 ¿Cuánto aire contiene la atmósfera en una columna vertical de altura h sobre 1 m^2 ? Para los cálculos, utiliza un modelo de atmósfera cuya densidad viene dada por

$$\rho(x, y, z) = Ce^{-z/L} \quad (\text{kg/m}^3),$$

donde z es la altura sobre el nivel del mar, C es la densidad a nivel del mar y L es una constante con unidades de longitud.

- 13 Una carga eléctrica q se sitúa en el origen del espacio tridimensional. El campo eléctrico resultante en el punto $p \in \mathbb{R}^3$ viene dado por

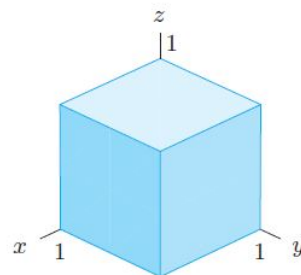
$$E(p) = kq \frac{p}{|p|^3}$$

Encuentra el flujo de E que atraviesa una esfera de radio R centrada en el origen.

- 14 Calcula el flujo del campo vectorial

$$F(x, y, z) = (x^2 + y^2, y^2 + z^2, x^2 + z^2)$$

a través de un cubo mostrado en la figura.



- 15 La temperatura T de una bola de metal es proporcional al cuadrado de la distancia desde el centro de la misma. Determine el flujo de calor a través de una esfera S de radio a con centro en el centro de la bola.
- 16 Sea el campo vectorial $F(x, y, z) = (xz, 3xy, -2z)$. Calcula el flujo de dicho campo que atraviesa la superficie del sólido

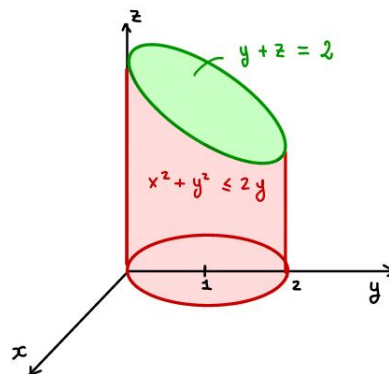
$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 3\}.$$

- 17 (Examen enero 2020) Sea el campo vectorial

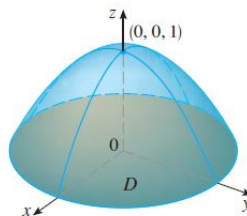
$$F(x, y, z) := (x^2 + \sin z, xy + \cos z, e^y).$$

Calcula el flujo de dicho campo que atraviesa la superficie del sólido

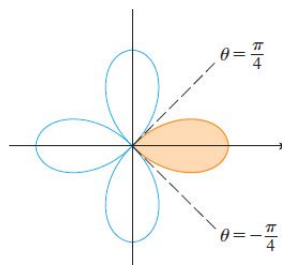
$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 2y, z \geq 0, y + z \leq 2\}.$$



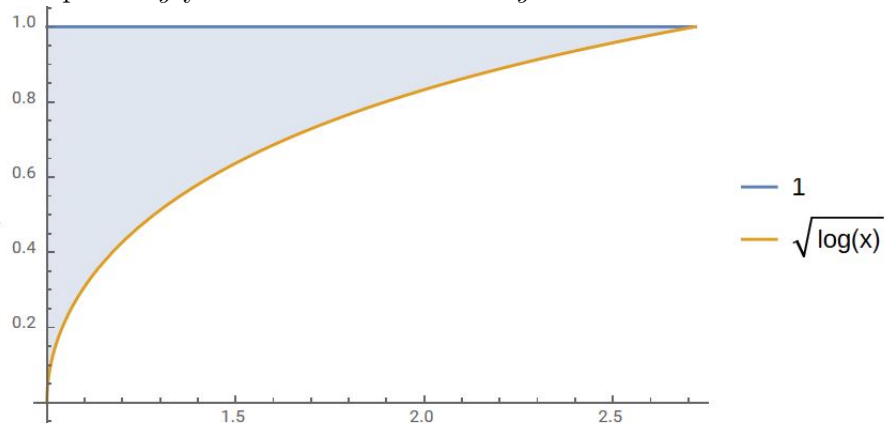
- 18 a) Calcula el volumen del sólido acotado por el plano $z = 0$ y el paraboloides $z = 1 - x^2 - y^2$.



- b) Encuentra el área encerrada por un pétalo de la rosa de cuatro hojas dada por $r = \cos(2\theta)$.



- c) Halla el volumen del sólido que se encuentra debajo del paraboloides $z = x^2 + y^2$, arriba del plano xy y dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 2x$.



Apéndice B

Repaso de todos los temas

- 1 a) Demuestra por inducción que $\sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$.
- b) Demuestra por inducción que $2^n > n^2$ para todo $n \geq 5$.
- c) Calcula razonadamente $z = (-2 - 2i)^{64} e^{-19\pi i/4} i^{444444441}$
- 2 a) Justifica razonadamente (sin resolverla) que la ecuación $x^2 = \cos x$ tiene exactamente una solución real en el intervalo $(0, \pi/2)$.
- b) Usa el teorema del sandwich para calcular razonadamente

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^4 - \cos(1/x^5)}{x^4 + 10}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(2 + \cos^2 x)}{x + 300}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^4 e^{\cos(x^{100}+1)}.$$

- 3 a) La densidad de un alambre viene dada por

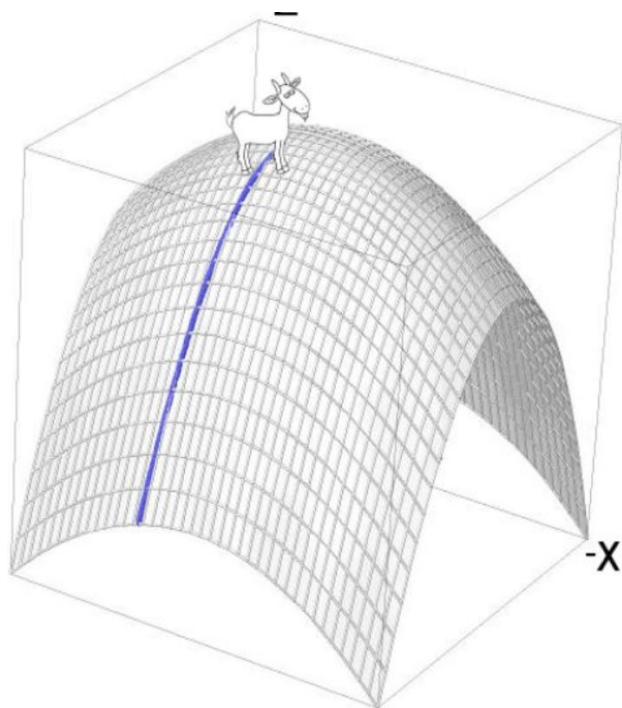
$$\rho(x) = \sin(2x), \quad 0 \leq x \leq \pi/2$$

Encuentra la masa total del alambre, su centro de masas y su densidad media. ¿Existe algún punto del alambre que tenga exactamente esa densidad? Razona la respuesta (sin añadir cálculos).

- b) Calcula razonadamente (indicando qué resultados teóricos vistos en clase aplicas en cada momento) la derivada parcial respecto de y de la función $\int_{x^2+y^2}^{\sin(xyz)} t^2 dt$.
- 4 Sea el campo vectorial $F(x, y, z) := (y^2 + \cos z, 3y + \sin z, e^{xy^2})$. Calcula el flujo de dicho campo que atraviesa la superficie del sólido encerrado bajo el paraboloides $z = x^2 + y^2$ y por encima de la región triangular situada en el plano $z = 0$, que está acotada por las líneas $y = x$, $x = 0$ y $x + y = 2$. Menciona qué teorema usas para el cálculo, plantea y resuelve la integral apropiada.

- 5) a) Estamos escalando una montaña cuya altura viene dada por la función $z = f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 3xy^2$. Nos situamos en el punto $(1, 2)$. Si queremos bajar lo más rápidamente posible, ¿en qué dirección nos debemos mover? ¿Cuál es el valor de la pendiente en esa dirección?
- b) Hacemos un cultivo de virus COVID-19 en una placa petri de la forma $4x^2 + y^2 \leq 9$. La función que determina la cantidad de virus en cada punto de la placa viene dada por $f(x, y) = (x - y)^4$.
- 1) Clasifica los puntos críticos en el interior de la placa.
 - 2) Determina, usando multiplicadores de Lagrange, los puntos de la placa que tienen máxima y mínima cantidad de virus.
- 6) a) Hallar los puntos de la curva $y^2 = 6x$ cuya distancia al punto $(4, 0)$ sea mínima.
- b) Aproxima la función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ mediante un polinomio de grado 3 centrado en $a = 3$. Utiliza dicho polinomio para aproximar $(4, 1)^{-1/2}$. Obtén una cota del error cometido.

- 7) Supongamos que la cabra está en el punto $p = (-20, 5, 1100)$ de una montaña cuya altura sobre el nivel del mar viene dada por $z = f(x, y) = 2000 - 2x^2 - 4y^2$ metros.

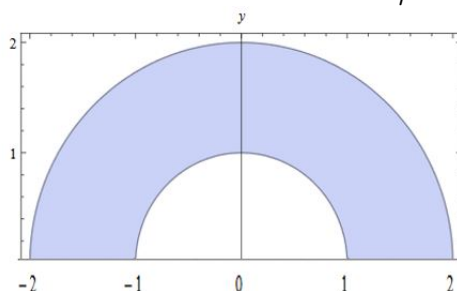


El eje x positivo apunta hacia el este y el eje y positivo apunta hacia el norte.

- a) Si la cabra empieza a moverse en dirección noreste desde p , ¿subirá o bajará? Razona la respuesta.
 - b) Para bajar de la montaña lo más rápido posible, ¿en qué dirección debe ir partiendo de p ? Da la respuesta en forma de vector unitario (= de longitud 1). Dibuja la dirección del movimiento en un plano, donde se vea (de manera esquemática pero clara) cómo es dicho vector dirección en relación a las curvas de nivel de la altura de la montaña.
 - c) Supongamos que la cabra es vaga y miedosa, por tanto, no quiere subir cuestras ni bajarlas por miedo a cansarse y caerse, respectivamente. ¿En qué dirección partiendo del punto p puede correr sin subir ni bajar? Da el resultado como un vector unitario.
- 8) Consideramos la función $f(x, y) = e^y(y^2 - 2x^2)$ y el conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + y^2 \leq 6\}$.

Usa el método de los multiplicadores de Lagrange para encontrar los extremos absolutos de la función f en el conjunto A .

- 9 a) Calcula las coordenadas del centro de gravedad de la lámina sombreada de la figura, suponiendo que tiene una densidad constante $\rho = 1$.



- b) En la última prueba de evaluación continua bastantes alumnos usaron la siguiente fórmula (no explicada en clase):

$$\frac{d}{dx} \int_{a(x)}^{b(x)} f(t) dt = f(b(x)) \cdot b'(x) - f(a(x)) \cdot a'(x).$$

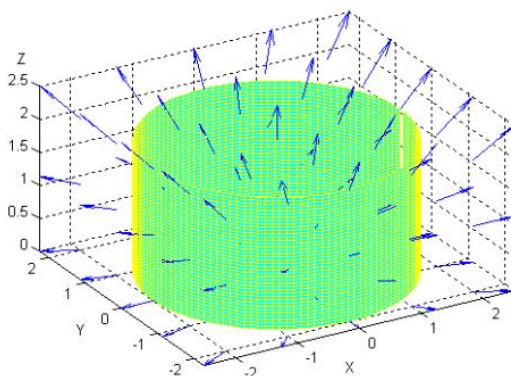
Justifica dicha fórmula usando resultados/teoremas que sí se hayan explicado en clase.

- 10 Sea el campo vectorial

$$F(x, y, z) := (x - e^z, 2y^2 + \log(xz), 3z^2 - \sin(y^2)).$$

Calcula el flujo de F que atraviesa la superficie del sólido

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq a^2, 0 \leq z \leq 2\}.$$



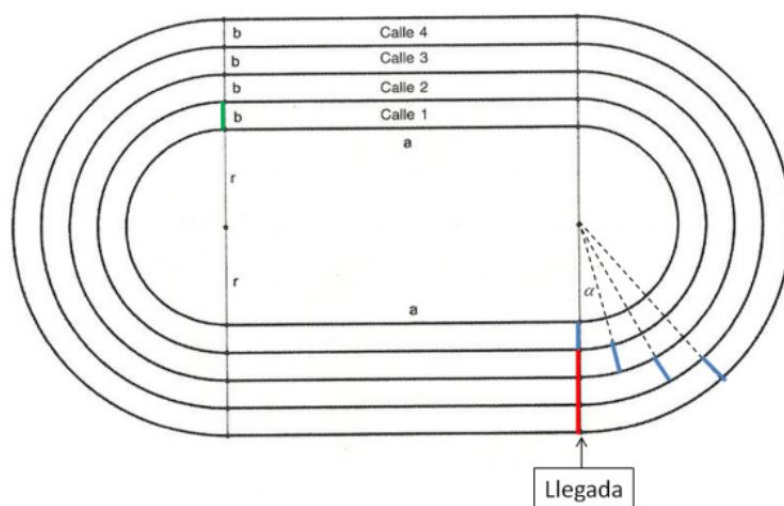
- 11 a) Demuestra que para todo número natural se cumple

$$\sum_{k=1}^n \frac{2^k \cdot k}{(k+1)(k+2)} = \frac{2^{n+1}}{n+2} - 1.$$

b) Calcula razonadamente y expresa en forma $a + bi$ los siguientes números:

$$(-1 + \sqrt{3}i)^{105}, \quad |e^{2+7i}| \cdot e^{-i33\pi}, \quad \overline{i8888888888888888885}, \quad \sqrt{4i}$$

- 12** a) Aplica los teoremas de Bolzano y Rolle para calcular el número exacto de soluciones de la ecuación $3 \log x = x$.
- b) ¿Puede existir una función diferenciable para la cual $f(0) = -1$, $f(2) = 4$ y $f'(x) \leq 2$? Enuncia con detalle el resultado que hayas usado para justificar tu respuesta. ¿Qué otro resultado se puede obtener como un caso particular del que acabas de enunciar?
- 13** Se quiere construir una pista de atletismo compuesta por dos tramos rectos paralelos de la misma longitud, unidos en ambos extremos por sendas semicircunferencias. Si la longitud total del circuito es L (siendo L una constante conocida),
- a) determinar las dimensiones de la pista para que el área del rectángulo central sea máxima.
- b) ¿Qué ocurre si se desea maximizar el área total encerrada por el circuito?



- 14** Si $f(0) = 0$ y $f'(0) = 2$, calcula la derivada de $f(f(f(f(x))))$ en $x = 0$. Enuncia con detalle el resultado que usas para hacer el cálculo.

15 a) Demuestra que para todo número natural se cumple $1 + \sum_{k=1}^n \frac{2^{2(k-1)}}{3^k} = \left(\frac{4}{3}\right)^n$.

b) Calcula razonadamente $\frac{12^{333335}}{(-\sqrt{3}-3)^{666666}}$ y prueba que $\cos(3\varphi) = \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi$.

16 Considera la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{|x|}{e^{|x-1|}}$.

a) Estudia su continuidad y derivabilidad

b) Determina los extremos absolutos y relativos.

c) Calcula la integral $\int_{-\infty}^1 f(x) dx$, si es convergente.

17 a) Aplica los teoremas de Bolzano y Rolle para demostrar que la ecuación $(1+x)^2 = -xe^x$ tiene exactamente dos soluciones reales en el intervalo $[-1, 0]$.

b) Calcula el polinomio de Taylor de segundo grado para la función $f(x) = e^{\sin x}$ alrededor de $a = \pi$ (puedes dejar el resultado en función de potencias de $(x - \pi)$). Estima el error cometido por dicha aproximación en el intervalo $[\pi - 1/10, \pi + 1/10]$.

18 Sea la función $f(x, y) = 3x^2y^2 + 2x^3 + 2y^3$ y el conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$.

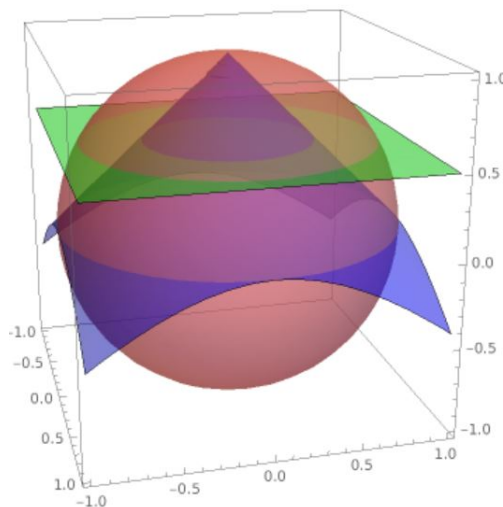
Clasifica los extremos relativos y usa el método de los multiplicadores de Lagrange para encontrar los extremos absolutos de la función f en el conjunto A .

19 a) Enuncia el teorema del valor medio para integrales. Dada $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, ¿qué condiciones debe cumplir para asegurar que es diferenciable? ¿Qué propiedades cumple el gradiente de f ?

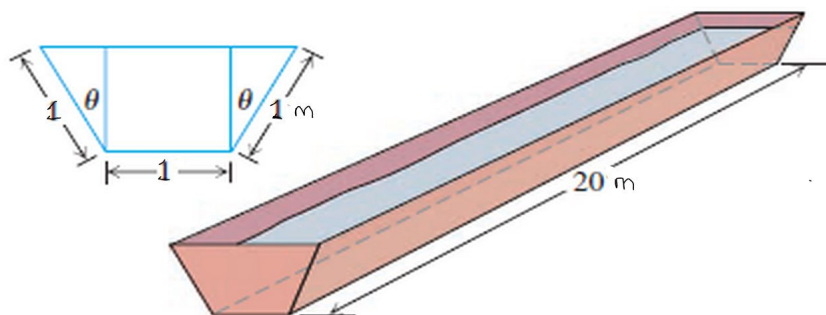
b) Sea el campo vectorial

$$F(x, y, z) := (x - z + e^{z^2}, y - z + \cos(xz), z - \sin(y^2) \cos(x^3)).$$

Calcula el flujo de F que atraviesa la frontera B del sólido S dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ que es exterior al cono $(z - 1)^2 = x^2 + y^2$. Enuncia el resultado que utilizas para hacer el cálculo.



-
- 20** a) Demuestra que para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$ se cumple $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{(k+1)!} = \frac{n! - 1}{n!}$.
- b) Calcula razonadamente $\frac{(-1 - \sqrt{3}i)^{27}}{e^{i25\pi/2}i} \sum_{k=2}^{235} i^k$. Expresa el resultado de la forma $a + bi$. Recuerda que $\bar{w}$ = conjugado de w .
- 21** a) Enuncia el teorema de Fermat y el teorema de los valores intermedios.
- b) Aplica los teoremas de Bolzano y Rolle para constatar que la ecuación $x^2 - \cos x = x \sin x$ tiene exactamente dos soluciones en el intervalo $[-\pi, \pi]$.
- 22** a) Define función continua y función diferenciable. Demuestra que toda función diferenciable es continua.
- b) La resistencia total de un circuito viene dada por $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$, donde todas las resistencias se miden en ohmios (Ω). Supongamos que R_2 es una resistencia constante de 5Ω , pero que R_1 es una resistencia variable.
- Usa derivación implícita para calcular $\frac{dR}{dR_1}$. Expresa el resultado en función de R_1 .
 - Si la resistencia actual de R_1 es de 1Ω y decrece a razón de $0,2 \Omega/s$ ¿A qué velocidad cambia la resistencia total? Enuncia el resultado que has usado para hacer el cálculo.
- 23** a) Calcula el polinomio de Taylor $T_2(x)$ de grado 2 en $a = 0$ de la función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$. ¿Podemos asegurar que el polinomio da una aproximación cuyo error es menor que $0,05$ en el intervalo $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$?
- b) Si el resto de Taylor de una función f cumple que $|R_n(x)| \leq C/n^2$, justifica que la serie de Taylor converge (o sea, que existe).
- 24** Tenemos que construir un canal con las dimensiones de la figura, donde solo podemos variar el ángulo θ . ¿Qué valor del ángulo maximizará el volumen de agua que puede contener el canal? Para contestar, plantea y resuelve el problema de optimización correspondiente.

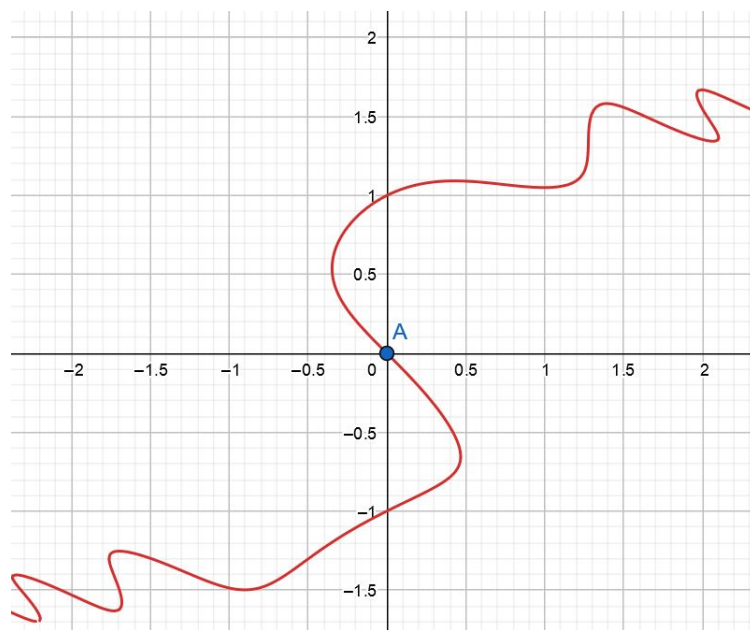


-
- 25 Demuestra que la igualdad $\sum_{k=1}^n k \cdot 2^k = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$ se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$.

- 26 Halla las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva

$$\sin(x^2 y^2) + y^3 = x + y$$

de la figura en el punto $(0,0)$.



- 27 a) Enuncia la regla de la cadena y deduce la fórmula para la derivada de la función inversa.

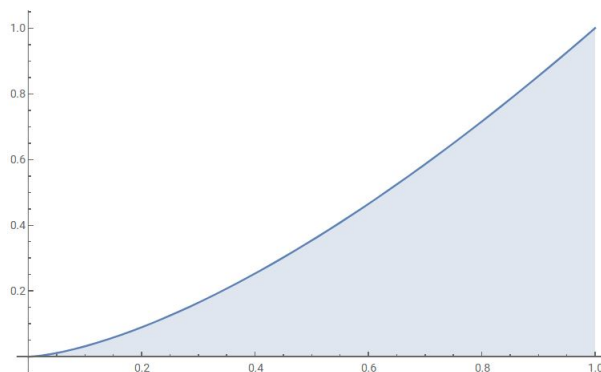
b) Aplica lo anterior para calcular razonadamente la derivada del arcocoseno.

- 28 a) Enuncia el teorema del sandwich.

b) Usa el apartado anterior para calcular $\lim_{x \rightarrow 0} x^4 \left(e^{\cos(x^{100}+1)} + \sin^3(x^{-1/3}) \right)$

- 29 Calcula razonadamente $z = (-2 + 2i)^{64} \cdot e^{-17\frac{\pi}{2}i} \cdot i^{444444447}$

- 30 Sea $f(x) = \sqrt{x^3}$ y R la región del plano limitada por las rectas $x = 0$, $x = 1$, el eje x y la gráfica de f .



Calcular:

- Área de R .
- Longitud de la curva determinada por la gráfica de f desde $x = 0$ hasta $x = 1$.
- Volumen del cuerpo generado por R al girar alrededor del eje x .
- Volumen del sólido obtenido al girar R alrededor del eje y .

- 31** a) ¿Por qué no puede ser cierto el siguiente resultado?

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_{-1}^1 = -1 - 1 = -2.$$

Explica dónde está el fallo y calcula correctamente la integral (si existe).

- Calcula razonadamente la derivada de la función $F(x) = \int_{\sqrt{x}}^{x^2} e^{1-t^2} dt$.

- 32** Llamemos I a la siguiente integral $I = \int \frac{1}{x} dx$. Si aplicamos el método de integración por partes a su resolución y tomamos como $u = \frac{1}{x}$ y $dv = dx$, se llega a la siguiente conclusión:

$$I = 1 + I \quad \Rightarrow \quad 0 = 1$$

Evidentemente, hemos llegado a una conclusión falsa. ¿Por qué?

- 33** a) La cantidad de energía asociada a una determinada reacción química viene dada por $E(x) = x^2 \log x$, donde $1 \leq x \leq e$ y x representa la cantidad de uno de los reactivos. Encuentra la energía media de la reacción en el rango de los posibles niveles de reactivo.
- b) Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua verificando que

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x)^2 dx.$$

Demuestra que existe un $c \in [a, b]$ con $f(c) = 0$, o bien $f(c) = 1$.

Apéndice C

Colección de ejercicios de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

C.1. Problemas de EDOs separables

- 1 Tras un asesinato, el forense llega a la escena del crimen a las 8:30 am y toma la temperatura del cuerpo que resulta ser de 30°C . Suponemos que en ese momento la temperatura de la habitación es constante y de 22°C . Una hora más tarde después de registrar y analizar la escena del crimen, la temperatura del cuerpo es de 28°C . Tomando como referencia que la temperatura normal de un cuerpo humano vivo es de 37°C , determina la hora aproximada de la muerte.
- 2 Cuando un objeto absorbe calor del medio circundante, sigue la Ley de Newton. Una pequeña barra de metal, con una temperatura inicial de 20°C , se deja caer en un recipiente con agua hirviendo. Calcula cuánto tardará esa barra en alcanzar los 90°C , sabiendo que su temperatura aumentó en 2°C en el primer segundo.
Sol: 82,31 s.
- 3 El número de seguidores de una cuenta de *Instagram* crece a una tasa proporcional a los seguidores actuales, de modo que $\frac{dS}{dt} = kS$. ¿Cuánto vale k si sabemos que en 30 días la cuenta ha conseguido duplicar los seguidores?
Sol: $k = 0,023 \text{ (día)}^{-1}$.
- 4 Inicialmente había 100 miligramos de una sustancia radiactiva. Después de 6 horas, su masa disminuyó en un 3 %. Si en cualquier momento la tasa de desintegración es proporcional a la cantidad de sustancia presente, determina la cantidad restante después de 24 horas.
Sol: 88,5 mg.
- 5 El isótopo uranio-235 ^{235}U es un material radiactivo que se desintegra a una tasa proporcional a la cantidad actualmente presente.

- 1) Si 100 mg de ^{235}U se desintegran a 82.04 mg en 1 semana, determine la tasa de descomposición.
- 2) Encuentre una expresión para la cantidad de ^{235}U presente en cualquier momento t , donde t se mide en días.
- 3) Encuentre el tiempo requerido para que el ^{235}U disminuya a la mitad de su cantidad original. (Esto es lo que se llama **vida media**.).

Sol: (a) $k = 0,198$, (b) $Q(t) = 100e^{-0,0238t}$, (c) $t_m = 24,5$ días.

- 6 La experimentación ha demostrado que la tasa de desintegración espontánea de un elemento radiactivo es proporcional a la cantidad del elemento presente.

- 1) Cada elemento radiactivo tiene una semivida (tiempo que tarda en reducirse a la mitad) específica; por ejemplo, la vida media del carbono-14 es de aproximadamente 5730 años. Usa esto para hallar la constante de proporcionalidad de la ecuación de desintegración.
- 2) En 1988, el Vaticano autorizó al Museo Británico a fechar una reliquia de tela conocida como la *Sábana Santa de Turín*, que apareció por primera vez en 1356, y contiene la imagen negativa de un cuerpo humano que se atribuye a Jesús de Nazaret. El informe del Museo Británico mostró que las fibras de dicha tela contenían entre el 92 % y el 93 % de su carbono-14 original. Usa esta información para estimar la edad de la Sábana Santa y hacer conclusiones al respecto.

Sol: (a) $k = 0,000121$, (b) Entre 600 y 698 años.

- 7 La velocidad con la que la medicación tomada se disemina en el torrente sanguíneo se rige por la ecuación diferencial:

$$\frac{dx}{dt} = A - Bx,$$

donde A y B son constantes positivas y la función $x(t)$ describe la concentración del fármaco en sangre en todo momento.

- 1) Encuentra el valor límite de x cuando $t \rightarrow \infty$.
- 2) ¿Cuánto tiempo tarda la concentración en alcanzar la mitad de este valor límite?

Sol: (a) A/B , (b) $t = \frac{\log 2}{B}$ s.

- 8 Una población de lince ibérico se desarrolla de acuerdo a la ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = 0,5P - 450,$$

donde el tiempo se mide en meses.

- 1) ¿Cuándo se extingue la población si $P(0) = 850$?
- 2) ¿Y si $P(0) = P_0$, con $0 < P_0 < 900$?
- 3) Si sabemos que la población se se extinguirá dentro de 1 año, ¿cuál era la población inicial?

Sol: (a) $t = 5,78$ meses, (b) $t = 2 \log \frac{900}{900-P_0}$, (c) $P_0 = 897,8$ lince .

9 (Examen mayo 2018)

- 1) ¿Cuál de las siguientes ecuaciones diferenciales es de segundo orden no lineal? Explique su respuesta. (Una respuesta sin justificar se considerará no válida)

- (i) $(y')^2 + \cos(2t) = 0$
- (ii) $(y'')^2 + y' + e^t = 0$
- (iii) $y'' + t^3 y' + e^t = y$
- (iv) $y'' + \cos(2t)y' + e^t y = 0$

- 2) Resuelva el siguiente problema de valor inicial:

$$y' = \frac{e^x}{2 + 2y} \quad y(0) = 1$$

Sol: $y = -1 + \sqrt{e^x + 3}$.

- 3) Nuestra compañía desea conocer la viralidad (es decir, la velocidad de propagación) de un anuncio que va a colgar en Youtube y, para ello, se hace un experimento con un número limitado de personas llegando a la conclusión de que la velocidad de propagación (variación de personas que lo han visto por unidad de tiempo) es proporcional al producto de la gente p que ha visto el anuncio por la gente que no lo ha visto. Si sabemos que el experimento se realizó con una cantidad de personas P , determine la ecuación diferencial que modelaría la viralidad del video.

Nota: Para la fórmula del modelo, utilice únicamente la cantidad de gente que ha visto el anuncio p y la cantidad total de personas P con las que se realizó la prueba.

- 10** Tenemos un depósito con forma cilíndrica de 2 m altura y radio 0,3 m, que está completamente lleno de agua. Para vaciarlo, abrimos un agujero en el fondo de 4 cm de diámetro. ¿Cuánto tardará en vaciarse el depósito?

Sol: 143,75 s.

- 11** Supongamos que la tasa de desecación de una célula es proporcional al área de su superficie.

- 1) Halla la ecuación diferencial que modela el proceso de desecación.
- 2) Si el volumen inicial de la célula es de 8 mm^3 y 6 horas más tarde el volumen decrece a 1 mm^3 , determina cuándo no quedará agua en la célula.

Sol: después de 12 horas.

- 12** Un alumno de EDEM viene con gripe a clase y suponemos que hay 500 personas en EDEM. Si se supone que la tasa de replicación del virus es proporcional no solo a la cantidad de infectados sino también a la cantidad de no infectados, determine el número de personas infectadas seis días después si se observa que a los 4 días el número de infectados era 50.

Sol: 226 contagiados aproximadamente.

-
- 13** En la carrera contrarreloj para controlar el avance de la COVID-19, se llega a la conclusión de que en una población de n individuos susceptibles de ser contagiados la propagación de la enfermedad es proporcional al número de individuos sanos y al número de infectados, donde la constante de proporcionalidad ($\beta > 0$) se denomina tasa específica de infección. Suponiendo que introducimos un individuo enfermo en la población, estudiar la evolución del número de infectados. ¿Hay esperanza de salvación a largo plazo?

Sol: No, a largo plazo se infectan todos.

- 14** (Examen julio 2020) Un alumno extiende en el grupo de *WhatsApp* el rumor (falso) de que el modelo SIR no entra para examen. En total hay 42 alumnos y el rumor se difunde de forma proporcional no solo a la cantidad de alumnos que lo han leído, sino también al número de alumnos que todavía no lo han leído. Si a las 2 horas ya se han enterado 24 alumnos, ¿cuánto tiempo tardarán en saberlo 40?

- 15** Busca una curva que cumpla la propiedad de que el área debajo de su gráfica y sobre el eje x , comprendida entre los puntos de la curva $(0, 1)$ y (x, y) , sea igual a y .

Sol: $y = e^x$.

- 16** Para montar una nueva *startup* le pedimos un préstamo de 20000 euros al banco, quien nos va a cobrar una tasa de interés del 8 % anual.

- 1) Si queremos devolver el préstamo en 4 años, ¿cuánto tenemos que pagar mensualmente? Plantea y resuelve la ecuación diferencial que te permite responder la pregunta.
- 2) Si queremos pagar 450 euros mensuales, ¿cuánto tardaremos en saldar el préstamo?

Sol: (a) 486,88 €, (b) 4,39 años

- 17** Superman quiere regresar al planeta *Krypton* para conocer sus orígenes. Para ello, tiene que volar partiendo de una velocidad inicial que le permita escapar del campo gravitatorio terrestre (velocidad de escape). Considera que tiene una masa m y empieza a volar desde el nivel del mar ($x = 0$) en dirección perpendicular a la superficie de la Tierra. La fuerza gravitatoria que actúa sobre él es proporcional a la distancia desde el centro de la Tierra, que viene dada por

$$w(x) = -\frac{k}{(x + R)^2},$$

donde k es constante y R es el radio de la Tierra.

- 1) Halla la altura máxima que alcanzará Superman si parte con una velocidad inicial v_0 .
- 2) Calcula dicha velocidad inicial en función de $h_{\text{máx}}$.
- 3) Determina la velocidad de escape v_e , tomando límites cuando $h_{\text{máx}} \rightarrow \infty$.

Sol: (b) $v_0 = \sqrt{2gR \frac{h_{\text{máx}}}{h_{\text{máx}} + R}}$, (c) $v_e = \sqrt{2gR}$.

C.2. EDOs de primer orden

C.2.1. EDOs lineales de orden 1

- 1 Sales de fiesta un jueves por la noche y, al llegar a casa a las 6 de la mañana, compruebas que tu tasa de alcoholemia es de 1 g/l. Si tienes clase de ecuaciones diferenciales a las 10:15, ¿podrás estar lo suficientemente sobrio/a para asistir a clase?

Usa la siguiente información para modelar el problema:

- En condiciones normales, el hígado elimina el alcohol ingerido a razón de $0,15 \frac{\text{g/l}}{\text{h}}$.
- El organismo absorbe el alcohol 3 veces más rápido que lo elimina.
- Suponemos (para simplificar) que tienes el estómago vacío de alimento al llegar a casa ($t = 0$) y el alcohol ya está prácticamente absorbido, quedando una cantidad de 0,1 g/l en el intestino.

- 2 Suponemos que entra agua con un contenido de sal de 0,3 kg/l en un depósito con 400 l de agua en los que están disueltos 20 kg de sal. El agua entra a una velocidad de 10 l/min y la mezcla sale a la misma velocidad. Calcula la cantidad de sal que habrá en el depósito a los 10 minutos.

Sol: 42,12 kg de sal.

- 3 La sangre conteniendo cierta droga entra en un órgano a razón de $3 \text{ cm}^3/\text{s}$ y sale a la misma velocidad. El órgano tiene una capacidad de 125 cm^3 . Si la concentración de la droga en la sangre que entra es de $0,2 \text{ g/cm}^3$, calcula la concentración de la droga en el órgano en tiempo t si inicialmente no había droga en él, y el tiempo que transcurre hasta alcanzar una concentración de $0,1 \text{ g/cm}^3$.

Sol: 28,88 s.

- 4 En un pequeño lago con capacidad constante de $500\,000 \text{ m}^3$ entra y sale agua a una velocidad de $1000 \text{ m}^3/\text{día}$. El agua que entra tiene una concentración de contaminantes de 0.03 kg/m^3 .

- 1) Escribir una ecuación diferencial que describa la evolución de la cantidad de contaminante en el lago.
- 2) Calcular la cantidad de contaminante en el lago a largo plazo.

Sol: 15000 m^3 .

- 5 Para dar servicio a la *Oktoberfest* se prepara un depósito con 500 l de cerveza que contiene un 6 % de alcohol. Como ya no queda cerveza de ese tipo, para no dejar sin servicio a los visitantes, un camión cisterna bombea cerveza con 8 % de alcohol a dicho depósito a razón de 5 l/min. Mientras tanto, no se para de servir cerveza dentro de la carpa, en concreto, se extrae del tanque a ritmo de 6 l/min.

- 1) ¿Cuál es la cantidad de alcohol en el tanque después de media hora?
- 2) ¿Qué porcentaje de alcohol tiene la cerveza del depósito después de 1 h?

Sol: (a) 30,7 l, (b) 6,94 %

6 Resuelve los siguientes problemas de valor inicial:

- 1) $y' - y = 2te^{2t}$, $y(0) = 1$.
- 2) $y' + 2y = te^{-2t}$, $y(1) = 0$.
- 3) $ty' + 2y = t^2 - t + 1$, $y(1) = 1/2$, $t > 0$.
- 4) $y' + \frac{2}{t}y = \frac{\cos t}{t^2}$, $y(\pi) = 0$, $t > 0$.
- 5) $y' - 2y = e^{2t}$, $y(0) = 2$.
- 6) $ty' + 2y = \sin t$, $y(\pi/2) = 1$, $t > 0$.
- 7) $t^3y' + 4t^2y = e^{-t}$, $y(-1) = 0$, $t < 0$.
- 8) $ty' + (t+1)y = t$, $y(\log 2) = 1$, $t > 0$.

7 Sea $(x, y(x))$ la curva plana obtenida al resolver

$$y' + \frac{2}{3}y = 1 - \frac{1}{2}x, \quad y(0) = b.$$

Halla el valor de b para el que la curva toca, pero no cruza, el eje x .

Sol: $b = -1,64$.

8 Encuentra para qué valor de b , la solución de

$$y' - y = 1 + \sin x, \quad y(0) = b$$

se mantiene finita cuando $x \rightarrow \infty$.

Sol: $b = -1/2$.

C.2.2. EDOs exactas y homogéneas

9 (Aterrizo como puedas, si puedes) Monitorizamos la trayectoria de un avión que parte de un punto a distancia $a = 100$ km hacia el este de su destino (medida en línea recta). El piloto mantiene la dirección del vuelo hacia el destino con velocidad constante v_0 relativa al viento, que sopla hacia el norte con velocidad constante w .

- 1) Encuentra y resuelve la ecuación diferencial que satisface la trayectoria del avión.

Pista: Usa $\frac{d}{dv}(\sinh^{-1}(v)) = \frac{1}{\sqrt{1+v^2}}$.

- 2) ¿Qué sucede si $v_0 = w$? ¿Bajo qué condiciones el avión alcanza su destino?

10 Resuelve el siguiente problema de valores iniciales:

$$(x^2 + y^2) dx + 2xy dy = 0, \quad y(1) = 0.$$

11 Resuelve la EDO $(6xy - y^3) dx + (4y + 3x^2 - 3xy^2) dy = 0$.

12 Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias:

- 1) $(x + y)y' = x - y$
- 2) $y' + \frac{2y}{x} = x^2$
- 3) $y' = \frac{xy - y^2}{x^2}$
- 4) $\sin(xy) + xy \cos(xy) + x^2 \cos(xy)y' = 0$.
- 5) $(x^2 - y^2)dx + 3xy dy = 0$.
- 6) $dy + y \cos x dx = 0$
- 7) $y' - \frac{2x}{1 - x^2}y = x$
- 8) $(y + xe^x + 2) dx + (x + e^y)dy = 0$ con $y(0) = 1$.

13 (**Prueba EC 2020**) Identifica el tipo de EDO y halla la solución general o particular (si se trata de problemas de valor inicial).

- 1) $y' = \frac{3x^2 - 2xy}{x^2 - 2y}$ con $y(0) = 1$.
- 2) $x e^x y' + (x + 1)e^x y = 1$.
- 3) $2xy dy - (x^2 + 3y^2) dx = 0, x > 0$, con $y(1) = 0$.
- 4) $\frac{y'}{x} = x^2 y^3 - \frac{y}{x^2}$ con $y(1) = 1/2$.

14 Halla las líneas de fuerza de un campo magnético si sabemos que las curvas equipotenciales son elipses dadas por $x^2 - 2cx + 2y^2 = 0$.

15 (**Examen mayo 2020**)

- 1) Tenemos una placa plana con una distribución de temperatura $T(x, y)$, cuyas curvas isotermas son de la forma

$$\frac{x^2}{2} + xy - \frac{y^2}{2} = c,$$

donde c es una constante. ¿A lo largo de qué curvas se mueve el flujo de calor? Halla la expresión de dichas curvas en el plano (x, y) .

- 2) Dada la EDO autónoma $y' = y^2 - 3y - 4$, encuentra todas las soluciones de equilibrio y y clasifica su estabilidad. Para ello, dibuja el diagrama de fase y haz un esbozo de las soluciones. Determina $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$ cuando y es una solución que cumple $y(0) = 1$.
- 3) ¿Podemos asegurar que los siguientes problema de valores iniciales tienen solución única?
 - $y' = x^2 + y^2, \quad y(1) = 2$
 - $y' = \sqrt{y}, \quad y(0) = 1$

En caso afirmativo, ¿en qué intervalo existiría dicha solución?

C.2.3. Existencia y unicidad de soluciones

- 16** (Exámenes 2018 y 2019) De acuerdo al Teorema de existencia y singularidad de soluciones ¿Cuál es el intervalo más grande donde se puede garantizar que existe una única solución de los siguientes problemas de valores iniciales?

- 1) $tx' + (t^2 - 1)x = \log|t + 5|$, $x(2) = 6$
- 2) $\sin(t)y' + \frac{1}{t-3}y = t^2$, $y(1) = -2$
- 3) $t(t-2)(t-4)y' + y = e^{t^2}$, $y(3) = -6$.
- 4) $(t^2 - 4)y' + \log(|t - 1|)y = \sqrt{t + 1/2}$, $y(0) = 1$.

- 17** (Examen abril 2019) Considerando la siguiente ecuación diferencial

$$t^2y' - 2ty = 4t^3 \log t$$

- 1) Encuentra la solución general de la ecuación.
- 2) Encuentra la solución que satisface la condición inicial $y(1) = -6$.
- 3) ¿Cuál es el intervalo de validez para la solución encontrada en el apartado anterior?

- 18** Según el teorema de existencia y unicidad de soluciones, estudia si los siguientes problemas de valor inicial tienen o no solución única:

- 1) $y' = \frac{1}{y^2 - 4}$, $y(3) = 0$.
- 2) $y' = \sqrt{16 - y^2}$, $y(1) = 2$.
- 3) $y' = \sqrt{16 - y^2}$, $y(0) = 4$.
- 4) $y' = \sqrt{\frac{y}{x-1}}$, $y(5) = 0$.

- 19** Encuentra una región del plano xy donde se pueda garantizar que cada una de las ecuaciones diferenciales siguientes tiene solución única:

- 1) $(y^2 - x)y' = y + 2x$.
- 2) $\frac{dy}{dx} = y^{1/2} - x$.
- 3) $y'e^x - x + y = 0$.
- 4) $y'(x^2 + y^2) = x - y$.
- 5) $(y^{1/3} - x^2)dx - dy = 0$.

- 20** Comprueba que $y(x) = x^2$ es una solución de la EDO $y' = y - x^2 + 2x$. Sea ahora z otra solución, definida en $\mathbb{R}$, con $z(1) = 4$. ¿Puede cumplirse que $z(0) = 1$?

C.2.4. Soluciones de equilibrio

- 21** Dibuja un campo de dirección para la ecuación diferencial dada. En función del campo de dirección, determina el comportamiento de y cuando $t \rightarrow \infty$. Si este comportamiento depende del valor inicial de y en $t = 0$, describe la dependencia.

-
- | | |
|--|---|
| 1) $y' = 3 - 2y$
2) $y' = 2y - 3$
3) $y' = 3 + 2y$
4) $y' = 1 + 2y$ | 5) $y' = y + 2$
6) $y' = y(4 - y)$
7) $y' = -y(5 - y)$
8) $y' = y^2$ |
|--|---|

22 Dado el siguiente modelo de población

$$\frac{dP}{dt} = 0,05 \left(1 - \frac{P}{2000} \right) P$$

- 1) ¿Para qué valores de P la población está en equilibrio?
- 2) ¿Para qué valores de P está creciendo la población?
- 3) ¿Para qué valores de P está decreciendo la población?

23 Escribe una ecuación diferencial de la forma $y' = ay + b$ cuyas soluciones tengan el comportamiento requerido cuando $t \rightarrow \infty$:

- 1) Todas las soluciones se aproximan a $y = 3$.
- 2) Todas las soluciones se aproximan a $y = 2/3$.
- 3) Todas las soluciones divergen de $y = 2$.
- 4) Todas las soluciones divergen de $y = 1/3$

24 (Examen marzo 2018) Considera la siguiente ecuación diferencial

$$y' = (e^y - 1)(y - 3)(5 - y).$$

- 1) Indica todas las soluciones de equilibrio.
- 2) Clasifica la estabilidad de cada una de ellas (estable, inestable o semiestable)
- 3) Si $y(9) = \alpha$ y $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$, encuentra todos los posibles valores de α .
- 4) ¿Cuál de las dos condiciones iniciales siguientes resultará en una solución constante para la ecuación? ¿Cuál será dicha solución?

$$y(3) = 4, \quad \text{o bien} \quad y(-2) = 5.$$

25 (Examen mayo 2018) Considere la siguiente ecuación diferencial

$$y' = 36y^2 - 9y^4$$

- 1) Indique todas las soluciones de equilibrio.
- 2) Clasifique la estabilidad de cada una de ellas (estable, inestable o semiestable) justificando su respuesta.
- 3) Suponiendo que $y_1(t)$ e $y_2(t)$ son dos soluciones de la ecuación diferencial de tal forma que $y_1(17) = -1$ y que $y_2(29) = 1$ ¿Cuál será el $\lim_{t \rightarrow \infty} (y_1(t) + y_2(t))$?

-
- 4) Suponiendo que $y(-1729) = \beta$ y que $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 2$, indique todos los valores de β .
- 5) Si $y(-53) = -2$, indique el valor de $y(42)$ sin resolver la ecuación. Explique su conclusión.

26 (Examen julio 2020)

- 1) Dada la EDO autónoma $y' = y(y - 2)(y - 4)e^{y^2 \sin(y^6)}$, encuentra todas las soluciones de equilibrio y clasifica su estabilidad. Para ello, dibuja el diagrama de fase y haz un esbozo de las soluciones. Determina $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$ cuando y es una solución que cumple $y(0) = 1/2$.
- 2) Escribe una EDO exacta y una homogénea. Justifica que efectivamente son de ese tipo.

C.3. EDOs de segundo orden

C.3.1. Conceptos básicos y EDOs reducibles a orden 1

- 1** Clasifica las siguientes ecuaciones como lineales o no lineales. Para las lineales, decide si son homogéneas o no.
- a) $y'' + 5y' + 6y = 2 \cos t$.
 - b) $y'' + 5y = 0$.
 - c) $y'' + 5 = 0$.
 - d) $(1 - x^2)y'' = 3y$.
 - e) $(1 - y)y'' = 2y$.
 - f) $x^2y'' + xy' = y$.
 - g) $x^2y'' + xy' = y^2$.
- 2** Para las EDOs que vienen a continuación, encuentra el mayor intervalo para el que se puede garantizar existencia y unicidad de solución:
- a) $(t^2 - 3t)y'' + ty' - (t + 3)y = 0$, $y(1) = 2$, $y'(1) = 1$
 - b) $y'' + (\log t)y' + 3y = \tan t$, $y(1) = 2$, $y'(1) = -1$.
 - c) $y'' + \frac{1}{9 - t^2}y' + \frac{1}{2 - t}y = \log(t^2)$, $y(-1) = 2$, $y'(-1) = -1$.
 - d) $t^2y'' + ty' + y = t^3$, $y(3) = 2$, $y'(3) = -1$.
 - e) $y'' + 2y' + (\cos t)y = e^t$, $y(-2) = 2$, $y'(-2) = -1$.
- 3** Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales reducibles a primer orden:
- a) $xy'' + y' = -x$.

- b) $y'' + (y')^2 = 1$.
 c) $yy'' + (y')^2 = 0$.
 d) $y'' + y = (y')^2$, con $y(1) = -1/4$, $y'(1) = 1/2$.

- 4 En el desfile militar del 12 de octubre de 2019, durante la exhibición aérea, un paracaidista se chocó contra una farola. Para determinar los daños, los médicos necesitan saber a qué velocidad iba cuando se estampó contra la farola. Para ello, se sabe que el hombre (con paracaídas incluido) pesa 85 kg. Antes de que el paracaídas se abra, la resistencia del aire es proporcional a la velocidad (con coeficiente de rozamiento $1/2$) y, a partir de que se abre, el rozamiento es proporcional al cuadrado de la velocidad (con constante $1/4$). Si el paracaídas se abre a los 5 s y se choca contra la farola a los 30 s, calcula

- a) La velocidad y posición en cualquier instante antes de la apertura del paracaídas.
 b) La velocidad en cualquier momento después de abrirlo.
 c) ¿A qué velocidad (en km/h) iba cuando se *encontró* con la farola?

Para los apartados (b) y (c) plantea la EDO y usa *Mathematica* para resolverla.

- 5 En un caso de secuestro aéreo sin resolver de 1971, el secuestrador (con el alias de D. B. Cooper) saltó en paracaídas desde la parte trasera de un Boeing 727 de Northwest sobre el suroeste del Estado de Washington con 200.000 dólares en billetes de 20 dólares atados a su cuerpo. El dinero y los cuatro paracaídas habían sido proporcionados por el FBI después de que Cooper tomara el avión, afirmando tener una bomba. A pesar de una búsqueda intensiva por parte del FBI y 400 soldados de Fort Lewis cerca del lugar de aterrizaje previsto, Cooper nunca fue encontrado y su destino sigue siendo desconocido.

El peso conjunto de Cooper, el dinero y sus paracaídas era de aproximadamente 230 libras. Saltó desde una altitud de 10.000 pies. Suponemos un coeficiente de rozamiento lineal $\gamma = 1,1$ antes de abrir el paracaídas y $\gamma = 12$ después. Además, sabemos que su paracaídas se abrió instantáneamente 30 segundos después de salir del avión. Calcula la velocidad con la que cayó al suelo.

Nota: La unidad de masa es 1 slug y en este sistema la aceleración de la gravedad es aproximadamente $g = 32$ pies/s².

C.3.2. EDOs lineales homogéneas de coeficientes constantes

- 6 Dada la ecuación diferencial $y'' = -c^2 y$, donde $c^2 = k/m$, que describe el Movimiento Armónico Simple (M.A.S.), halla la solución considerando que se parte del reposo y de una amplitud inicial A_0 .
- 7 Una masa de 20 g se cuelga del extremo de un muelle que tiene una constante de resorte de 2880 dinas/cm y se deja descansar. Luego se pone en movimiento estirando el resorte 3 cm desde su posición de equilibrio y liberando la masa con una velocidad inicial de

10 cm/s en la dirección hacia abajo (positiva). Encuentra la posición de la masa en el tiempo $t > 0$ si no hay resistencia al aire.

- 8 Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales o problemas de valores iniciales:

a) $\frac{y''}{4} - y' + y = 0$

b) $x'' + 4x' - 5x = 0$

c) $x''/2 - x' + x = 0$

d) $x'' + 5x' + 6x = 0$

e) $x'' + 2x' = 0$

f) $x'' = x$

g) $y'' + 4y = 0$

h) $6x'' - 11x' + 4x = 0$

i) $r'' = 4r' - 20r$

j) $y'' + 4ky' - 12k^2y = 0$, para k constante.

k) $x'' = 3x' - 2x$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$.

l) $y'' = 2y' - y$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

m) $y'' = 4y' - 20y$, $y(\pi/2) = 0$, $y'(\pi/2) = 1$.

C.3.3. EDOs lineales NO homogéneas de coeficientes constantes. Método de los coeficientes indeterminados

- 9 Resuelve la EDO $y'' - 3y' - 4y = f(x)$ para los siguientes términos no homogéneos:

a) $f(x) = 3e^{2x}$

b) $f(x) = 2\sin x$

c) $f(x) = 2x^2 - 7$

d) $f(x) = 3e^{2x} + 2\sin x + 2x^2 - 7$

e) $f(x) = 2e^{-x}$

f) $f(x) = -8e^x \cos(2x)$

- 10 Supongamos que una masa de 2 kg y una fuerza de 4 N son necesarias para mantener estirado un muelle 0,2 m. Considerando un coeficiente de rozamiento de $\gamma = 4kg/s$ y la acción de una fuerza externa $F(t) = \frac{1}{2}\sin(4t)$ aplicada al sistema masa-resorte, determina la posición y la velocidad de la masa en cualquier instante t .

Sol: $y(t) = e^{-t} \left(\frac{1}{50} \cos(3t) + \frac{2}{75} \sin(3t) \right) - \frac{1}{50} \cos(4t) - \frac{3}{200} \sin(4t)$.

- 11 Resuelve los siguientes problemas de valores iniciales

(a) $\left. \begin{aligned} y'' + 3y' + 2y &= e^{-5x} \\ y(0) &= 0, \quad y'(0) = 0 \end{aligned} \right\}$

(b) $\left. \begin{aligned} y'' + 3y' - 10y &= e^{-5x} \\ y(0) &= 1, \quad y'(0) = 2 \end{aligned} \right\}$

(c) $\left. \begin{aligned} y'' + 4y' + 4y &= e^{-2x} \\ y(0) &= 2, \quad y'(0) = 0 \end{aligned} \right\}$

(d) $\left. \begin{aligned} y'' + 3y' + 2y &= x^2 e^{-x} \\ y(0) &= 5, \quad y'(0) = 2 \end{aligned} \right\}$

(e) $\left. \begin{aligned} y'' + 4y' + 4y &= \cos(2x) \\ y(0) &= 3, \quad y'(0) = 0 \end{aligned} \right\}$

(f) $\left. \begin{aligned} y'' + 4y &= \cos(2x) \\ y(0) &= 2, \quad y'(0) = 5 \end{aligned} \right\}$

(g) $\left. \begin{aligned} y'' + 3y' + 2y &= x^2 \\ y(0) &= 4, \quad y'(0) = 2 \end{aligned} \right\}$

(h) $\left. \begin{aligned} y'' + 3y' + 2y &= x^2 e^x \\ y(0) &= 8, \quad y'(0) = 2 \end{aligned} \right\}$

$$(i) \left. \begin{aligned} y'' + 4y' + 2y &= (\sin x)^2 \\ y(0) &= 3, \quad y'(0) = 1 \end{aligned} \right\} \quad (j) y'' + 6y' + 3y = x e^x \cos(2x)$$

Sol: (a) $y = -\frac{1}{3}e^{-2x} + \frac{1}{4}e^{-x} + \frac{1}{12}e^{-5x}$, (b) $y = \frac{1}{49}e^{-5x}(-1 - 7x + 50e^{7x})$
(c) $y = e^{-2x}(2 + 4x + \frac{x^2}{2})$, (d) $y = \frac{1}{3}e^{-2x}(-15 + (x^3 - 3x^2 + 6x + 30)e^x)$,
(e) $y = \frac{1}{8}e^{-2x}(24 + 46x + e^{2x}\sin(2x))$, (f) $y = 2\cos(2x) + \frac{5}{2}\sin(2x) + \frac{1}{4}x\sin(2x)$,
(g) $y = \frac{1}{4}(7 - 6x + 2x^2) + 8e^{-x} - \frac{23}{4}e^{-2x}$, (h) $y = -\frac{268}{27}e^{-2x} + \frac{71}{4}e^{-x} + \frac{1}{108}e^x(18x^2 - 30x + 19)$
(i) $y = \frac{1}{68}((112\sqrt{2} + 93)e^{(-2+\sqrt{2})x} + (93 - 112\sqrt{2})e^{-(2+\sqrt{2})x} + \cos(2x) - 4\sin(2x) + 17)$
(j) $y = Ae^{(-3+\sqrt{6})x} + Be^{-(3+\sqrt{6})x} + \left(\frac{3}{143}x + \frac{62}{5329}\right)\cos(2x)e^x + \left(\frac{4}{73}x - \frac{151}{5329}\right)\sin(2x)e^x$

12 (Examen junio 2020) Resuelve la EDO $y'' - y' = (3x^2 + 6x + 1)e^x$.

Sol: $y = Ae^x + B + (x^2 + 1)xe^x$.

C.3.4. EDOs lineales de orden superior y método de variación de parámetros

13 Resuelve las siguientes EDOs lineales con coeficientes constantes de orden $n > 2$:

- a) $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$
- b) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$
- c) $y^{(4)} - 2y''' + 14y'' - 18y' + 45y = 0$
- d) $y^{(4)} - y = 0$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 1$
- e) $y^{(5)} - y''' = 3e^x + x^2 - 4$
- f) $y''' - 8y = 0$.
- g) $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$.
- h) $y''' - y'' + y' - y = x^2 + x$.
- i) $y''' - y' = x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 4$, $y''(0) = -3$.
- j) $y''' - 3y'' + 4y' - 2y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$.

14 Resuelve las siguientes EDOs lineales de orden 2, usando el método de la variación de parámetros:

- a) $y'' - y = \frac{1}{x}$
- b) $y'' - 6y' + 9y = \sin(3x) + \frac{e^{3x}}{x^2}$
- c) $(1-x)y'' + xy' - y = (1-x)^2$, usando que $y = e^x$ es solución de la EDO homogénea correspondiente.
- d) $y'' + y = \sin^2 x$

$$e) \quad y'' - y = \frac{2e^{2x}}{e^{2x} + 1}.$$

15 Dada la EDO lineal $xy'' - (2x + 1)y' + (x + 1)y = -\frac{e^x}{x}$.

- a) Obtén el valor de r para que $u = e^{rx}$ sea una solución particular de la ecuación homogénea asociada.
- b) Encuentra la solución general de dicha EDO homogénea, probando soluciones de la forma $v(x)e^{rx}$ y hallando la forma concreta de la función v .
- c) Resuelve la EDO original.

C.3.5. Problemas de circuitos eléctricos

- 16** Se conecta en serie una resistencia de $R = 4$, un condensador de capacidad $C = 1$ y una bobina con $L = 4$ a una fuente de corriente alterna $V(t) = 100 \cos t$. Determina la carga en el condensador y la corriente que circula por el circuito en el instante t , si originalmente el condensador estaba descargado y la corriente era de 6 A.

- 17** Consideramos un circuito sin bobina (**circuito RC**) y suponemos que en el instante inicial no hay carga en el condensador y el voltaje es una constante $V(t) = V$ voltios.

- a) ¿Cuánta carga almacena el condensador en un instante cualquiera $t > 0$?
- b) ¿Cuánto tardará el condensador en cargarse al 90 %?
- c) ¿Cuánta corriente pasa por el circuito en ese momento?
- d) Si la corriente decrece linealmente con pendiente constante $I'(0)$, ¿cuánto tiempo tardaría el circuito en quedarse sin corriente? Si llamamos τ a ese instante, en la situación real en la que la pendiente varía, ¿cuánta corriente queda circulando respecto de la inicial $I(0)$?

- 18** Consideramos un circuito sin condensador (**circuito RL**) y suponemos que en el instante inicial no no hay tensión en la bobina y el voltaje es una constante $V(t) = V$ voltios.

- a) Calcula la intensidad de corriente que circula por el circuito en cualquier instante $t > 0$.
- b) ¿Cuál es la caída de voltaje en la resistencia en ese momento?
- c) ¿Qué sucede a largo plazo con las dos cantidades anteriores?
- d) Si la corriente crece linealmente con pendiente constante $I'(0)$, ¿cuánto tiempo tardaría el circuito en alcanzar la intensidad máxima $I_{\text{máx}}$? Si llamamos τ a ese instante, en la situación real en la que la pendiente varía, ¿cuánta corriente circularía en ese instante respecto de máxima posible $I_{\text{máx}}$?

- 19 Conectamos en serie un condensador de capacidad $C = 0,01$, un inductor de $L = 0,01$ y una fuente de voltaje que proporciona $10 \cos(10t)V$, formando así un **circuito LC**. Encuentra la expresión para la carga y la corriente en todo tiempo t , suponiendo que al principio el condensador está descargado y que no circula corriente por el circuito.

C.4. Sistemas de EDOs

- 1 Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales o problemas de valores iniciales:

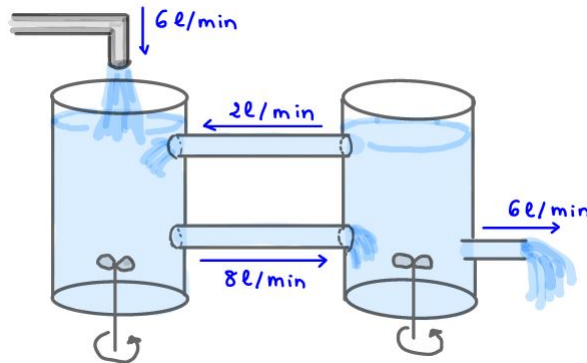
$$\begin{array}{ll}
 a) \begin{cases} x' = -y, & x(0) = 27 \\ y' = -25x, & y(0) = 33 \end{cases} & f) \begin{cases} x'' + y' - x + y = -1 \\ x' + y' - x = t^2 \end{cases} \\
 b) \begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x + y \\ y' = -x - \frac{1}{2}y \end{cases} & g) \begin{cases} x' = x + 2y - z \\ y' = x + z \\ z' = 4x - 4y + 5z \end{cases} \\
 c) \begin{cases} x' = -\frac{13}{8}x + \frac{3}{4}y \\ y' = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}y \end{cases} & h) \begin{cases} x' - y' = y \\ x + y' - y = e^{2t} \end{cases} \\
 d) \begin{cases} x'' - x + 5y = e^t \\ 2x + y'' + 2y = 0 \end{cases} & i) \begin{cases} x'' = -y + t \\ 3x' - 2x + y' = t^2 \end{cases} \\
 e) \begin{cases} x' = 3x - 4y + 1 \\ y' = 4x - 7y + 10t \end{cases} & j) \begin{cases} x'' = y + 1 \\ y'' = x + t \end{cases}
 \end{array}$$

- 2 (Examen junio 2020) Usando el operador diferencial D resuelve analíticamente el sistema

$$\begin{cases} 2x' + y' - x - y = e^{-t} \\ x' + y' + 2x + y = e^t \end{cases}$$

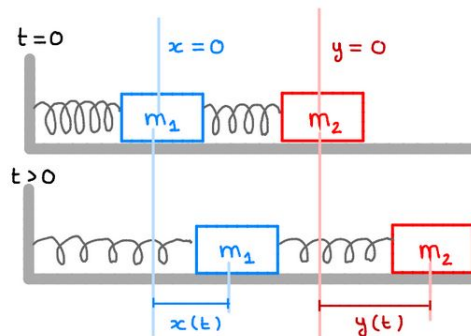
- 3 Tenemos dos tanques que almacenan 24 l de una solución salina y están interconectados por tuberías como muestra la figura.

Un grifo alimenta de agua fresca el primer tanque a una velocidad de 6 l/min, y a esa misma velocidad se desaloja mezcla del segundo depósito; simultáneamente 8 l/min se bombean del primer al segundo tanque, mientras que 2 l/min pasan del segundo al primero. El líquido en el interior de ambos tanques se remueve mecánicamente para que las mezclas sean homogéneas. Si las cantidades iniciales de sal en ambos tanques son 2 y 4 kg de sal, respectivamente, calcula la cantidad de sal en cada tanque pasado un tiempo $t > 0$.



- 4 En una superficie horizontal tenemos una masa m_1 unida a una pared mediante un muelle de constante k_1 . Además, dicha masa está conectada a otro objeto de masa m_2 a través de un muelle con constante k_2 . Suponemos que no hay fuerzas exteriores adicionales e ignoramos rozamiento.

a) Si partimos de una situación de equilibrio, estiramos 3 metros cada muelle y luego los soltamos, plantea el sistema que modela el desplazamiento de ambos objetos.



b) Resuelve el sistema planteado con los datos $m_1 = 2$ kg, $m_2 = 1$ kg, $k_1 = 4$ N/m y $k_2 = 2$ N/m.

- 5 Convierte las siguientes EDOs de orden $n \geq 2$ en sistemas de EDOs de primer orden:

a) $u'' + (\sin t)u' + (t^2 - t)u = t^3$.

b) $u''' + 2u'' + 3u' - 2u = 0$, con $u(0) = 1$, $u'(0) = -1$, $u''(0) = 4$.

c)
$$\begin{cases} u'' = tu' - 2v' - e^t v + \sin t \\ v'' = u - 3v' \end{cases}$$

- 6 Consideramos un modelo de combate de Lanchester para el enfrentamiento entre tropas convencionales y fuerzas de guerrilla (consideramos que no puede haber refuerzos ni pérdidas operativas):

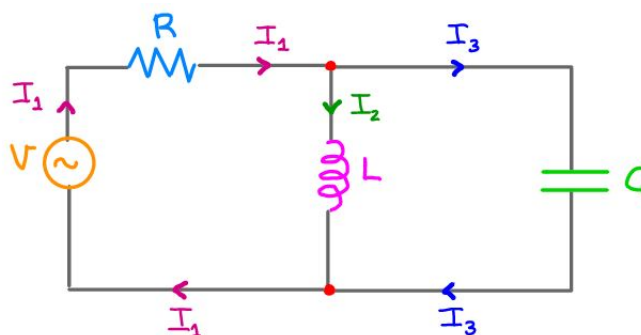
$$\frac{dx}{dt} = -axy, \quad \frac{dy}{dt} = -bx,$$

donde $x(t)$ es el número de combatientes en la guerrilla en el instante t e $y(t)$ representa la cantidad correspondiente para el bando contrario.

- Encuentra una única EDO para $\frac{dy}{dx}$. Describe las curvas solución.
- Dibuja un esbozo del diagrama de fase para este sistema, donde se muestre la dirección del movimiento en cada trayectoria conforme el tiempo pasa.
- Si el tamaño inicial de ambos ejércitos es x_0 e y_0 , ¿quién gana? La respuesta se debe dar en función de una condición que relacione x_0 , y_0 con los parámetros del problema a, b .
- En cada caso, determina el número de combatientes que sobreviven en el bando ganador una vez terminada la batalla.

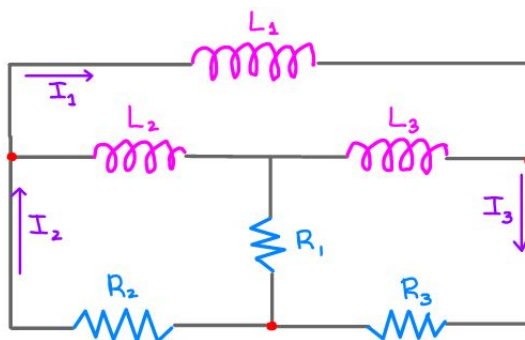
7 Plantea el sistema que modelaría el combate entre dos bandos organizados en guerrillas (de nuevo, sin refuerzos ni pérdidas operativas). Para dicho sistema, repite los apartados del ejercicio anterior.

8 a) Plantea el sistema que modela la siguiente red eléctrica:



- Considera los valores $R = 20$, $L = 1$ y $C = \frac{1}{160}$; además la fuente de alimentación proporciona una tensión de $5V$. Si en el instante inicial la carga en el condensador era de 2 Culombios y no circulaba corriente a través de él, resuelve el sistema con los valores dados para obtener la carga en el condensador en cualquier instante $t > 0$, así como las corrientes que circulan por cada malla de la red.

9 a) Considerando los valores $R_1 = 1$, $R_2 = 2$, $R_3 = 3$ y $L_1 = L_2 = L_3 = 1$, plantea el sistema que modela la siguiente red eléctrica:



-
- b) Con las condiciones iniciales $I_1(0) = I_3(0) = 0$ e $I_2(0) = 2$, calcula el valor de las corrientes I_2 e I_3 que circulan por la red en un instante cualquiera $t > 0$.

- 10 Encuentra los puntos de equilibrio de los siguientes sistemas

$$\left. \begin{array}{l} x' = x + y \\ y' = x - y \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} x' = x + y \\ y' = -x - y \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} x' = x + 4y - 6 \\ y' = 2x - y - 3 \end{array} \right\}.$$

- 11 Buscamos describir el comportamiento de las soluciones del siguiente sistema lineal de primer orden cerca del punto de equilibrio $(0, 0)$:

$$\begin{cases} x' = ax - y \\ y' = x + ay \end{cases}$$

donde a es una constante. Para ello, sigue los siguientes pasos:

- a) Encuentra la EDO que verifica $\frac{dy}{dx}$.
b) Haz un cambio a coordenadas polares

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \tan(\theta) = y/x,$$

y deriva ambas igualdades respecto de x .

- c) Encuentra y resuelve la EDO que satisface $\frac{dr}{d\theta}$. ¿Qué forma tiene la curva $r = r(\theta)$?

- 12 Para el siguiente sistema de **presa-depredador**:

$$\frac{dx}{dt} = x(a - b \cdot y), \quad \frac{dy}{dt} = y(d \cdot x - c)$$

- a) ¿Cuáles son los puntos de equilibrio del sistema?
b) Obtén las trayectorias $y = y(x)$ solución del sistema.
c) Escribe el sistema lineal asociado que mejor aproxima este problema y clasifica sus soluciones de equilibrio.
d) Comprueba el apartado anterior obteniendo las trayectorias del sistema lineal asociado.

- 13 Estudia la estabilidad de las soluciones de equilibrio del sistema:

$$\frac{dx}{dt} = 1 - y, \quad \frac{dy}{dt} = x^2 - y^2.$$

- 14 Considera los siguientes sistemas:

$$\begin{array}{ll}
 a) \begin{cases} x' = x(2x + 3y - 7), \\ y' = y(3x - 4y - 2), \end{cases} & d) \begin{cases} x' = \sin(x + y) \\ y' = e^x - 1 \end{cases} \\
 b) \begin{cases} x' = x(x^2 + y^2 - 10) \\ y' = y(xy - 3) \end{cases} & e) \begin{cases} x' = y + x^2 - 3 \\ y' = x(1 + y) \end{cases} \\
 c) \begin{cases} x' = y \\ y' = -x + (1 - x^2)y \end{cases} & f) \begin{cases} x' = y^3 - x^3 \\ y' = 1 - y^3 \end{cases}
 \end{array}$$

Para cada uno de los sistemas anteriores:

- a) Encuentra todos los puntos de equilibrio.
- b) Escribe la aproximación lineal del sistema cerca de cada punto de equilibrio.
- c) Clasifica (si es posible) el tipo de punto de equilibrio y su estabilidad.

15 En un modelo SIR con inmunidad permanente suponemos que $R_0 < 1$, de manera que el único punto de equilibrio con significado biológico es $(N, 0)$:

- a) Comprueba que dicho punto de equilibrio es un nodo estable.
- b) Predice el comportamiento a largo plazo de $S(t)$ e $I(t)$.

16 (Examen junio 2020) En un ataque zombi toda la población está en peligro. Si un zombi muerde a un humano, este se convierte en zombi. Además, los humanos pueden matar a los zombis con un spray si se los encuentran, pero la tasa de efectividad de los humanos matando zombis es la mitad que la de los zombis mordiendo a humanos. Finalmente, los muertos pueden resucitar pasando a ser zombis.

Considera que el ataque se produce en pocas horas, con lo que podemos suponer que las tasas de natalidad y mortalidad naturales son cero.

- a) Plantea el sistema de cómo evoluciona el número de humanos susceptibles (S), zombis (Z) y muertos (R) durante el ataque.
- b) Suponiendo que la población tiene N habitantes, tendremos que $R = N - S - Z$. Usa esta información en las ecuaciones de S y Z para hallar los puntos de equilibrio. Escribe el sistema linearizado y estudia su estabilidad para cada punto de equilibrio. Interpreta el resultado en el contexto del apocalipsis zombi.

C.5. La transformada de Laplace

C.5.1. Fórmulas y propiedades básicas

- 1** Denotemos por $F(s)$ o bien $\mathcal{L}[f]$ la transformada de Laplace de una función f .

-
- a) Si existe $\mathcal{L}[f]$, calcula $\mathcal{L}[f']$ y $\mathcal{L}[f'']$.
- b) **(Examen junio 2020)** Calcula $\mathcal{L}[e^{at}]$, donde a es una constante, y especifica el dominio de la función obtenida.
- c) Comprueba que $\mathcal{L}[\cdot]$ es un operador lineal.
- d) **(Examen julio 2020)** Como aplicación, calcula $\mathcal{L}(e^{i\alpha t})$ y deduce la fórmula para $\mathcal{L}[\cos(\alpha t)]$.
- e) Si $f(t) = 2 + 5e^{-2t} - 3\sin(4t)$ para $t \geq 0$, encuentra $\mathcal{L}[f]$.
- f) Encuentra $F'(s)$ y $F''(s)$.

2 Calcula la transformada de Laplace de las siguientes funciones:

- | | |
|---|---|
| a) $\cosh(\alpha t)$ y $\sinh(\alpha t)$. | h) $t^3 - 4t^2 + 5$ |
| b) $g(t) = \int_0^t f(u) du$. | i) $f(t) = e^{-4t}(t^2 + 1)^2$ |
| c) $t e^{at} \sin(\alpha t)$ | j) $g(t) = \begin{cases} t, & \text{si } t < 2 \\ 1, & \text{si } 2 \leq t < 3 \\ e^{-2t}, & \text{si } t \geq 3 \end{cases}$ |
| d) $f(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq t < 2 \\ e^{-t}, & \text{si } t \geq 2 \end{cases}$ | k) $h(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < 1 \\ t - 1, & \text{si } 1 \leq t < 2 \\ 3 - t, & \text{si } 2 \leq t < 3 \\ 0, & \text{si } t \geq 3 \end{cases}$ |
| e) $g(t) = \begin{cases} 5, & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ t, & \text{si } 1 \leq t < 3 \\ e^{2t}, & \text{si } t \geq 3 \end{cases}$ | l) $e^{2t}t^3$ |
| f) $t^2 \sin(3t)$ | m) $e^{-t} \cos(3t)$ |
| g) $f(t) = e^{-4t}(7 \cos(2t) + 4 \sin(5t))$ | |

3 **(Examen julio 2020)** Halla (combinando propiedades) la transformada de Laplace de

$$f(t) = 5te^{3t+1} \sin(2t) + 2e^{-3t}t^3.$$

4 Calcula la transformada de Laplace inversa de las siguientes funciones:

- | | |
|-------------------------|--|
| a) $\frac{3s}{4 + s^2}$ | b) $\frac{5}{s-6} - \frac{6s}{s^2+9} + \frac{3}{2s^2+8s+10}$ |
| | c) $\frac{e^{-s}}{s^2}$ y $\frac{se^{-s}}{s^2+1}$ |

C.5.2. Resolución de EDOs usando transformadas de Laplace

5 Resuelve usando transformadas de Laplace:

-
- a) (**Examen junio 2020**) $ty'' - ty' + y = 2$, con $y(0) = 2$ e $y'(0) = -1$.
b) $y' - y = 2 \sin t$, con $y(0) = 0$.

- 6 Resuelve los siguientes problemas de valores iniciales usando la técnica de la transformada de Laplace:

- a) $y'' + y = I(t)$ con $y(0) = y'(0) = 0$, donde $I(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 0, & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$
b) $ty'' + (3t - 1)y' + 3y = 6e^{-3t}$, con $y(0) = 1$, $y(5) = 2$.
c) $ty'' + (t - 1)y' - y = 0$, con $y(0) = 5$, $\lim_{t \rightarrow \infty} y'(t) = 0$.
d) $y'' + 2y' + 5y = g(t)$ con $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, donde $g(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \leq t < 2 \\ 0, & \text{si } t \notin [1, 2) \end{cases}$

- 7 (**Examen julio 2020**) Un tanque contiene inicialmente 500 ℓ de agua salada con una concentración de sal de 0.2 kg/ ℓ . Durante 10 min, está abierta una válvula por donde entra agua a 12 ℓ /min con una concentración de sal de 0,4 kg/ ℓ . Tras esos 10 min, se abre otra válvula, que aporta una concentración de 0,6 kg/ ℓ a razón de 12 ℓ /min. Por un grifo salen 12 ℓ /min de la mezcla durante todo el proceso, para así mantener el volumen del depósito constante.

Encuentra la cantidad de sal en el tanque en cualquier instante t . Para ello, plantea el problema de valor inicial adecuado y resuelve **usando transformadas de Laplace**.

- 8 La población de peces en un lago crece sin limitación de recursos hasta que empieza la temporada de pesca. Pero a partir del uno de junio y hasta el fin de la temporada (28 de septiembre) se capturan h peces por día en el lago. Empezando a contar el tiempo a inicio de temporada y considerando P_0 la población inicial de peces, plantea y resuelve la ecuación que modela la población de peces del lago a lo largo de un año.

- 9 Se encuentra un cadáver a medianoche en una habitación a temperatura ambiente de 21 $^{\circ}\text{C}$ y la policía sospecha que se trata de un asesinato. La temperatura del cuerpo es de 26 $^{\circ}\text{C}$ en el momento que lo encuentran y de 24 $^{\circ}\text{C}$ una hora más tarde.

- a) Da una estimación de la hora aproximada de la muerte suponiendo que tuvo lugar en la misma habitación donde se encontró el cuerpo.
b) Datos de la autopsia y la inspección del lugar del crimen, revelan que el asesinato tuvo lugar en el exterior, donde la temperatura era de 10 $^{\circ}\text{C}$ y que el cuerpo fue trasladado a la habitación media hora después de la muerte. ¿Cuál es la hora estimada de la muerte en estas circunstancias?

C.5.3. Resolución de sistemas usando transformadas de Laplace

- 10 El 19 de febrero de 1945 empezó en la isla de **Iwo Jima** una de las batallas más sangrientas de la **Segunda Guerra Mundial**, la cual duró poco más de un mes.

En la isla se desplegaron 22000 soldados japoneses que lucharon *hasta la muerte*, sin refuerzos ni retiradas; de hecho, solo 216 sobrevivieron y fueron capturados, casi todos los restantes murieron en combate o por suicidio ritual cuando la derrota era obvia.

Del bando americano aterrizaron 54000 marines durante el primer día, 6000 el tercer día y un último refuerzo de 13000 en el sexto día.

Plantea y resuelve el sistema de ecuaciones que modela el combate.

- 11** Usa la transformada de Laplace para resolver los sistemas

a)
$$\left. \begin{aligned} x'(t) &= -0,2x + I(t) \\ y'(t) &= 0,2x - 0,05y \end{aligned} \right\}, \text{ donde } I(t) = \begin{cases} I, & \text{si } 0 \leq t < 2 \\ 0, & \text{si } t \geq 2 \end{cases} \quad \text{para una constante } I, \text{ con las condiciones iniciales } x(0) = y(0) = 0.$$

b)
$$\left. \begin{aligned} x' &= 2y + 3 \\ y' &= 2x - 2t \end{aligned} \right\}, \text{ con las condiciones iniciales } x(0) = y(0) = 0.$$

c)
$$\left. \begin{aligned} 2x'' + y' - 2x - y &= -\cos t - \sin t \\ 2y'' - 2x' + y - 2x &= 3\cos t + 4\sin t \end{aligned} \right\},$$

con las condiciones iniciales $x(0) = 4, x'(0) = 3/2, y(0) = 6, y'(0) = 5$.

C.5.4. Impulsos: la función Delta de Dirac

- 12** Administramos a un paciente una medicación en dos inyecciones iguales e instantáneas con 12 horas de separación entre las dosis, de manera que la cantidad total administrada es 1 mg. Suponiendo que la droga es eliminada del cuerpo a una velocidad proporcional a la cantidad de la misma, calcula la cantidad de medicación que permanece en el cuerpo t horas después de la administración de la primera dosis.

- 13** Una masa de 1 kg cuelga de un muelle con constante $k = 10$ N/m, a su vez la masa está conectada a un amortiguador cuyo coeficiente de amortiguamiento es de $\frac{2}{5}$ kg/s. Cuando la masa cuelga en reposo en su posición de equilibrio, es golpeada por un martillo con un impulso instantáneo de 20 N. Calcula la posición del muelle en el instante t .

- 14** Vamos a comparar 3 formas de dosificar una medicación que se administra por vía intravenosa (IV) (directamente en el flujo sanguíneo). Consideraremos el modelo más simple posible en el que el cuerpo está formado por un único compartimento que identificamos con la sangre. Suponemos que una vez la droga está en nuestro cuerpo, se elimina gradualmente de la sangre a una tasa proporcional a la cantidad de droga en sangre. Administramos la misma cantidad total de medicación a un paciente bajo tres tipos de dosificación:

- a) La droga se administra mediante un gotero de manera IV gradual y continua durante un periodo de 12 horas.

-
- b) La droga se administra toda de una vez mediante una inyección al principio del periodo de 12 h.
 - c) Se distribuye la medicación en dos mitades que se administran en dos goteros que tardan una hora cada uno en vaciarse, los cuales se le ponen al paciente durante la primera y la sexta hora de tratamiento.

Compara cómo varía el nivel de droga en sangre para cada uno de los tratamientos anteriores. Para ello, halla la ecuación que modela el problema en cada caso y resuelve dicha ecuación usando transformadas de Laplace.

C.6. Métodos numéricos para EDOs de orden 1

- 1 Considera el problema de valores iniciales $y' = xy$, $y(1) = 1/2$.
 - a) Usa el método de Euler para calcular el valor aproximado de $y(2)$ usando un paso de $h = 1/4$. Repite lo anterior ahora con $h = 1/10$.
 - b) Resuelve de manera explícita la EDO y calcula el valor exacto de $y(2)$.
 - c) Calcula el error porcentual relativo $= 100 \cdot \left| \frac{y_{\text{exacta}} - y_{\text{aprox}}}{y_{\text{exacta}}} \right|$ en las aproximaciones del primer apartado.
 - d) Ahora nos movemos hacia la izquierda, es decir, tomamos $x_n = x_0 - n \cdot h$ para $n \in \mathbb{N}$. Usa esta manera de avanzar en el método de Euler para calcular $y(1/2)$ con $h = 1/10$. ¿Cuál es el error porcentual relativo?

- 2 Busca información y explica con detalle cada uno de los siguientes métodos:

- Método de Heun
- Método de Runge-Kutta

La explicación debe incluir cuál es la idea matemática detrás de la fórmula iterativa de cada método. Usa dibujos si esto ayuda a que la idea quede más clara.

- 3 Resuelve, aplicando el método de Heun, el problema de valores iniciales

$$y' = \cos(15xy), \quad y(0) = 1$$

en el intervalo $[0, 1/2]$ para $N = 10$ y $N = 20$. Compara ambas soluciones con la solución obtenida con el método de Euler para $N = 20$ y con la instrucción `NDSolve` de Mathematica.

- 4 Resuelve los siguientes problemas de valores iniciales (con el paso h y en el intervalo indicados) usando los métodos de Euler, Heun y Runge-Kutta. Compara los resultados obtenidos con la solución exacta (calculada analíticamente, a mano). Recuerda proporcionar una tabla con las aproximaciones sucesivas de cada método y los errores porcentuales, así como un dibujo final en que se muestren las 4 soluciones calculadas para cada caso.

-
- a) $y' = (15 - y)y$, $y(0) = 1$ en el intervalo $[0, 1]$ con $h = 1/10$.
- b) $y' = 4x^2\sqrt{y} - \frac{2}{x}y$, $y(2) = 1$ en el intervalo $[2, 3]$ con $h = 1/10$.
- c) $y' = 2xy - y$, $y(0) = 1$ en el intervalo $[0, 2]$ con $h = 1/5$.
- d) $y' = y \sin x$, $y(0) = 1$ en el intervalo $[0, 12]$ con $h = 1/2$.

- 5 Queremos llenar una garrafa de aceite usando un embudo de la siguiente forma:



La superficie exterior del embudo se ha obtenido al girar la curva $x = 1 + 2^{y-2}$, con $y \in [0, 3]$ (en dm) alrededor del eje y .

El embudo tiene una tapa en la base que quitamos para que se vacíe, lo cual descubre un agujero de área $0,6\pi$. Plantea (lee y explica el argumento que usa la ley de Torricelli) la ecuación de cómo cambia el nivel del agua $h(t)$ el embudo a los t segundos de que el tapón se quite.

Intenta encontrar una solución aproximada usando el método de Runge-Kutta con $h = 1/10$. Conjetura a partir de ahí cuánto tarda aproximadamente en vaciarse el embudo. Reduce el tamaño del paso a $h = 1/20$ y repite el proceso. ¿Obtienes una solución coherente con la conjetura anterior?

Si cada vez llenamos por completo el embudo y la garrafa es de 10 litros, ¿cuántas veces tendremos que llenar el embudo y cuánto tardará en llenarse la botella?

C.7. Ejercicios de repaso de EDOs

- 1 Identifica el tipo de EDO y halla la solución general o particular (si se trata de problemas de valor inicial). Basta con encontrar una solución implícita.

a) $y'x + xe^{yx^{-1}} = y$ con $y(1) = 0$.

b) $3(1 + x^2) dy = 2xy(y^3 - 1) dx$.

c) $y' = \frac{3x^4 + y^2 + 1}{2xy}$.

-
- 2) Nos encargan fabricar banderas para la Unión Europea. Para ello, preparamos un tanque con 40 litros de agua donde disolvemos 4 gramos de un tinte azul. Como el tono nos sale demasiado claro, en un determinado instante añadimos a razón de $1 \ell/\text{min}$ agua que contiene 0,5 g de tinte por litro. Al mismo tiempo, para que el tanque no rebose, lo drenamos a ritmo de $2 \ell/\text{min}$. Halla la cantidad de tinte en el tanque transcurridos t minutos. ¿Cuándo tendremos la máxima cantidad de tinte dentro del tanque?

- 3) Resuelve las siguientes EDOs o sistemas:

a) $y' = \frac{y}{y^3 - 3x}$.

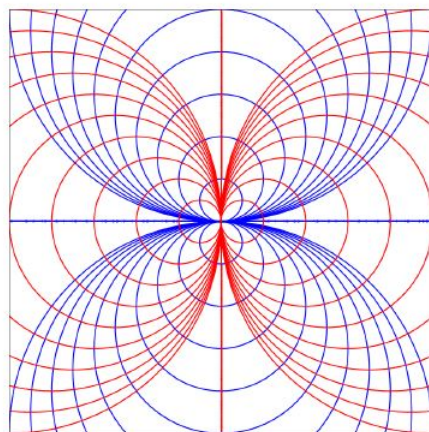
b) $y'' + 2y' + y = e^{-x}$.

c) $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{1 + e^{2x}}$.

d) $\begin{cases} x'' = x - 5y \\ y'' = -2(x + y) \end{cases}$

- 4) El CEO de una empresa de 5000 trabajadores está de viaje cuando le comunican que la noticia de un ERTE se ha filtrado en el departamento de marketing (que tiene 200 empleados). Su abogado le recomienda volver para aclarar las cosas si solo si el rumor llega a más de 900 empleados una semana después de la filtración. Si a los 3 días recibe un email de que la noticia ha sido oída por 400 personas, ¿le recomendarías suspender o continuar el viaje? Plantea y resuelve la EDO correspondiente, recordando que la tasa de cambio de las personas que han oído la noticia es proporcional al número de personas que la han oído y al de las que no la han oído.

- 5) a) En rojo tenemos las curvas equipotenciales del campo eléctrico sobre una placa cuadrada, que vienen dadas por $x^2 + y^2 = 2Cx$. Si dejamos libre una partícula cargada, se moverá siguiendo las líneas azules. Plantea y resuelve la EDO adecuada para obtener la expresión de dichas curvas en el plano (x, y) .



-
- b) Dada la EDO autónoma $y' = (2 - y) \log(1 + y^2)$, encuentra todas las soluciones de equilibrio y clasifica su estabilidad. Para ello, dibuja el diagrama de fase y haz un esbozo de las soluciones. Determina $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$ cuando y es una solución que cumple $y(0) = 1$.
- c) Escribe una EDO lineal pero no separable. ¿En qué tipo de problemas aparecen este tipo de ecuaciones?
- 6 a) Resuelve la EDO $y'' - 2y' + y = 4x^2 - 3 + \frac{e^x}{x}$.
- b) Explica razonadamente cómo obtener la ecuación algebraica asociada a una EDO de la forma $y'' + ay' + by = 0$. En caso de que dicha ecuación tenga dos soluciones reales y distintas, detalla cómo se obtiene la solución general.
- c) Escribe un problema de valor inicial con una EDO de segundo orden, para el que podamos garantizar existencia y unicidad como máximo en el intervalo $(1, 3)$.
- 7 a) Usando el operador diferencial D resuelve analíticamente el sistema $\begin{cases} x'' = 4y + e^t \\ y'' + e^t = 4x \end{cases}$.
- b) Para el siguiente sistema: $\begin{cases} x' = x - 2y\sqrt{x} \\ y' = -2y + y\sqrt{x} \end{cases}$. ¿Quién es el depredador y quién la presa? ¿Están en peligro de extinción? ¿Podemos esperar que convivan en un equilibrio estable?
- c) Para el siguiente sistema: $\begin{cases} x' = -\frac{\alpha y}{x^2 + y^2} \\ y' = \frac{\alpha x}{x^2 + y^2} \end{cases}$. Dibuja cómo evoluciona el sistema pintando las trayectorias solución en el primer cuadrante. Si se trata de una batalla, ¿quién gana? ¿Está el ganador recibiendo refuerzos? Razona las respuestas.
- 8 a) Denotemos por $\mathcal{L}[f]$ la transformada de Laplace de una función f . Si existe $\mathcal{L}[f]$, calcula razonadamente (sin usar fórmulas de la tabla) $\mathcal{L}[f']$ y $\mathcal{L}[f'']$.
- b) Halla (combinando propiedades de la tabla) la transformada de Laplace de
- $$f(t) = 4te^{-t} \sin(3t) + 2g(t), \quad \text{con} \quad g(t) = \begin{cases} 2, & \text{si } t < 2 \\ t, & \text{si } 2 \leq t < 3 \\ 3 + e^{t-3}, & \text{si } t \geq 3 \end{cases}$$
- c) Consideremos un sistema muelle-masa no amortiguado con constante del muelle $k = 4$. Supongamos que una masa de 1 kg se desplaza 1 m de su estado de equilibrio y se golpea para impartir una velocidad inicial de 1 m/s. Además, en los instantes $t = 7$ s y $t = 20$ s, un martillo da un impulso extra de 1 N a la masa en dirección positiva. Escribe y resuelve el problema de valores iniciales que modela esta situación. Expresa la solución como una función a trozos.