

INFLUENCIA DEL CONTEXTO EN LA EXPRESIÓN $a/0$

Bernardo Gómez y César Gallart (Universidad de Valencia)

Resumen

En las matemáticas de Bachillerato la expresión $a/0$ (con $a = 0$ o $a \neq 0$) aparece en distintas situaciones y las explicaciones sobre su significado se hacen en términos poco claros y ambiguos, lo que puede hacer emerger en los alumnos incoherencias y dificultades. Nosotros pretendemos examinar y categorizar las interpretaciones dadas por los alumnos de bachillerato para justificar esta expresión, cuando está presente en distintas situaciones donde puede ser interpretada no solo como división, sino también como fracción o razón, y recabar información sobre la influencia que tienen los contextos algebraicos, geométricos y analíticos en su modo de pensar.

Palabras clave: división por cero, indefinido, imposible, indeterminado

Abstract

The expression $a/0$ (with $a = 0$ or $a \neq 0$) appears in distinct situations in pre-university mathematics and the explanations about its significance are made in not very clear and ambiguous terms, what can make incoherences and difficulties emerge in students. We intend to examine and categorize the interpretations given by the pre-university students to justify this expression, when it is present at different situations where can be interpreted not only like a division, but also like a fraction or ratio, and to get information about the influence that the algebraic, geometric and analytical contexts have on his way of to thinking.

Key words: division by zero, indefinite, impossible, undetermined

Introducción

Nuestro tema de investigación surge a partir de las reacciones de los alumnos de 2º de Bachillerato cuando se enfrentan a situaciones en las que subyace la expresión $a/0$. Como ejemplo mostramos una de estas situaciones, recogida durante nuestra labor docente:

En el contexto de la geometría analítica, al trabajar con la ecuación continua de la recta, $\frac{x-1}{2} = \frac{y-4}{0} = \frac{z+1}{3}$, los estudiantes reaccionan de maneras distintas:

- Algunos comentan que esta ecuación no es válida pues “no se puede dividir por cero” o “el denominador no puede ser cero”.
- Otros comentan que el segundo miembro representa el “infinito” o “a cualquier número” y muestran dudas sobre cómo interpretar entonces esta ecuación.
- Otros operan con el cero como si se tratara de cualquier otro número sin mostrar ninguna extrañeza ante esta expresión.

Los libros de texto actuales que hemos consultado tampoco parecen ponerse de acuerdo respecto a la interpretación de esta situación:

- En Colera, García y Oliveira. (2003, p. 156) se dice “tal expresión no es correcta aritméticamente pero puede admitirse como *expresión simbólica*”, el uso de $a/0$ se justifica por su “carácter simbólico” (¿qué querrán decir con este enunciado?) nos permite señalar una característica de esta recta (la segunda coordenada de todos los

vectores directores de esta recta es cero) e incluso obtener, a partir de ésta, la ecuación general o implícita de la recta (la ecuación $y = 4$ se puede obtener simplemente despejando el cero del denominador, pero, ¿realmente podemos aplicar estas reglas algebraicas con expresiones de este tipo?). La barra “/” tendría en este caso el significado de razón.

- En Biosca, Espinet, Jimeno y Martín (1999, p. 110) se rechaza la posibilidad de que algún denominador pueda ser cero. Las rectas cuyos vectores directores tienen alguna coordenada nula no tienen ecuación continua.

Tanto en la respuesta de los alumnos como en los libros de textos observamos distintas interpretaciones dadas en términos de división, fracción o razón, pero, ¿cuál sería la más precisa en este caso?

Problemática

Además de la situación que hemos descrito en la introducción, en las matemáticas de bachillerato esta expresión aparece también en contextos algebraicos (fracciones algebraicas, ecuaciones racionales), geométricos (tangente de 90° , pendiente de la recta), y analíticos (funciones racionales, cálculo de límites, indeterminaciones), donde la barra “/” puede ser interpretada como división, fracción o razón.

Analizando los libros de texto de actuales hemos comprobado como asocian esta expresión a términos como *no definido* (“la división entre cero no está definida”, Bobillo y García, 2000a, p. 164), *imposible* (en el dominio de una función se indica que “es en principio, todo R , salvo que haya operaciones imposibles”, Colera, García y Oliveira, 2003, p. 306), *sin sentido* (“en el caso de que alguna componente del vector v sea nula, la condición de colinealidad carece de sentido, si se mira como una igualdad entre cocientes”, Bobillo y García, 2000b, p. 152), o *simbólico* (en la ecuación continua de la recta, “no es correcta aritméticamente pero puede admitirse como expresión simbólica”, Colera, García y Oliveira, 2003, p. 156), y es habitual el uso de $a/0 = \infty$ en formularios destinados al cálculo de límites.

Pensamos que el uso de estos términos, confusos y ambiguos, que no dotan de un significado preciso a esta expresión, el tratamiento algorítmico de las relaciones entre fracción, razón y división, y el salto que se produce en su significado, desde su interpretación como división (que es el modelo predominante) a su uso en otros contextos, sobre todo el analítico, dejando de lado otras posibles interpretaciones, pueden propiciar incoherencias y dificultades en nuestros alumnos cuando se enfrentan a situaciones como las descritas. Esta es la problemática que nos propusimos investigar en la memoria de tercer ciclo y que en este artículo esbozaremos en sus aspectos más relevantes.

En el apartado siguiente revisaremos los trabajos relacionados con esta temática en los que se fundamenta nuestro marco teórico.

Marco teórico.

Los trabajos de Ball (1988), Tsamir (1996), Tirosh (2000) y Tsamir y Tirosh (2000) se centran en la división por cero, lo que induce a pensar solo en contextos aritméticos. En ellos se examinan y clasifican las creencias de alumnos, maestros y profesores en formación acerca de la expresión $a \div 0$ (con $a = 0$ o $a \neq 0$).

Una de las conclusiones a las que llegan todos estos trabajos es que el nivel académico en matemáticas de los entrevistados influye en sus respuestas. Observan diferencias

significativas entre las respuestas que dan aquellos que tienen un nivel académico alto en matemáticas y las que dan aquellos que tienen un nivel académico bajo. Los primeros basan sus respuestas en argumentos matemáticos mientras que los segundos aportan una variedad de respuestas justificadas mediante ejemplos basados en el modelo de reparto de la división o el uso de reglas memorizadas.

En un trabajo posterior de Gómez, Lonjedo y Oliver (2003), miembros del grupo *Pensamiento Numérico y Algebraico* de la Universitat de València, replica a los trabajos de Tsamir y Tirosh con estudiantes de la facultad de Matemáticas, se observa que la mayoría de las respuestas parecen corresponder a las de un nivel académico bajo, predominando el modelo partitivo de la división frente a otras justificaciones con base matemática.

A continuación recogemos, resumidamente, las categorías que se desprenden de los trabajos de Tsamir, Tirosh y Ball. Una categorización similar podemos encontrarla en Gómez, Lonjedo y Oliver (2003):

- A. Se apoyan en la definición de la división como operación inversa a la multiplicación: el cociente $a \div b$ es el único número x (si existe) tal que $a = b \cdot x$. Se dan los dos casos:
 - 1. Indefinido: La expresión $a \div 0$ significa que hay un número x tal que $0 \cdot x = a$, pero no hay ningún número que lo cumpla ya que $0 \cdot x$ es siempre cero (ver Tsamir y Tirosh, 2000, p. 245).
 - 2. Indeterminado: La expresión $0 \div 0$ significa que hay un número x tal que $0 \cdot x = 0$, pero esta ecuación tiene más de una solución (ver Tsamir y Tirosh, 2000, p.247).
- B. 0:0 es un caso específico de la división por cero: La división por cero es indefinida para cualquier número, incluido el cero (ver Tsamir y Tirosh, 2000, p. 247)
- C. Utilizan ejemplos reales basados en el modelo de reparto de la división: Imposibilidad de operar. Se usan ejemplos reales para justificar las respuestas, basados en la división como proceso de *repartir* y la interpretación de cero como *nada*:
 - 1. $12 \div 0$: “ $12 \div 0$ significa repartir 12 pasteles en partes iguales entre 0 niños. Es imposible repartir 12 pasteles entre ningún niño. Por tanto $12 \div 0$ no tiene sentido, es indefinido” (ver Tsamir y Tirosh, 2000, p. 246).
 - 2. $0 \div 0$: “ $0 \div 0$ significa repartir 0 pasteles en partes iguales entre 0 niños. Pero es imposible repartir 0 pasteles entre 0 niños, por tanto, $0 \div 0$ no tiene sentido” (ver Tsamir y Tirosh, 2000, p. 247).
- D. Ligadas al cálculo de límites: Inexistencia del límite. Según nos acerquemos a 0 por la derecha o por la izquierda, el límite será $+\infty$ o $-\infty$. Como los límites laterales no coinciden, el límite no existe (ver Tsamir y Tirosh, 2000, p. 245).
- E. Es una regla: *No se puede dividir por cero*. No se busca una justificación, se trata de una regla que hay que aprender (ver Ball, 1988, p. 16).
- F. Respuestas numéricas: Se basan en la idea intuitiva de que toda operación matemática tiene que tener una respuesta numérica.
 - 1. Caso $a \div 0$:

- i. $a \div 0 = \infty$: Basada en una noción dinámica del límite. Cuando el divisor se hace cada vez más pequeño, el resultado se hace cada vez más grande. Se interpreta ∞ como un número *indefinido*, cuyo valor no puede ser fijado (ver Tsamir, 1996, p. 356 y Tsamir y Tirosh, 2000, p. 246).
- ii. $a \div 0 = 0$: Se generalizan resultados de la multiplicación de forma errónea. Un número multiplicado por cero es cero, luego, un número dividido por cero es cero (ver Tsamir, 1996, p. 356).
- iii. $a \div 0 = a$: Concepción errónea de cero como *nada*. Si no dividimos por *nada* aún tenemos *a* (ver Tsamir, 1996, p. 356).
- iv. $a \div 0 = 0$: Concepción errónea de cero como *nada*. Si dividimos entre *nada* tenemos *nada* (ver Tsamir, 1996, p. 357).

2. Caso $0 \div 0$:

- i. $0 \div 0 = \infty$: Se interpreta ∞ como un número *indefinido*, cuyo valor no puede ser fijado (ver Tsamir, 1996, p. 357 y Tsamir y Tirosh, 2000, p. 246).
- ii. $0 \div 0 = 0$: Se generalizan resultados de la división de forma errónea. Cero dividido por un número, es cero (ver Tsamir, 1996, p. 357).
- iii. $0 \div 0 = 0$: Concepción errónea de cero como *nada*. Si dividimos entre *nada* tenemos *nada* (ver Tsamir, 1996, p. 357).
- iv. $0 \div 0 = 1$: Generalización de la regla, un número dividido por sí mismo es 1 (ver Tsamir, 1996, p. 357).

Entre estas categorías no observamos interpretaciones basadas en el concepto de fracción o razón. Tampoco aparecen respuestas basadas en la definición de la división como la multiplicación por el inverso. Como señalan en su comunicación Gómez, Lonjedo y Oliver (2003), respecto a las respuestas recogidas en el trabajo de Tsamir y Tirosh: “También deja fuera otras categorías de respuestas, como por ejemplo, la estructuralista donde la división es la multiplicación por el inverso, y como el inverso de cero no existe, tanto $a \div 0$ como $0 \div 0$, son expresiones indefinidas y una es un caso particular de la otra” (p. 762).

Hipótesis y Objetivos

En los antecedentes de nuestro trabajo no se recogen una serie de justificaciones que, pensamos, pueden emerger si trabajamos en contextos no aritméticos. Nuestra hipótesis es que si enfrentamos al alumno a situaciones pertenecientes a contextos algebraicos, geométricos o analíticos, pueden emerger estas interpretaciones, basadas en la fracción o la razón y no solo en la división, que permitirán una mejor reconceptualización de esta expresión.

Partiendo de esta hipótesis, nos fijamos los siguientes objetivos:

- Examinar y clasificar las interpretaciones dadas por nuestros alumnos para justificar esta expresión cuando aparece en distintas situaciones pertenecientes a contextos algebraicos, geométricos y analíticos.
- Analizar la influencia de estos contextos en su modo de pensar.

Con el fin de alcanzar estos objetivos realizamos un *Análisis de libros históricos y actuales*, con el que pretendíamos identificar y caracterizar las situaciones en las que subyace esta expresión tanto en la matemática tradicional como en los desarrollos curriculares actuales. A continuación mostramos como ejemplo algunas de estas situaciones.

Contexto algebraico

Dos coches salen al mismo tiempo y con la misma dirección y sentido de dos ciudades, A y B, separadas por una distancia d , con velocidades a y b respectivamente. Si x e y representan las distancias recorridas por cada coche hasta el punto de encuentro entre ambos, tendremos que su diferencia es igual a la distancia que hay entre las dos ciudades, es decir, $x - y = d$, y como invierten el mismo tiempo en recorrer estas distancias, entonces $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$ (el tiempo es igual a la distancia partido la velocidad).

Resolviendo, se obtiene que, $x = \frac{d \cdot a}{a - b}$ e $y = \frac{d \cdot b}{a - b}$.

Si las velocidades son iguales, $a = b$, se tiene que $x = \frac{d \cdot a}{0}$ e $y = \frac{d \cdot b}{0}$.

Si las velocidades son iguales, $a = b$, y la distancia inicial es cero, $d = 0$, entonces, $x = y = 0/0$.

¿Cómo podemos interpretar estos resultados?

Este es un problema propuesto por Lacroix (1818, p. 73-75) y Briot (1900, p. 126-127). Observan que el punto de encuentro se aleja cada vez más conforme las velocidades de los dos coches son cada vez más próximas y “cuando las velocidades resulten iguales [$a = b$], el punto de encuentro se aleja al infinito; hay imposibilidad de satisfacer a las ecuaciones del problema, porque, marchando los dos móviles igualmente veloces, estarán siempre a la misma distancia el uno del otro, y no se encontrarán nunca.” (Briot, 1900, p. 126). En este sentido consideran que el problema es *imposible*, aunque este resultado se presta a una interpretación que consideran solución del problema.

Si $d = 0$ y $a = b$, señalan que ambos coches van juntos a lo largo de todo el trayecto, no se separan, sin que se pueda determinar un único punto de encuentro. En este caso consideran que la expresión $0/0$ indica *indeterminación* (Lacroix, 1818, p. 76; Briot, 1900, p. 132).

Contexto analítico. La expresión $0/0$

Dada la función racional $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$, ¿cuánto vale $f(1)$?

Si $x = 1$, entonces $f(1) = 0/0$.

Si simplificamos, $\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = x + 1$, entonces, $f(1) = 2$.

Pero, ¿cuál es el verdadero valor de $f(1)$?

Esta tarea se basa en la interpretación de la expresión $0/0$ encontrada en textos históricos, donde se dice, “puede suceder que una fracción se presente bajo esta forma, porque hay en el numerador y el denominador un mismo factor algebraico, que resulta

nulo para ciertos valores atribuidos a las letras; se suprimirá este factor común, a fin de obtener el valor de la fracción” (Briot, 1900, p. 132). En los libros de texto actuales podemos encontrar reglas similares aunque solo en contextos analíticos, en el cálculo de límites. En este caso la expresión $0/0$ *enmascara* el valor 2.

Contexto analítico. La expresión $a/0$

Dada la función racional $f(x) = \frac{1}{1-x}$, ¿cuánto vale $f(1)$?

Si $x = 0,9$, entonces el valor de la función es, $f(0,9) = \frac{1}{0,1} = 10$. Si $x = 0,99$, entonces

el valor de la función es, $f(0,99) = \frac{1}{0,01} = 100$, y podríamos seguir dando valores a x

cada vez más próximos a 1, pero, si seguimos el patrón de comportamiento observado en la función, ¿cuánto vale si $x = 1$?

Conforme x va tomando valores cada vez más próximos a 1 (por la izquierda), la función va haciéndose cada vez más grande. Este tipo de razonamientos son utilizados por algunos libros de texto actuales de bachillerato para justificar la expresión $a/0 = \infty$ (ver por ejemplo, Colera, García y Oliveira, 2003, p. 224). Camacho y Aguirre (2001) plantean que “el concepto de límite infinito ha sido guiado usando la noción $a/0 = \infty$ ” (p. 241) y que con el uso de esta noción en tablas y formularios y también por parte de los profesores, “se ha intentado eludir la división por cero” (p. 256).

Contexto geométrico

La ecuación continua de una recta, que lleva la dirección de un vector (v_1, v_2, v_3) y que pasa por el punto (p_1, p_2, p_3) es $\frac{x-p_1}{v_1} = \frac{y-p_2}{v_2} = \frac{z-p_3}{v_3}$. Si tenemos una recta que lleva la dirección del vector $(2,0,3)$ y que pasa por el punto $(1,4,5)$, su ecuación continua será: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-4}{0} = \frac{z-5}{3}$, donde (x,y,z) son las coordenadas de un punto cualquiera de la recta.

Si sustituimos en esta ecuación las coordenadas del punto $(3,5,8)$, obtenemos la expresión: $\frac{2}{2} = \frac{1}{0} = \frac{3}{3}$.

Si sustituimos las coordenadas del punto $(3,4,8)$, obtenemos entonces la expresión: $\frac{2}{2} = \frac{0}{0} = \frac{3}{3}$.

¿Cómo podemos interpretar estas expresiones?

Como comentamos en la introducción, los libros de texto actuales, o no obtienen la ecuación continua de la recta cuando el vector director tiene alguna coordenada nula (Biosca, Espinet, Jimeno y Martín, 1999, p. 110), o la califican de “expresión simbólica” (Colera, García y Oliveira, 2003, p. 156) o no dicen nada al respecto (Bobillo y García, 2000b, p. 170). En esta situación, la barra “/” puede ser interpretada como razón entre las coordenadas del vector director de la recta $(2,0,3)$, y el vector

$(x-1, y-4, z-5)$. En este sentido, la expresión $\frac{2}{2} = \frac{1}{0} = \frac{3}{3}$, nos indica que los vectores no son proporcionales, el punto $(3,5,8)$ no pertenece a la recta. La expresión $\frac{2}{2} = \frac{0}{0} = \frac{3}{3}$, nos indica que los vectores sí son proporcionales y el punto $(3,4,8)$ pertenece a la recta (se puede comprobar la igualdad mediante la regla, producto de los medios=producto de los extremos).

Conclusiones

En estos ejemplos hemos tenido en cuenta los usos de esta expresión en la matemática de bachillerato, pero también hemos recogido algunas situaciones que se dan en la matemática tradicional y que no están presentes en la enseñanza actual, especialmente en el contexto algebraico. En todas ellas subyace la expresión $a/0$, aunque las interpretaciones sobre su significado pueden darse en términos distintos al de la división por cero. Basándonos en estas situaciones, pretendemos elaborar un cuestionario de lápiz y papel con el que cumplir los objetivos que nos hemos marcado. En el momento actual las tareas que forman parte de este cuestionario han sido validadas en un proceso de discusión interno por parte del equipo investigador y han sido sometidas a pilotaje. Ahora nos encontramos en la fase final de la experimentación, en la que se van a someter a estudiantes de Bachillerato al cuestionario definitivo para tratar de contrastar la hipótesis o en su caso inferir resultados que arrojen luz sobre el problema que estamos investigando.

Referencias

- Ball, D.L. (1988). The subject matter preparation of prospective mathematics teachers: Challenging the myths. *National Center of Research on Teacher Education*, 116.
- Biosca, A., Espinet, M.J., Jimeno, M., Martín, F. (1999). *Matemáticas II*. Barcelona: Edebé.
- Bobillo, N.C. y García, M. A. (2000a). *Matemáticas 1. Ciencias de la Naturaleza y de la Salud*. Madrid: Santillana.
- Bobillo, N.C. y García, M. A. (2000b). *Matemáticas 2. Ciencias de la Naturaleza y de la Salud*. Madrid: Santillana.
- Briot, CH (1900) *Álgebra Elemental y Superior*. Traducida, anotada y completada por Sabastián, C y Portuondo, B. Nueva edición corregida, revisada y ampliada por Portuondo, B. Madrid: Librería de Hernando y Compañía.
- Camacho, A. y Aguirre, M. (2001). Situación didáctica del concepto límite infinito. Estudio preliminar. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 4, 237-265.
- Colera, J., García, R. y Oliveira, M.J. (2003). *Matemáticas II*. Madrid: Anaya.
- Gómez, B., Lonjedo, M^a A y Oliver, A. (2003) Indefinido, indeterminado, imposible, inexistente, sin sentido. *XI Jornadas para el aprendizaje y la enseñanza de las Matemáticas (JAEM)*. Canarias, 759-764.
- Lacroix, S. F. (1818) *Elements of Algebra*. Traducido del francés de la onceava edición original, impresa en Paris en 1815. Impreso por Hilliard and Metcalf at the University Press. New England , Cambridge

Tirosh, D. (2000). Intuitive beliefs, formal definitions and undefined operations: The cases of division by zero. *Conference at Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach meeting on belief research (MFO), Oberwolfach*, 122-126.

Tsamir, P. y Tirosh, D. (2000). Intuitive beliefs and undefined operations: The cases of division by zero. *PME 24, Hiroshima, IV*, 242-249.

Tsamir, P. (1996). Two problems under one title: The case of division by zero. *PME, 20, Valencia IV*, 353-360.