Facultat de Formació del Professorat

Apunts

[ǫ́Æ] Matemàtiques per a Mestres

Grau en Mestre/Mestra en Educació Infantil (Grup 2c)
Grau en Mestre/Mestra en Educació Primària (Grup 2d)

Pascual D. Diago Nebot

Departament de Didàctica de la Matemàtica

Curs 2025/2026

VNIVERSITAT DE VALÈNCIA

Apunts de l'assignatura

Matemàtiques per a Mestres

Grup 2c i 2d

Codi 33619

Curs 2025/2026

v20250910

La reproducció total o parcial d'aquest material necessita l'autorització escrita de l'autor.

Pascual D. Diago
Departament de Didàctica de la Matemàtica
Universitat de València
Pascual.Diago@uv.es
www.uv.es/Pascual.Diago

Aquest manual ha sigut editat amb el sistema de composició tipogràfica LaTeX (podeu obtindre més informació a https://www.latex-project.org/).

La col · lecció d'activitats que es presenta ha sigut recopilada per l'autor i pels companys i companyes d'aquesta i d'altres Universitats en què l'autor ha format part del cos docent. Sempre que ha sigut possible, s'ha citat la font d'origen, tant dels textos com dels enunciats de les activitats.

Aquest manual (en la versió `v20231214`) va ser revisat pel Servei de Llengües i de Política Lingüística de la Universitat de València en desembre de 2023, i va ser guardonat a la convocatòria 2023 dels *Premis Fernando Sapiña* a la qualitat lingüística en l'elaboració de materials docents en valencià, convocats per la Universitat de València, amb l'objectiu d'impulsar-ne l'ús en l'àmbit universitari.

Índex

0 Organització de l'assignatura **i**
- 0.1 Continguts de l'assignatura . . . i
- 0.2 Planificació de l'assignatura . . . ii
  - 0.2.1 Temporalització general . . . ii
  - 0.2.2 Dates d'examen . . . iv
- 0.3 Metodologia . . . v
- 0.4 Avaluació . . . v

1 Conjunts com a base dels nombres naturals **1**
- 1.1 Rudiments per a la teoria intuïtiva de conjunts . . . 2
  - 1.1.1 El llenguatge algebraic . . . 4
  - 1.1.2 Diagrames de Venn: representació gràfica de conjunts . . . 5
- 1.2 Relacions entre conjunts . . . 8
  - 1.2.1 Conjunts iguals . . . 9
  - 1.2.2 Subconjunts . . . 9
  - 1.2.3 Conjunts disjunts . . . 10
  - 1.2.4 Conjunts no disjunts . . . 11
- 1.3 Operacions entre conjunts . . . 12
  - 1.3.1 Unió de conjunts . . . 13
  - 1.3.2 Intersecció de conjunts . . . 14
  - 1.3.3 Diferència de conjunts . . . 15
  - 1.3.4 Producte cartesià de conjunts . . . 16
- 1.4 Cardinal d'un conjunt . . . 19
- 1.5 Relacions entre elements . . . 22
  - 1.5.1 Correspondència un a un . . . 24
- 1.6 Activitats complementàries del tema . . . 28

Referències . . . 35

2 Sistemes de numeració **37**
- 2.1 L'evolució dels sistemes de numeració . . . 37
  - 2.1.1 Sistemes additius . . . 38
  - 2.1.2 Sistemes multiplicatius . . . 42
  - 2.1.3 Sistemes posicionals . . . 44
- 2.2 El sistema de numeració decimal . . . 47
  - 2.2.1 Altres bases antropomòrfiques com a origen d'altres sistemes de numeració 48
- 2.3 Models manipulatius per a la comprensió de sistemes posicionals xifrats no decimals 50
  - 2.3.1 Models manipulatius per a entendre els algoritmes estàndard de la suma i la resta . . . 52
  - 2.3.2 Algoritme estàndard per a la suma . . . 52
  - 2.3.3 Algoritmes estàndard per a la resta . . . 53
- 2.4 Canvis de base entre sistemes de numeració xifrats posicionals . . . 55

2.4.1 Canvi de l'escriptura d'un nombre en base 10 a base b . . . 56
2.4.2 Canvi de l'escriptura d'un nombre en base b a base 10 . . . 58
2.5 Activitats complementàries del tema . . . 61
Referències . . . 65

3 Construcció del nombre natural i del sentit de les operacions 67
3.1 Formalització matemàtica del conjunt dels nombres naturals . . . 68
3.1.1 L'aproximació de Cantor als nombres naturals . . . 68
3.1.2 L'axiomàtica de Peano per a la construcció dels nombres naturals . . . 70
3.2 Desenvolupament del sentit de les operacions bàsiques . . . 72
3.2.1 Addició de nombres naturals . . . 72
3.2.2 Sostracció de nombres naturals . . . 74
3.2.3 Producte de nombres naturals . . . 77
3.2.4 Divisió de nombres naturals . . . 80
3.2.5 Divisió exacta i amb resta . . . 81
3.3 Propietats de les operacions bàsiques . . . 83
3.4 Altres operacions amb nombres naturals . . . 85
Referències . . . 87

4 Divisibilitat en nombres naturals 89
4.1 Múltiples i divisors . . . 90
4.2 Propietats de divisibilitat . . . 92
4.3 Criteris de divisibilitat . . . 93
4.4 Nombres primers i compostos . . . 95
4.4.1 El Garbell d'Eratòstenes per a obtenir els nombres primers . . . 96
4.4.2 Factorització d'un nombre natural en primers . . . 98
4.5 Condició de divisibilitat i quantitat de divisors . . . 99
4.6 Màxim comú divisor i mínim comú múltiple . . . 103
4.6.1 El màxim comú divisor i com es calcula . . . 103
4.6.2 El mínim comú múltiple i el seu càlcul . . . 104
4.6.3 L'algorisme d'Euclides per al càlcul del mcd . . . 106
4.7 Activitats complementàries del tema . . . 107
Referències . . . 113

5 Nombres enters 115
5.1 Construcció dels nombres enters . . . 117
5.2 El model de la recta numèrica per a representar els nombres enters . . . 118
5.3 El valor absolut . . . 118
5.4 Ordenació de nombres enters . . . 119
5.4.1 El model de la recta numèrica per a establir ordenació en $\mathbb{Z}$ . . . 120
5.4.2 El valor absolut per a establir ordenació en $\mathbb{Z}$ . . . 120
5.5 Operacions amb nombres enters . . . 121
5.5.1 Suma de nombres enters . . . 121
5.5.2 Resta de nombres enters . . . 122
5.5.3 Multiplicació de nombres enters . . . 124
5.5.4 Quocient de nombres enters . . . 125
5.5.5 Altres operacions amb nombres enters . . . 125
5.5.6 Operar amb parèntesi . . . 128
5.6 Activitats complementàries del tema . . . 129
Referències . . . 133

6 Nombres racionals **135**
6.1 Nombres fraccionaris . . . 137
6.1.1 El concepte de fracció . . . 138
6.1.2 Construcció del conjunt dels nombres racionals . . . 140
6.1.3 Fraccions pròpies i impròpies . . . 143
6.2 Ordre en els nombres racionals . . . 145
6.3 Densitat del conjunt de nombres racionals . . . 147
6.4 Sentit de les operacions amb racionals . . . 149
6.4.1 Representació gràfica de fraccions . . . 149
6.4.2 Suma de fraccions . . . 150
6.4.3 Resta de fraccions . . . 152
6.4.4 Multiplicació de fraccions . . . 152
6.4.5 Divisió de fraccions amb igual denominador . . . 154
6.4.6 Altres operacions amb fraccions . . . 156
6.5 Nombres decimals . . . 157
6.6 Expressió decimal d'un nombre . . . 158
6.6.1 Expressió decimal d'un nombre decimal . . . 159
6.6.2 Expressió decimal d'un nombre no decimal: el període . . . 160
6.6.3 Fracció generadora . . . 162
6.6.4 Ordre en les expressions decimals . . . 166
6.6.5 Operacions amb expressions decimals . . . 167
6.7 Nombres irracionals . . . 168
6.8 Activitats complementàries del tema . . . 168
Referències . . . 175

7 Raó i proporció **177**
7.1 Raó i proporció . . . 177
7.2 Percentatges . . . 181
7.3 Magnituds proporcionals i no proporcionals . . . 182
7.3.1 Proporcionalitat directa . . . 183
7.3.2 Proporcionalitat inversa . . . 185
7.3.3 Mesures no proporcionals . . . 187
7.3.4 La regla de tres . . . 189
7.3.5 Factor de conversió . . . 193
7.3.6 Conversió d'unitats del sistema mètric . . . 194
7.4 Activitats complementàries del tema . . . 196
Referències . . . 201

8 Probabilitat i estadística **203**
8.1 Estadística . . . 203
8.1.1 Variables estadístiques . . . 206
8.1.2 Representació i organització de dades . . . 207
8.1.3 Anàlisi de dades . . . 219
8.2 Probabilitat . . . 232
8.2.1 Fenòmens o experiments aleatoris, espai mostral i successos . . . 232
8.2.2 Càlcul de probabilitats en experiments simples . . . 235
8.2.3 Assignació de probabilitats a successos compostos mitjançant teoria de conjunts . . . 239
8.2.4 Probabilitat amb experiments complexos: diagrames d'arbre . . . 243
8.2.5 Probabilitat condicionada . . . 245

8.2.6 Valor esperat i pronòstics . . . 252
8.3 Activitats complementàries del tema . . . 255
Referències . . . 265

9 Geometria plana **267**
9.1 Conceptes fonamentals . . . 268
9.1.1 Posicions relatives donades dues rectes . . . 269
9.1.2 Angles . . . 270
9.2 Construccions amb regla i compàs . . . 279
9.2.1 Copiar un segment . . . 280
9.2.2 Copiar un angle . . . 281
9.2.3 Mediatriu d'un segment i punt mitjà . . . 282
9.2.4 Recta perpendicular a una altra . . . 283
9.2.5 Recta perpendicular a una altra passant per un punt exterior a aquesta . . . 283
9.2.6 Recta paral · lela a una altra recta . . . 284
9.2.7 Bisectriu d'un angle . . . 285
9.3 Polígons . . . 285
9.3.1 Triangles . . . 289
9.3.2 Quadrilàters . . . 294
9.4 Moviments en el pla . . . 296
9.4.1 Translacions . . . 297
9.4.2 Girs . . . 301
9.4.3 Simetries . . . 304
9.5 Mesura de figures planes: perímetre i àrea . . . 308
9.6 Teorema de Pitàgores . . . 313
9.7 Semblança i Teorema de Tales . . . 315
9.8 Activitats complementàries del tema . . . 321
Referències . . . 333

10 Geometria espacial **335**
10.1 Poliedres . . . 335
10.1.1 Poliedres regulars . . . 338
10.1.2 Prismes . . . 339
10.1.3 Piràmides . . . 341
10.2 Cossos de revolució . . . 342
10.3 Superfície de poliedres i cossos de revolució: desenvolupament pla . . . 344
10.4 Volum de poliedres i cossos de revolució . . . 351
10.5 Activitats complementàries del tema . . . 357
Referències . . . 361

A Solucions a les activitats **363**
Referències . . . 471

0

Organització de l'assignatura

L'assignatura *Matemàtiques per a Mestres*, del grau de Mestre/Mestra en Educació Infantil i Primària per la Universitat de València, amb codi 33619, té aquestes finalitats:

- Proporcionar un nivell de cultura matemàtica bàsica
- Proporcionar als futurs mestres competències en matemàtiques que els possibiliten analitzar, entendre i aplicar els continguts de les matemàtiques que s'ensenyen a les escoles i que els permeten actuar d'una manera reflexiva, fonamentada i crítica davant del repte que suposa el seu ensenyament i aprenentatge

Aquesta assignatura forma part, junt amb *Didàctica de les Matemàtiques de l'Educació Infantil* (que es cursa en 4t curs) de la formació en matemàtiques requerida per als graduats en Mestre i Mestra d'Educació Infantil. En el cas del Grau en Mestre i Mestra d'Educació Primària, la formació es completa amb les assignatures de *Didàctica de l'aritmètica i de la resolució de problemes* (a 3er curs) i *Didàctica de la geometria, la mesura i la probabilitat i l'estadística* (4t curs).

No està concebuda com una assignatura de repàs dels continguts de les matemàtiques escolars, que els futurs mestres ja van cursar en el passat, sinó com una assignatura que permeta completar i obtenir una visió d'aquestes matemàtiques escolars des d'una perspectiva superior, per a *conèixer els fonaments matemàtics del currículum de les matemàtiques d'infantil i primària* (ECI, BOE 312 de 29/12/2007) i poder plantejar i resoldre problemes en context, inclòs el context matemàtic, i no solament en aquest. Aquesta competència ECI ben desenvolupada en el futur mestre o mestra, *plantejar i resoldre problemes matemàtics vinculats amb la vida quotidiana*, pot proporcionar-li sentit per a un futur ensenyament de les matemàtiques a l'escola.

0.1. Continguts de l'assignatura

La guia docent de l'assignatura estableix, de manera global, els continguts que han de ser abordats. L'organització d'aquests continguts es fa al voltant dels següents blocs: i) aritmètica

i iniciació a l'àlgebra; ii) geometria de l'espai i del pla; iii) estimació i mesura de magnituds; i iv) estadística i probabilitat.

Per a poder abastar els continguts anteriors, es proposa la següent estructuració per temes:

Continguts de l'assignatura

Tema 1: Conjunts com a base dels nombres naturals
Tema 2: Sistemes de numeració
Tema 3: Construcció del nombre natural i del sentit de les operacions
Tema 4: Divisibilitat en números naturals
Tema 5: Nombres enters
Tema 6: Nombres racionals
Tema 7: Raó i proporció
Tema 8: Probabilitat i estadística
Tema 9: Geometria plana
Tema 10: Geometria espacial

0.2. Planificació de l'assignatura

0.2.1 Temporalització general

Donat el caràcter anual de l'assignatura, les 90 hores de què consta l'assignatura es reparteixen en 30 setmanes, amb dues sessions d'1,5 hores per setmana (60 sessions en total). En concret per a aquest curs 2025/2026, tenim **unes 53 sessions efectives** de classe (unes 28 en el primer quadrimestre i unes 25 en el segon, aproximadament). Com a part del treball autònom, els estudiants faran les activitats voluntàries i obligatòries que els seran proporcionades. La proposta general de sessions per tema s'ofereix en la Taula 1. Aquesta temporalització no pot deixar de ser una estimació, resultat de l'experiència de cursos anteriors. Si calguera, dins del treball autònom, podrien incloure's aquelles activitats que no s'han pogut abordar per falta de temps en la sessió presencial corresponent. Amb això es persegueix poder ajustar el ritme de les sessions. A més, com a part del treball d'estudi de l'estudiant, la guia docent de l'assignatura estipula 135 hores de treball autònom fora de l'aula per a revisar i estudiar els continguts tractats a l'aula.

Per al desenvolupament dels temes proposats, sempre que siga possible, es distribuiran els continguts de cada tema en les sessions mostrades en les Taules 2 i 3. S'indica fins a quines activitats haurien de fer els estudiants per a treballar els continguts de la sessió (en classe o de manera autònoma).

Taula 1
Temporalització general de l'assignatura per sessions i setmanes

Tema 1	6 sessions	3 setmanes
Tema 2	5 sessions	2'5 setmanes
Tema 3	3 sessions	1'5 setmanes
Tema 4	6 sessions	3 setmanes
Tema 5	1 sessió	0'5 setmanes
Tema 6	6 sessions	3 setmanes
Tema 7	3 sessions	1'5 setmanes
Tema 8	12 sessions	6 setmanes
Tema 9	8 sessions	4 setmanes
Tema 10	3 sessions	1'5 setmana
Total	53 sessions	26'5 setmanes

Taula 2
Temptativa de distribució de sessions de l'assignatura distribuïdes per contingut

1	Presentació de l'assignatura	
Tema 1		
1	Nocions bàsiques i diagrames de Venn	Activitats fins a 1.6
2	Relacions entre conjunts	Activitats fins a 1.11
3	Operacions entre conjunts	Activitats fins a 1.20
4	Teoria elemental de conjunts	Pràctica 1
5	Cardinal de conjunts i correspondències	Activitats fins a 1.28
6	Cardinal de la unió de conjunts	Pràctica 2
Tema 2		
7	L'evolució dels sistemes de numeració	Activitats fins a 2.13
8	Nocions intuïtives per al canvi de base	Pràctica 3
9	Introducció als models manipulatius	Pràctica 4
10	El canvi de base entre sistemes posicionals xifrats	Activitats fins a 2.31
11	Canvi de base	Pràctica 5
Tema 3		
12	Formalització matemàtica dels nombres naturals i sentit operacions	Activitats fins a 3.3
13	Sentit de les operacions aritmètiques bàsiques i propietats	Activitats fins a 3.11
14	Operacions bàsiques i ús dels algoritmes estàndards	Pràctica 6
Tema 4		
15	Múltiples i divisors. Propietats i nombres primers	Activitats fins a 4.8
16	Divisibilitat a $\mathbb{N}$	Pràctica 7
17	Factorització, quantitat i nombres de divisors	Activitats fins a 4.14
18	Quantitat de divisors	Pràctica 8
19	MCD i MCM. Algorisme d'Euclides.	Activitats fins a 4.18
20	MCM i MCM: propietats	Pràctica 9
Tema 5		
21	Nombres enters: operacions i propietats	Pràctica 10

Continua a la Taula 3

Taula 3
Temptativa de distribució de sessions de l'assignatura distribuïdes per contingut (continuació)

Tema 6		
22	Significat. Fracció equivalent i irreductible. Fracció pròpia i impròpia.	Activitats fins a 6.11
23	Ordre i densitat. Sentit de les operacions amb racionals	Activitats fins a 6.18
24	Coneixements bàsics sobre racionals	Pràctica 11
25	Densitat i operacions amb racionals	Pràctica 12
26	Nombres decimals i expressions decimals	Activitats fins a 6.22
27	Fracció generadora. Irracionals	Pràctica 13
Tema 7		
28	Raó. Proporció. Percentatge	Activitats fins a 7.7
29	Magnituds proporcionals i no proporcionals	Activitats fins a 7.18
30	Casos pràctics sobre proporcionalitat	Pràctica 14
Tema 8		
31	Estadística descriptiva i inferencial. Taules de freqüències	Activitats fins a 8.5
32	Taules de freqüències per intervals. Gràfics	Activitats fins a 8.12
33	Representació i organització de dades	Pràctica 15
34	Anàlisi de dades: mesures de centralització	Activitats fins a 8.18
35	Anàlisi de dades: mesures de dispersió	Activitats fins a 8.20
36	Diagrames de caixa i bigot	Pràctica 16
37	Successos aleatoris. Càlcul de probabilitats	Activitats fins a 8.27
38	Assignació de probabilitats	Activitats fins a 8.33
39	Experiments compostos: Diagrames d'arbre	Pràctica 17
40	Introducció a la probabilitat condicionada	Activitats fins a 8.37
41	Taules de contingència, valor esperat i pronòstics	Activitats fins a 8.45
42	Probabilitat condicionada	Pràctica 18
Tema 9		
43	Conceptes fonamentals i angles	Activitats fins a 9.8
44	Construccions amb regla i compàs	Activitats fins a 9.11
45	Angles (amb un poc de polígons)	Pràctica 19
46	Elements notables dels triangles amb regla i compàs	Pràctica 20
47	Polígons. Moviments	Activitats fins a 9.40
48	Moviments en el pla amb regla i compàs	Pràctica 21
49	Mesura de figures planes: perímetre i àrea	Pràctica 22
50	Teorema de Tales i de Pitàgores	Activitats fins a 9.61
Tema 10		
51	Poliedres. Prismes. Piràmides.	Activitats fins a 10.5
52	Cossos de revolució	Activitats fins a 10.16
53	Superfície i volum	Pràctica 23
Total 53 sessions		

0.2.2 Dates d'examen

En la Taula 4 es mostren les dates d'examen oficials de l'assignatura.

Taula 4
Dies i hores de les proves escrites oficials d'avaluació

Examen parcial (EP)	gener de 2026 (data a determinar)	Hora i aula a determinar
Examen 1ª convocatòria (E_{1A} o E_{1B})	1 de juny de 2026	9h (PB-05)
Examen 2ª convocatòria (E_2)	30 de juny de 2026	9h (PB-05)

0.3. Metodologia

Per a assolir els objectius que es planteja aquesta assignatura, s'emprarà una metodologia activa que fa imprescindible la implicació de l'alumne. S'hi fomentarà un acostament crític als diversos continguts teòrics que s'hi aportaran sense excloure les seqüències magistrals que la matèria pot exigir.

En el desenvolupament dels temes, i sempre que siga possible, es farà ús de metodologies que promoguen l'aprenentatge per descobriment o metodologia heurística. Amb el propòsit de facilitar que els estudiants aconseguisquen els objectius fixats per a l'assignatura, en cadascun dels temes els estudiants hauran de resoldre activitats i pràctiques de grup.

Tots els materials emprats en les sessions, es posaran a disposició dels estudiants abans de l'inici de les classes a l'Aula Virtual. D'aquesta manera, els estudiants disposaran de tots els recursos perquè puguen incorporar, de manera còmoda, notes aclaridores o dubtes a solucionar en les sessions presencials. Les solucions de la major part de les activitats estaran disponibles també per als estudiants a la fi de cada un dels temes.

0.4. Avaluació

L'avaluació de l'assignatura es farà d'acord amb les directrius de la guia docent de l'assignatura.

Al llarg dels dos quadrimestres es farà una **avaluació formativa** (contínua) l'objectiu de la qual és afavorir un seguiment de l'alumne al llarg de tot el curs. En aquesta avaluació es tindrà en compte, a més de l'adquisició de coneixements específics de l'assignatura, l'actitud cap a l'assignatura i el respecte als companys, l'assistència i la participació en classe, l'interès i la constància per a aconseguir una progressió positiva i la capacitat per a treballar en grup. **El pes de l'avaluació formativa a la nota final de l'assignatura serà del 30%**.

> **!** Aquells alumnes que no vulguen acollir-se al règim d'avaluació formativa podran optar per presentar-se a l'examen final de primera convocatòria (vegeu E_{1B}), el qual correspondrà íntegrament a la nota final de l'assignatura (**100%**).

Al llarg del curs es faran els següents exàmens, **amb un pes en la nota final de l'assignatura del 70%**:

- Examen parcial de continguts del primer quadrimestre (vegeu EP), per a estudiants que s'acullen a l'avaluació formativa
- Examen final de primera convocatòria (E_1), amb dues modalitats possibles:
  - Examen amb continguts exclusius del segon quadrimestre (vegeu E_{1A}), per a estudiants que s'acullen a l'avaluació formativa
  - Examen final de primera convocatòria, amb tots els continguts (vegeu E_{1B}), per a estudiants que no s'acullen a l'avaluació formativa o que no han superat l'examen parcial (EP)
- Examen final de segona convocatòria (E_2)

L'objectiu d'aquests exàmens serà avaluar els següents aspectes:

- L'adquisició de coneixements i habilitats específics de la matèria
- La competència lingüística i comunicativa de l'estudiant, tant oral com escrita en matemàtiques
- El domini de mètodes, tècniques i altres capacitats i destreses pròpies de les matemàtiques per a un estudiant per a mestre

A continuació, es detallen cadascun dels ítems d'avaluació i s'explica **com obtenir la nota final** en cadascuna de les dues convocatòries oficials:

- EF_1 i EF_2: aquestes dues notes corresponen a l'avaluació formativa realitzada en el primer i el segon quadrimestre. Cadascuna d'aquestes dues qualificacions seran el resultat de la realització periòdica d'activitats avaluables i del treball individual de cada estudiant, aquestes notes no són recuperables. Té un pes del **30%** sobre la nota final.
- EP: en acabar el primer quadrimestre es farà un **examen parcial** en la data establida pel calendari oficial. En aquest examen s'inclouran els continguts treballats al llarg del primer quadrimestre. Té un pes del **70%** sobre la nota final.

  Si la nota $EP \geq 5$, s'entén que l'estudiant ha superat els continguts impartits en el primer quadrimestre i la **nota del primer quadrimestre** serà el **màxim** entre:

  - la mitjana ponderada $0.3 \times EF_1 + 0.7 \times EP$
  - i la nota de l'examen EP

  Els estudiants que estiguen en aquesta situació, només s'examinaran dels continguts del **segon quadrimestre** en l'examen que es farà en la data de la primera convocatòria establida en el calendari oficial (casuística E_{1A}).

- E_1: correspon a l'**examen final** que es farà en la **primera convocatòria**. Per a atendre les dues casuístiques possibles, es proposaran dos models d'examen:

  1. E_{1A}: per a aquells alumnes que hagen superat els continguts impartits en el primer quadrimestre. En aquesta prova només s'inclouran continguts del **segon quadrimestre**. Si la nota de $E_{1A} \geq 5$, s'entén que l'estudiant ha superat els continguts impartits en el segon quadrimestre i la nota del segon quadrimestre serà el **màxim** entre:
     - la mitjana ponderada $0.3 \times EF_2 + 0.7 \times E_{1A}$
     - i la nota de l'examen, E_{1A}

     La **nota final en primera convocatòria** serà la mitjana aritmètica de les notes finals dels dos quadrimestres. És a dir,

     $$\text{Nota Final} = 0.5 \times \text{Nota Primer Quadrimestre} + 0.5 \times \text{Nota Segon Quadrimestre}$$

     Si la nota $E_{1A} \leq 5$, l'estudiant haurà de presentar-se en segona convocatòria a un examen que avaluarà la totalitat del curs.
  2. E_{1B}: per a aquells alumnes que no hagen superat els continguts impartits en el primer quadrimestre. En aquesta prova s'avaluaran els continguts impartits al llarg de tot el curs. Si la nota de $E_{1B} \geq 5$, la **nota final en primera convocatòria** serà el **màxim** entre:

  - la mitjana ponderada $0.3 \times (0.5 \times EF_1 + 0.5 \times EF_2) + 0.7 \times E_{1B}$
  - i la nota de l'examen, E_{1B}

  Si la nota de $E_{1B} \leq 5$, aquesta serà la nota que apareixerà en l'acta corresponent i l'estudiant haurà de presentar-se a la segona convocatòria, en què s'avaluarà la totalitat del curs.

- E_2: Aquells estudiants que es presenten a l'examen en segona convocatòria hauran de superar un examen que avalue la totalitat del curs. La **nota final de segona convocatòria** serà el màxim entre:

  - la mitjana ponderada $0.3 \times (0.5 \times EF_1 + 0.5 \times EF_2) + 0.7 \times E_2$
  - i la nota de l'examen, E_2

En tots els instruments d'avaluació serà imprescindible l'adequació i la correcció lingüística que s'esperen per a la futura labor docent. En qualsevol cas, s'aplicarà la normativa d'avaluació i qualificació vigent de la Universitat de València (2017/108).

Tal i com indica la guia docent, el professorat podrà penalitzar els errors ortogràfics i/o gramaticals en les proves d'avaluació. En aquells grups en els quals la docència s'impartisca en valencià, és obligatori que l'alumnat realitze les proves en valencià.

Finalment, el plagi o l'ús indegut de ferramentes d'intel · ligència artificial podrà ser sancionat d'acord amb l'article 15 del reglament d'avaluació i qualificació de la Universitat de València.

1

Conjunts com a base dels nombres naturals

Organització de continguts del Tema 1

1. Rudiments per a la teoria intuïtiva de conjunts
   - El llenguatge algebraic
   - Diagrames de Venn: representació gràfica de conjunts
2. Relacions entre conjunts
   - Conjunts iguals
   - Subconjunts
   - Conjunts disjunts
   - Conjunts no disjunts
3. Desenvolupament del sentit de les operacions bàsiques
   - Unió de conjunts
   - Intersecció de conjunts
   - Diferència de conjunts
   - Producte cartesià de conjunts
4. Cardinal d'un conjunt
5. Relacions entre elements
   - Correspondència un a un

En aquest primer tema només exposarem algunes idees bàsiques i intuïtives de la teoria de conjunts que els futurs mestres han de tenir clares. Sobretot en relació amb la forma de parlar davant dels estudiants i també amb la manera de tractar les activitats d'agrupacions que es faran

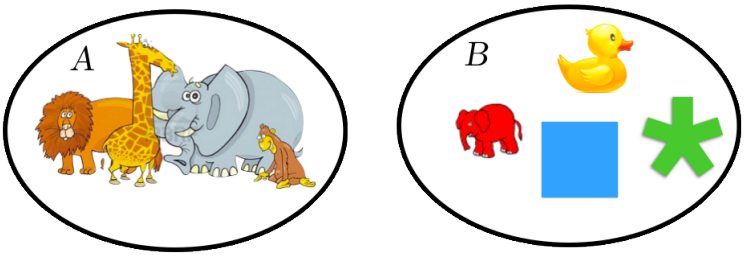
en classe d'infantil i primària. Recalquem que no es tracta que l'estudiant d'infantil o primària aprenga conceptes o elabore nocions referents a la teoria de conjunts, sinó que l'objectiu és poder exercitar, amb aquestes activitats, la capacitat de pensar dels estudiants. Com indica Canals (1989), convé no abusar en excés la paraula "conjunt" quan treballem aquests aspectes en l'aula. Podem fer ús de la paraula *agrupació*, ja que tant el llenguatge matemàtic com el simbolisme de la teoria de conjunts són absolutament inadequats per als xiquets de les edats que ens ocupen.

Com estudiarem en aquest tema, algunes operacions entre conjunts, com la coordinació, esdevindran clau a l'hora que un infant afronte amb èxit una tasca de comptatge. Així mateix, altres característiques com la mida del conjunt (nombre d'elements) o l'ordenació dels elements del conjunt també jugaran un paper fonamental en l'acció de comptar. Encara que aquests continguts els estudiareu en profunditat en l'assignatura de "didàctica de les matemàtiques" corresponent, ací intentarem donar alguna pinzellada per a poder il · lustrar el contingut matemàtic que tractem.

1.1. Rudiments per a la teoria intuïtiva de conjunts

Activitat 1.1

Si bé encara no hem donat una definició de conjunt, de les agrupacions mostrades a continuació, quines considereu que són conjunts?



Solució en pàg. 363

Com ens indica Canals (1989), cal que les mestres tinguen ben clar que els "conjunts", com a tals (en sentit matemàtic), no tenen existència física. El conjunt és un concepte mental creat per l'ésser humà. Per exemple, si jo tinc una cadena formada per vint anelles, seria absurd plantejar la qüestió de si la meua cadena és o no és un conjunt d'anelles. Així, des del punt de vista de la matemàtica no es tracta d'analitzar la realitat física dels conjunts, sinó que les vint anelles de la cadena formen un conjunt si jo el considere, si el definisc jo així, en definitiva si jo dic: *"les anelles de la meua cadena"*. Com també podria definir *"les anelles de la meua cadena i les d'una altra que en tinc a casa"* i aquest també és un altre conjunt.

Conjunt

Un **conjunt** és una agrupació o col · lecció d'elements, que pot o no tenir característiques comunes. Cada un dels objectes que formen el conjunt s'anomena **element del conjunt**.

Definició d'un conjunt

Matemàticament, els conjunts poden ser definits de dues maneres:

Per extensió: Direm que un conjunt és definit **per extensió** quan s'enumeren tots i cada un dels elements que el componen. S'expressa posant entre claus tots els elements que pertanyen al conjunt, separats per comes, per exemple:

$$A = \{\text{pardal}, \text{flor}, \text{arbre}, \text{riu}\}$$

Per comprensió: Direm que un conjunt és definit **per comprensió** quan es defineix indicant la propietat característica dels elements que formen el conjunt. És a dir, es dona de manera explícita la propietat que fa referència a tots els elements del conjunt. Per exemple,

$$A = \{\text{coses que trobem en l'aula}\} \text{ o } B = \{\text{blocs lògics de color roig}\}$$

Activitat 1.2

- Hi ha conjunts que poden definir-se per comprensió i no per extensió?
- I al contrari, hi ha conjunts que poden definir-se per extensió i no per comprensió?

! Matemàticament, els conjunts són representats per lletres majúscules, $A, B, C, \ldots$, i els elements dels conjunts es representen amb lletres minúscules, $a, b, c, \ldots$. Els símbols $\in$ i $\notin$ s'usen per a indicar si un objecte **pertany o no** a un determinat conjunt.

Exemple 1.1

Els *blocs lògics de Dienes* són un material lògic basat en quatre descriptors molt pròxims als xiquets d'infantil: color, forma, grandària i gruix. Cada descriptor pren els següents atributs:

- **Forma:** cercle, quadrat, rectangle i triangle
- **Color:** roig, blau i groc
- **Grandària:** petit i gran
- **Gruix:** prim i gruixut

Aquests atributs es combinen entre ells de totes les formes possibles donant lloc a una peça diferent per a cada combinació (Figura 1.1, Activitat 1.3).



Figura 1.1. Els blocs lògics de Dienes

Si treballem amb els blocs lògics de Dienes i R representa els conjunts de blocs de color roig podriem fer, per exemple, les següents afirmacions:

- $BL = \{\text{Blocs lògics de Dienes}\}$
- $R = \{x \in BL : x \text{ són de color roig}\}$
-  $\in R$
-  $\notin R$

Exemple 1.2
Si $A = \{abecedari\}$, direm que $a \in A$, $b \in A$, etc. En canvi, direm que $4 \notin A$ o que $7 \notin A$.

Activitat 1.3

Obteniu (sense comptar-les) el nombre total de peces que componen els blocs lògics de Dienes (Figura 1.1).

Solució en pàg. 363

! Hi ha dues regles inherents a la formació de conjunts:

1. No es pot llistar més d'una vegada el mateix element a un conjunt. Així, el conjunt $\{a, a, b\}$ cal escriure'l com a $\{a, b\}$.
2. L'ordre dels elements d'un conjunt no és essencial. Així, $\{a, b\} = \{b, a\}$.

1.1.1 El llenguatge algebraic

Usarem el llenguatge algebraic al llarg de l'assignatura. Convé que ens familiaritzem amb el seu ús, tot i que en alguns moments podrem també fer ús de llenguatge natural.

Activitat 1.4

1. Identifiqueu quins són els següents conjunts donats per comprensió amb llenguatge algebraic i escriviu-los per extensió:

a) $A = \{x \in \mathbb{N} : 1 < x < 10\}$

b) $B = \{x \in \mathbb{N} : x = 2 \cdot k, k \in \mathbb{N}\}$

2. Escriu amb llenguatge algebraic els següents conjunts donats per comprensió amb llenguatge natural:

a) $C = \{\text{múltiples de 3}\}$

b) $D = \{\text{nombres imparells menors que 20}\}$

Solució en pàg. 363

Activitat 1.5

Els següents conjunts són donats per comprensió mitjançant llenguatge algebraic:

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{N} : x \geq 100\} \\ B &= \{x \in \mathbb{N} : x = 3 \cdot k, k \in \mathbb{N}, x < 20\} \\ C &= \{x \in \mathbb{N} : 0.5 \leq x \leq 4.5\} \\ D &= \{x \in \mathbb{N} : 12 \div x = k, k \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

a) Definiu-los per comprensió usant llenguatge natural[a] (no algebraic).

b) Defineix-los per extensió quan siga possible. Si no és possible, indica el motiu.

Solució en pàg. 364

[a] Per exemple, donat $H = \{x \in \mathbb{N} : x = 2 \cdot k - 1, k \in \mathbb{N}, 1 \leq x \leq 20\}$. Per comprensió sense usar llenguatge algebraic H es definiria com el conjunt dels nombres naturals imparells entre 1 i 20. Per extensió s'expressaria com a $H = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}$.

1.1.2 Diagrames de Venn: representació gràfica de conjunts

La manera més senzilla de representar gràficament els conjunts perquè siguen fàcilment recognoscibles pels alumnes és mitjançant els **diagrames de Venn**, és a dir, envoltant tots els elements del conjunt mitjançant una línia corba tancada. La posició relativa dels cercles mostra les relacions entre els conjunts. Les operacions entre conjunts també es representen usant diagrames de Venn, com veurem més avant.

En la Figura 1.3 es mostren dos cercles per als conjunts A i B que se superposen. Així, l'àrea comuna a tots dos conjunts conté tots els elements que pertanyen a la vegada a A i a B.

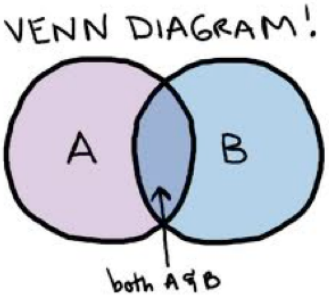


Figura 1.3. Representació pictòrica d'un diagrama de Venn

Exemple 1.3

Amb la representació amb diagrames de Venn la pertinença o no pertinença d'un element a un conjunt queda clara depenent de la ubicació d'un element concret en el gràfic:

- Dins de la línia que limita el conjunt, pertany al conjunt
- Fora de la línia que limita el conjunt, no pertany al conjunt

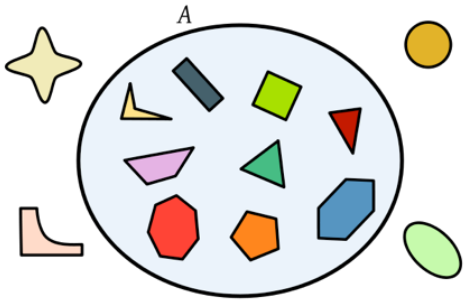
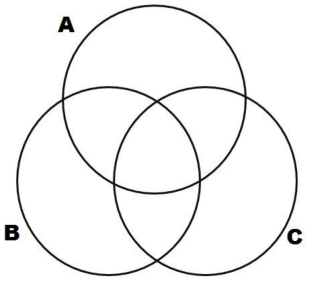
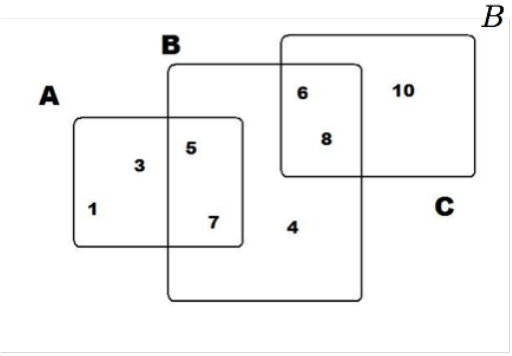


Figura 1.4. Pertinença a un conjunt representat amb diagrames de Venn

Exemple 1.4

En els diagrames de Venn, sovint sol excloure's la representació explícita d'elements, com es mostra en la Figura 1.5 (esquerra). No obstant això, a vegades també podem trobar representats els elements dels conjunts (1.5, dreta; atenció perquè ací la posició dels elements esdevé clau, com s'ha comentat en l'Exemple 1.3).





$$A = \{1, 3, 5, 7\}$$
$$B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$$
$$C = \{6, 8, 10\}$$

Figura 1.5. Dues formes d'usar els diagrames de Venn

Activitat 1.6

Imagineu que agafem un grup d'estudiants i fem el següent diagrama de Venn que representa el nostre grup.

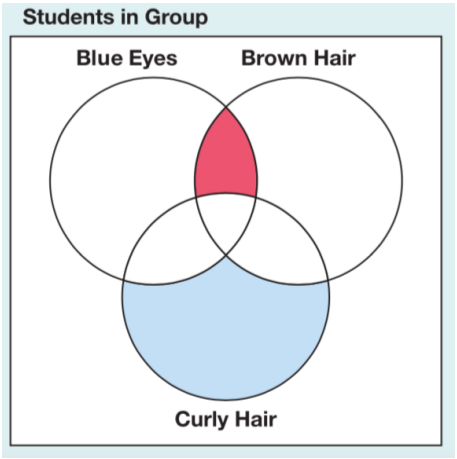


Figura 1.6. Diagrama de Venn representatiu d'una classe

a) Descriu per comprensió els estudiants situats a la regió roja

b) Descriu per comprensió els estudiants que no són en cap cercle

c) Descriu per comprensió els estudiants que són a la regió blava

Solució en pàg. 364

! Cal que parem atenció al fet que a partir d'ara **podrem representar els conjunts de dues maneres diferents**: amb llenguatge algebraic i amb diagrames de Venn. Així, encara que totes dues representacions són vàlides i equivalents, cada una expressa el conjunt de manera diferent.

1.2. Relacions entre conjunts

Per a poder començar a descriure les relacions que hi poden haver entre dos conjunts, primerament descriurem el que entenem per conjunt universal, complementari i buit.

Conjunt universal

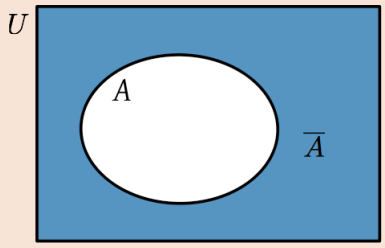
Anomenarem **conjunt universal** o **univers** el conjunt de referència que conté tots els elements per a un problema particular en consideració. Es denota amb la lletra majúscula U.

Exemple 1.5

Si tenim el conjunt $A = \{2, 5, 11, 31, 4\}$, el conjunt universal queda implícit que ha de ser $U = \{\text{nombres naturals}\}$.

Conjunt complementari

Anomenarem **conjunt complementari** de A aquell format pels elements de l'univers que no són en A. Aquest nou conjunt es denota A', o en algunes ocasions $\overline{A}$. En notació matemàtica escriuríem $\overline{A} = \{x \in U : x \notin A\}$.
Amb diagrames de Venn, el complementari es representa de la següent manera:

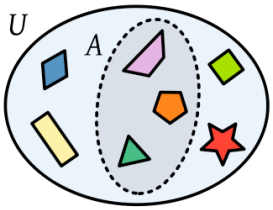


Exemple 1.6

Si $A = \{\text{roig, groc}\}$ i l'univers és $U = \{\text{colors primaris}\}$, llavors $\overline{A} = \{\text{blau}\}$.

Activitat 1.7

Quin és el conjunt complementari de A?



Solució en pàg. 364

Conjunt buit

Matemàticament, el **conjunt buit** és el conjunt que no té cap element. Es representa mitjançant el símbol $\varnothing$.

Activitat 1.8

Els conjunts $\varnothing$, $\{\varnothing\}$ i $\{0\}$, són iguals o distints? Raoneu la resposta.

Solució en pàg. 365

Prenent dos conjunts qualssevol poden donar-se les següents possibles relacions entre ells: conjunts iguals; subconjunt d'un conjunt; conjunts disjunts; o conjunts no disjunts. A continuació descriurem cada un d'aquests casos:

1.2.1 Conjunts iguals

Conjunts iguals

Dos conjunts A i B direm que són **iguals**, i escriurem $A = B$, si i sols si estan formats exactament pels mateixos elements. Això implica que si $A = B$ tot element de A és en B i viceversa. Si A i B no són iguals direm que $A \neq B$.

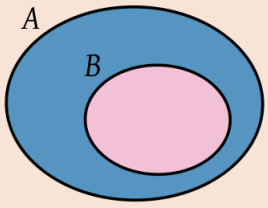
Exemple 1.7

Així, els conjunts $A = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ parells i } 1 < x < 10\}$ i $B = \{2, 4, 6, 8\}$, són iguals.

1.2.2 Subconjunts

Subconjunt d'un conjunt

Un conjunt B és **subconjunt** d'un altre A, i escriurem $B \subseteq A$, si i sols si tot element de B ho és també de A.
La representació en forma de diagrama de Venn seria:



Exemple 1.8

En aquest exemple B és subconjunt de A, però C no ho és de A. Amb llenguatge matemàtic diríem: $B \subseteq A$ però $C \nsubseteq A$.

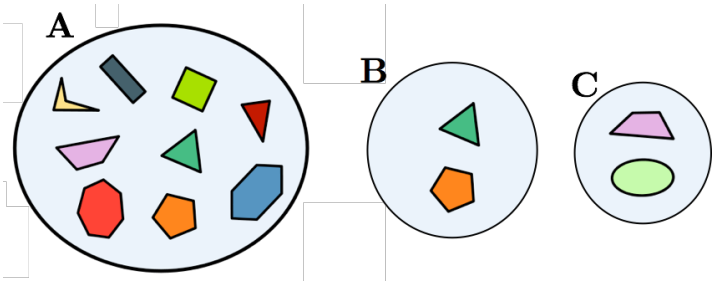


Figura 1.7. Exemple de subconjunt i no subconjunt

Exemple 1.9

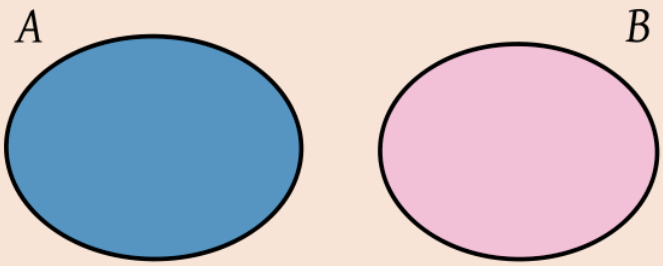
A continuació donem alguns exemples de subconjunts d'altres conjunts:

1. $\{a, b, c\} \subseteq \{a, b, c, d, e, f\}$
2. $A \subseteq A$, per a qualsevol conjunt que siga A
3. $\{$  ,  ,  $\} \subseteq$ {Blocs lògics de color groc}
4. {Blocs lògics de color roig} $\subseteq$ {Blocs lògics}
5. $\{a, b, c\} \nsubseteq \{a, c, d, e, f\}$

1.2.3 Conjunts disjunts

Conjunts disjunts

Direm que dos conjunts són **disjunts** quan no tinguen cap element en comú. La representació en forma de diagrama de Venn seria:



Exemple 1.10

Els conjunts A i B següents són disjunts:

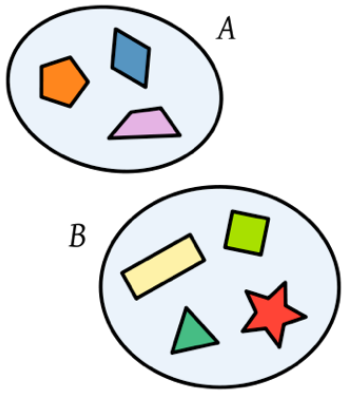


Figura 1.8. Exemple de conjunts disjunts

Activitat 1.9

Donats els següents conjunts A i B, són disjunts?

$$A = \{x \in \mathbb{N} : x = 2 \cdot k - 1, k \in \mathbb{N}\}$$

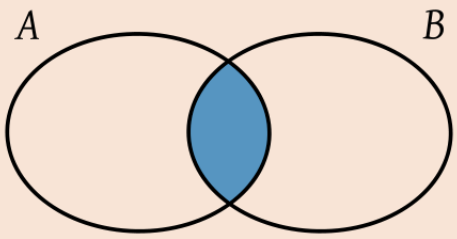
$$B = \{x \in \mathbb{N} : x = 2 \cdot k, k \in \mathbb{N}\}$$

Solució en pàg. 365

1.2.4 Conjunts no disjunts

Conjunts no disjunts

Dos conjunts són **no disjunts** si i sols si tenen elements comuns i altres no comuns.
La representació en forma de diagrama de Venn seria:



Exemple 1.11

Els conjunts A i B són no disjunts.



Figura 1.9. Exemple de conjunts no disjunts

Activitat 1.10

Considereu els següents conjunts:

$$\begin{aligned} A &= \{\text{nombres imparells majors que } 10\} \\ B &= \{a, e, i, o, u\} \\ C &= \{\text{mesos de l'any que contenen la lletra "r"}\} \\ D &= \{11, 13, 15, 17, 19\} \\ E &= \{\text{lletres de la paraula "col} \cdot \text{legi"}\} \end{aligned}$$

a) Completeu els següents espais amb el símbol adequat:

i) $15 _____ A$ iii) $\{a, e, o\} _____ B$ v) $z _____ B$

ii) $D _____ A$ iv) $E _____ B$ vi) maig $_____ C$

b) Usant els conjunts donats, inventeu i escriviu una relació per a cada un dels següents símbols: $=$, $\subseteq$,$\in$ i $\notin$.

c) Considerant els conjunts A, B i C, definiu un univers (conjunt universal) per a cada un i expresseu el conjunt complementari indicant si ho feu per extensió o per comprensió.

Solució en pàg. 365

Activitat 1.11

Siga el conjunt universal U, el conjunt dels nombres naturals, $U = \mathbb{N} = \{\text{nombres naturals}\}$. Considerem continguts en aquest univers els conjunts A, B i C complint que $A \subseteq B$ i $B \subseteq C$. Indiqueu si les següents afirmacions són vertaderes o falses raonant la resposta:

a) $A \subseteq U$

b) Si $k \in A \Longrightarrow k \in B$

c) $\varnothing \subseteq A$

d) $A \subseteq C$

Solució en pàg. 365

1.3. Operacions entre conjunts

Les operacions matemàtiques més conegudes són les de suma, resta, multiplicació i divisió. Es tracta d'operacions entre nombres i consisteixen a agafar dos o més nombres, efectua l'operació

corresponent i obtenir com a resultat un altre nombre. Anàlogament es defineixen les operacions amb conjunts, però en aquest cas l'operació s'efectua entre conjunts. Per a obtenir el resultat d'una operació entre conjunts haurem llavors de determinar quin és el **conjunt resultant**. A aquesta secció estudiarem les següents operacions entre conjunts: unió, intersecció, diferència i producte cartesià de conjunts.

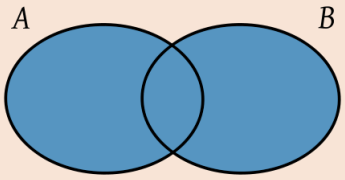
1.3.1 Unió de conjunts

Unió de conjunts

Definim la **unió de dos conjunts** A i B com el conjunt format pels elements que pertanyen a A o a B (compleixen la característica de A o de B). Matemàticament, ho expressem com a

$$A \cup B = \{x \in U : x \in A \text{ o } x \in B\}$$

La representació amb diagrames de Venn seria:



Exemple 1.12

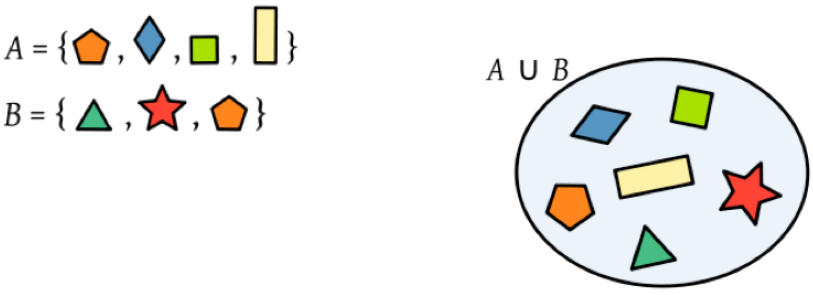


Figura 1.10. Exemple de la unió de conjunts

Els dos usos de la "o". La paraula "o" s'usa en el llenguatge ordinari de dues maneres diferents:

- A voltes s'usa en el sentit de "p o q o tots dos", és a dir, almenys una de les dues alternatives ocorre: sentit inclusiu (**incloent**)
- A voltes s'usa en el sentit de "p o q, però no tots dos" és a dir, ocorre exactament una de les dues alternatives: sentit exclusiu (**excloent**)

Per exemple, la proposició "Anirà a Madrid o a Bilbao" usa "o" amb sentit excloent (disjunció excloent). En el que segueix usarem la disjunció en el **sentit inclusiu**.

Informalment, $A \cup B$ es forma posant tots els elements de A i B junts, encara que hem de tenir clares les regles de formació de conjunts que ja hem mencionat, com veurem en l'activitat següent:

Activitat 1.12

Trobeu la unió dels següents parells de conjunts:

a) $\{a, b\} \cup \{c, d, e\}$

b) $\{1, 2, 3, 4, 5\} \cup \varnothing$

c) $\{m, n, q\} \cup \{m, n, p\}$

Solució en pàg. 366

Fixeu-vos que en l'activitat 1.12, encara que m pertany als dos conjunts A i B, només apareix una vegada en la unió dels dos conjunts. La noció d'unió és la base per a la suma de nombres naturals, però només quan s'usen conjunts disjunts, com es pot observar en els apartats "a" i "c" de l'activitat 1.12.

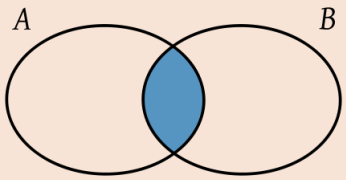
1.3.2 Intersecció de conjunts

Intersecció de conjunts

Definim la **intersecció dels conjunts** A i B com el conjunt format pels elements que pertanyen tant a A com a B. Amb llenguatge matemàtic ho escrivim com a

$$A \cap B = \{x \in U : x \in A \text{ i } x \in B\}$$

I el diagrama de Venn corresponent es dibuixa com a:



Exemple 1.13

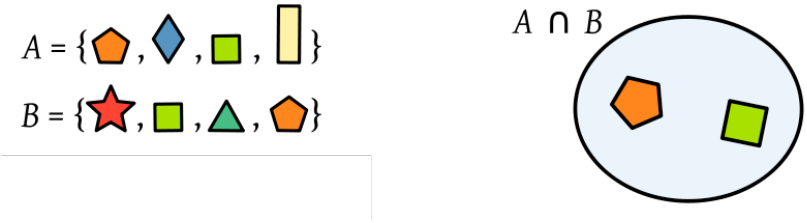


Figura 1.11. Exemple de la intersecció de conjunts

Activitat 1.13

Quin és el resultat de fer la intersecció del conjunt de les figures poligonals regulars amb el conjunt de triangles?

Solució en pàg. 366

Activitat 1.14

Trobeu la intersecció dels següents parells de conjunts:

a) $\{a, b, c\} \cap \{b, d, f\}$

b) $\{a, b, c\} \cap \{a, b, c\}$

c) $\{a, b\} \cap \{c, d\}$

Solució en pàg. 366

Intersecció de dos conjunts disjunts

Observeu que, tal com s'han definit dos conjunts disjunts (secció 1.2.3) es compleix la propietat següent:

$$A,\ B \text{ disjunts} \iff A \cap B = \varnothing$$

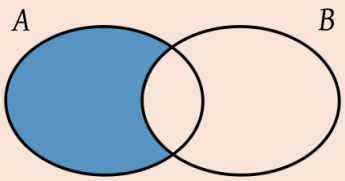
1.3.3 Diferència de conjunts

Diferència de conjunts

La **diferència entre dos conjunts** A i B és un conjunt format pels elements de A que no són en B. Matemàticament, s'escriu com a

$$A \backslash B = \{x \in A : x \notin B\}$$

El diagrama de Venn d'aquesta operació és:



Exemple 1.14

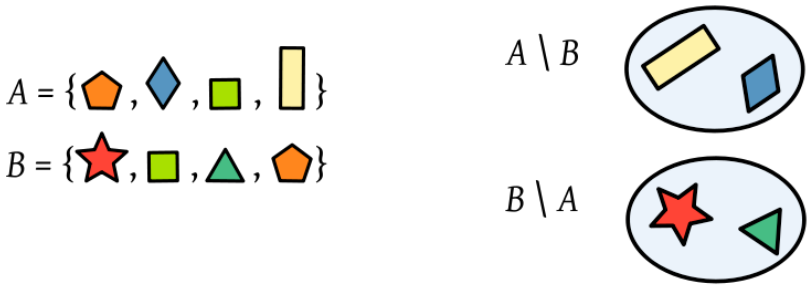


Figura 1.13. Exemple de la diferència de conjunts

En la notació de conjunts, $A \backslash B$ també es pot veure com a $A \cap \overline{B}$, com podem deduir de la representació amb diagrames de Venn de la diferència de conjunts.

Activitat 1.15

Trobeu la diferència dels següents parells de conjunts:

a) $\{a, b, c\} \backslash \{b, d\}$

b) $\{a, b, c\} \backslash \{e\}$

c) $\{a, b, c, d\} \backslash \{b, c, d\}$

Solució en pàg. 366

Com s'ha pogut observar en l'apartat "c" de l'activitat 1.17, la diferència de conjunts $A \backslash B$ es pot usar per a introduir la resta entre nombres naturals quan $B \subseteq A$, és a dir, quan el segon conjunt és subconjunt del primer. Sobre aquest fet aprofundirem més avant.

1.3.4 Producte cartesià de conjunts

Una altra possible operació entre dos conjunts per a formar un tercer conjunt és el producte cartesià. El producte cartesià rep el nom del matemàtic francès René Descartes, i com veurem, és un dels esquemes conceptuals que hi ha darrere de la multiplicació de nombres naturals (junt amb el model de suma repetida). El producte cartesià també és útil en probabilitat i geometria. Per a definir el producte cartesià, hem de definir prèviament el concepte de **parell ordenat**. Un parell ordenat, escrit (a, b), és un parell d'elements en què un dels elements és designat com a *primer* (a en aquest cas) i l'altre com a *segon* (b).

La noció de parell ordenat difereix de la d'un conjunt de dos elements a causa de la preferència d'ordre. Per exemple, amb conjunts es dona que $\{a, b\} = \{b, a\}$ perquè tenen els mateixos elements. En canvi, com a parells ordenats, $(1, 2) \neq (2, 1)$, ja que l'ordre dels elements és diferent. Dos parells ordenats (a, b) i (c, d) són iguals si i només si $a = c$ i $b = d$.

Producte cartesià de conjunts

El **producte cartesià de A per B**, escrit com a $A \times B$, és el conjunt de parells ordenats (a, b) de tal manera que $a \in A$ i $b \in B$. Així, per a cada parella el primer element és en A i el segon element serà en B. Matemàticament, s'escriu com a

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \text{ i } b \in B\}$$

Exemple 1.15

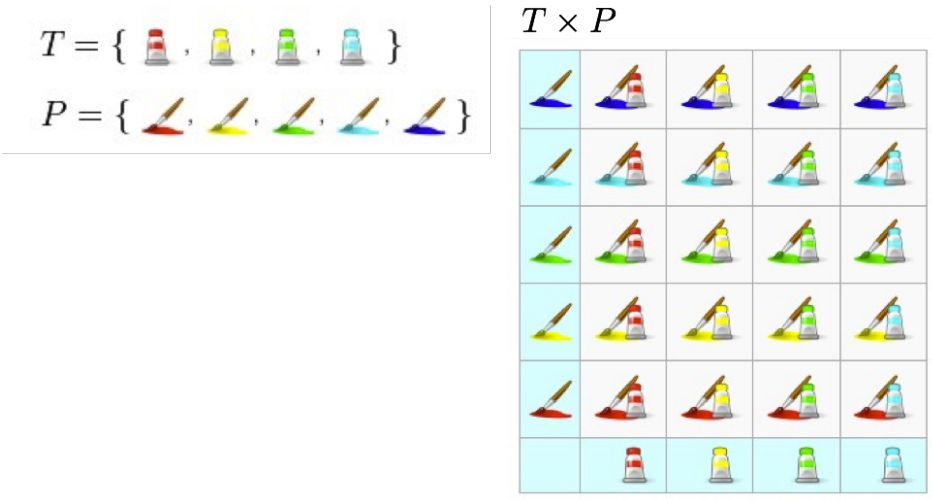


Figura 1.14. Exemple del producte de conjunts

Activitat 1.16

Siguen $A = \{\text{samarreta, pantalons}\}$ i $B = \{\text{roig, blau, groc}\}$. Calculeu $A \times B$.

Solució en pàg. 367

Activitat 1.17

Trobeu el producte cartesià dels següents parells de conjunts:

a) $\{x, y, z\} \times \{m, n\}$

b) $\{7\} \times \{a, b, c\}$

Solució en pàg. 367

Observeu que quan es tracta de trobar un producte cartesià, s'han de formar tots els parells possibles en què el primer element prové del primer conjunt i el segon element ve del segon conjunt.

Activitat 1.18

Algunes qüestions variades relatives a les operacions entre conjunts:

a) Penseu en dos conjunts disjunts la unió dels quals siga el conjunt dels nombres naturals

b) Pot ser que la unió de dos conjunts coincidisca amb la seua intersecció?

c) Vertader o fals? Dos conjunts amb el mateix nombre d'elements són iguals.

d) Vertader o fals? Dos conjunts només poden ser iguals o disjunts.

e) Vertader o fals? Si A i B són disjunts llavors $A \backslash B = A$

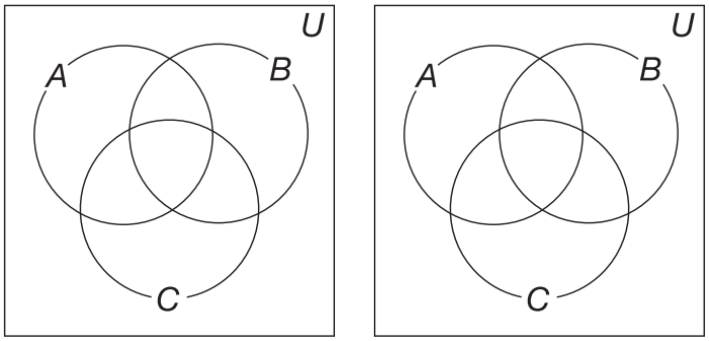
Solució en pàg. 367

Activitat 1.19

Ombregeu les regions següents en els següents diagrames de Venn:

a) $(A \cup B) \cap C$

b) $A \cup (B \cap C)$



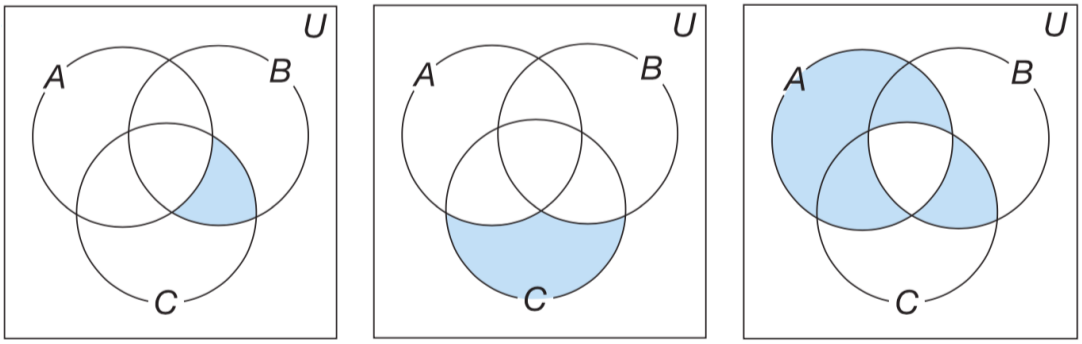
a) b)

A partir dels resultats de les parts "a" i "b", quines conclusions es poden extraure sobre la col · locació dels parèntesis?

Solució en pàg. 367

Activitat 1.20

Representeu les següents regions ombrejades usant els símbols de les operacions de conjunts que acabem de veure ($\cup$, $\cap$ i $\backslash$).



a) b) c)

Solució en pàg. 368

1.4. Cardinal d'un conjunt

Cardinal d'un conjunt

Donat un conjunt A, definim el **cardinal** de A com la quantitat d'elements que formen el conjunt A i el denotem com a $|A|$ o $card(A)$.

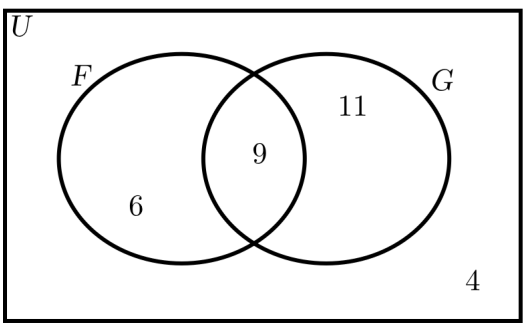
Exemple 1.16

Siga $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $|A| = 6$.

Exemple 1.17

En el següent diagrama s'han bolcat els resultats obtinguts en una enquesta feta a usuaris d'un restaurant de menú diari, en què se'ls va preguntar què havien menjat per a postres. Les quatre possibles respostes eren: fruita, gelat, fruita i gelat o no he pres postres.

Anomenem U el conjunt universal format per tots els enquestats, F al conjunt dels usuaris que han pres fruita per a postres i G al conjunt dels que han pres gelat. Així, la figura següent representa la situació descrita, en què els nombres del diagrama indiquen la quantitat d'elements que té cada regió del conjunt. Cada nombre es refereix només a la regió més petita en la qual es troba.



i. Quantes persones van prendre fruita?

$6 + 9 = 15$ persones $\Longrightarrow |F| = 15$

ii. Quantes persones van prendre gelat?
$9 + 11 = 20$ persones $\Longrightarrow |G| = 20$

iii. Quantes persones van prendre algunes postres: o fruita o gelat o tots dos? Coincideix amb la suma dels cardinals dels conjunts de persones que van prendre fruita ($|F|$) més el dels que van prendre gelat ($|G|$)? Per què?

El conjunt de persones que han menjat algunes postres és representat per la suma de $6 + 9 + 11 = 26$ persones $\Longrightarrow |F \cup G| = 26$.

No obstant això, si calculem directament la suma dels cardinals dels conjunts de persones que van prendre fruita (F) més el dels que van prendre gelat (G), tenim: $|F| + |G| = 15 + 20 = 35$. Açò ocorre perquè comptem dues vegades les persones que van menjar les dues postres ($F \cap G$).

Per tant, la fórmula general per al càlcul del cardinal de la unió la podem escriure com a

$$|F \cup G| = |F| + |G| - |F \cap G|$$

Cardinal de la unió de dos conjunts

Donats dos conjunts A i B, definim el **cardinal de la unió** $A \cup B$ com a

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Activitat 1.21

És la fórmula del cardinal de la unió vàlida en tots els casos? Què ocorre quan els conjunts són disjunts?

Solució en pàg. 368

Exemple 1.18

Andreu, Borja i Carme acaben de trobar faena i volen fer una festa entre els tres per a celebrar-ho. El total de convidats a la festa no pot superar les 30 persones. Cada un fa una llista amb les persones que vol convidar. Andreu ha apuntat 19 amics, Borja 23 i Carme 20.

- Doncs són més de 30 convidats, perquè 23+19+20 són 62 –diu Andreu
- No és tan clar, perquè diversos dels amics que tenim són comuns –diu Borja
- Comprovem-ho amb les llistes –diu Carme–. Hi ha 7 persones que són en la meua llista i en la d'Andreu i 14 que són en la meua llista i en la de Borja.
- Perquè en la llista d'Andreu i en la meua coincideixen 11 persones –diu Borja
- Llavors si entre els tres reunim $23 + 19 + 20 = 62$ persones i restem els amics en comú que són 7+14+11= 32 persones, queden 62-32= 30 convidats ho veieu? –diu Borja

- Espera, espera un moment... Hi ha alguna cosa que no hem tingut en compte –diu Carme–. Què passa amb els que són amics dels tres, com Raül, per exemple?

- Ah, doncs no sé! Ho pensarem –diu Borja–. Quants tenim en comú tots tres?

Carme respon:

- Doncs n'hi ha prou amb saber quants dels 7 amics comuns d'Andreu i meus són també en la teua llista, Borja.

- A veure... aquesta sí, aquest no, aquest sí, ... 5 són també en la meua llista.

Aquesta situació la podem modelitzar així:
$A = \{\text{amics d'Andreu}\} \Longrightarrow |A| = 19$
$B = \{\text{amics de Borja}\} \Longrightarrow |B| = 23$
$C = \{\text{amics de Carme}\} \Longrightarrow |C| = 20$

A més, sabem: $|A \cap C| = 7$, $|B \cap C| = 14$ i $|A \cap B| = 11$. Finalment, tenim que $|A \cap B \cap C| = 5$. El gràfic que representa aquesta informació el tenim a continuació:

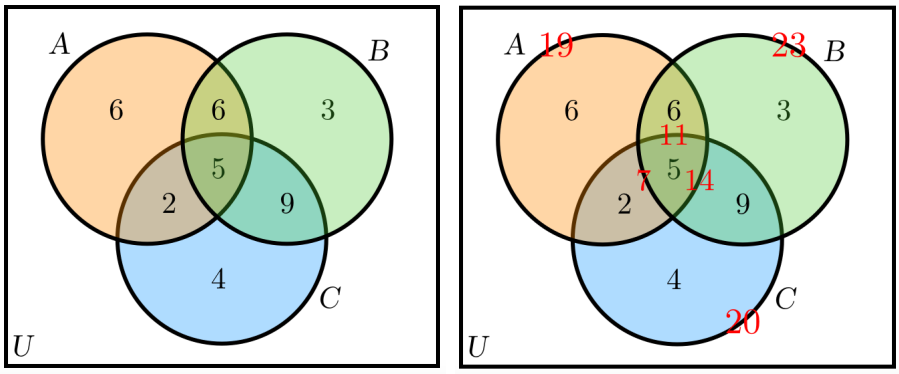


Figura 1.15. Diagrama amb (dreta) i sense (esquerra) els càlculs totals dels cardinals de A, B i C

i. El total de convidats és representat pel cardinal de la unió dels conjunts d'amics dels tres, això és, $|A \cup B \cup C|$. Així, sumant els valors de cada una de les regions del diagrama (segons es mostra en la Figura 1.15, dreta):
$|A \cup B \cup C| = 6 + 6 + 3 + 2 + 5 + 9 + 4 = 35$

ii. O també podem fer-ho de manera anàloga a com s'ha mostrat en l'Exemple 1.17, però per al cas de tres conjunts. Així, haurem de restar el cardinal de les interseccions de dos conjunts. Però el cardinal de la intersecció de tres conjunts se suma en tres ocasions (amb cada cardinal de cada conjunt) i es resta en altres tres ocasions (amb cada cardinal de la intersecció de dos conjunts). Per això, per a comptabilitzar-ho, finalment ha de sumar-se la intersecció. Queda, per tant, la fórmula següent (seguint la Figura 1.15, esquerra):
$|A \cup B \cup C| = 19 + 23 + 20 - 7 - 14 - 11 + 5 = 35$

Cardinal de la unió de tres conjunts

Donats tres conjunts A, B i C, definim el **cardinal de la unió** $A \cup B \cup C$ com a

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Activitat 1.22

Un sondeig dirigit a 100 persones amb l'objectiu d'esbrinar com es mantenen al dia amb els esdeveniments actuals va revelar els següents fets:

- 65 veu les notícies a la televisió
- 39 lligen el diari
- 39 escolten notícies de ràdio
- 20 miren notícies a la televisió i lligen el diari
- 27 miren notícies a la televisió i escolten notícies de ràdio
- 9 lligen el diari i escolten notícies de ràdio
- 6 miren notícies a la televisió, lligen el diari i escolten notícies de ràdio

Respon:

a) Quantes de les 100 persones enquestades no es mantenen al dia per cap de les tres fonts enumerades?

b) Quantes de les 100 persones enquestades lligen el diari, però no miren les notícies a la televisió?

c) Quantes de les 100 persones enquestades usen només una de les tres fonts enumerades per a mantenir-se al dia dels esdeveniments actuals?

Solució en pàg. 368

1.5. Relacions entre elements

Fins ara hem treballat amb conjunts, operant i relacionant-los de manera general o fent operacions entre ells. Ara farem ús de relacions entre els elements que integren els conjunts.

Correspondència entre dos conjunts

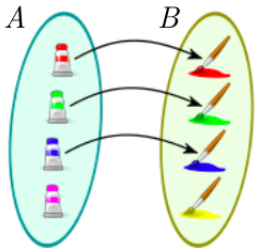
Anomenarem **correspondència entre dos conjunts** A **i** B (no buits) el conjunt de parells d'elements (a, b) generat de manera que el primer element, a, de cada parell pertany al primer conjunt A i el segon element de cada parell, b, pertany al segon conjunt B.
Amb llenguatge matemàtic, podríem definir la correspondència entre dos conjunts A i B com un nou conjunt de parells, C, definit com a

$$C = \{(a, b) : a \in A \text{ i } b \in B\}$$

Així, es compleix que $C \subseteq A \times B$.

Exemple 1.19

Donats els següents conjunts A de pintures i B de pinzells, el conjunt creat segons indica la "regla" mostrada per les fletxes en la Figura 1.16 formaria un nou conjunt, C, que seria una correspondència de A en B.

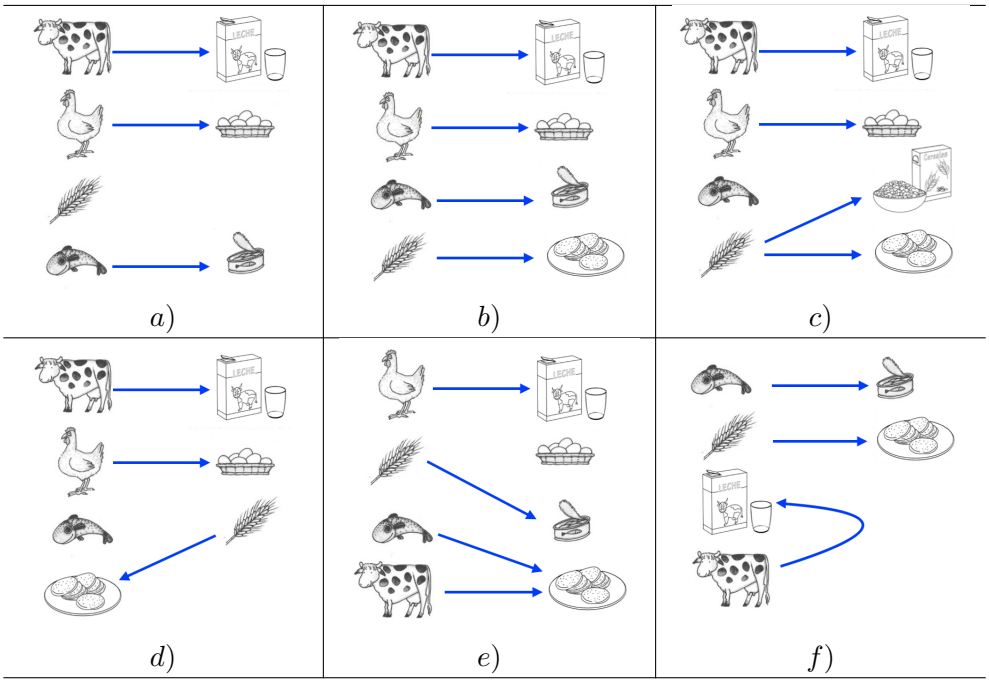


$C = \{ (\quad , \quad), (\quad , \quad), (\quad , \quad) \}$

Figura 1.16. Exemple de correspondència

Activitat 1.23

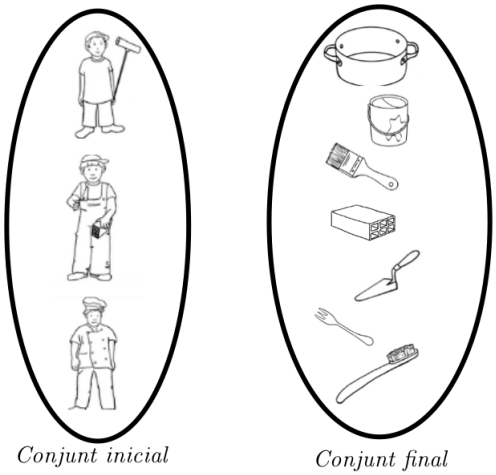
Indiqueu quines de les següents imatges són correspondències. Raoneu la resposta.



Solució en pàg. 368

Activitat 1.24

Seguint la regla "Utensilis propis de cada ofici", intenteu construir el conjunt de parelles relacionant els elements del conjunt inicial amb els del conjunt final:



Solució en pàg. 369

Com s'observa en les activitats anteriors, establir una relació de correspondència seguint una regla equival, de manera operativa, a crear un conjunt de parelles (Figura 1.16). És important ressaltar que, fent ús de la notació de "fletxes", la correspondència "té un sentit", perquè la relació sempre ha d'establir-se des de l'agrupació inicial a la final.

! De manera general, podem dir que tota **operació, llei, norma o criteri** que associe els elements d'un conjunt A amb els elements d'un altre B serà una correspondència de A en B.

1.5.1 Correspondència un a un

Passem ara a descriure un tipus especial de correspondència, en la qual els elements d'una col · lecció i de l'altra es fan correspondre d'un a un, de manera biunívoca: la *correspondència un a un*.

Correspondència un a un o bijectiva

Denominarem **correspondència un a un** o **bijectiva** aquella correspondència en la qual cada element del conjunt de partida està relacionat amb un i només un element del conjunt d'arribada i viceversa, sense sobrar cap element per relacionar en cap de les dues col · leccions.

Activitat 1.25

Quines de les relacions de l'Activitat 1.23 són correspondències bijectives?

Solució en pàg. 369

Activitat 1.26

- Podries donar exemples de correspondències bijectives? I algun concret que es done o siga propi de l'aula d'infantil o de primers cursos de primària?
- Quina característica compleixen aquestes correspondències bijectives en referència al nombre d'elements que integren les col · leccions?

Com veurem en un cas pràctic (en l'Activitat 1.27) la creació de conjunts d'elements juga un paper fonamental en una de les tasques matemàtiques bàsiques de les primeres edats escolars: el *comptatge*. En el vídeo podrem observar com *Mateo* fa correspondre una *paraula-número* a cada un dels elements del conjunt que vol comptar. Fixeu-vos que en aquest cas el xiquet no sap (encara) que l'última *paraula-número* que pronuncia quan compta respon a la pregunta *Quants n'hi ha?*

Activitat 1.27

Mireu aquest vídeo en què Mateo (amb 3 anys i 2 mesos) compta dinosaures. Fixeu-vos com compta usant una seqüència de *paraules-número* memoritzada *"un, dos, tres, quatre, cinc, set"* mentre apunta als diferents elements. Fixeu-vos com la creació d'agrupacions d'elements i especialment la correspondència entre les *paraules-número* i els elements del conjunt que vol comptar són aspectes essencials per al desenvolupament del *sentit numèric*.

Vídeo *Mateo compta dinosaures*

Com es posa de manifest en l'Activitat 1.26, i com es veurà en el següent tema, aquest tipus de relació entre col · leccions és summament important perquè serveix com a comparador de cardinals (que necessàriament han de ser iguals, vegeu Figura 1.18). A més, la correspondència un a un és part integrant del procés de comptatge on s'estableix una correspondència un a un entre la seqüència numèrica i la col · lecció d'elements a comptar, com es mostra en el vídeo de l'Activitat 1.27.

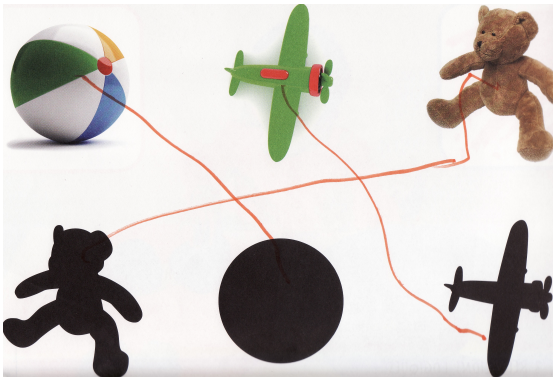


Figura 1.18. Tasca d'aparellaments duta a terme per Carme (3 anys) a partir d'una col · lecció de joguets i les seues ombres

Conjunts coordinables

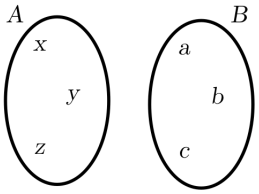
Dos conjunts A i B són **coordinables** si es pot establir entre ells una correspondència un a un, és a dir una correspondència bijectiva.

Conjunt finit i conjunt infinit

Direm que un conjunt A és **finit** si pot establir-se una correspondència un a un entre els elements de A i un subconjunt de $\mathbb{N}$ ($\{1, 2, 3, 4, \ldots, n\}$.
Direm que un conjunt A és **infinit** quan no siga finit.

Activitat 1.28

a) Trobeu quatre correspondències un a un entre els conjunts A i B següents. Descriviu-les inicialment amb el llenguatge de les fletxes.



b) Escriu els corresponents conjunts de parelles C_1, C_2, C_3 i C_4 que has format en l'apartat anterior fent ús del llenguatge algebraic.

c) Quantes correspondències un a un diferents podries trobar entre els conjunts A i B donats.

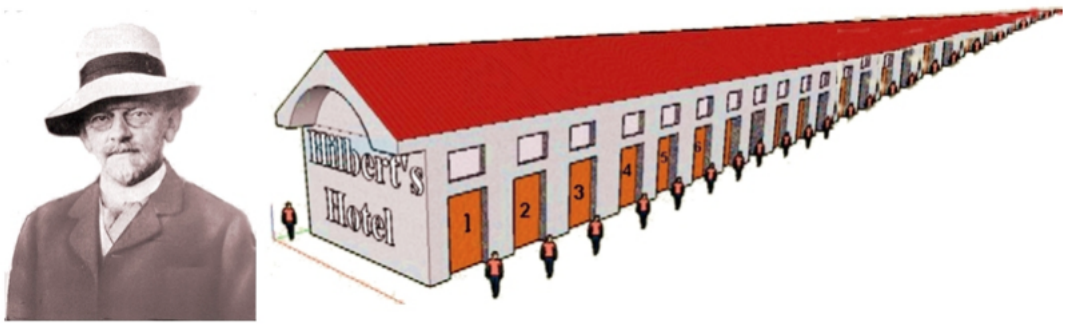
Solució en pàg. 369

Activitat 1.29

Dos grans hoteliers que volien construir l'hotel més gran del món es van reunir a dialogar sobre l'assumpte i van començar pel primer i més obvi tema a discutir: quantes habitacions tindria[a].
–Què et sembla si construïm un hotel amb 1.000 habitacions?
–No, perquè si algú en construïra un de 2.000 habitacions, el nostre hotel ja no seria tan gran. Millor fem-lo de 10.000.
–Però podria ser que algú en construïra un de 20.000 i tornaríem a quedar-nos amb un hotel xicotet. Construïm un hotel amb 1.000.000 d'habitacions, aquest seria un hotel gran.
–I quin tal si algú en construïra un amb...

I així van continuar discutint durant hores, fins a arribar a la conclusió que l'única manera de tenir un hotel gran de bo de bo era construint-ne un que tinguera un **nombre infinit** d'habitacions.

L'obra va durar molts anys, però, al final, heus-lo ací: l'*Hotel Infinit*.



En poc temps, l'hotel va obtenir fama no sols per ser el més gran del món, sinó també per ser un dels llocs més extravagants per a passar les vacances. Gent de tot el món arribava a l'hotel per a allotjar-se encara que fora només una nit. Encara que semble increïble, hi havia dies en què l'hotel era ple, i malgrat això continuava entrant gent que no es quedava sense habitació.

Tanmateix, en un hotel d'infinites habitacions no tot és un camí de roses. Tan bon punt es van obrir les portes de l'hotel la gent va començar a abarrotar-lo i prompte es van trobar que l'hotel d'habitacions infinites era ple d'infinits hostes, la qual cosa és un inconvenient molt greu. En aquest moment va sorgir la primera paradoxa, així que es va prendre la següent mesura: *els hostes sempre tindrien habitació assegurada, però amb l'acord previ que haurien de canviar d'habitació cada vegada que se'ls demanara.*

Va ser llavors quan va arribar un home a l'hotel, però aquest era ple. Per descomptat, això no va preocupar el client perquè a l'*Hotel Infinit* s'assegurava que tots tindrien habitació. L'home va demanar habitació i el recepcionista, conscient que no hi hauria cap problema, va agafar un micròfon pel qual va avisar a tots els hostes que, per favor, revisaren el número de la seua habitació, li sumaren un i es canviaren a aquest número d'habitació. D'aquesta manera, el nou hoste va poder dormir tranquil · lament en l'habitació número 1. Però, què va passar llavors amb l'hoste que era en l'última habitació? Senzillament no hi ha última habitació, perquè n'hi havia infinites.

a) Escriu aquesta acció que es va portar a terme a l'*Hotel Infinit* en forma de correspondència amb el llenguatge de les fletxes. És una correspondència un a un?

b) Estant l'hotel ple d'infinits hostes, van arribar 40 nous turistes que necessitarien allotjar-se aquella nit a l'hotel. Quina seria l'acció que s'hauria de portar a terme a l'*Hotel Infinit* per a poder allotjar-los? Descriu-la.

c) Estant l'hotel ple d'infinits hostes, va arribar un representant d'una agència de viatges, el seu problema era que tenia una excursió amb infinits turistes que necessitarien allotjar-se a l'hotel. Seria possible trobar-los habitació? Pensa en una solució i descriu-la en forma de correspondència, si pot ser.

Solució en pàg. 370

[a] Text adaptat de Juan Manuel Ruisánchez Serra.

1.6. Activitats complementàries del tema

Activitat 1.30

Escriviu simbòlicament les afirmacions següents:

a) v pertany al conjunt M

b) El conjunt T conté com a subconjunt el conjunt H

c) Entre els elements del conjunt G no hi ha el nombre 2

d) El conjunt Z no és un subconjunt del conjunt A

e) El conjunt X no conté el conjunt K

f) El conjunt H és un subconjunt propi del conjunt K

Solució en pàg. 370

Activitat 1.31

Descriviu per extensió un subconjunt de cada un dels següents conjunts:

a) {mesos de l'any}

b) {nombres parells}

c) $\{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$

d) $\{a, b, c, d, e, f, g\}$

Solució en pàg. 370

Activitat 1.32

Descriviu per comprensió un conjunt que continga cada un dels següents:

a) {nombres naturals d'una xifra}

b) $\{a, b, c, d, e, f, g\}$

Solució en pàg. 370

Activitat 1.33

Representeu per mitjà de diagrames de Venn uns conjunts A, B i C que compleixen les següents característiques:

a) $A \subset B$; $B \subset C$

b) $A \subset C$; $B \subset C$

c) $A \subset B$; $B \subset A$

d) $A \subset C$; $B \subset C$; $A \cap B = \varnothing$

Solució en pàg. 371

Activitat 1.34

Donats els conjunts $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $C = \{3, 4, 5\}$, $D = \{3, 5\}$ i $E = \{2, 4, 6, 8\}$. Determineu el conjunt X en cada un dels següents casos, sabent que X és un dels conjunts donats.

a) $X \cap B = \varnothing$

b) $X \subset C$

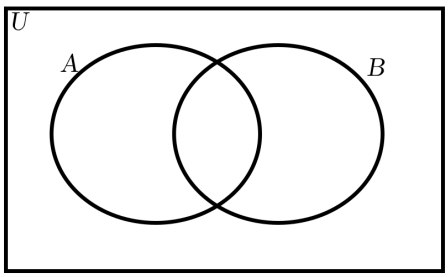
c) $X \subset A$ i $X \not\subset B$

d) $X \subset B$ i $X \not\subset E$

Solució en pàg. 371

Activitat 1.35

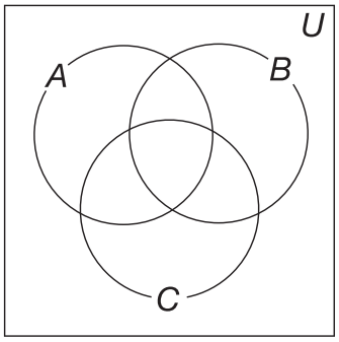
Completeu el següent diagrama de Venn i definiu per extensió els conjunts A i B, sabent que U és el conjunt universal, $\overline{A} = \{6, 7, 8, 9\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ i $A \cap B = \{4, 5\}$.



Solució en pàg. 371

Activitat 1.36

Ombregeu en un diagrama de Venn com el de baix les situacions que s'indiquen:



a) $\overline{A}$

b) $\overline{A} \cap B$

c) $C \cup \overline{B}$

d) $\overline{(\overline{B} \cap \overline{C})}$

e) $(A \cup B) \cap C$

f) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

Solució en pàg. 372

Activitat 1.37

Donats els conjunts $E = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $A = \{1,2,3,4,5,6\}$, $B = \{3,4,5\}$, $C = \{6,7,8,9\}$ i $D = \{4,5,6,7\}$; i considerant E com a conjunt universal, trobeu:

a) $\overline{A}$

b) $\overline{B}$

c) $\overline{C}$

d) $\overline{E}$

e) $\overline{A} \cap B$

f) $\overline{A} \cup B$

g) $A \cap \overline{B}$

h) $A \cup \overline{B}$

i) $C \cup \overline{D}$

j) $C \cap \overline{D}$

k) $\overline{C} \cap D$

l) $\overline{B} \cup \overline{D}$

m) $\overline{B} \cap \overline{D}$

n) $\overline{(\overline{B} \cap \overline{D})}$

o) $\overline{(\overline{B} \cup \overline{D})}$

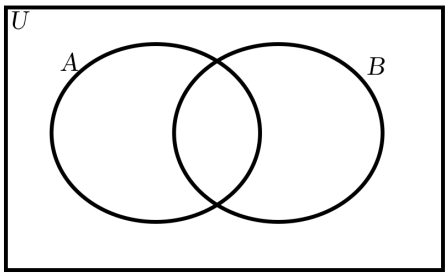
p) $A \triangle B$[a]

Solució en pàg. 372

[a] Aquesta operació s'anomena *diferència simètrica* i es defineix com $A \triangle B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$.

Activitat 1.38

Dibuixeu les solucions de les següents operacions amb conjunts en el diagrama de Venn:



a) $B \backslash (A \cap B)$

b) $\left(A \cup \overline{B}\right) \backslash (A \backslash B)$

c) $\overline{A} \backslash \overline{B}$

d) $(A \cup B) \cap \left(A \cup \overline{B}\right) \cap \left(\overline{A} \cup B\right)$

Solució en pàg. 373

Activitat 1.39

Siguen els conjunts $A = \{m, s, t\}$ i $B = \{a, e, i, o, u\}$. Definiu per extensió i per comprensió el conjunt producte cartesià $A \times B$.

Solució en pàg. 373

Activitat 1.40

Porteu en la maleta una camisa blanca, una camisa groga i una camisa roja, i també uns pantalons blaus i uns pantalons negres. De quantes maneres diferents us podeu vestir? Representeu la situació per mitjà d'una taula.

Solució en pàg. 373

Activitat 1.41

Si en un bar el menú consta de 3 plats $A = \{\text{verdura, carn, peix}\}$ i dues postres $B = \{\text{fruita, flam}\}$. Expresseu per mitjà d'un diagrama d'arbre de quantes maneres diferents es pot menjar.

Solució en pàg. 374

Activitat 1.42

Determineu per extensió:

a) El conjunt A dels nombres enters múltiples de tres compresos entre 31 i 50

b) El conjunt B de les solucions de l'equació $x^2 - 7x + 12 = 0$

Trobeu els productes cartesians $A \times B$ i $B \times A$. Són iguals? És commutatiu el producte cartesià? Justifiqueu les respostes.

Solució en pàg. 374

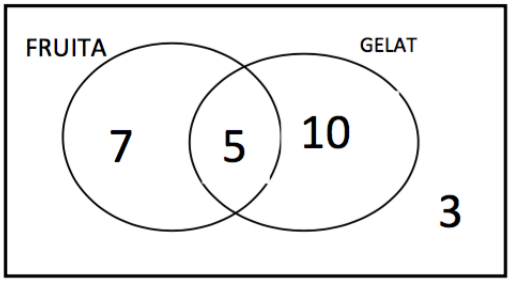
Activitat 1.43

En el següent diagrama s'han bolcat els resultats obtinguts en una enquesta feta a xiquets de primària a l'eixida del menjador escolar, on se'ls va preguntar què havien menjat per a postres. Les quatre possibles respostes eren:

- fruita
- gelat
- fruita i gelat
- no he pres postres

Anomenem U el conjunt universal format per tots els xiquets enquestats, F el conjunt dels xiquets que han menjat fruita per a postres i G el conjunt dels xiquets que han menjat gelat. La figura següent representa la situació descrita, en què els nombres del diagrama

indiquen la quantitat d'elements (en aquest cas, xiquets) que té cada regió del conjunt. Cada nombre es refereix només a la regió més xicoteta en la qual es troba. Hi ha 4 regions:



Sobre la base d'aquestes dades responeu a les següents preguntes i expresseu el resultat usant el concepte de cardinal i les **operacions entre conjunts**, seguint l'exemple de la resposta i.:

i. Quants xiquets van ser enquestats?
Resposta: $7+5+10+3=25$ xiquets $\Longrightarrow |U|=25$

ii. Quants xiquets no van menjar postres?

iii. Quants xiquets van menjar dues postres: fruita i gelat?

iv. Quants xiquets van menjar gelat?

v. Quants xiquets van menjar solament gelat?

vi. Quants xiquets no van menjar fruita?

vii. Quants xiquets van menjar solament un dels dos plats?

viii. Quants xiquets van menjar fruita?

ix. Quants xiquets van menjar postres: o fruita o gelat o tots dos? Coincideix amb la suma dels cardinals dels conjunts de xiquets que van menjar fruita més el dels que van menjar gelat? Per què?

x. Escriviu una fórmula general per a calcular el cardinal de la unió de dos conjunts.

xi. $\star$ Plantegeu i resoleu un problema en el qual intervinguen dos conjunts i per a arribar a la solució s'aplique la fórmula del cardinal de la unió de dos conjunts.

Solució en pàg. 374

Activitat 1.44

Es va preguntar a 50 pares d'alumnes sobre els esports que practicaven, i es van obtenir els següents resultats: 20 practiquen només futbol, 12 practiquen futbol i natació i 10 no practiquen cap d'aquests esports. Amb aquestes dades, esbrineu el nombre de pares que practiquen natació, el nombre que només practiquen natació i el dels que practiquen algun d'aquests esports.

Solució en pàg. 375

Activitat 1.45

D'una selecció de 45 alumnes, dels que sabem que tots practiquen almenys un esport, sabem que:

- 24 juguen al tenis, dels quals 12 només juguen al tenis.
- 25 juguen al pàdel, dels quals 10 només juguen al pàdel.
- 19 juguen al bàsquet, dels quals 5 només juguen al bàsquet.
- 5 juguen al tenis, al pàdel i al bàsquet.
- 9 juguen al tenis i al pàdel

Esbrineu:

a) Quants alumnes juguen al pàdel i al bàsquet?

b) Quants alumnes juguen al tenis i no al pàdel?

c) Quants juguen al bàsquet i no al pàdel?

Activitat 1.46

Laura té discos de diferents gèneres musicals: pop, rock, punk, gothic, clàssica i jazz. La seua amiga Diana té discos de salsa, gothic, hip-hop, pop, metal i industrial. Lluís, un amic comú, volia escoltar la música que li agrada a cada una d'elles, així que li van prestar un disc de cada un dels gèneres.

- De quins gèneres li han prestat els discos?
- Si Lluís es decideix a escoltar primer els discos que els agraden a ambdues, quins discos ha d'escoltar?

Expresseu totes dues situacions en termes de conjunts.

Activitat 1.47

Es va preguntar a 11 professors de l'institut sobre les seues preferències per dues marques de cafè instantani A i B i es van obtenir els següents resultats: 7 van preferir només una d'aquestes marques; el nombre de persones que van preferir totes dues marques va ser igual al nombre de persones que no va preferir cap de les dues; 3 persones van manifestar que no prefereixen l'A, però sí la B. Es vol saber:

a) Quantes persones van preferir la marca A?

b) Quantes persones van preferir només la B?

c) Quantes persones van manifestar que els eren indistintes totes dues marques?

Activitat 1.48

S'ha dut a terme una investigació amb 1000 persones per a determinar quin mitjà usen per a conèixer les notícies del dia. S'ha trobat que 400 persones escolten les notícies de manera regular per la televisió, 300 persones escolten les notícies per la ràdio i 275 s'assabenten de les notícies per tots dos mitjans.

a) Quantes de les persones investigades s'assabenten de les notícies només per la televisió?

b) Quantes de les persones investigades s'assabenten de les notícies només per la ràdio?

c) Quantes de les persones investigades no escolten ni miren les notícies?

Referències

Canals, M. A. (1989). *Per una didàctica de la matemàtica a l'escola.* Vic: Eumo Editorial.

2

Sistemes de numeració

Organització de continguts del Tema 2

1. L'evolució dels sistemes de numeració
2. El sistema de numeració decimal
    - Altres bases antropomòrfiques com a origen d'altres sistemes de numeració
3. Models manipulatius per a la comprensió de sistemes posicionals xifrats no decimals
    - Models manipulatius per a entendre els algoritmes estàndard de la suma i la resta
4. Canvis de base entre sistemes de numeració xifrats posicionals

L'estudi del conjunt de nombres naturals, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$ és la base de les matemàtiques de l'escola d'infantil i primària. Però què entenem exactament per "nombre"? Un nombre és una idea o una abstracció. Els símbols que veiem, escrivim o toquem quan es representen nombres s'anomenen *numerals*. En l'assignatura de *Didàctica de les Matemàtiques de l'Educació Infantil* de 4t curs s'estudiaran els diferents usos del nombre. L'ús més comú és el de *cardinal* per a descriure quants elements formen part d'un conjunt finit d'elements.

2.1. L'evolució dels sistemes de numeració

Els sistemes de numeració van nàixer per a donar resposta a una de les primeres necessitats de la humanitat, la de registrar la quantitat d'objectes d'una col · lecció. En aquest sentit, la finalitat d'un sistema de numeració és "*assignar a cada nombre natural individual (amb un límit que depèn de les necessitats pràctiques) un nom i una representació escrita, formada per combinacions d'un nombre reduït de signes, efectuades seguint lleis més o menys regulars*" (Bourbaki, 1994, p. 45).

En la nostra proposta, considerem fonamental que els futurs mestres siguen coneixedors de com de prolongat i costós ha sigut el procés de construcció del nostre sistema de numeració

decimal (SND). Una anàlisi de l'evolució des dels primers sistemes de numeració permet entendre algunes de les dificultats i reptes als quals s'enfronten els infants en la seua aproximació al nombre i la construcció del *sentit numèric*. En particular, aquesta anàlisi es desenvolupa atenent el marc proposat per Gómez (1988), que organitza els sistemes de numeració de manera cronològica.

Sistema de numeració

Un **sistema de numeració** és format per un conjunt de signes i regles que permeten assignar a cada nombre una representació exclusiva.

Exemple 2.1

Per exemple, la quantitat tretze es representa de diferents maneres en diferents sistemes de numeració:

- En el nostre sistema de numeració decimal (SND): 13
- En el sistema romà: XIII
- En el sistema jeroglífic egipci: 𓎆𓏺𓏺𓏺

Activitat 2.1

Imaginem un pastor de fa 10 000 anys que trau un ramat d'ovelles a pasturar. Per a assegurar-se que tornen totes les ovelles, utilitza el següent procediment: Cada vegada que ix una ovella del corral, fa una mossa en un bastó. A la nit, cada vegada que entra una ovella, mou el dit sobre les mosses. Quina activitat dona suport a aquest sistema de numeració?

Solució en pàg. 375

La majoria dels sistemes de numeració usats en la història aconseguia representar de manera unívoca qualsevol nombre. No obstant això, com indica Gómez (1988), cada sistema de numeració presenta avantatges i inconvenients. Segons quins aspectes es pretenga facilitar (facilitat d'escriptura, longitud de representació escrita, càlcul, etc.), se'n poden entorpir uns altres. Bàsicament, els sistemes de numeració es poden dividir en additius, multiplicadors i posicionals.

2.1.1 Sistemes additius

Troballes arqueològiques han mostrat l'ús de *bastons de còmput* o *bastons de comptatge* amb uns 30.000 anys d'antiguitat. Es tracta de registres numèrics en ossos o tauletes en les quals apareixen osques (Figura 2.1). Com indica Gómez (1988), aquests sistemes es caracteritzen per la repetició uniforme d'un únic element tantes vegades com el nombre que es desitja representar. Així, la representació del nombre està lligada a l'aspecte cardinal del nombre.

De fet, la notació opera sobre el principi de correspondència un a un, pel qual a cada objecte de la col · lecció a quantificar se li assigna un altre objecte o una marca. Les marques, o la seua posterior substitució per símbols escrits, feien innecessari el recurs a objectes físics per a la representació del nombre, la qual cosa va constituir un avanç significatiu. Aquests primers sistemes de numeració de la humanitat es classifiquen com a *sistemes de representació simple*.



Figura 2.1. Els ossos d'Ishango (esquerra) i troballes de pedres (*calculus* en llatí) per a calcular (dreta)

Activitat 2.2

Coneixeu alguna situació en la qual, avui dia, usem un sistema de representació simple. Reflexiona sobre els avantatges i les limitacions d'aquests sistemes de numeració.

Activitat 2.3

Quin nombre es representa a continuació?

I I I I I

Activitat 2.4

Quin nombre es representa a continuació?

I I I I I I I I I I I I I I I I I I I I I I I I I I I

- ▲ 22
- ◆ 25
- ● 27
- ■ 26

La comparació de les activitats 2.3 i 2.4 posa de manifest la dificultat per a representar i llegir nombres grans mitjançant els sistemes de representació simple. Aquesta limitació pot reduir-se mitjançant l'agrupació. Així, els homes primitius feien agrupaments de cinc en cinc, probablement familiaritzats amb els quíntuples per l'observació de mans i peus (Merzbach i Boyer, 1991). En el marc del recurs a l'agrupament, una opció per a facilitar la lectura seria fer visibles els "paquets", per exemple, mitjançant una diferent organització espacial dels símbols, que recree l'agrupament, o amb un ratllat (Gómez, 1988, Activitat 2.5). A continuació, es mostra la representació del nombre de l'Activitat 2.4 amb totes dues opcions:

IIIII IIIII IIIII IIIII IIIII II
~~IIIII~~ ~~IIIII~~ ~~IIIII~~ ~~IIIII~~ ~~IIIII~~ II

Activitat 2.5

La platja de Hanakapiai, a Hawaii, es troba entre les més perilloses del món. Un cartell informatiu alerta del risc d'ofegament (Figura 2.2, activitat basada en Arnau, 2017).



Figura 2.2. Cartell informatiu a la platja de Hanakapiai (Hawaii)

Assenyaleu la base de l'agrupament que s'usa en el cartell. Té algun avantatge aquest sistema de numeració respecte al nostre sistema de numeració decimal?

Solució en pàg. 375

Si bé l'opció de ratllar facilita en certa manera la lectura, l'escriptura de nombres grans continua sent laboriosa. Aquestes restriccions fan aconsellable la utilització de nous símbols. Per exemple, en la situació anterior, podríem emprar el símbol **V** per a representar cada paquet (**V** = ~~IIIII~~). D'aquesta manera, parlaríem d'un *sistema d'agrupament simple*, caracteritzat per l'elecció d'una base per a l'agrupament (5 en el cas de l'exemple), de tal manera que s'empren dos símbols, un per a les unitats (**I**) i un altre per als grups (~~IIIII~~ o **V**). Així, el nombre de l'exemple anterior passaria a representar-se com a

V V V V II

Aquest sistema, com el de representació simple, té una *naturalesa additiva*, és a dir, el valor del nombre es determina per l'addició dels valors individuals dels símbols. En qualsevol cas, quan s'intenten representar nombres relativament grans, tornen a emergir les mateixes limitacions que caracteritzaven el sistema de representació simple (Activitat 2.6).

Activitat 2.6

Quina de les representacions següents expressa el nombre 104?

(a) **V V V V V V V V V V V V V V V V V V V V I I I I**

(b) **V V V V V V V V V V V V V V V V V V V V V I I I I**

(c) **V V V V V V V V V V V V V V V V V V V V V V I I I I**

(d) **V V V V V V V V V V V V V V V V V V V V V I I I**

▲ a)

◆ b)

● c)

■ d)

Per a pal · liar les mancances del sistema d'agrupació simple, és possible aplicar la mateixa solució que va originar el trànsit des de la representació simple a l'agrupació simple. En conseqüència, caldran nous símbols. Així, per exemple, podria emprar-se el símbol **N** per a representar **V V V V V**, **W** per a representar **N N N N N** i així, successivament, s'encunyarien nous símbols segons requerira la grandària dels nombres que es designen. La quantitat a què fem referència en el text passaria a ser:

N II

Aquest procés condueix a l'aparició dels *sistemes d'agrupament múltiple*, també de caràcter additiu. Aquests sistemes es caracteritzen per tenir un símbol per cadascuna de les *potències de la base* (Figura 2.3). En realitat, com s'indicava anteriorment, no es limita el nombre de diferents símbols, sinó les vegades que es repeteix un mateix símbol. Així, en la representació d'un nombre, un mateix símbol apareixerà com a màxim tantes vegades com *la base menys un*.

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{V} = \mathbf{I\ I\ I\ I\ I} &= 5 \\ \mathbf{N} = \mathbf{V\ V\ V\ V\ V} &= 5^2 \\ \mathbf{W} = \mathbf{N\ N\ N\ N\ N} &= 5^3 \\ \dots & \end{aligned}\right\}$$

Figura 2.3. Potències de la base en el sistema d'agrupament múltiple

Sistemes additius

En els **sistemes additius** els nombres es representen mitjançant una col · lecció de signes bàsics. La suma dels nombres que representen els signes donarà com a resultat el nombre representat pel conjunt de símbols. Segons els agrupaments, podem trobar:

- **De representació simple:** IIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIII
- **D'agrupació simple:** es caracteritza per l'elecció d'una base d'agrupament i per la presència d'un símbol que assenyala l'agrupament.

$$\mathbf{IIIII} = \cancel{\mathbf{IIIII}} = \mathbf{V} \qquad \left.\begin{matrix} \text{IIIII} & \text{IIIII} & \text{IIIII} & \text{IIIII} & \text{IIIII} & \text{II} \\ \cancel{\text{IIIII}} & \cancel{\text{IIIII}} & \cancel{\text{IIIII}} & \cancel{\text{IIIII}} & \cancel{\text{IIIII}} & \text{II} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \mathbf{V\ V\ V\ V\ II}$$

- **D'agrupació múltiple:** es caracteritza per tenir agrupaments recursius, normalment en potències de la base principal de l'agrupament.

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{I\ I\ I\ I\ I} &= \mathbf{V} \\ \mathbf{V\ V\ V\ V\ V} &= \mathbf{N} \\ \mathbf{N\ N\ N\ N\ N} &= \mathbf{W} \\ \dots & \end{aligned}} \qquad \mathbf{V\ V\ V\ V\ V\ II} \Longrightarrow \mathbf{N\ II}$$

Activitat 2.7

Crea el teu propi sistema d'agrupament múltiple de base 3. Representa-hi la quantitat *tretze*.

Solució en pàg. 375

Activitat 2.8

Quin nombre es representa a continuació?

I V W V N V N W I

- ▲ 319
- ◆ 331
- ● 332
- ■ 317

Activitat 2.9

Calcula:

W N W I I V I + W N I W N I I N N V V V V I

L'Activitat 2.8 permet apreciar que els sistemes d'agrupació múltiple presenten, especialment amb nombres grans, limitacions similars a les que presenten els sistemes d'agrupació simple. A més, el tipus de notació usada no resulta potent des del punt de vista del càlcul, com es veu en l'Activitat 2.9).

Activitat 2.10

A continuació es mostren els símbols emprats pel sistema de numeració egipci i el seu valor expressat en el sistema indoaràbic.

$1 =$, $10 =$, $100 =$, $1000 =$, $10\,000 =$, $100\,000 =$, $1\,000\,000 =$

1. A quin tipus de sistema de numeració es correspon?
2. Quina és la base de l'agrupament?
3. Quina quantitat representa el 

Solució en pàg. 376

2.1.2 Sistemes multiplicatius

Potser a causa de l'escàs potencial dels sistemes additius per al càlcul, van aparèixer nous sistemes amb el criteri d'evitar la repetició (limitada) de símbols en els sistemes d'agrupació múltiple. Van nàixer així els *sistemes multiplicatius*, els quals empren dues classes de símbols: uns per a les potències de les bases i altres per als multiplicadors (Gómez, 1988).

Sistemes multiplicatius

Els **sistemes multiplicatius** es caracteritzarien per la substitució total o parcial de la repetició de signes iguals.

Segons Gómez (1988), un exemple d'aquesta mena de sistemes seria el nostre *sistema de numeració oral* per a nombres construïts per generació algorítmica. En alguns casos la deformació de les paraules pel seu ús oculta aquest caràcter multiplicador, però en altres casos és evident (per exemple, el tres mil quatre-cents). Com ja hem comentat, en aquests sistemes s'observen dos tipus de signes: els que representen a la potència de la base (mil o cent en l'exemple anterior) i els que representen els multiplicadors (tres i quatre en l'exemple anterior).

Activitat 2.11

Escriu en el nostre sistema de numeració oral els nombres 53 i 102. De quina manera es representa l'absència de xifra en les desenes en el 102? Comenta amb els teus companys quina repercussió tindrà aquest fet des d'un punt de vista didàctic.

Solució en pàg. 376

Exemple 2.2

Continuem amb l'exemple que s'ha estat usant per a descriure els sistemes additius. Així, continuarem usant la codificació mostrada en la Figura 2.3. D'aquesta manera, el nombre mostrat en l'Activitat 2.8 podria ser reescrit fent ús de multiplicadors. Aquests multiplicadors podrien codificar-se (per exemple) usant tantes ratlles horitzontals sobre la potència de la base com a repeticions d'aquesta potència (sempre fins a arribar, com a màxim a l'agrupament, cinc). La representació d'aquesta quantitat en un sistema multiplicador seria

$$\mathbf{I\ V\ W\ V\ N\ V\ N\ W\ I} \Longrightarrow \begin{matrix}\mathbf{V\ V\ V}\\ \mathbf{N\ N}\\ \mathbf{I\ I}\\ \mathbf{W\ W}\end{matrix} \Longrightarrow \overline{\overline{\overline{\mathbf{V}}}}\ \ \overline{\overline{\mathbf{N}}}\ \ \overline{\overline{\mathbf{W}}}\ \ \mathbf{II}$$

Activitat 2.12

Calcula:

$$\overline{\overline{\overline{\mathbf{V}}}}\ \ \overline{\overline{\mathbf{N}}}\ \ \overline{\overline{\mathbf{W}}}\ \ \mathbf{II} + \overline{\overline{\overline{\mathbf{W}}}}\ \ \overline{\overline{\mathbf{V}}}\ \ \mathbf{IIII}$$

Quines diferències trobes respecte a l'Activitat 2.9 a l'hora d'efectuar el càlcul?

2.1.3 Sistemes posicionals

Sistemes posicionals

L'evolució d'un sistema multiplicador cap a un **sistema posicional** necessita:

i) Establir un ordre en l'escriptura dels símbols que representen les potències de la base.

ii) Eliminar els símbols de la potència de la base i dotar els multiplicadors de sentit segons la posició que ocupen.

iii) Introduir un símbol (el zero) per a assenyalar l'absència de multiplicadors en una determinada posició.

Exemple 2.3

Continuant amb l'Exemple 2.2, podríem desglossar els passos cap a la construcció d'un sistema posicional de la següent manera:

i) Establim un ordre en l'escriptura dels símbols de les potències de la base. Podem convenir, per exemple, escriure sempre les potències de la base de major a menor. Així, les potències més altes anirien a l'esquerra, i a la dreta quedarien les unitats.

$$\overline{\overline{\mathbf{V}}}\ \overline{\mathbf{N}}\ \overline{\mathbf{W}}\ \mathbf{II} \Longrightarrow \overline{\mathbf{W}}\ \overline{\mathbf{N}}\ \overline{\overline{\mathbf{V}}}\ \mathbf{II}$$

ii) El criteri d'ordre fa que no necessitem repetir sempre l'escriptura de les potències de la base, perquè les mateixes posicions ens indiquen sobre quina potència actua el multiplicador. Amb això, la posició que ocupa el multiplicador pren sentit, i facilita l'escriptura encara més.

$$\overline{\mathbf{W}}\ \overline{\mathbf{N}}\ \overline{\overline{\mathbf{V}}}\ \mathbf{II} \Longrightarrow =\ =\ \equiv\ \mathbf{II}$$

iii) Finalment, cal introduir un símbol per a indicar l'absència de multiplicadors en una determinada potència de la base, perquè pot ser que no n'hi haja prou amb "deixar un espai" per a indicar un salt d'un ordre de magnitud. La creació d'aquest símbol (que indica l'absència de multiplicador) soluciona el problema. En aquest cas, partim d'una representació d'una altra quantitat, per exemple: **W W V V V III**

$$\overline{\mathbf{W}}\quad \overline{\overline{\mathbf{V}}}\ \mathbf{III} \Longrightarrow =\ \mathbf{0}\ \equiv\ \mathbf{III}$$

Activitat 2.13

A continuació tens una operació de suma amb el sistema posicional desenvolupat en l'Exemple 2.3:

𝍠 **0** 𝍡 **III** + — 𝍠 𝍡 **IIII**

Quines diferències trobes respecte a les activitats 2.9 i 2.12 quan efectues el càlcul?

Com recull González-Calero (2019), el sistema babiloni va ser el primer sistema posicional conegut en la història de la humanitat. Inicialment mancava d'un símbol específic per a indicar l'absència d'un ordre de magnitud. Els escribes babilonis, segurament conscients de l'ambigüitat que aquest fet causava, a vegades deixaven un espai per a fer patent el salt d'un ordre de magnitud. No obstant això, aquesta solució es va mostrar insuficient per la dificultat d'apreciar quan es concatenava l'absència de dos o més ordres de magnitud consecutives, o simplement perquè no era estrany que els escribes oblidaren espaiar amb claredat els dígits (Ifrah, 1997). En síntesi, calia un altre procediment per a indicar l'absència d'un ordre de magnitud. Es desconeix amb certesa en quin moment els babilonis van ser capaços de desenvolupar el primer "zero", probablement al voltant del quart segle abans de Crist. En realitat, seria més correcte parlar d'un marcador de posició en comptes d'un zero tal com hui en dia ho concebem, ja que els babilonis no atribuïen a aquest símbol el significat de nombre cardinal i restringien el seu ús a un sentit posicional. La civilització maia, independentment, va ser igualment capaç d'introduir aquest avanç d'enorme importància per a la humanitat.

Activitat 2.14

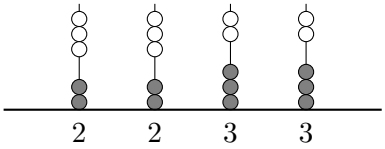
Com representaries la quantitat *tretze* que has obtingut en l'Activitat 2.7 (□ ∘ **I**) en un sistema posicional com el següent:

Grups de grups de 3 (□)	**Grups de 3** (∘)	**I**

Solució en pàg. 376

Exemple 2.4

Fixa't en el sistema de representació mostrat en l'Exemple 2.3. És important que t'adones que el sistema de representació que hem fet servir té moltes similituds amb un àbac... De fet, més aviat l'origen de l'àbac ha d'haver tingut relació amb aquesta forma de representar quantitats. Així, una vegada establit un ordre de representació associat a les posicions de les grafies en un sistema de numeració posicional, tenim que la quantitat 𝍠 𝍠 𝍡 **III** s'escriuria com a

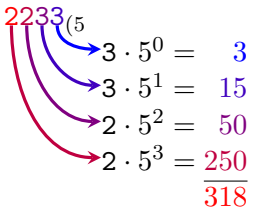


Grups de grups de grups de 5 (5^3)	**Grups de grups de 5** (5^2)	**Grups de 5** (5^1)	**Unitats** (5^0)
2	2	3	3

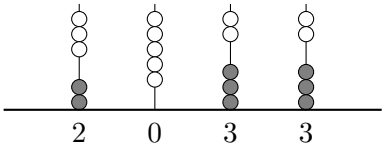
És a dir, per a obtenir la quantitat que representa faríem

$$\begin{aligned}\mathbf{2233} &= \mathbf{2}\times 5^3+\mathbf{2}\times 5^2+\mathbf{3}\times 5^1+\mathbf{3}\times 1=\\ &=\mathbf{2}\times 125+\mathbf{2}\times 25+\mathbf{3}\times 5+\mathbf{3}\times 1=\\ &=\mathbf{250}+\mathbf{50}+\mathbf{15}+\mathbf{3}=318\end{aligned}$$

Així, les xifres actuen com a multiplicadors de les potències de la base

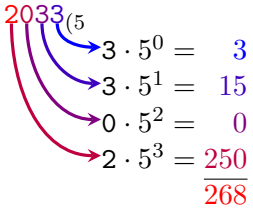


D'igual manera, la quantitat $=$ **0** $\equiv$ **III** es representaria com a



És a dir:

$$\begin{aligned}\mathbf{2033} &= \mathbf{2}\times 5^3+\mathbf{0}\times 5^2+\mathbf{3}\times 5^1+\mathbf{3}\times 1=\\ &=\mathbf{2}\times 125+\mathbf{0}\times 25+\mathbf{3}\times 5+\mathbf{3}\times 1=\\ &=\mathbf{250}+\mathbf{0}+\mathbf{15}+\mathbf{3}=268\end{aligned}$$



A partir d'ara, en lloc de fer ús de les grafies en forma de ratlles horitzontals usarem grafies per a fer referència a les quantitats. Així, $— \Rightarrow 1$, $= \Rightarrow 2$, etc. per a facilitar les representacions. D'aquesta manera, cal que us adoneu que el sistema de base 5 que hem fet servir en els exemples compleix les següents característiques:

- Conjunt de xifres usades: $\{0,1,2,3,4\}$.
- Cada posició indica que la xifra ha d'anar multiplicada per una potència de la base (5^n)

Pareu atenció al fet que, en els sistemes posicionals en cada base d'agrupament n farem servir com a màxim $n-1$ xifres per a cada posició, ja que en arribar a n s'aplicarà la regla d'agrupament.

És per això que en la base 5 el conjunt de xifres usades és $\{0,1,2,3,4\}$, perquè mai podrem arribar a 5, ja que llavors caldrà fer un grup d'ordre superior. D'igual manera, en el nostre sistema decimal fem ús de 10 xifres ($\{0,1,2,\ldots,9\}$), com ara veurem.

2.2. El sistema de numeració decimal

El sistema de numeració escrit que usem per a representar quantitats l'anomenem **sistema de numeració decimal**, i podem definir-lo a partir de les següents propietats:

El sistema de numeració decimal (SND)

Anomenem **sistema de numeració decimal (SND)** el sistema posicional regular de base 10 del qual fem ús per a la representació i escriptura de quantitats en l'actualitat. Els símbols que es defineixen són: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 i 9, als quals anomenarem *xifres*. Aquest sistema es caracteritza per:

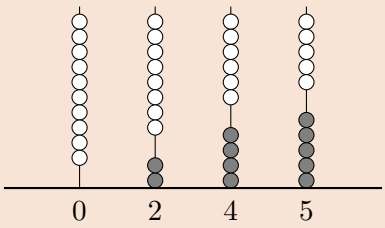
a) **Ser posicional**: Cada xifra té un valor absolut que difereix segons la posició que ocupa en el nombre.

b) **Tindre base decimal**: La base sobre la qual es treballa és el nombre 10. En aquest sentit, la desena representa la unitat de segon ordre del sistema.

c) **Ser multiplicatiu**: En el sistema de numeració decimal es defineixen símbols per a la unitat (1), la base (10), les potències de la base (10^n) i per a tots els nombres compresos entre la unitat i la base (2,...,9).

La quantitat a representar s'obté multiplicant cada potència de la base pel valor del símbol que el precedeix i sumant els resultats juntament amb les unitats:

$$\begin{aligned} \mathbf{245} &= \mathbf{2}\times 10^2 + \mathbf{4}\times 10^1 + \mathbf{5}\times 10^0 = \\ &= \mathbf{2}\times 100 + \mathbf{4}\times 10 + \mathbf{5}\times 1 \end{aligned}$$



Cal fer notar que, per construcció, tant en els sistemes posicionals que hem anat presentant com en el nostre SND, no cal expressar els zeros a l'esquerra en la quantitat representada. Això és així perquè l'ordre s'ha establit de la dreta a l'esquerra: col · locant a la dreta les unitats i afegint a l'esquerra les potències de la base en ordre creixent.

Així, convé que tinguem clar que el SND té les següents propietats:

1. **Valor de posició:** les unitats d'ordre superior es representen per posicions ordenades (ascendent de dreta a esquerra):

Grups de grups de 10 ($10^2 = 100$)	**Grups de 10** ($10^1 = 10$)	**Unitats** ($10^0 = 1$)

2. **Valor relatiu:** cada xifra té un valor que depèn de la posició que ocupe. Així, per exemple, la xifra "2" té significats diferents segons la posició que ocupa en el nombre 222.

3. **Valor del nombre:** l'obtenim amb suma dels productes de les xifres pel valor de posició que té. És a dir:

$$\begin{aligned}\mathbf{222} &= \mathbf{2} \times 10^2 + \mathbf{2} \times 10^1 + \mathbf{2} \times 10^0 = \mathbf{2} \times 100 + \mathbf{2} \times 10 + \mathbf{2} \times 1 = \\ &= \mathbf{200} + \mathbf{20} + \mathbf{2}\end{aligned}$$

2.2.1 Altres bases antropomòrfiques com a origen d'altres sistemes de numeració

Com indiquen Cid, Godino, i Batanero (2003), es creu que la major part dels sistemes de numeració tenen origen en uns altres més primitius basats en l'ús de diferents parts del cos humà com a objectes numèrics. Les bases més utilitzades: 5, 10, 12, 20, 60 poden explicar-se com un intent d'augmentar la capacitat comptable dels dits.

a) **Base cinc**: Si usem els dits de la mà dreta per a comptar unitats fins a cinc i per cada cinc unitats alcem un dit de la mà esquerra serem en un sistema de numeració de base cinc. Cada cinc unitats donen lloc a una unitat d'ordre superior, els dits de la mà esquerra, i tota la mà esquerra representarà una unitat de segon ordre composta de 25 unitats.

b) **Base deu**: Apareix en usar els dits de les dues mans per a comptar unitats. Una persona representaria una unitat d'ordre superior, la desena.

c) **Base vint**: Apareix en usar els dits de les dues mans i dels dos peus per a comptar unitats. Una persona representaria la unitat d'ordre superior que en aquest cas seria una vintena.

d) **Base dotze**: S'explica si s'usa el dit polze de la mà dreta per a comptar les falanges dels altres dits de la mateixa mà. Tenim així dotze falanges a la mà dreta. Si a més per cada dotze unitats assenyalem una falange de la mà esquerra, tindrem una unitat de primer ordre, la dotzena, i les dues mans representaran una unitat de segon ordre ($144 = 12^2$).

e) **Base seixanta**: Apareix com una combinació de cinc i dotze si comptem falanges amb la mà dreta i per cada dotzena alcem un dit de la mà esquerra. Les dues mans representen llavors una "seixantena".

Exemple 2.5

Com ja hem vist en l'Activitat 2.10, el sistema de numeració egipci feia ús de la base 10, encara que el sistema era d'agrupament múltiple.

$10^0 = 1 =$, $10^1 =$  , $10^2 =$, $10^3 =$  , $10^4 =$, $10^5 =$  , $10^6 =$ 

Exemple 2.6

Els babilonis usaven un sistema sexagesimal posicional adaptat, copiat dels sumeris i també de la civilització d'Acàdia. Els nombres babilònics s'escrivien en cuneïforme, usant una agulla de làmina inclinada per a fer marques en unes taules de terrissa tova que després exposaven al sol per a endurir-les i que quedaren permanentment (Figura 2.4).

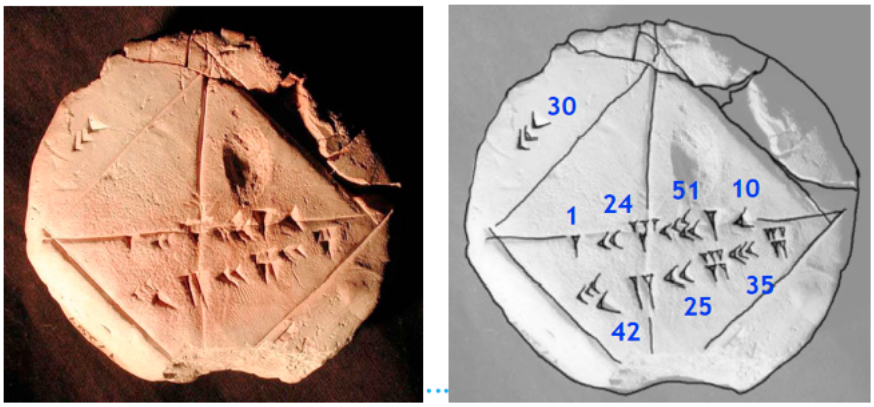


Figura 2.4. Sistema de numeració babilònic en el qual s'usava en part un criteri posicional

Som davant un sistema posicional de base 60 mixt. En una posició els signes indiquen quantes unitats o diferents potències de la base té el nombre mitjançant l'ús d'un sistema additiu de base 10. Aquest sistema tenia molts inconvenients perquè la barreja d'un sistema posicional amb un d'additiu, la falta d'un zero i l'absència d'una caixa numèrica que assenyalara la posició creava moltes ambigüitats en l'escriptura cuneïforme dels nombres.

Exemple 2.7

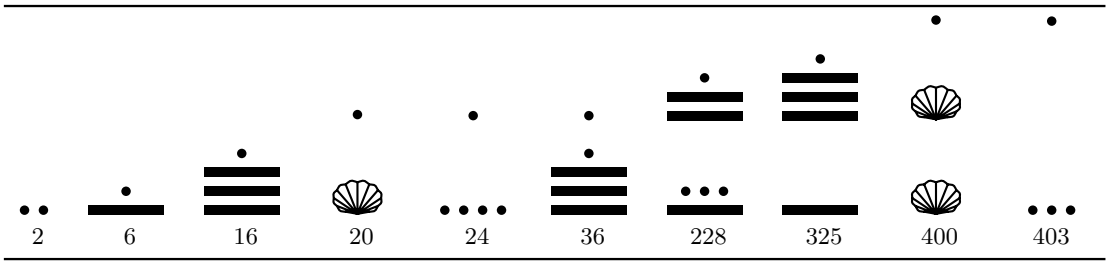
El sistema de numeració emprat pels maies (Mèxic, 300-900 dC) és un sistema posicional vertical amb dues bases d'agrupament 5 i 20. Empra un símbol per al zero ( ) i disposa només de tres numerals:



El símbol de la quantitat *vint*:

•

il · lustra l'ús del valor posicional dels numerals, ja que el "punt" (•) a una posició superior representa un "vint" i el zero ( ) representa zero "unitats". A continuació tenim alguns exemples:



La secció inferior de cada representació gràfica indica el nombre d'uns, la segona secció representa el nombre de *vintenes* (20^1), la tercera secció representa el nombre de grups de vint *vintenes* (20^2)[a].

[a] Fem notar que ací hem fet servir una petita modificació del sistema original maia, amb fins didàctics.

Activitat 2.15

Expressa les següents quantitats en el sistema de numeració maia:

7	12	28	56	122	135	156	466	1200	1256

Solució en pàg. 376

2.3. Models manipulatius per a la comprensió de sistemes posicionals xifrats no decimals

Com hem vist, el nostre sistema d'escriptura es basa a agrupar de deu en deu. Per a entendre millor les característiques del nostre sistema i per a experimentar algunes de les dificultats que tenen els xiquets i les xiquetes quan aprenen el sistema de numeració escrit, és instructiu fer ús de sistemes de numeració xifrats no decimals, com els que hem vist en la introducció històrica.

Per a fer aquesta aproximació comprensiva, farem ús de materials manipulatius. Van de Walle, Karp, i Bay-William (2016) subratlla el potencial dels models manipulatius, com els blocs de Dienes (també anomenats blocs multibase, Figura 2.5a) o els àbacs (Figura 2.5b), com a facilitadors de l'equivalència entre la desena i el conjunt de deu unitats. Com ara estudiarem, les característiques físiques d'aquests materials manipulatius emfatitzen la idea de valor relatiu de cada dígit en un sistema posicional i donen sentit a l'acció de portar o d'amprar dels algoritmes de la suma i resta (Fuson, 1990).

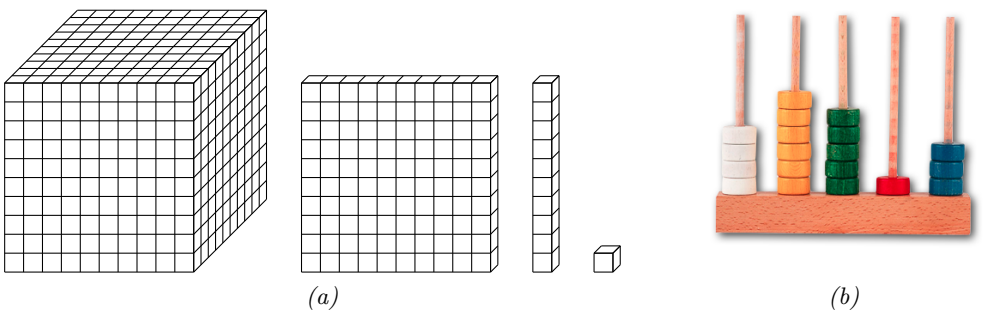
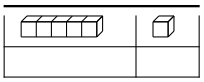
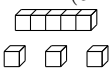
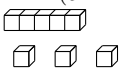


Figura 2.5. Blocs de Dienes de base 10 (esquerra) i àbac de varetes (dreta)

Exemple 2.8

Ara farem ús dels *blocs de Dienes* o *blocs multibase* en base 5 per a escriure els primers numerals. Fixeu-vos com la representació (en unitats) correspon a les quantitats en base 10, però per a escriure fem servir les agrupacions que s'han creat amb la regla *agrupar de 5 en 5*. Així, l'escriptura dels nombres en base 5 respon a omplir la graella següent una vegada tenim les agrupacions fetes:



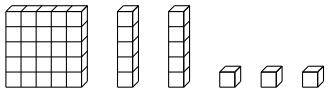
$1_{(5}$ 	$2_{(5}$ 	$3_{(5}$ 	$4_{(5}$ 	$10_{(5}$ 
$11_{(5}$ 	$12_{(5}$ 	$13_{(5}$ 	$14_{(5}$ 	$20_{(5}$ 

Activitat 2.16

Feu servir l'àbac per a representar els deu primers numerals que hem fet servir en l'Exemple 2.8.

Activitat 2.17

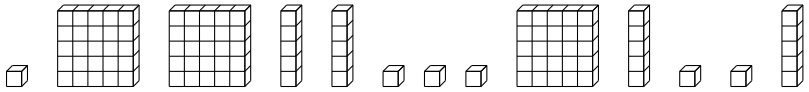
A quina quantitat correspon el nombre $123_{(5}$? Feu ús de la representació en blocs multibase per a esbrinar-ho.



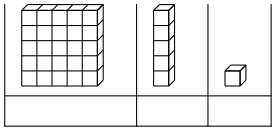
Solució en pàg. 377

Activitat 2.18

Donada la següent quantitat de blocs multibase de base 5:



a) Com representaríem correctament aquesta quantitat en base 5? Feu servir aquesta distribució:



b) A quina quantitat correspon (en base 10)?

Solució en pàg. 377

2.3.1 Models manipulatius per a entendre els algoritmes estàndard de la suma i la resta

En l'Activitat 2.18 ja ha aparegut un fet molt important a l'hora de comprendre i donar sentit a alguns mecanismes que ocorren en fer ús dels algoritmes estàndard, ens referim a l'*acció de portar o d'amprar*. Com hem vist en l'activitat, el fet d'agrupar d'acord amb la base d'agrupament del sistema ha donat pas a la creació de noves unitats d'ordre superior. Aprofundirem un poc en el paper dels materials manipulatius en la comprensió d'aquestes accions (que molt sovint es transformen en mecàniques).

2.3.2 Algoritme estàndard per a la suma

A continuació, indiquem l'algoritme de la suma portant (en base 10) perquè el recordem:

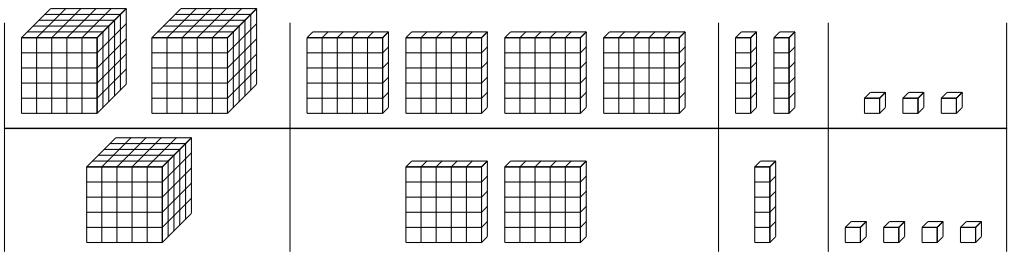
Algoritme estàndard de la suma portant

$$\begin{array}{rr} & 76 \\ + & 47 \\ \hline & \end{array} \qquad \begin{array}{rr} & 76 \\ + & 47 \\ \hline & 13 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} & 1 \\ & 76 \\ + & 47 \\ \hline & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} & \not{1} \\ & 76 \\ + & 47 \\ \hline & 123 \end{array}$$

Figura 2.6. Algoritme estàndard de la suma portant

Activitat 2.19

Fent ús dels blocs multibase de base 5 efectueu la següent operació: $2423_{(5} + 1214_{(5}$ de manera directa. Per a fer-ho, representeu els nombres amb els blocs[a], com teniu a continuació i useu l'algoritme estàndard de la suma (per columnes) per a calcular el resultat. Fixeu-vos i indiqueu en quin o quins moments apareix (i com es resol) l'acció de *portar una* i expliqueu què significa.



Solució en pàg. 377

[a] Pots fer ús de la web: https://mathsbot.com/manipulatives/blocks.

Activitat 2.20

Representeu gràficament amb bloc multibase de base 4 les quantitats $203_{(4}$ i $322_{(4}$ i calculeu de manera directa la suma amb l'algoritme per columnes fent els canvis necessaris.

2.3.3 Algoritmes estàndard per a la resta

El cas de la resta requereix una major reflexió perquè hi ha dos algoritmes estàndard: *amprar*[1]i *demanar i pagar*, que expliquem a continuació. L'algoritme *amprar* (Figura 2.7) és el predominant en l'actualitat en la majoria de països (Ross i Pratt-Cotter, 1999).

Algoritme estàndard per a la resta *amprar*

$$\begin{array}{rrrr} & & 1 & 13 \\ & 6 & 2 & 3 \\ - & 1 & 1 & 7 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{rrrr} & 6 & \not{2} & \not{3} \\ - & 1 & 1 & 7 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{rrrr} & & 1 & 13 \\ & 6 & \not{2} & \not{3} \\ - & 1 & 1 & 7 \\ \hline & 5 & 0 & 6 \end{array}$$

Figura 2.7. Algoritme d'*amprar*

De manera informal, es podria explicar dient que les unitats del minuend han demanat reforços a les desenes del minuend. És a dir es fa el procés de la portada de la suma, però en sentit contrari. En lloc d'agrupar en unitats d'ordre superior, es descompon en unitats d'ordre immediatament inferior. Convé assenyalar que en aquest procés el subtrahend no participa.

Algoritme estàndard per a la resta *demanar i pagar*

$$\begin{array}{rrrr} & 6 & 2 & 3 \\ - & 1 & 1 & 7 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{rrrr} & 6 & 2 & 3 \quad +10 \\ - & 1 & 1 & 7 \quad +10 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{rrrr} & 6 & 2 & \mathbf{13} \\ - & 1 & \mathbf{2} & 7 \\ \hline & 5 & 0 & 6 \end{array}$$

Figura 2.8. Algoritme de *demanar i pagar*

La idea de compensació entre minuend i subtrahend resulta més complexa que la de "demanar reforços" a l'ordre de magnitud superior. L'algoritme per compensació de la Figura 2.8 (*demanar i pagar*) exigeix comprendre que:

1. Quan s'afig un mateix valor a minuend i subtrahend el resultat de la resta no varia

$$65 - 17 = (65 + 10) - (17 + 10) = 75 - 27$$

2. El valor afegit a minuend i subtrahend s'aplica a diferents ordres de magnitud.

Activitat 2.21

Expliqueu amb blocs multibase (de base 10) com funciona l'algoritme emprat per a resoldre $984 - 368$ en cada cas i identifiqueu la nomenclatura utilitzada (Figura 2.9).

[1]Sinònim *manllevar*, *pedir prestado* en castellà.

$$\begin{array}{r} 9\ 8\ {}^{1}4 \\ -\ 3\ 6^{1}\ 8 \\ \hline 6\ 1\ 6 \end{array}$$

(a)

$$\begin{array}{r} \phantom{9\ 8\ {}^{1}}7 \\ 9\ \not{8}^{1}4 \\ -\ 3\ 6\ 8 \\ \hline 6\ 1\ 6 \end{array}$$

(b)

Figura 2.9. Dos algoritmes per a la resta

Activitat 2.22

Useu l'algoritme *amprar* i els blocs multibase de base 10 per a fer l'operació $403 - 138$ i indiqueu les dificultats que trobeu i com les solucioneu.

Solució en pàg. 378

Des d'un punt de vista didàctic, l'algoritme de *demanar i pagar* ofereix uns certs avantatges (Fiori i Zuccheri, 2005):

i) Es basa en l'addició més que en les subtraccions, la qual cosa fa que l'algoritme siga més senzill d'aplicar

ii) S'elimina la dificultat d'amprar quan hi ha zeros en els dígits a l'esquerra en el minuend, cas que constitueix una de les principals fonts d'error en la resta.

iii) En cada pas, el nombre d'operacions i opcions és comparativament menor, i això es tradueix en el fet que siga un algoritme fàcil d'aplicar i recordar.

Malgrat aquests avantatges, els mateixos autors subratllen que, des del punt de vista del significat de l'operació, l'algoritme *demanar i pagar* és menys apropiat que el d'*amprar*, perquè no es fonamenta exclusivament en la comprensió de la idea de valor posicional. En aquest sentit, l'ús de material manipulatiu facilita especialment donar sentit a cada un dels passos de l'algoritme *amprar* (per exemple, Reys, Lindquist, Lambdin, i Smith, 2008).

Activitat 2.23

Feu l'operació $312_{(5} - 143_{(5}$ representant els nombres amb els blocs multibase de base 5 fent ús de l'algoritme *amprar*.

Activitat 2.24

Completeu els forats perquè les següents operacions siguen correctes:

$$\begin{array}{r} 5\square\,\mathrm{A}\ 6\square_{(12} \\ +\square\ 2\square\ 3\,\mathrm{B}_{(12} \\ \hline 1\ 3\ 0\ 4\square\ 1_{(12} \end{array}$$

(a)

$$\begin{array}{r} 2\ 3\square 5\square_{(7} \\ +1\square\ 6\,4\ 2_{(7} \\ \hline 4\ 2\ 4\,2\ 3_{(7} \end{array}$$

(b)

Solució en pàg. 378

2.4. Canvis de base entre sistemes de numeració xifrats posicionals

En el que segueix farem ús exclusiu de sistemes de numeració posicionals xifrats (que fan ús de xifres). També farem ús de la següent propietat:

Expressió polinòmica única d'un nombre en un sistema de numeració posicional xifrat

Donada una base $B \in \mathbb{N}$, tota quantitat n pot ser expressada de manera única mitjançant un polinomi de la forma:

$$n = c \times B^k + r_{k-1} \times B^{k-1} + \ldots + r_2 \times B^2 + r_1 \times B^1 + r_0$$

On, $r_0, r_1, r_2, \ldots, r_{k-1}, c$ són nombres naturals menors que B.

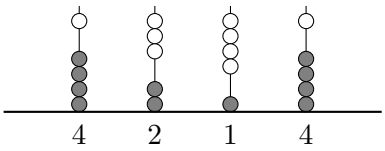
Exemple 2.9

Fixeu-vos que la propietat anterior no diu res que no hàgem presentat ja. De fet, la propietat ja ha sigut explicada en l'Exemple 2.4 on fèiem el símil amb l'àbac. D'aquesta manera, si agafem $B = 5$, queda clar que qualsevol quantitat n podrà ser representada fent ús de les xifres $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ que actuaran com a multiplicadors de les potències de la base $5, 5^1, 5^2, 5^3, \ldots$. És a dir, qualsevol nombre n es podrà escriure en el *sistema posicional xifrat de base 5* com a

$$n = c \times 5^k + r_{k-1} \times 5^{r-1} + \ldots + r_2 \times 5^2 + r_1 \times 5^1 + r_0$$

On, $r_0, r_1, r_2, \ldots, r_{k-1}, c$ seran tots nombres naturals menors que 5, perquè és la base de l'agrupament.

De fet, els nombres $r_0, r_1, r_2, \ldots, r_{k-1}, c$ són els que apareixeran representats amb *xifres* de 0 a 4 en la representació del nombre (els que apareixen en la representació de l'àbac també). Per exemple, la quantitat $4214_{(5}$ està indicant:



$$\begin{aligned} \mathbf{4214}_{(5} &= \mathbf{4} \times 5^3 + \mathbf{2} \times 5^2 + \mathbf{1} \times 5^1 + \mathbf{4} \times 1 = \\ &= \mathbf{4} \times 125 + \mathbf{2} \times 25 + \mathbf{1} \times 5 + \mathbf{4} \times 1 = \\ &= \mathbf{500} + \mathbf{50} + \mathbf{5} + \mathbf{4} = 559 \end{aligned}$$

! És convenient notar que mentre que és possible la lectura del nombre 2305 en el sistema decimal de numeració oral, *dos mil tres-cents cinc*, no és possible una lectura semblant per al nombre $2305_{(7}$, que fent-la donaria lloc a un error de lectura. Caldria, doncs, inventar les paraules per als diferents agrupaments per a poder-ho fer.

Per a comprendre les regles dels sistemes de numeració posicionals xifrats ordenats, entre els quals es troba el SND habitualment usat, és convenient realitzar i analitzar les tasques de

canvi del sistema de numeració base 10 a altres bases diferents, tant menors que 10 com majors, i viceversa.

2.4.1 Canvi de l'escriptura d'un nombre en base 10 a base b

Conceptualment, el problema de canviar una quantitat de base 10 a base b demana un canvi en l'agrupament múltiple. És a dir, en la pràctica, consideraríem el conjunt d'unitats i les tornaríem a agrupar fent agrupaments successius de b en b.

Exemple 2.10

A continuació tenim com faríem per a expressar el nombre $15_{(10}$ en base 6. Primerament, presentaríem les unitats, i posteriorment faríem grups de 6 per a obtenir els agrupaments de primer ordre (Figura 2.10). Repetiríem altra volta el procés agrupant els grups de 6 en 6, però en aquest cas ja no n'hi ha més.

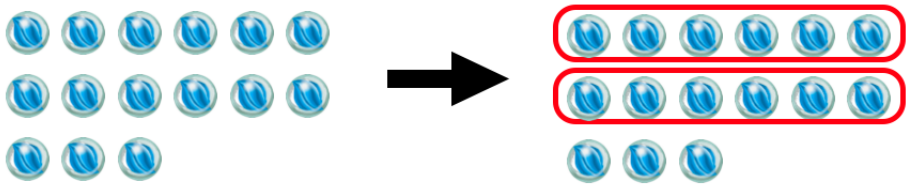


Figura 2.10. Agrupem la quantitat *quinze* en grups de 6

Si fem la divisió:

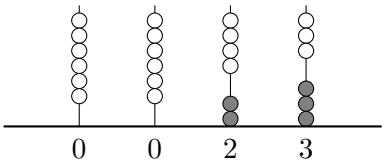
$$\begin{array}{r|l} 15 & 6 \\ \cline{2-2} -12 & 2 \\ \cline{1-1} 3 & \end{array}$$

Obtenim 2 grups de 6 i ens sobren 3 unitats.

Així, podríem escriure que $15_{(10} = 23_{(6}$, i tenim:

- 2 grups de 6
- 3 unitats que sobren

Amb l'àbac tindríem que la quantitat 15 en base 10 s'escriu en base 6 com a:



De manera operativa, aquesta acció d'agrupar consistirà a fer divisions successives:

- En primer lloc, determinarem la xifra dels grups de primer ordre, i per a això caldrà dividir n entre la base d'agrupament b; com a resultat obtindrem un quocient i una resta (r_0),

que serà la xifra de les unitats que no han pogut ser agrupades, i que configuraran la xifra d'unitats de la nova expressió en base b.

$$\begin{array}{r|l} n & b \\ \hline \vdots & q_0 \\ r_0 & \end{array}$$

- Per a trobar la xifra a col · locar en la posició de segon ordre es divideix el primer quocient obtingut novament per b i es pren la resta (r_1).

$$\begin{array}{r|l} q_0 & b \\ \hline \vdots & q_1 \\ r_1 & \end{array}$$

- Aquest procés s'aniria repetint sempre que el quocient obtingut siga més gran que la base.

$$\begin{array}{r|l} q_1 & b \\ \hline \vdots & q_2 \\ r_2 & \end{array}$$

- A la fi, tindríem un últim quocient (c) i una sèrie de restes de les divisions successives ($r_0, r_1, r_2, \ldots$), de manera que la quantitat en base b es representaria amb les xifres

$$c\ r_{k-1}\ \ldots\ r_2\ r_1\ r_0$$

Exemple 2.11

El nombre $243_{(10}$ s'escriuria com a $465_{(7}$, ja que continuaríem el procés descrit abans i faríem les següents divisions:

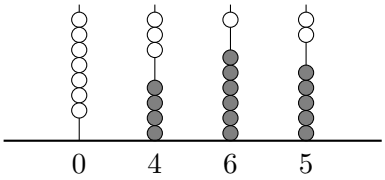
$$\begin{array}{r|l} 2\,4\,3 & 7 \\ \hline -\,2\,1 & 3\,4 \\ \hline 3\,3 & \\ -\,2\,8 & \\ \hline 5 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 3\,4 & 7 \\ \hline -\,2\,8 & 4 \\ \hline 6 & \end{array}$$

Aquest procés podem veure'l com una sèrie de divisions successives per a obtenir grups de 7, tal com mostrem a continuació:

$$\begin{array}{r|l} 243 & 7 \\ \hline 210 & 34 \;\big|\; 7 \\ \hline 33 & 28 \quad 4 \\ \hline 28 & 6 \\ \hline 5 & \end{array}$$

$$243 = 465_{(7} \longleftarrow$$

És important entendre que no fem res més que agrupar en grups de 7, com si estiguérem fent ús d'un àbac, tal com hem fet en les activitats de laboratori (vegeu Activitat 2.14 i similars).



Activitat 2.25

Convertiu les següents quantitats a les bases indicades:

a) $53_{(10}$ a base 2

b) $6635_{(10}$ a base 12[a]

c) $97_{(10}$ a base 5

Solució en pàg. 378

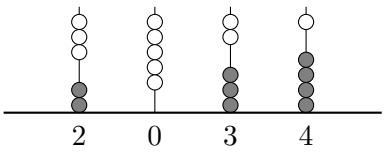
[a]Per conveni en les bases superiors a 10 farem ús de les lletres majúscules de l'abecedari. Així, per a la base 12 farem ús de les xifres $\{0, 1, 2, \ldots, A, B\}$, on A equival a la quantitat 10 i B a 11.

2.4.2 Canvi de l'escriptura d'un nombre en base b a base 10

Per a fer l'exercici invers n'hi ha prou de fer ús de l'expressió polinòmica del nombre n en la base b, tal com hem vist a l'inici d'aquest apartat (pàg. 55). Una vegada escrit el nombre n en forma polinòmica (en forma de potències de la base b) només cal efectuar les operacions indicades (en base 10). El resultat de les operacions serà l'escriptura en del nombre n en base 10.

Exemple 2.12

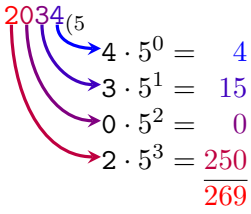
Per a transformar la quantitat $2034_{(5}$ a base 10 és suficient recordar el significat posicional de les xifres i fer ús de l'expressió polinòmica d'aquest nombre. Així, $2034_{(5}$ és:



I això vol dir que:

$$\begin{aligned} 2034_{(5} &= 2 \times 5^3 + 0 \times 5^2 + 3 \times 5^1 + 4 \times 5^0 = \\ &= 2 \times 5^3 + 0 \times 5^2 + 3 \times 5^1 + 4 \times 1 = \\ &= 2 \times 125 + 0 \times 25 + 3 \times 5 + 4 \times 1 = \\ &= 250 + 0 + 15 + 4 = 269 \end{aligned}$$

Fixeu-vos com cada xifra actua com a multiplicador d'una potència de la base, de manera que:



Activitat 2.26

Convertiu a base 10 les següents quantitats:

a) $11011_{(2}$

b) $1234_{(8}$

c) $1AB_{(12}$

Solució en pàg. 380

Activitat 2.27

És correcta l'escriptura de la següent quantitat: $85_{(8}$?

Solució en pàg. 380

Activitat 2.28

Escriviu les xifres del nombre següent en base 3: $1+3+3^2+3^4+3^6$. Expresseu el nombre anterior en base 9.

Solució en pàg. 380

Activitat 2.29

Feu els següents canvis de base:

a) $B6_{(16}$ a base 10

b) $34ABC_{(13}$ a base 12

c) $1000100001_{(2}$ a base 8

Solució en pàg. 381

Activitat 2.30

Trobeu la base del sistema de numeració en el qual els nombres 479, 698 i 907 estan en progressió aritmètica.

Activitat 2.31

Un nombre de tres xifres en el sistema de base 7 té les xifres invertides en el sistema de base 9. Quin és aquest nombre? Expresseu-lo en base decimal.

Per a finalitzar aquest apartat, clarifiquem alguns detalls dels sistemes de numeració xifrats usuals. El sistema binari és un sistema de numeració posicional xifrat en base 2. Els únics multiplicadors possibles són l'1 i el 0. Així que tots els numerals escrits en aquesta base són una combinació d'uns i zeros. És el llenguatge numèric que s'usa en el context de la informàtica i en el dels circuits elèctrics (1=pas de corrent, 0=no hi ha pas de corrent). En aquest sistema, la seqüència numèrica s'expressaria com a

$$1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, 1001, 1010, 1011, 1100, 1101, 1110, 1111, \ldots$$

El sistema octal és un sistema de numeració posicional xifrat en base 8. Els 7 multiplicadors diferents de zero es corresponen amb els 7 primers de la base decimal, és a dir, 1, 2, 3, 4, 5, 7 i 8, junt amb el zero. És molt usat en el mateix context que el binari, però només pel fet que simplifica els numerals perquè requereix un menor nombre de xifres que els numerals en base 2.

El sistema hexadecimal és un sistema de numeració posicional xifrat en base 16. La gran quantitat de multiplicadors que requereix el sistema obliga que s'amplien els multiplicadors de la base decimal amb uns de nous: A, B, C, D, E i F, per a indicar si hi ha 10, 11, 12, 13, 14 o 15 unitats, respectivament. Un numeral en aquesta base conté xifres que són una combinació de xifres i lletres, per la qual cosa el numeral es diu alfanumèric. El sistema hexadecimal simplifica encara més l'escriptura de nombres grans expressats en el sistema binari, i per això la seua utilitat és evident en aquest context.

Efectivament, no és casual que els sistemes considerats conjuntament, binari, octal i hexadecimal, tinguen bases respectives 2, $8 = 2^3$ i $16 = 2^4$. De fet, justament en això rau la seua importància.

Exemple 2.13

Vegem aquest interessant exemple de Huerta (2011). Considerem el numeral en base 2 següent:

$$100010111011010101_{(2}$$

Expressem-lo en base 8 o en la base octal de la manera següent. Separem les xifres en grups de tres, des de les unitats de menor ordre i de manera ascendent:

$$10001011101101010_{(2} \Longrightarrow 100 - 010 - 111 - 011 - 010 - 101_{(2}$$

Cada grup de 3 xifres representa un nombre menor o igual que 7 en la seqüència numèrica de base 2 (on 1 s'ha de veure com a 001 i el 0 com 000, 10 com 010 i 11 com 011). Buscant l'equivalència corresponent tenim:

$$\begin{aligned} 100010111011010101_{(2} &\Longrightarrow 100 - 010 - 111 - 011 - 010 - 101_{(2} \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow 4 - 2 - 7 - 3 - 2 - 5_{(8} \Longrightarrow 427325_{(8} \end{aligned}$$

Així, hem completat el canvi de base, escrivint $427325_{(8}$.

Expressem-lo ara en base hexadecimal i recordem que el nombre de multiplicadors ara és 15 i el zero. Separem les xifres en grups de 4, de la mateixa manera que per al sistema octal:

$$100010111011010101_{(2} \Longrightarrow 0010 - 0010 - 1110 - 1101 - 0101_{(2}$$

Donat que el numeral en base 2 té 18 xifres ens eixiran 4 grups de 4 xifres i dues de soltes. Es completen aquestes amb la quantitat de zeros a l'esquerra necessaris (negreta) per a constituir un nou grup de 4 xifres. El procés ara és igual que la conversió a l'octal:

$$\begin{aligned} 100010111011010101_{(2} &\Longrightarrow \mathbf{00}10 - 0010 - 1110 - 1101 - 0101_{(2} \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow 2 - 2 - E - D - 5_{(16} \Longrightarrow 22ED5_{(16} \end{aligned}$$

Així, completem el canvi a base 16, escrivint $22ED5_{(16}$.

Hem d'observar com el numeral que en base 2 tenia 18 xifres, en té 6 en l'octal i 5 en l'hexadecimal. Per a nombres relativament menuts, l'octal sembla més eficient que l'hexadecimal, mentre que per a numerals molt llargs ho és l'hexadecimal.

2.5. Activitats complementàries del tema

Activitat 2.32

Dels següents nombres expressats en diferents bases:

$$607_{(8}, 143_{(4}, 28_{(9}, 131, 205_{(3}$$

a) Assenyaleu, si n'hi ha, els que siguen incorrectes justificant la resposta.

b) Ordeneu de menor a major els nombres que siguen correctes.

c) Convertiu a base 12 tots els que siguen correctes.

Solució en pàg. 382

Activitat 2.33

Completeu la següent taula:

Anterior	Nombre	Següent
$66_{(7}$	$100_{(2}$ $\beta\beta\beta_{(13}$, sent $\beta = 11$ 9909	$10_{(11}$

Solució en pàg. 382

Activitat 2.34

a) Inventeu un nombre de 6 xifres en base 5 i passeu-lo a base 10.

b) Compteu i escriviu en base 5 els deu següents nombres a l'inventat.

Solució en pàg. 382

Activitat 2.35

Calculeu els nombres següents en les bases indicades:

a) $\alpha 3_{(12} = ???_{(2}$, sent $\alpha = 10$

b) $47_{(9} = ???_{(3}$

c) $324 = ???_{(13}$

Solució en pàg. 383

Activitat 2.36

Quin és el nombre més gran de quatre xifres en base 5? I el més petit? Justifiqueu la resposta.

Solució en pàg. 383

Activitat 2.37

Quants nombres de tres xifres es poden escriure en base 3?

Solució en pàg. 383

Activitat 2.38

Començant per $45_{(6}$, escriviu els 10 números següents en base 6

Solució en pàg. 383

Activitat 2.39

Calculeu de manera raonada en quin sistema de numeració és una certa cadascuna de les següents igualtats:

a) $23_{(n} = 31_{(4}$

b) $105_{(6} = 20_{(n} + 25$

c) $66_{(n} = 204_{(5}$

Solució en pàg. 383

Activitat 2.40

Trobeu raonadament la base b en la qual es compleix que el quadrat de $14_{b)}$ coincideix amb $244_{b)}$.

Referències

Arnau, D. (2017). *Didáctica de la Aritmética y de la Resolución de Problemas (Proyecto Docente)*. Universitat de València.

Bourbaki, N. (1994). *Elements of the History of Mathematics*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.

Cid, E., Godino, J. D., i Batanero, C. (2003). *Sistemas numéricos y su didáctica para maestros*. Granada: Departamento de Didáctica de las Matemáticas, Universidad de Granada.

Fiori, C., i Zuccheri, L. (2005). An experimental research on error patterns in written subtraction. *Educational Studies in Mathematics*, *60*(3), 323 – 331. doi: 10.1007/s10649-005-7530-6

Fuson, K. C. (1990). Conceptual Structures for Multiunit Numbers: Implications for Learning and Teaching Multidigit Addition, Subtraction, and Place Value. *Cognition and Instruction*, *7*(4), 343 – 403. doi: 10.1207/s1532690xci0704_4

Gómez, B. (1988). *Numeración y Cálculo*. Madrid: Síntesis.

González-Calero, J. A. (2019). *Didáctica de los Números y la Estocástica*. Manual no publicado.

Huerta, M. P. (2011). *Apunts de Matemàtiques per a Mestres a la Universitat de València*.

Ifrah, G. (1997). *Historia universal de las cifras*. Madrid: Espasa.

Merzbach, U. C., i Boyer, C. B. (1991). *A history of mathematics*. Hoboken, NJ: John Wiley and Sons, Inc.

Reys, R. E., Lindquist, M. M., Lambdin, D. V., i Smith, N. L. (2008). *Helping children learn mathematics* (9th ed.). Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, Inc.

Ross, S. C., i Pratt-Cotter, M. (1999). Subtraction From a Historical Perspective. *School Science and Mathematics*, *99*(7), 389 – 393. doi: 10.1111/j.1949-8594.1999.tb17499.x

Van de Walle, J. A., Karp, K. S., i Bay-William, J. M. (2016). *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally* (9th ed.). Essex, UK: Pearson Education.

3

Construcció del nombre natural i del sentit de les operacions

Organització de continguts del Tema 3

1. Formalització matemàtica del conjunt dels nombres naturals
   - L'aproximació de Cantor als nombres naturals
   - L'axiomàtica de Peano per a la construcció dels nombres naturals
2. Desenvolupament del sentit de les operacions bàsiques
   - Addició de nombres naturals
   - Sostracció de nombres naturals
   - Producte de nombres naturals
   - Divisió de nombres naturals
3. Propietats de les operacions bàsiques
4. Altres operacions amb nombres naturals

En el tema anterior s'han establit les bases que han permès a la humanitat crear sistemes de numeració orientats a la resolució de problemes altament relacionats amb la vida quotidiana: representar quantitats i efectuar comptatges de col · leccions d'objectes. Amb el pas del temps, l'ús del nombre s'ha estès per a fer comparacions o càlculs.

En aquest tema presentarem la construcció formal del nombre natural, des del punt de vista matemàtic. Per a això, seguirem dues aproximacions, que donaran lloc a dos models conceptuals que donaran suport al concepte de nombre: el model de Cantor i el de Peano. Posteriorment, farem una anàlisi de les operacions aritmètiques bàsiques basant-nos en les implicacions derivades de l'ús de l'una aproximació o de l'altra. En les assignatures dedicades a la didàctica de les matemàtiques s'estudiarà amb molta més profunditat les implicacions per a l'ensenyament-

aprenentatge que comporta l'ús d'un model o un altre en la instrucció.

3.1. Formalització matemàtica del conjunt dels nombres naturals

3.1.1 L'aproximació de Cantor als nombres naturals

La definició de nombre natural que podem extraure del que hem tractat fins a aquest moment en l'assignatura basada en la intuïció podria relacionar-se íntimament amb el concepte de conjunt i relacionar-se amb la quantitat d'elements d'una col · lecció d'objectes donada i que ha sigut comptada. No obstant això, aquesta formalització de la idea de nombre no ha sigut present sempre al llarg de la història i no apareix fins al segle XIX quan Georg Cantor (1845-1918, Figura 3.1) defineix formalment, a partir de la *teoria de conjunts*, els conjunts numèrics, el primer dels quals és el dels *nombres naturals* (designat matemàticament com a $\mathbb{N}$).

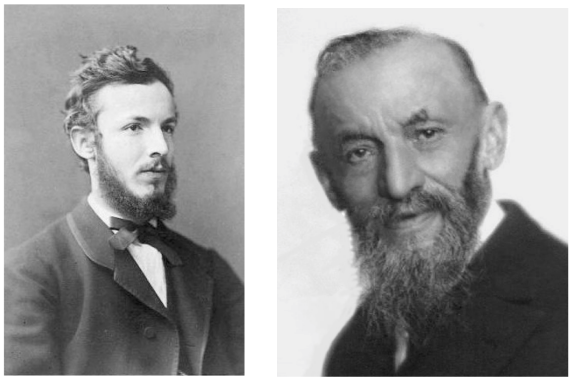


Figura 3.1. George Cantor (1845 - 1918; esquerra) i Giuseppe Peano (1858-1932; dreta)

La visió cantoriana dels nombres naturals es basa en l'activitat de coordinar conjunts i en les nocions de coordinabilitat i de cardinal d'un conjunt, estudiades en el Tema 1. Com indica Fernández (2015), aquesta concepció del nombre és la que va predominar en una època recent (des de la Llei General d'Educació, 1970, fins a la reforma de la LOGSE, 1990), potser per la influència que hi va tenir el desembarcament de la "matemàtica moderna" que es va produir en la dècada dels 70.

Ací els nombres es creen un cada vegada, independentment els uns dels altres, per mitjà de l'acció de coordinar conjunts, mitjançant la regla "tenir el mateix nombre d'elements". Com ja hem estudiat, la coordinabilitat de conjunts (Figura 3.2) és una relació d'equivalència. Així, dos conjunts que siguen coordinables tindran la mateixa quantitat o nombre d'elements; és a dir, el mateix cardinal. És convenient advertir que aquest tipus d'operacions són de caràcter lògic i d'un nivell major d'abstracció que la creació de nombres mitjançant l'activitat de comptar.

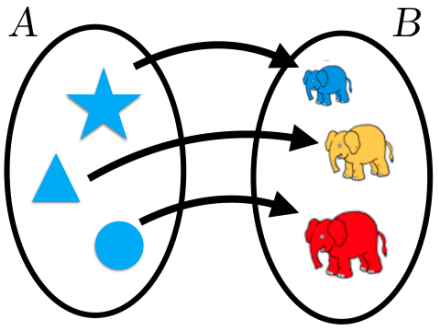


Figura 3.2. Conjunts coordinables

El nombre segons l'aproximació de Cantor

Cada **nombre natural** queda definit com la "propietat característica comuna de tots els conjunts que són coordinables".

Exemple 3.1

Gràcies a la coordinabilitat de conjunts podrem definir les següents agrupacions:

- $[0] = \{\text{conjunts amb 0 elements}\}$
- $[1] = \{\text{conjunts amb 1 element}\}$
- $[2] = \{\text{conjunts amb 2 elements}\}$
- ...

Cada agrupació (classe) defineix un nombre natural segons Cantor, i a cada una se la designa amb el nom o el símbol, que és també el del nombre natural corresponent. Així l'agrupació formada pel conjunt buit es designa per "zero o 0", la dels conjunts unitaris per "un o 1", la dels conjunts binaris per "dos o 2", la dels ternaris per "tres o 3", etc.

La coordinabilitat de conjunts genera una classificació de tots els conjunts. Podem classificar tots els conjunts segons el cardinal que tinguen.

- Si tenen un element, aleshores pertany a la classe de l'1.
- Si tenen dos elements, aleshores pertany a la classe del 2.
- ...

Així, qualsevol nombre es pot associar al cardinal d'un conjunt finit. El nombre natural (des de l'aproximació cantoriana) és el cardinal d'un conjunt finit i tots els seus conjunts coordinables.

El conjunt de totes les classes defineix el conjunt dels nombres naturals:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

3.1.2 L'axiomàtica de Peano per a la construcció dels nombres naturals

La formalització del nombre natural segons Giuseppe Peano (1858-1932, Figura 3.1) es basa en idees molt senzilles, relacionades amb l'activitat de comptar. Definirem el conjunt dels nombres naturals a partir de la relació "ser el següent" i mitjançant un sistema de postulats, com ara veurem.

Axiomes de Peano per a la construcció dels nombres naturals

El **nombre natural** i el conjunt dels nombres naturals

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, \dots\}$$

estan definits, a la manera del raonament axiomàtic de Peano, partint d'aquests axiomes o postulats:

Axioma 1 Hi ha un primer element

Axioma 2 Tot element té un element "següent"

Axioma 3 El primer element no és element "següent" de cap element

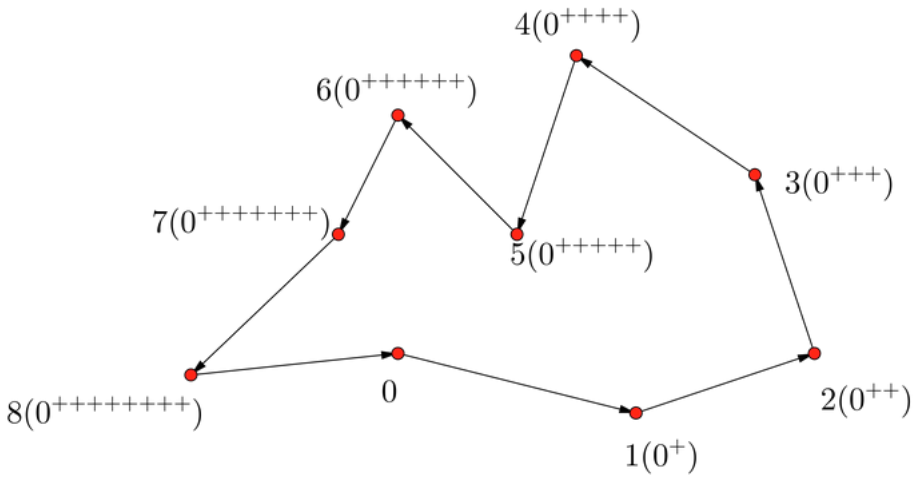
Axioma 4 Elements distints produeixen "següents" distints. És a dir, tot element té "següent" i és **únic**

Axioma 5 Els elements "següents" pertanyen al conjunt (*Principi d'inducció matemàtica*)

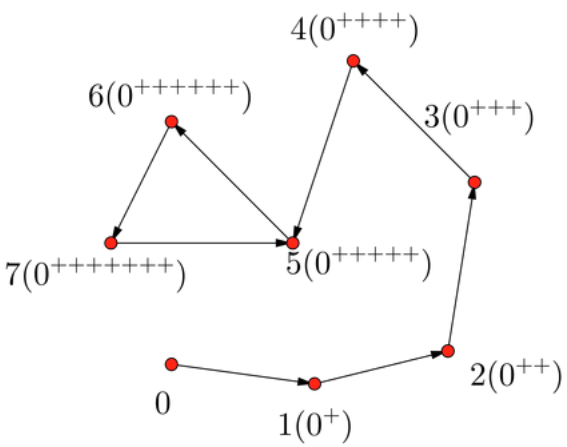
Exemple 3.2

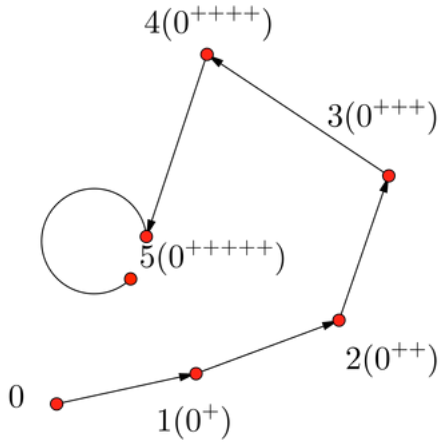
Ara intentarem entendre millor les implicacions dels axiomes de Peano i com, a partir d'aquests, es pot definir el conjunt dels nombres naturals ($\mathbb{N}$).

- **Axioma 1:** *Hi ha un primer element.* Aquest axioma estableix la primera peça del sistema, sense la qual no podríem arrancar la construcció. Així, $0 \in \mathbb{N}$.
- **Axioma 2:** *Tot element té un element "següent".* La creació de nombre és determinada per l'aplicació "següent de". Així:
  - 0 és el primer
  - Anomenem 1 a 0^+, és a dir: $0^+ = 1$
  - Anomenem 2 a 1^+, és a dir: $0^{++} = 1^+ = 2$
  - Anomenem 3 a 2^+, és a dir: $0^{+++} = 1^{++} = 2^+ = 3$
  - ...



- **Axioma 3:** *El primer element no és element "següent" de cap element.* Aquest axioma impedeix que passe com en l'exemple anterior, i per tant, 0 no és el següent de cap altre nombre. Ara bé, podrien donar-se situacions com aquestes:





- **Axioma 4:** *Elements distints produeixen "següents" distints. És a dir, tot element té "següent" i és* ***únic***. Aquest axioma fa que les situacions anteriors no siguen possibles, ja que dos nombres naturals diferents mai tindran el mateix successor.
- **Axioma 5:** *Els elements "següents" pertanyen al propi conjunt.* Aquest últim axioma ens indica, de manera intuïtiva, que si un nombre és "següent" d'un altre, llavors pertany a $\mathbb{N}$.

3.2. Desenvolupament del sentit de les operacions bàsiques

Les operacions bàsiques d'addició, subtracció, multiplicació, i divisió formen el fonament de l'aritmètica. A causa de la seua importància primària, aquesta secció la dedicarem a l'estudi del sentit de les operacions, de manera independent al procediment de càlcul. Així, mostrarem com aquestes operacions tenen naturalesa diferent depenent de si s'estudien des del punt de vista de la coordinació de conjunts o des de l'axiomàtica de Peano. Aquestes dues aproximacions al nombre natural donaran lloc a esquemes conceptuals diferents, que, com a futurs mestres, caldrà conèixer.

Activitat 3.1

En el següent vídeo a una xiqueta de quatre d'anys se li demana que resolga l'operació $5+3$. Responeu a les següents preguntes:

a) Quines diferències trobeu en la manera en què cada estudiant respon a la pregunta?

b) Amb quina concepció dels nombres naturals relacioneu cada una de les respostes donades pels estudiants?

Vídeo *Dos esquemes conceptuals per a l'operació $7+4$*

Solució en pàg. 383

3.2.1 Addició de nombres naturals

Suma de nombres naturals amb el model de Cantor

En la visió "cantoriana", sobre la base de la teoria de conjunts, la **suma de nombres naturals** es defineix a partir de la unió de conjunts.
Donats a i b, dos nombres naturals. Construïm A i B, conjunts disjunts, tals que $a = card(A)$ i $b = card(B)$ llavors:

$$a + b = card(A) + card(B) = card(A \cup B)$$

Així, sumar implica: i) passar dels nombres a conjunts amb aquests cardinals; ii) unir els conjunts (no disjunts); i iii) obtenir el cardinal del conjunt resultant, com podem observar en la Figura 3.3.

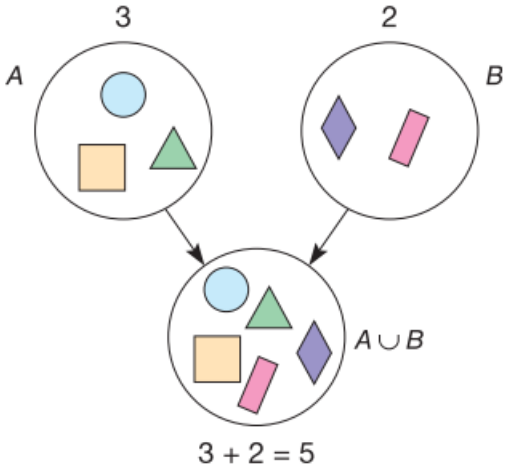


Figura 3.3. Suma segons el model de Cantor (figura extreta de Musser, Peterson, i Burger, 2013)

Exemple 3.3

Per a calcular la suma $4+5$, cerquem dos conjunts disjunts A i B tals que $card(A)=4$ i $card(B)=5$. Per exemple: $A=\{a,b,c,d\}$ i $B=\{m,n,p,q,t\}$.

Aleshores $4+5=card(A\cup B)=card(\{a,b,c,d,m,n,p,q,t\})=9$

Activitat 3.2

Analitzeu què ocorre amb la definició de la suma des de la perspectiva cantoriana quan els conjunts no són disjunts. Doneu-ne un exemple.

Solució en pàg. 384

En el cas de seguir l'aproximació de Peano, l'operació de suma es defineix de manera inductiva. Nosaltres ací simplificarem un poc el procés, i farem ús del model de la recta numèrica. D'aquesta manera, el resultat de $3+4$ és el nombre a què arribem després de començar a comptar *quatre* (d'un en un) des del *tres*. A aquest model també se'l coneix com a *model de mesura* (Figura 3.5).

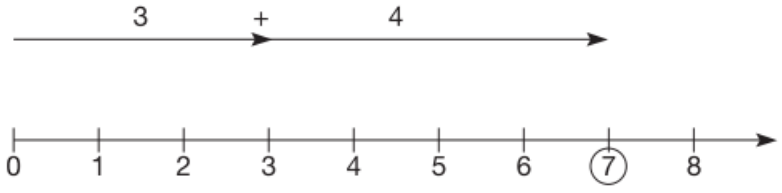


Figura 3.5. Exemple de l'operació $3+4$ amb el model de Peano (figura extreta de Musser i cols., 2013)

Suma de nombres naturals amb el model de Peano

Amb l'aproximació de Peano, la **suma de qualsevol parella de nombres naturals** queda definida així:

$$x + n = x + \underbrace{1 + \cdots + 1}_{n \text{ vegades}}$$

Açò ens porta en la pràctica al fet que sumar és continuar comptant.

Activitat 3.3

Construïu la seqüència numèrica dels *tretze* primers nombres en aquestes bases:

a) Base 10

b) Base 5

c) Base 6

Solució en pàg. 384

Activitat 3.4

Completeu aquesta taula de sumar en base 8:

+	0	1	2	3	4	5	6	7	10
0									
1									
2									
3									
4									
5									
6									
7									
10									

$*$ Aquests nombres estan tots en base 8

Activitat 3.5

Feu aquestes sumes fent ús de l'algoritme per columnes:

a) $412 + 313$ en base 10

b) $412_{(5} + 313_{(5}$ en base 5

c) $412_{(6} + 313_{(6}$ en base 6

3.2.2 Sostracció de nombres naturals

Per al cas de la resta de nombres naturals amb el model de Cantor, podem pensar en algun problema com ara "*Tinc 5 monedes i me n'he gastat 2. Quantes monedes em queden?*". D'aquesta manera, la resta implicaria llevar elements d'un conjunt (Figura 3.6).

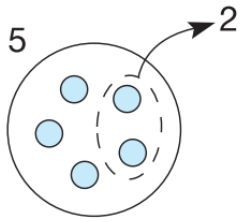


Figura 3.6. Resta segons el model de Cantor (figura extreta de Musser i cols., 2013)

Resta de nombres naturals amb el model de Cantor

La **resta de nombres naturals** en la visió cantoriana es defineix com segueix:
Donats dos nombres a i b, prenem un conjunt A tal que $card(A) = a$ i un altre conjunt B tal que $card(B) = b$, sent A i B conjunts complint $B \subseteq A$. Construirem el conjunt diferència $A \backslash B$ i definirem:

$$a - b = card(A \backslash B)$$

Com es pot interpretar en la Figura 3.6, fent ús d'aquest model és senzill donar sentit i nom a les quantitats que intervenen en la resta, ja que el **minuend** és el nombre corresponent al cardinal del conjunt que minva (conjunt inicial), i el **subtrahend** és el nombre corresponent al cardinal del subconjunt que es "lleva" del conjunt inicial.

Exemple 3.4

Per a calcular $5-2$, busquem dos conjunts A i B tals que $card(A) = 5$, $card(B) = 2$ i $B \subseteq A$. Per exemple: $A = \{a, b, c, d, e\}$ i $B = \{b, d\}$.

Llavors $5 - 2 = card(A \backslash B) = card(\{a, c, e\}) = 3$.

També podem definir la resta com l'*operació inversa de la suma*. Si a, b són dos nombres naturals, aleshores $a - b = c$ si i solament si $a = b + c$. L'element c s'anomena **sumand desconegut**. En l'Exemple 3.4 calcular $5 - 2$ és el mateix que cercar el nombre natural que sumat a 2 dona 5.

Activitat 3.6

Inventeu un enunciat de problema verbal que done compte de la situació descrita en la Figura 3.7. De quina manera es resol el problema segons el gràfic? Quina aproximació conceptual al nombre se segueix. Quines diferències trobeu en relació a la concepció de resta que s'ha donat abans?

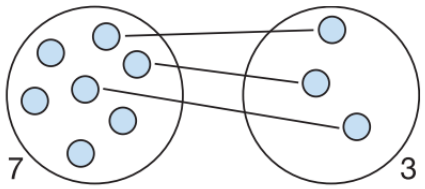


Figura 3.7. Identifica el model (figura extreta de Musser i cols., 2013)

Solució en pàg. 384

Per al cas de l'aproximació de Peano als naturals, per a la resta faríem una anàlisi similar a la de la suma, usant el model de la recta numèrica (o de mesura), i ens portaria a dir que *restar és comptar cap arrere* (descomptar d'un en un, Figura 3.8).

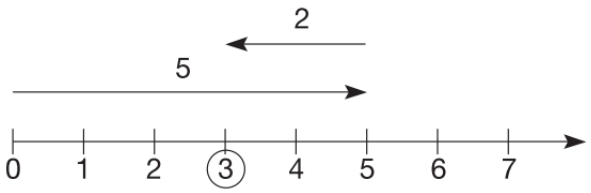


Figura 3.8. Resta segons el model de Peano (figura extreta de Musser i cols., 2013)

Resta de nombres naturals amb el model de Peano

Amb l'aproximació de Peano, la **resta de qualsevol parella de nombres naturals** x i n, sent $n \leq x$, queda definida així:

$$x - n = x \underbrace{-1 - \cdots - 1}_{n \text{ vegades}}$$

Amb el model del sumand desconegut (Figura 3.9), hauríem de determinar quant hem de sumar a 2 per a arribar a 5.

$$5 - 2 = c \Longleftrightarrow 2 + c = 5$$

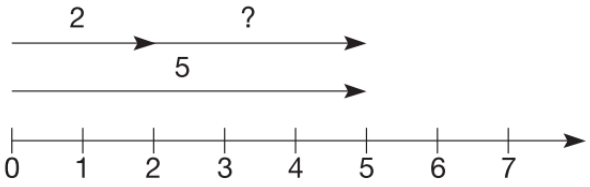


Figura 3.9. Resta segons el model de Peano (figura extreta de Musser i cols., 2013)

3.2.3 Producte de nombres naturals

El cas del producte de naturals des del model de Cantor consisteix a construir el producte cartesià de dos conjunts, tal com ara veurem.

Multiplicació de nombres naturals amb el model de Cantor

En el model de Cantor la **multiplicació de dos nombres naturals** es defineix a partir del producte cartesià de conjunts. Si A i B són dos conjunts tals que $a = card(A)$ i $b = card(B)$, llavors

$$a \times b = card(A) \times card(B) = card(A \times B)$$

Exemple 3.5

Per a calcular la multiplicació 4×5, busquem dos conjunts T i P tals que $card(T) = 4$ i $card(P) = 5$, i construïm el conjunt producte cartesià i comptem el nombre de parelles que s'han creat:

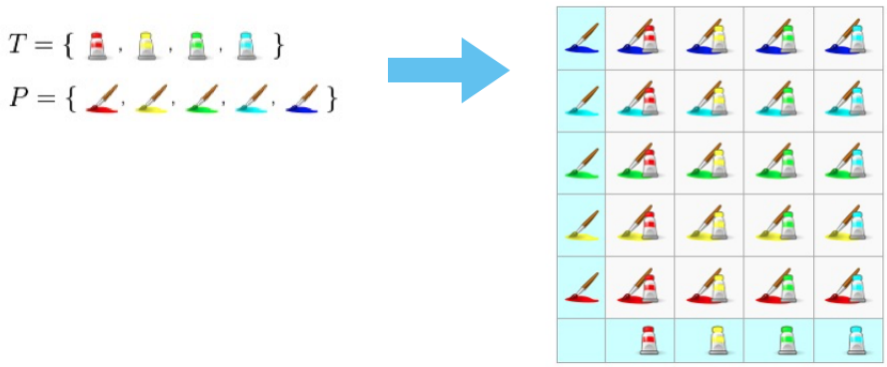


Figura 3.10. Producte cartesià dels conjunts T i P

Aleshores $4 \times 5 = card(T \times P) = 20$.

Exemple 3.6

Per a calcular la multiplicació 2×3, busquem dos conjunts A i B tals que $card(A) = 2$ i $card(B) = 3$. Siguen, doncs, $A = \{a, b\}$ i $B = \{x, y, z\}$. Construïm el conjunt producte cartesià i comptem:

$$A \times B = \{(a, x), (a, y), (a, z), (b, x), (b, y), (b, z)\}$$

Aleshores $2 \times 3 = card(A \times B) = 6$.

Activitat 3.7

Què estem modelitzant quan usem un diagrama d'arbre com el que tenim en la Figura 3.11?

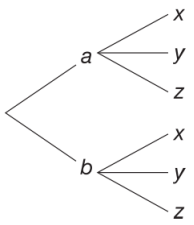


Figura 3.11. Diagrama d'arbre

Solució en pàg. 384

En el cas de l'aproximació de Peano al nombre natural, tindrem que la multiplicació s'obté com a suma repetida, és a dir:

Multiplicació de nombres naturals amb el model de Peano

Amb l'aproximació de Peano, donats x i n, dos nombres naturals, sent $n \neq 0$, la **multiplicació de nombres naturals** queda definida així:

$$x \times n = \underbrace{x + x + \cdots + x}_{n \text{ vegades}}$$

Així, multiplicar x per n és sumar n vegades el nombre x.

Exemple 3.7

Multiplicar 3 per 5 és sumar 5 vegades el nombre 3, o fer 5 salts de 3 unitats (Figura 3.12):

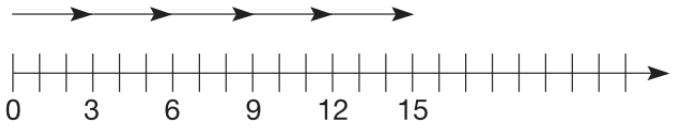


Figura 3.12. Multiplicació segons el model de Peano (figura extreta de Musser i cols., 2013)

És a dir, 3×5 és el nombre que s'obté en repetir 5 vegades el nombre 3.

Com hem vist, l'aplicació d'aquesta definició ens porta, en la pràctica, a dir que multiplicar és comptar a salts. Si usem la recta numèrica, per a multiplicar 4×3 marcaríem el 4 i continuaríem comptant *de quatre en quatre* (tres vegades) fins a arribar a 12.

! De manera habitual, usarem indiferentment els símbols $\cdot$, $\times$ o res, per a indicar el producte de dos nombres naturals. Així, *a per b* es podrà expressar com a

$$a \times b = a \cdot b = a\,b$$

Activitat 3.8

Construïu la taula de multiplicar del 3 en aquestes bases:

a) Base 10

×	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3										

b) Base 6 (useu la seqüència numèrica que s'ha construït en l'Activitat 3.3 per a fer salts de 3 en 3).

×	0	1	2	3	4	5
3						

Solució en pàg. 385

Activitat 3.9

Feu aquestes multiplicacions amb l'algoritme per columnes. Useu les taules de multiplicar que s'han construït en l'Activitat 3.8 per a cada una de les bases.

a) 241×3 en base 10. Usant la taula de multiplicar en base 10:

×	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27

b) $241_{(6} \times 3_{(6}$ en base 6. Usant la taula de multiplicar en base 6:

×	0	1	2	3	4	5
3	0	3	10	13	20	23

c) Comproveu, canviant a base 10, que el resultat obtingut en l'apartat b) és correcte.

Solució en pàg. 385

! L'Activitat 3.9 (quan multipliquem en base 6) mostra com **l'aprenentatge memorístic** de les taules de multiplicar esdevé un avanç de cara a afrontar les multiplicacions per més d'una xifra quan emprem l'algoritme habitual.

Activitat 3.10

Completeu aquest quadre amb multiplicacions en base 5:

×	0	1	2	3	4
0					
1					
2					
3					
4					

3.2.4 Divisió de nombres naturals

Igual que la resta d'operacions que hem vist, la divisió des de la perspectiva de Cantor pot veure's de diferents maneres. Considerem aquests dos problemes:

Problema 1. *Una classe de 20 xiquets es reparteix en 4 grups amb el mateix nombre de xiquets en cada grup. Quants xiquets hi ha en cada grup?*

Problema 2. *Una classe de 20 xiquets es divideix en grups de 4 xiquets cada un. Quants grups hi ha?*

Cada un d'aquests problemes mostra un esquema conceptual diferent de la divisió. En el primer problema la divisió apareix en el sentit que un nombre de xiquets ha de ser repartit entre un nombre determinat de grups i es pregunta quants xiquets hi ha en cada grup. Així, el primer tipus de divisió l'associem a un esquema de *repartiment equitatiu* (Figura 3.13, dreta). En canvi, en el segon cas, la distribució es fa en funció de la mida dels grups, i per això som davant d'un model d'*agrupament o mesura* (Figura 3.13, esquerra). Segons aquests models sabem que $card(A \times B) = 20$ i que $card(A) = 4$, però no sabem el $card(B)$.

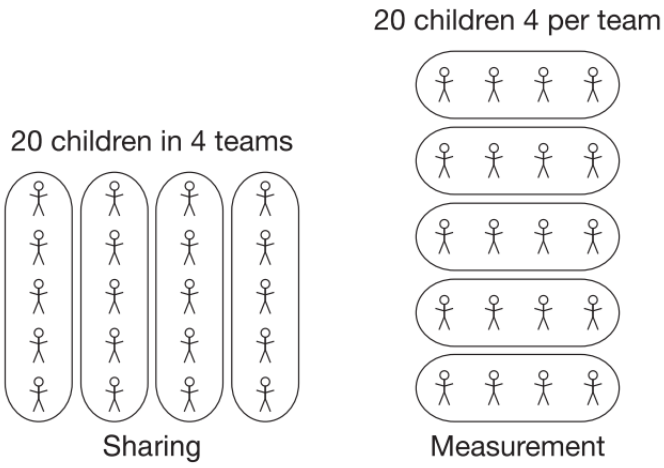


Figura 3.13. Models conjuntistes basats en repartiment de la divisió (figura extreta de Musser i cols., 2013)

> **!** Per al cas de la divisió, no donarem una definició basada en el model de Cantor o Peano de manera explícita.

Exemple 3.8

Calcular $20 \div 4$ és el mateix que bucar el nombre natural que multiplicat per 4 dona 20.

$$20 \div 4 = c \Longleftrightarrow 4 \times c = 20$$

Divisió de nombres naturals

Igual que en la resta, la divisió es pot plantejar com l'*operació inversa de la multiplicació*, com una mena de recerca del valor perdut.

Així, donats D, d dos nombres naturals i $d \neq 0$, direm que la **divisió** d'aquests dos nombres $D \div d$ és igual a q si i solament si $D = d \times q$, per a algun nombre natural q. És a dir,

$$D \div d = q \Longleftrightarrow D = d \times q, \text{ per a algun } q \in \mathbb{N}$$

L'element q s'anomena **quocient**, D serà el **dividend** i d el **divisor**.

! De manera habitual, usarem indiferentment els símbols $\div$, : o /, per a indicar la divisió de dos nombres naturals. Així, *a entre b* es podrà expressar com a

$$D \div d = D : d = D/d = \frac{D}{d}$$

Des de l'aproximació de Peano, o amb el model de recta numèrica, la resta pot ser considerada com una *resta repetida* o com un *comptatge a salts* cap avant o cap arrere (Exemple 3.9).

Exemple 3.9

Fer l'operació $12 \div 4$ és equivalent a calcular quants salts de 4 unitats necessitem per a arribar des de 0 a 12:

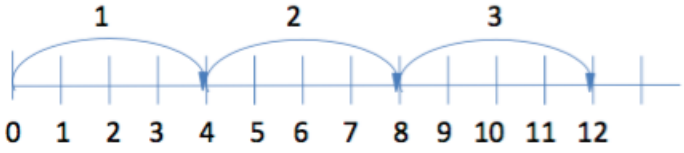


Figura 3.14. Models de salts de la divisió

Divisió per 0

La divisió per 0 és indefinida.

3.2.5 Divisió exacta i amb resta

Ara considereu el problema $37 \div 4$. Per exemple, amb l'esquema conceptual de *repartiment* que hem seguit, fer el càlcul $37 \div 4$ podria ser equivalent a repartir 37 peces de fruita entre 4 xiquets de manera que tots reben les mateixes peces de fruita. Quantes peces rebria cada xiquet?

Així, cada xiquet obtindria 9 peces de fruita i quedaria una peça sobrant que no es podria repartir. Aquesta manera de veure la divisió de nombres naturals, amb un *residu* o *resta*, es resumeix a continuació.

Algoritme de la divisió

Siguen D i d dos nombres naturals, sent $d \neq 0$, llavors existeix un nombre natural q de tal manera que

$$D = d \times q + r, \text{ sent } 0 \leq r < d$$

L'algoritme tradicional pren la següent forma:

$$\begin{array}{r|l} D & d \\ \vdots & q \\ r & \end{array}$$

Igual que abans, q s'anomena **quocient**, D és el **dividend**, d el **divisor** i r la **resta** de la divisió.

Divisió exacta: Quan $r = 0$ direm que la **divisió és exacta**.

Divisió no exacta: Quan $r \neq 0$ direm que la **divisió no és exacta** i que la resta és r.

Exemple 3.10

Finalment, observem com el model de *resta repetida* o de *comptar a salts* encara funciona amb aquesta generalització que hem fet de la divisió. Així, l'operació $44 \div 13$ podria modelitzar-se com tenim en la Figura 3.15, calculant que hi ha 3 salts de 13 unitats i que ens en sobren 5: $44 = 13 \times 3 + 5$.

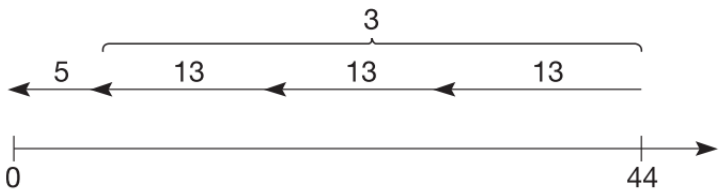


Figura 3.15. Model de salts de la divisió generalitzat (figura extreta de Musser i cols., 2013)

Activitat 3.11

Trobeu el quocient i la resta en les divisions següents:

a) $53 \div 8$

b) $72 \div 15$

c) $137 \div 6$

Solució en pàg. 386

Activitat 3.12

Determineu el valor del residu de la divisió $453210_{(6} \div 5_{(6}$ que té per quocient $55250_{(6}$. Feu ús de l'algoritme estàndard de la divisió, calculant les restes parcials. Seguirem aquests passos:

a) Elaborem la taula de multiplicar del 5 en base 6.

b) Seguim l'algoritme estàndard de la divisió fent les multiplicacions de cada xifra i fent la corresponent resta parcial.

c) Obtenim la resta de la divisió.

Solució en pàg. 386

Activitat 3.13

Trobeu el resultat de la divisió $3207651_{(8} \div 47_{(8}$ en el sistema de numeració de base 8 per mitjà de l'algoritme estàndard amb restes parcials. Seguirem aquests passos:

a) Elaborem la taula de multiplicar del dividend, $47_{(8}$, en la base corresponent.

b) Apliquem l'algoritme de la divisió estàndard i fem les restes parcials corresponents. En aquest cas, ens basem en la taula elaborada per a anar determinant les xifres del quocient.

c) Una vegada finalitzada la divisió, comprovem el resultat mitjançant la "prova de la divisió" ($D = d \times q + r$).

Solució en pàg. 386

3.3. Propietats de les operacions bàsiques

Propietats de la suma de nombres naturals

La suma de nombres naturals és una operació binària que verifica les propietats següents:

Llei de composició interna: (propietat de clausura) La suma de dos nombres naturals és un altre nombre natural únic. És a dir: $\forall a, b \in \mathbb{N} \Longrightarrow a + b \in \mathbb{N}$

Commutativa: $\forall a, b \in \mathbb{N} \Longrightarrow a + b = b + a$

Associativa: $\forall a, b, c \in \mathbb{N} \Longrightarrow a + (b + c) = (a + b) + c$

Element neutre: el nombre 0. $\forall a \in \mathbb{N} \Longrightarrow a + 0 = 0 + a = a$

Totes aquestes propietats es poden demostrar a partir de la teoria de conjunts i també amb els axiomes de Peano.

Activitat 3.14

Quines de les propietats anteriors verifica la resta de nombres naturals? Doneu un *contraexemple* en el cas que no es complisca la propietat.

Solució en pàg. 387

Propietats de la multiplicació de nombres naturals

La multiplicació de nombres naturals és una operació binària que verifica les següents propietats:

Llei de composició interna: (propietat de clausura) La multiplicació de dos nombres naturals és un altre nombre natural únic. És a dir: $\forall a, b \in \mathbb{N} \Longrightarrow a \times b \in \mathbb{N}$

Commutativa: $\forall a, b \in \mathbb{N} \Longrightarrow a \times b = b \times a$

Associativa: $\forall a, b, c \in \mathbb{N} \Longrightarrow a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$

Element neutre: el nombre 1. $\forall a \in \mathbb{N} \Longrightarrow a \times 1 = 1 \times a = a$

La multiplicació té, a més, la **propietat distributiva respecte de la suma i la resta**: $\forall a, b, c \in \mathbb{N} \Longrightarrow a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$

Exemple 3.11

Fixeu-vos com la propietat distributiva respecte a la suma és la base de l'algoritme de la multiplicació:

$$\begin{array}{r} 1\ 2 \\ \times \quad 4 \\ \hline 4\ 8 \end{array}$$

Doncs:

$$12 \times 4 = (10 + 2) \times 4 = (10 \times 4) + (2 \times 4) = 4 \textbf{ desenes} + 8 \textbf{ unitats}$$

Activitat 3.15

Quines de les propietats anteriors verifica la divisió de nombres naturals? Doneu un *contraexemple* en el cas que no es complisca la propietat.

Solució en pàg. 387

La multiplicació per zero

Per a tot nombre natural a, definim:

$$a \times 0 = 0 \times a = 0$$

La divisió del zero i la divisió per zero

La divisió del zero: Per a tot nombre natural $a \neq 0$, definim: $0 \div a = 0$

La divisió per zero: La divisió d'un nombre a, $a \neq 0$, per zero queda indefinida, és a dir: $\nexists\, a \div 0$

3.4. Altres operacions amb nombres naturals

Potències de nombres naturals

La **potenciació de nombres naturals** és l'operació que consisteix a repetir com a factor un nombre natural a anomenat *base* tantes vegades com indica un altre nombre b anomenat *exponent*:

$$a^b = \underbrace{a \times \cdots \times a}_{b \text{ vegades}}$$

Les potències de nombres naturals tenen les següents propietats. Donats $a, b, c \in \mathbb{N}$:

a) **Propietat distributiva per la dreta respecte de la multiplicació:** $(a \times b)^c = a^c \times b^c$

b) No és distributiva per l'esquerra, ja que: $a^{(b \times c)} \neq a^b \times a^c$

c) El **producte de dues potències d'igual base** és una altra potència de la mateixa base i d'exponent la suma dels exponents: $a^b \times a^c = a^{(b+c)}$

d) El **quocient de dues potències d'igual base** és una altra potència de la mateixa base i d'exponent la diferència dels exponents de les potències donades:

$$\frac{a^b}{a^c} = a^{(b-c)}, \text{ sent } b \geq c$$

e) La **potència d'una potència** és una altra potència que té la mateixa base i com a exponent el resultat de multiplicar els exponents: $(a^b)^c = a^{b \times c}$

Definicions per a certes potències

Per definició:

- $0^a = 0$, si $a \neq 0$
- Siga $a \in \mathbb{N}$ i $a \neq 0$, llavors $a^0 = 1$
- Siga $a \in \mathbb{N}$ i $a \neq 0$, llavors $a^1 = 1$

Referències

Fernández, A. (2015). *Apunts de Matemàtiques per a Mestres.* Universitat de València (Estudi General).

Musser, G. L., Peterson, B. E., i Burger, W. F. (2013). *Mathematics for Elementary teachers: A Contemporary Approach* (10th ed.). Wiley.

4

Divisibilitat en nombres naturals

Organització de continguts del Tema 4

1. Múltiples i divisors
2. Propietats de divisibilitat
3. Criteris de divisibilitat
4. Nombres primers i compostos
   - El Garbell d'Eratòstenes per a obtenir els nombres primers
   - Factor de conversió
5. Condició de divisibilitat i quantitat de divisors
6. Màxim comú divisor i mínim comú múltiple
   - El màxim comú divisor i com es calcula
   - El mínim comú múltiple i el seu càlcul
   - L'algorisme d'Euclides per al càlcul del mcd

En aquest tema aprofundirem (un poc només) en la teoria de nombres. És interessant comentar que encara que els problemes relacionats amb nombres són fàcils d'entendre, hi ha encara problemes de la teoria de nombres sense resoldre, com per exemple *la conjectura de Goldbach* (1742), que diu:

Tot nombre parell major que 2 es pot escriure com a suma de dos nombres primers

És a dir: $4 = 2 + 2, 6 = 3 + 3, 8 = 3 + 5, 10 = 3 + 7, 12 = 5 + 7, 14 = 3 + 11, \ldots$.

4.1. Múltiples i divisors

El concepte de divisibilitat, així com les propietats relacionades amb aquest, sorgeixen de la necessitat que té la humanitat d'explicar per què en fer repartiments hi ha ocasions en les quals el repartiment és exacte (no sobra cap dels elements del conjunt que repartim) i altres ocasions en les quals no.

Així, com hem vist en el tema anterior, parlarem de repartiments exactes com aquells en què en fer la divisió la resta és zero. L'anàlisi i la classificació de les diferents situacions de repartiment van ser l'origen dels *criteris de divisibilitat* que avui coneixem i que veurem més avant. Ja l'any 300 aC, Euclides va demostrar en el llibre *Els elements* els teoremes bàsics de divisibilitat dels nombres enters, alguns dels quals veurem en aquest tema. Aquests teoremes van permetre a Gauss, l'any 1801, demostrar el *teorema fonamental de l'aritmètica*, que diu:

> ***Tot enter positiu major que 1 és un nombre primer o bé un únic producte de nombres primers***

Així, per exemple, $6936 = 2^3 \cdot 3 \cdot 17^2$, o $1200 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^2$.

Aquest teorema és part fonamental dels continguts d'aquest tema, perquè dona peu a la factorització dels nombres en factors primers i ens permetrà aprofundir en les condicions de divisibilitat, així com en el càlcul del màxim comú divisor i del mínim comú múltiple.

Múltiple

Es diu que a **és múltiple de** b si existeix un nombre natural n que multiplicat per b és igual a a, és a dir:

$$a = b \cdot n$$

En termes del llenguatge matemàtic escriurem:

$$a = \dot{b} \iff \exists\, n \in \mathbb{N}, a = b \cdot n$$

Exemple 4.1

Si volem expressar el conjunt de múltiples de 3, cal trobar tots els nombres que són del tipus $3 \cdot m$, sent m nombre natural. Això és equivalent a construir la taula del 3:

$$A = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, \dots\}$$

Divisor

Enllaçant amb la definició anterior de múltiple direm que donats dos nombres naturals a i b, b **és un divisor de** a si existeix un nombre natural n que multiplicat per b és igual a a, és a dir:

$$n \cdot b = a$$

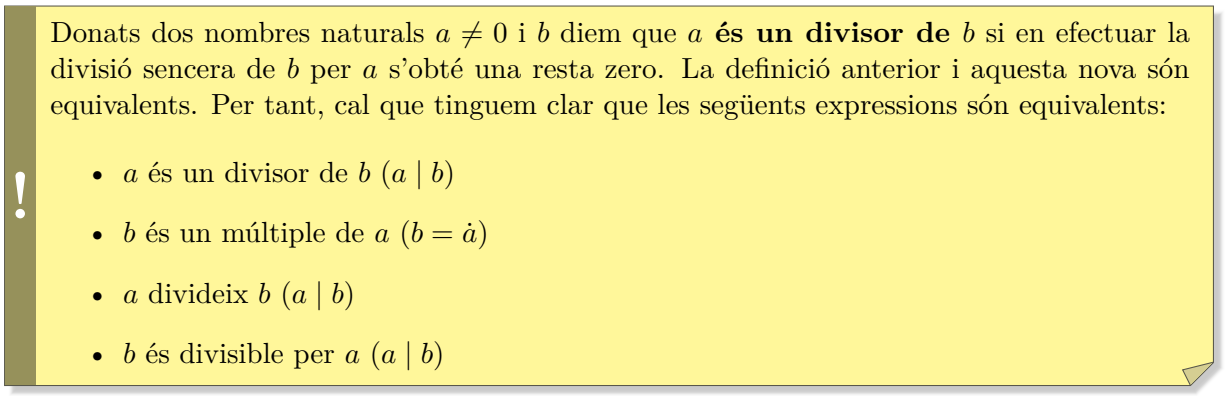
En termes del llenguatge matemàtic escriurem:

$$b \mid a \iff \exists\, n \in \mathbb{N}, b \cdot n = a$$

El símbol $b \nmid a$ significa que b no és divisor de a.

Exemple 4.2

Si cal trobar un divisor de 48, podem dir que *12 és divisor de 48*, ja que existeix un nombre natural, 4, tal que $4 \cdot 12 = 48$.



Donats dos nombres naturals $a \neq 0$ i b diem que a **és un divisor de** b si en efectuar la divisió sencera de b per a s'obté una resta zero. La definició anterior i aquesta nova són equivalents. Per tant, cal que tinguem clar que les següents expressions són equivalents:

- a és un divisor de b $(a \mid b)$
- b és un múltiple de a $(b = \dot{a})$
- a divideix b $(a \mid b)$
- b és divisible per a $(a \mid b)$

Activitat 4.1

Poseu exemples per a totes les situacions anteriors.

Activitat 4.2

Determineu si les següents afirmacions són vertaderes o falses. Expliqueu el vostre raonament:

a) $3 \mid 12$

b) 8 és divisor de 96

c) $216 = \dot{6}$

d) 51 és divisible per 17

e) 7 divideix 34

f) 12 és múltiple de 12

Exemple 4.3

Sovint trobem problemes relacionats amb divisors i múltiples. Fixeu-vos que sempre cal fer una aproximació reflexiva, pensant si el que ens demanen són *divisors* o *múltiples*. Resoleu el següent problema:

Trobeu totes les maneres possibles d'empaquetar 40 llandes de tomata en caixes

d'igual nombre de llandes.

- Busquem els divisors o els múltiples? Busquem un divisor, perquè cal fer grups més petits repartint les 40 llandes originals.
- 40 és divisor o múltiple? És el múltiple, ja que és major.

Activitat 4.3

Donat el següent problema:

> *En un ramat hi ha menys de 40 ovelles. Quan el pastor les compta de 5 en 5 li'n sobra 1, però si les compta de 3 en 3 no li'n sobra cap. Quantes ovelles té el ramat?*

a) Busquem el divisor o el múltiple?

b) 3 i 5 són divisors o múltiples?

Solució en pàg. 388

4.2. Propietats de divisibilitat

Propietats de divisibilitat 1

Si un nombre és divisor dels altres dos, a, m i $n \in \mathbb{N}$, si $a \mid m$ i $a \mid n$, llavors:

a) és divisor de la suma, $a \mid (m+n)$

b) és divisor de la diferència, $a \mid (m-n)$, si $m \geq n$

c) és divisor de qualsevol dels múltiples, $a \mid k \cdot m$, sent $k \in \mathbb{N}$

d) és divisor del producte, $a \mid m \cdot n$

Exemple 4.4

Com que 4 és divisor de 20 i de 12, $4 \mid 20$ i $4 \mid 12$:

a) 4 és divisor de $20 + 12$

b) 4 és divisor de $20 - 12$

c) 4 és divisor de $20 \cdot 3$ o de $12 \cdot 5$ (un múltiple de 20 i un altre de 12)

d) 4 és divisor de $12 \cdot 20$

Es basa en les propietats bàsiques de la suma i la multiplicació i en el fet que $4 \cdot 5 = 20$ i $4 \cdot 3 = 12$.

Propietats de divisibilitat 2

Si un nombre és divisor d'un altre i multipliquem els dos nombres per una mateixa quantitat la relació de divisibilitat es conserva.
És a dir, donats $a, b \in \mathbb{N}$ tals que $a \mid b \Longrightarrow a \cdot k \mid b \cdot k$, per a tot $k \in \mathbb{N}, k \neq 0$

Exemple 4.5

4 és divisor de 20, així, $4 \cdot 6$ és divisor de $20 \cdot 6$, és a dir, 24 és divisor de 120. Es basa en les propietats bàsiques de la multiplicació.

Propietats de divisibilitat 3

Si un nombre és divisor d'un altre, llavors és divisor de qualsevol de les seues potències d'exponent natural major o igual que 1.
És a dir, donats $a, b \in \mathbb{N}$ tals que $a \mid b \Longrightarrow a \mid b^k$, per a tot $k \in \mathbb{N}, k \geq 1$

Exemple 4.6

4 és divisor de 20. De tal manera que 4 serà divisor de, per exemple, 20^2, ja que $20^2 = 20 \cdot 20$ i, per tant, podem aplicar la propietat anterior.

Propietats de divisibilitat 4

Per a tot nombre natural $a \in \mathbb{N}, a \neq 0$, es compleixen les següents propietats:

a) 1 és divisor d a: $1 \mid a$

b) Tot nombre natural a és divisor de si mateix: $a \mid a$

c) Tot nombre natural a és divisor de zero: $a \mid 0$

d) Zero només és divisor de si mateix.

! Tingueu en compte que totes aquestes propietats que hem vist poden ser enunciades també en termes de "múltiple" en lloc de "divisor".

4.3. Criteris de divisibilitat

En general, per a saber si un nombre és divisible per un altre s'efectua la divisió entera i es comprova si el residu és zero. Però, en alguns casos, existeixen **regles** que permeten esbrinar si un nombre és divisible per un altre sense necessitat d'efectuar la divisió. Aquestes regles s'anomenen **criteris de divisibilitat**.

Sense ser essencials per al fet de calcular, conèixer els criteris de divisibilitat pot ser de gran ajuda en algunes situacions aritmètiques. Per exemple, la pregunta *Quins d'aquests nombres* 27, 45, 38, 70 *i* 111 110 *són divisibles per 2, 5, o 10?* té fàcil resposta si es coneixen els criteris de divisibilitat.

Criteris de divisibilitat

A continuació enunciem alguns criteris de divisibilitat:

a) Un nombre és **divisible per 2** quan acaba en 0 o en xifra parell.

b) Un nombre és **divisible per 3** quan la suma de les xifres és múltiple de 3.

c) Un nombre és **divisible per 5** quan acaba en 0 o en 5.

d) Un nombre és **divisible per 9** quan la suma de totes les xifres és múltiple de 9.

e) Un nombre és **divisible per 10** quan acaba en 0.

f) Un nombre és **divisible per 11** si i només si sumant, d'una banda, les xifres que ocupen lloc parell i, de l'altra, les que ocupen lloc imparell, i restant el menor dels nombres obtinguts al major s'obté 0 o un múltiple d'11.

g) Un nombre és **divisible per 12** quan ho és per 3 i per 4.

Exemple 4.7

Per a comprovar si 5280 és divisible per 11 faríem el següent:

- xifres en lloc parell: $8 + 5 = 13$
- xifres en lloc imparell: $0 + 2 = 2$

Així, $13 - 2 = 11$, per tant, 5280 sí que és divisible per 11.

Activitat 4.4

Comprova si 58 081 és divisible per 11.

Solució en pàg. 388

Activitat 4.5

Afegiu les dues xifres finals al nombre 75___, perquè siga a la vegada divisible entre 2 i entre 9.

Solució en pàg. 388

Activitat 4.6

Determineu els dígits a i b perquè el nombre $ab23b1$ siga múltiple de 33.

Solució en pàg. 388

Propietat de divisibilitat 5

Un nombre $n \in \mathbb{N}$ serà **divisible pel producte de dos nombres** a i b, $a, b \in \mathbb{N}$ si i sols si es compleixen a la vegada:

- n és divisible per a i per b a la vegada
- a i b només tenen l'1 com a factor comú en la seua factorització

Activitat 4.7

Demostreu el criteri de divisibilitat per 12 per a qualsevol nombre natural basant-vos en la propietat anterior.

Solució en pàg. 388

4.4. Nombres primers i compostos

El conjunt dels nombres naturals diferents de la unitat i del 0 és format per dos grans subconjunts de nombres, els que s'anomenen primers i els compostos. A continuació intentarem aprofundir en l'estructura dels naturals a partir d'aquesta classificació explicant primer la definició de cada un.

Divisors propis i impropis

Qualsevol nombre $a \in \mathbb{N}$ es pot dividir per 1 i per a, els quals anomenarem **divisors impropis de** a. Als altres divisors que poguera tenir a els anomenem **divisors propis**.

Exemple 4.8

Donat el nombre 15, 1 i 15 són divisors impropis i 3 o 5 són divisors propis.

Nombre primer i compost

- Un **nombre primer** és un nombre natural diferent de 0 i d'1 que no té divisors propis.
- Un nombre direm que és **nombre compost** si té divisors propis.

Exemple 4.9

El nombre 15, és nombre compost, perquè té divisors diferents d'1 i 15 (divisors propis). En canvi, el nombre 17, és primer, perquè no té altres divisors que els propis (1 i 17).

Cal notar que 0 i 1 no es consideren nombres primers ni compostos.

Exemple 4.10

Donats els nombres 2, 72, 43 i 45. Quin nombre és primer i quin és compost?

Com es pot comprovar la tasca de veure si un nombre és primer o no pot ser molt complexa, especialment amb nombres alts, ja que cal estudiar la seua divisibilitat pels nombres inferiors. En el que segueix intentarem obtenir formes més operatives de saber quan un nombre és o no primer.

4.4.1 El Garbell d'Eratòstenes per a obtenir els nombres primers

El Garbell d'Eratòstenes

El **Garbell d'Eratòstenes** consisteix en una tècnica per a obtenir la successió de nombres primers menors que un nombre n donat. La invenció s'atribueix al matemàtic grec Eratòstenes (276-194 aC).

Procediment: Per a esbrinar els nombres primers menors que un cert n s'escriuen tots els nombres naturals fins a n.

- Es ratlla l'1 perquè no és un nombre primer.
- El primer nombre que queda sense ratllar és el 2 que sí que és primer; a partir d'aquest, es ratllen tots els nombres parells.
- A partir del 3 es compten els nombres de tres en tres i es ratllen els múltiples de 3.
- Comptant de cinc en cinc es ratllen els nombres que ocupen el cinquè lloc.
- Es repeteix aquest procés fins a arribar a un nombre primer el quadrat del qual siga major que n

Exemple 4.11

Per als 100 primers nombres, com a resultat final d'aquest procés obtindrem el quadre següent:

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	60
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

En la Figura 4.1 teniu representada la distribució dels nombres primers des d'1 fins a 76 800, cada píxel representa un nombre, cada píxel negre, un nombre primer. Com podem observar, la distribució dels primers al llarg de $\mathbb{N}$ és uniforme a gran escala, en contra del que la intuïció podria dir-nos.

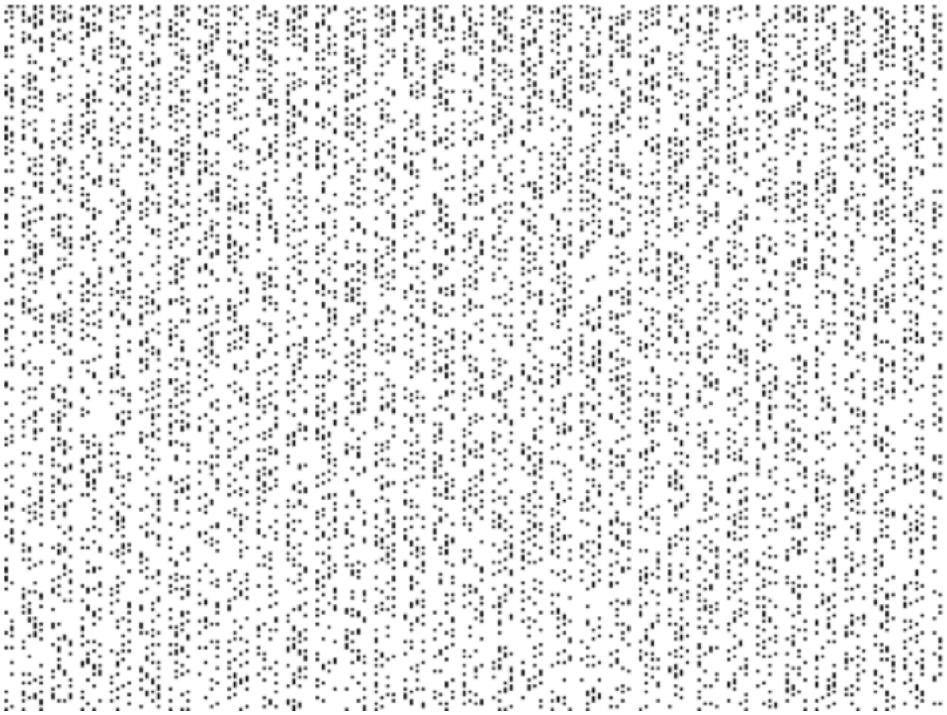


Figura 4.1. Distribució de nombres primers d'1 fins a 76 800

Trobar nombres primers grans ha sigut el passatemps favorit d'alguns matemàtics. Abans de la invenció de les calculadores i dels ordinadors, això era una bona forma de passar el temps. Com s'indica en Musser, Peterson, i Burger (2013), Euler una vegada va anunciar que 1 000 009 era primer. No obstant això, ell mateix es va adonar més tard que era el producte de 293 i 3413. Quan ho va esbrinar, Euler tenia ja 70 anys i era cec. A Fermat li preguntaren una vegada si 100 895 598 169 era primer. Va respondre breument que tenia dos factors primers, 898 423 i 112 303.

Durant més de 200 anys el nombre de Mersenne $2^{67} - 1$ va ser considerat primer. El 1903, Nelson Franc Cole, en una conferència de la Societat Matemàtica Americana, va eixir a la pissarra i sense dir una paraula, va elevar 2 a la 67 (a mà, usant el nostre algorisme de multiplicació habitual!), i li va restar 1. Després va multiplicar 193 707 721 per 761 838 257 287 (també a mà). Els dos nombres coincidiren. Quan li van preguntar quant de temps havia necessitat per a trobar aquesta descomposició del nombre de Mersenne, va dir que havia trigat "tres anys de diumenges". Els nombres de la forma $2^n - 1$ s'anomenen nombres de Mersenne

Actualment, el nombre primer més gran conegut és el nombre de Mersenne $2^{282\,589\,933} - 1$, que té 24 862 048 dígits, i va ser descobert el 7 de desembre de 2018 per la iniciativa col · laborativa GIMPS (*Great Internet Mersenne Prime Search*, https://www.mersenne.org/).

Com saber si un nombre és primer?

- Per a saber si un nombre n és primer, s'ha de comprovar si té algun divisor diferent d'1 i de si mateix.
- Si és parell, diferent de 2, serà compost.
- Si és imparell, dividirem el nombre entre els primers menors que ell.
- Podrem parar quan el quadrat del possible divisor passe del nombre n. No cal dividir-lo entre tots els nombres menors que ell.

4.4.2 Factorització d'un nombre natural en primers

A continuació estudiarem un dels resultats més importants de la teoria de nombres: el **teorema fonamental de l'aritmètica**. Aquest resultat va ser pràcticament demostrat per primera vegada per Euclides en el llibre *Els elements*, encara que la primera demostració completa va aparèixer en l'obra de Gauss en 1801.

Teorema fonamental de l'aritmètica

Tot nombre natural es pot descompondre com a producte de nombres primers, i aquesta descomposició és única. En termes matemàtics:

$$\forall n \in \mathbb{N}, n = p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{m_r}$$

on p_i són nombres primers i m_j són nombres naturals.

A vegades aquesta descomposició d'un nombre en producte de primers és fàcil d'obtenir. Per a obtenir-la podríem seguir aquests passos:

- Es descompon el nombre en producte d'altres.
- Si aquests són primers, el procés es para.
- Si algun és compost, es torna a descompondre en factors fins que tots els factors obtinguts són primers.

Exemple 4.12

$$\begin{aligned} 18000 &= 18 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 2 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 = \\ &= 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \end{aligned}$$

No obstant això, aquesta tècnica no sembre és senzilla d'aplicar, i, per tant, donarem una aproximació algorítmica per a l'obtenció de la factorització d'un nombre en nombres primers.

Algorisme de factorització en nombres primers

La **tècnica algorítmica per a la factorització d'un nombre $n \in \mathbb{N}$ en nombres primers** consisteix en:

1. Recorrem la successió dels nombres primers comprovant si són divisors o no del nombre que volem descompondre.
2. Quan es troba un nombre primer que és divisor, s'efectua la divisió i es continua el procés amb el quocient.
3. Es continua així fins que s'obté com a quocient la unitat, moment en què el procés s'acaba.

Exemple 4.13

La descomposició de 173 512 seguint l'algorisme sol explicitar-se amb la tècnica escolar següent:

1 7 3 5 1 2	2
8 6 7 5 6	2
4 3 3 7 8	2
2 1 6 8 9	2 3
9 4 3	2 3
4 1	4 1
1	

Per tant, $173512 = 2^3 \cdot 23^2 \cdot 41$.

Activitat 4.8

Trobeu la descomposició en factors primers del nombre 7644.

Solució en pàg. 388

4.5. Condició de divisibilitat i quantitat de divisors

En aquesta secció, una vegada trobada la descomposició factorial en primers d'un nombre, estudiarem la quantitat de divisors d'aquest nombre. Ens centrarem en l'estudi de dos casos particulars:

Quantitat de divisors en casos particulars

a) **Nombres amb un únic factor primer**. Si la descomposició factorial del nombre és de la forma p^a, on p és primer, els divisors seran $1, p, p^2, p^3 ..., p^a$. Sent en total $a + 1$ divisors.

b) **Nombres amb dos factors primers**. Si la descomposició factorial del nombre és de la forma $p^a \times q^b$, sent p, q primers, llavors els divisors s'obtenen multiplicant cada una de les potències de p $(1, p, p^2, p^3, \ldots, p^a)$ per cada una de les potències de q $(1, q, q^2, q^3, \ldots, q^b)$.

El nombre total de divisors és $(a+1)\cdot(b+1)$. La millor manera de fer-ho és construir

una taula multiplicativa de doble entrada.

Exemple 4.14

Explorem el cas a): $64 = 2^6$, en aquest cas $a = 6$.

6 4	2
3 2	2
1 6	2
8	2
4	2
2	2
1	

Els divisors seran:

1	2	$2^2 = 4$	$2^3 = 8$	$2^4 = 16$	$2^5 = 32$	$2^6 = 64$

El nombre 64 té, per tant, 7 divisors ($a + 1$ divisors). Açò ho escriurem en forma de conjunt com a $\mathcal{D}(64) = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64\}$. A més, $|\mathcal{D}(64)| = 7$.

Exemple 4.15

Explorem el cas b): $648 = 2^3 \cdot 3^4$

6 4 8	2
3 2 4	2
1 6 2	2
8 1	3
2 7	3
9	3
3	3
1	

Per a obtenir els divisors, fem una taula multiplicativa de doble entrada:

$\times$	1	3^1	3^2	3^3	3^4
1					
2^1					
2^2					
2^3					

El nombre total de divisors l'obtindrem calculant totes les possibles combinacions (multiplicatives) de la taula anterior, és a dir, hi haurà $(a + 1) \times (b + 1) = (3 + 1) \times (4 + 1) = 20$ divisors, $|\mathcal{D}(648)| = 20$.

Calculeu vosaltres els divisors concrets a partir de la taula.

Quantitat de divisors en el cas general

Donat un nombre $n \in \mathbb{N}$, la descomposició del qual en factors primers és

$$n = p_1^{m_1} \times p_2^{m_2} \times p_3^{m_3} \times \cdots \times p_r^{m_r}$$

on p_i són nombres primers i m_j són els exponents dels nombres primers anteriors. Llavors **el nombre total de divisors** de n és:

$$|\mathcal{D}(n)| = (m_1 + 1) \times (m_2 + 1) \times (m_3 + 1) \cdots \times (m_r + 1)$$

Exemple 4.16

Calculem la quantitat de divisors del número 180. $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$

1 8 0	2
9 0	2
4 5	3
1 5	3
5	5
1	

$|\mathcal{D}(180)| = (2 + 1) \times (2 + 1) \times (1 + 1) = 3 \times 3 \times 2 = 18$. Tenim en total 18 divisors.

Per a obtenir els divisors concrets hauríem d'efectuar la taula de doble entrada dues vegades. Com fem a continuació:

- Agafem primer la combinació dels factors primers 2 i 3:

$\times$	1	3^1	3^2
1	1	3	9
2^1	2	6	18
2^2	4	12	36

- Finalment, combinem els resultats obtinguts amb el factor que ens queda, el 5: factors primers 2 i 3:

$\times$	1	2	3	4	6	9	12	18	36
1	1	2	3	4	6	9	12	18	36
5^1	5	10	15	20	30	45	60	90	180

En aquesta última taula tenim tots els 18 divisors de 180.

Activitat 4.9

a) Escriviu la factorització de 36

b) Enumereu els divisors de 36

c) Escriviu la factorització en primers de cada divisor de 36

d) Quina relació hi ha entre la factorització de l'apartat a) i la que obteniu en l'apartat c)?

e) Siga $n = 13^2 \cdot 29^5$. Si $m \mid n$, què podeu concloure de la factorització de m?

Solució en pàg. 389

El fet numèric que acabem de veure en l'Activitat 4.9 dona lloc al següent teorema sobre la condició suficient i necessària perquè un nombre siga divisible per un altre.

Condició de divisibilitat

La condició necessària i suficient perquè **un nombre siga divisible per un altre** és que el primer continga tots els factors primers del segon amb exponents iguals o majors.

Exemple 4.17

Siguen $n = 1080$ i $d = 45$. Descomponem en factors primers aquests nombres:

$$1080 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5$$
$$45 = 3^2 \cdot 5$$

Com que 1080 conté tots els factors primers de 45 amb exponent major o igual, 1080 és divisible entre 45.

Activitat 4.10

Siga el nombre natural n, i siguen p, q, r nombres primers tals que:

$$n = p^a \cdot q^b \cdot r^c$$

Calculeu el nombre total de divisors de n, $|\mathcal{D}(n)|$.

Activitat 4.11

En una classe hi ha 28 alumnes. Per a fer una competició, el professor d'educació física vol formar equips de manera que cada equip tinga el mateix nombre d'alumnes, sense que en sobre cap. De quantes maneres diferents podrà fer els equips?

Solució en pàg. 389

Activitat 4.12

Quins són els nombres que tenen només 3 divisors? I només 4?

Solució en pàg. 389

Activitat 4.13

Sabent que un nombre té 7 divisors, esbrineu de manera raonada quants d'aquests divisors són primers.

Solució en pàg. 390

Activitat 4.14

Quin és el menor nombre natural que té 12 divisors?

Solució en pàg. 390

4.6. Màxim comú divisor i mínim comú múltiple

4.6.1 El màxim comú divisor i com es calcula

Ja sabem que el conjunt dels divisors d'un nombre a s'escriu: $\mathcal{D}(a) = \{1, \ldots, a\}$. Si considerem ara dos nombres a i b, el conjunt dels nombres que són **divisors de a i b al mateix temps** s'escriu:

$$\mathcal{D}(a, b) = \{1, \ldots\}$$

Aquest conjunt **no és buit**, perquè sempre conté almenys l'1. A més, té un element màxim. A aquest element l'anomenem **màxim comú divisor**, i s'escriu $\text{mcd}(a, b)$.

Màxim comú divisor (mcd)

En general, direm que k **és un divisor comú** dels nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n$ si k els divideix a tots. El més gran dels divisors comuns d'aquests nombres s'anomena **màxim comú divisor** d'$a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Es denota per $\text{mcd}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.



Per al càlcul del mcd de dos nombres podem fer ús de dues aproximacions:

a) **Mitjançant el càlcul de divisors**: Per a fer-ho, es calculen tots els divisors dels dos nombres i després es calcula la intersecció entre el conjunt dels divisors d'un nombre i el conjunt dels divisors de l'altre. **El major element del conjunt intersecció és el mcd**.

b) **Mitjançant la descomposició en factors primers**: Per a fer-ho, es descomponen els nombres en factors primers, llavors, **el mcd serà el resultat de multiplicar tots els divisors primers comuns elevats al menor exponent**.

Exemple 4.18

Vegem un exemple del càlcul pel mètode a):

Donats $a = 126$ i $b = 315$,

$$\begin{aligned} 126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7 &\implies \mathcal{D}(126) = \{1, 2, 3, 6, 7, 9, 14, 18, 21, 42, 63, 126\} \\ 315 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7 &\implies \mathcal{D}(315) = \{1, 3, 5, 7, 9, 15, 21, 35, 45, 63, 105, 315\} \end{aligned}$$

Per tant, el conjunt de divisors comuns és:

$$\mathcal{D}(126, 315) = \{1, 3, 7, 9, 63\}$$

Així, $\text{mcd}(126, 315) = 63$.

Exemple 4.19

Vegem un exemple del càlcul pel mètode b):

Donats $a = 630$ i $b = 588$,

$630 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$
$588 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7^2$

Els factors comuns amb l'exponent menor són: 2, 3 i 7. Per tant $\text{mcd}(630, 588) = 2 \times 3 \times 7 = 42$.

Nombres primers entre si

Si $\mathcal{D}(a, b) = \{1\}$, els dos nombres a i b es diuen **primers entre si**, i en tal cas $\text{mcd}(a, b) = 1$.

Exemple 4.20

Donats els nombres 81 i 125 obtenim que $\text{mcd}(125, 81) = 1$, ja que

$$\begin{aligned} 81 = 3^4 &\implies \mathcal{D}(81) = \{1, 3, 9, 27, 81\} \\ 125 = 5^3 &\implies \mathcal{D}(125) = \{1, 5, 25, 125\} \end{aligned}$$

Per tant, 81 i 125 són primers entre si perquè no tenen divisors propis comuns.

4.6.2 El mínim comú múltiple i el seu càlcul

Siga el nombre a, per a obtenir el **conjunt dels múltiples de** a, anomenat $\mathcal{M}(a)$, es multiplica successivament el nombre a per cada un dels nombres naturals: 0, 1, 2, 3, etc. (és a dir, la taula de multiplicar de a). Recordem que un nombre té infinits múltiples, per tant, el conjunt $\mathcal{M}(a)$ és infinit.

El conjunt dels múltiples d'un nombre a s'escriuria, per tant,

$$\mathcal{M}(a) = \{a, 2a, 3a, 4a, \dots, na, \dots\}$$

Si considerem ara dos nombres a i b, el conjunt dels nombres que són múltiples de a i b al mateix temps s'escriu:

$$\mathcal{M}(a, b) = \{\dots, a \cdot b, \dots, 2 \cdot a \cdot b, \dots, 3 \cdot a \cdot b, \dots\}$$

Aquest conjunt torna a ser no buit, perquè sempre conté almenys l'element $a \cdot b$ i els seus múltiples. És infinit, i no té, per tant, element màxim, però sí que té element **mínim**. Aquest element s'anomena **mínim comú múltiple**, i s'escriu $\text{mcm}(a, b)$.

Mínim comú múltiple (mcm)

En general, direm que k és un múltiple comú dels nombres $a_1, a_2, \dots, a_n$ si k és un múltiple de tots. Si tenim en compte només els múltiples comuns distints de zero, el més petit dels múltiples comuns a aquests nombres s'anomena **mínim comú múltiple** d'$a_1, a_2, \dots, a_n$.

Es denota per $\text{mcm}(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Novament, per al càlcul del mcm de dos nombres podem fer ús de dues aproximacions:

a) **Mitjançant la sèrie dels múltiples**: per a fer-ho es calcula la sèrie de múltiples d'un dels nombres, es calcula la sèrie de múltiples de l'altre, es busca la intersecció. El **nombre més petit del conjunt intersecció** distint de zero és el mcm.

b) **Mitjançant la descomposició en factors primers**: En aquest cas es descomponen els nombres en factors primers. **El mcm serà el resultat de multiplicar tots els divisors primers dels nombres donats, tant comuns com no comuns, elevats a l'exponent més gran.**

Exemple 4.21

Vegem un exemple del càlcul del mcm pel mètode a):

Donats $a = 36$ i $b = 48$,

$$36 = 2^2 \cdot 3^2 \implies \mathcal{M}(36) = \{36, 72, 108, 144, 180, \dots\}$$
$$48 = 2^4 \cdot 3 \implies \mathcal{M}(48) = \{48, 96, 144, 192, 240, \dots\}$$

Per tant, el conjunt de múltiples comuns és:

$$\mathcal{M}(36, 48) = \{144, 288, 432, \dots, 36 \cdot 48, \dots\}$$

Així, $\text{mcm}(36, 48) = 144$.

Exemple 4.22

Vegem un exemple del càlcul del mcm pel mètode b):

Donats $a = 252$ i $b = 120$,

$$252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$$
$$120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$$

Agafant ara tant els factors comuns com no comuns elevats a l'exponent més gran tenim que $\text{mcm}(252, 120) = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 = 2520$.

Activitat 4.15

En comptar les boletes de 4 en 4, de 5 en 5 i de 6 en 6, uns xiquets s'adonen que cada vegada els en sobren dos. Quantes boletes són, sabent que és un nombre comprès entre 200 i 250?

Solució en pàg. 390

Activitat 4.16

Trobeu totes les maneres possibles d'empaquetar 120 llandes de tomata en caixes d'igual nombre de llandes.

Solució en pàg. 390

Activitat 4.17

La recaptació d'un dia en un teatre va ser de 25€i un altre dia de 80€. Quant val cada entrada, si totes tenen el mateix preu, i el preu és un nombre exacte d'euros?

4.6.3 L'algorisme d'Euclides per al càlcul del mcd

L'algorisme d'Euclides és un procés per a trobar el màxim comú divisor sense haver de fer la descomposició en factors primers. Pot ser d'especial utilitat amb nombres grans difícils de descompondre.

L'algorisme d'Euclides per al càlcul del mcd

Per a fer servir l'algorisme d'Euclides cal dividir el nombre més gran entre el més petit i,

a) si la divisió és exacta, el divisor és el mcd

b) si la divisió no és exacta, llavors dividim el divisor entre el residu obtingut i es continua d'aquesta manera fins a obtenir una divisió exacta. L'últim divisor és el mcd dels dos nombres.

Exemple 4.23

Ara calcularem el $\text{mcd}(234, 46)$ fent ús de l'algorisme d'Euclides:

$$\begin{aligned} 234 &= 46 \times 5 + 4 \\ 46 &= 4 \times 11 + 2 \\ 4 &= 2 \times 2 + 0 \text{ (divisió exacta)} \end{aligned}$$

Per tant, $\text{mcd}(234, 46) = 2$.

Habitualment es fa ús d'una representació en forma de taula per a fer aquest algorisme, que seria com teniu a continuació:

	5	11	2
234	46	4	2
4	2	0	

$= \text{mcd}(234, 46)$

Propietat del mcd i mcm

El màxim comú divisor multiplicat pel mínim comú múltiple de dos nombres naturals és igual al producte d'aquests nombres, és a dir:
Donats $a, b \in \mathbb{N}$, tenim que $a \times b = \text{mcd}(a, b) \times \text{mcm}(a, b)$

Activitat 4.18

Calculeu el mcm$(728, 304)$ usant l'algorisme d'Euclides.

Solució en pàg. 390

Altres propietats del mcd i mcm

- Si dos nombres es multipliquen (o divideixen) per un nombre natural c, llavors el mcd queda també multiplicat (o dividit) per c.
- Si dos nombres es multipliquen (o divideixen) per un altre nombre natural c, llavors el seu mcm també es multiplica (o divideix) per c.
- Tot múltiple comú de dos nombres, ho és també del seu mcm.
- Tot divisor comú de dos nombres, ho és també del seu mcd.

Activitat 4.19

Un fenomen astronòmic ocorre cada 20 anys, mentre que un altre es repeteix cada 16 anys. L'any 1920 van coincidir tots dos fenòmens. El dia d'avui, quantes vegades han coincidit des de llavors? Quin any tornaran a coincidir?

Solució en pàg. 391

Activitat 4.20

Quina ha de ser la capacitat del dipòsit més petit possible que es puga omplir amb un nombre exacte de bidons de 8, 10 i 12 litres respectivament?

Solució en pàg. 391

4.7. Activitats complementàries del tema

Activitat 4.21

Calculeu tots els divisors dels següents nombres: 25, 32, 54, 130 i 68.

Solució en pàg. 391

Activitat 4.22

Trobar tots els nombres naturals que tinguen 12 divisors i com a factors primers: 2, 3 i 7.

Solució en pàg. 391

Activitat 4.23

Els soldats d'una caserna no passen de 1000, però són més de 500, i es poden formar en grups de 16, 20 i 25 sense que en sobre ni en falte cap. Quants soldats hi ha en la caserna?

Solució en pàg. 391

Activitat 4.24

Trobeu tots els divisors del nombre 1 275 000 que siguen quadrats perfectes[a].

Solució en pàg. 391

[a]La definició de *quadrat perfecte* apareix en l'Activitat 4.12

Activitat 4.25

Completa els següents nombres perquè siguen divisibles per 9:

a) 61_45 b) 971_7 c) 8_416

Solució en pàg. 391

Activitat 4.26

Existeix algun nombre *capicua*[a] de tres xifres que siga divisible per 9 i per 5? Raoneu la resposta.

Solució en pàg. 391

[a]Nombre *capicua*: nombre que és igual llegit d'esquerra a dreta que de dreta a esquerra, per exemple el 2552.

Activitat 4.27

Escriviu un nombre de 4 xifres que siga divisible per 3 i per 4 i que:

a) Siga el més petit possible
b) Siga el més gran possible
c) Tinga les 4 xifres iguals
d) Tinga només 3 xifres iguals
e) Tinga només dues xifres iguals
f) Totes les seues xifres siguen diferents

Solució en pàg. 392

Activitat 4.28

Quin o quins nombres de 3 xifres, amb un 3 en la posició de les desenes, pot ser divisible per 4 i per 9?

Solució en pàg. 392

Activitat 4.29

Pot un nombre ser múltiple de 8 i no ser-ho de 4? Doneu exemples.

Solució en pàg. 392

Activitat 4.30

Pensem en els nombres primers:

a) Existeix algun nombre primer acabat en zero? Per què?

b) Pot un nombre primer acabar en xifra parella? Per què?

c) Dos nombres parells, poden ser primers entre si? Per què?

d) Dos nombres primers entre si són primers sempre? Per què?

Solució en pàg. 392

Activitat 4.31

Existeix algun nombre primer acabat en zero? Per què?

Solució en pàg. 392

Activitat 4.32

Comproveu si els següents parells de nombres són primers entre si:

a) 12 i 25 b) 15 i 25 c) 13 i 26

Solució en pàg. 393

Activitat 4.33

Quins dels següents nombres $7, 17, 27, 37, 47, 57, 67, 77, 87$ i 97 són compostos?

Solució en pàg. 393

Activitat 4.34

Comproveu si són primers o compostos:

a) 283 d) 289 g) 197

b) 157 e) 269 h) 963

c) 857 f) 1353 i) 391

Solució en pàg. 393

Activitat 4.35

Si sumem dos nombres primers, el resultat és un altre nombre primer? Justifiqueu la resposta i poseu exemples.

Solució en pàg. 393

Activitat 4.36

En una classe hi ha 24 alumnes i en una altra 30. Es volen formar equips per a jugar al voleibol del nombre més gran possible de jugadors, amb igual nombre de jugadors en cada equip i sense mesclar les classes. Quants jugadors hi haurà en cada equip? Quants equips es poden fer?

Solució en pàg. 393

Activitat 4.37

Calculeu el més gran dels divisors comuns:

a) 16, 24 i 32 b) 27 i 36 c) 20 i 30 d) 20, 32 i 48

Solució en pàg. 393

Activitat 4.38

Peter Boi té un rotllo de 30 metres de corda i Angelotti un altre de 48 metres. Volen tallar-los en trossos iguals de la major longitud possible sense que sobre cap tros. Quant mesurarà cada tros?

Solució en pàg. 393

Activitat 4.39

En una habitació de 360 cm de llarg i 320 cm d'ample es volen col · locar taulells quadrats de la major dimensió possible perquè càpien un nombre exacte de vegades en cada costat.

a) Quins han de ser les dimensions del taulell?

b) Quants taulells són necessaris?

Solució en pàg. 393

Activitat 4.40

Quins nombres hi ha que emprats com a divisors de 247, 367 i 427 donen en tots els casos resta 7?

Solució en pàg. 393

Activitat 4.41

En el contorn d'un camp trapezoidal de costats 72, 96, 120 i 132 m respectivament, s'han plantat arbres igualment espaiats. Sabent que n'hi ha un en cada vèrtex i que la distància entre dos arbres consecutius és la màxima possible i la mateixa en tots els costats. Calculeu aquesta distància. Quants arbres hi ha plantats?

Solució en pàg. 393

Activitat 4.42

La descomposició factorial d'un nombre m conté els factors: 2, 3, 5 i 7. La descomposició factorial d'un altre nombre n, els factors 2, 3, 5 i 13. Escriviu els possibles exponents que puguen tenir aquests factors de manera que el $\text{mcd}(m, n) = 60$.

Solució en pàg. 394

Activitat 4.43

Quin és el nombre més gran que divideix 2000, i dona de resta 11, i que divideix 2708, i dona de resta 17?

Solució en pàg. 394

Activitat 4.44

Calculeu múltiple comú més petit:

a) 6, 9 i 12 b) 14 i 36 c) 20, 24 i 36

Solució en pàg. 394

Activitat 4.45

Tres pescadors de Cullera ixen a pescar. Un cada 6 dies, un altre cada 8 dies i un altre cada 12 dies. Van coincidir el passat 3 de març. Quin dia tornaran a coincidir?

Solució en pàg. 394

Activitat 4.46

Quants nombres hi ha menors que 10 000 que siguen divisibles al mateix temps per 225 i 315? Escriviu-los tots.

Solució en pàg. 394

Activitat 4.47

Quin és el nombre més petit no divisible per 4, 6, 7, 10 ni 12, tal que en dividir-lo per cada un s'obtinguen restes iguals?

Solució en pàg. 394

Activitat 4.48

Quin és el nombre més xicotet que es pot dividir exactament per 5, 6 i 15? Com es diu aquest nombre?

Solució en pàg. 394

Activitat 4.49

Una caixa conté menys de 100 taronges i en contar-les de 4 en 4, de 5 en 5 i de 6 en 6, sobren sempre 3 taronges. Quantes taronges té la caixa?

Solució en pàg. 394

Activitat 4.50

Trobeu dos nombres naturals sabent que el mcd és 4 i el mcm és 252.

Solució en pàg. 394

Activitat 4.51

El mcm de dos nombres és 1260 i el mcd és 35. Trobeu-los, sabent que tots dos són majors que 100.

Solució en pàg. 394

Activitat 4.52

Calculeu dos nombres a i b sabent que $\text{mcd}(a, b) = 6$ i el producte $a \times b = 5184$.

Solució en pàg. 394

Referències

Musser, G. L., Peterson, B. E., i Burger, W. F. (2013). *Mathematics for Elementary teachers: A Contemporary Approach* (10th ed.). Wiley.

5

Nombres enters

Organització de continguts del Tema 5

1. Construcció dels nombres enters
2. El model de la recta numèrica per a representar els nombres enters
3. El valor absolut
4. Ordenació de nombres enters
   - El model de la recta numèrica per a establir ordenació en $\mathbb{Z}$
   - El valor absolut per a establir ordenació en $\mathbb{Z}$
5. Operacions amb nombres enters
   - Suma de nombres enters
   - Resta de nombres enters
   - Multiplicació de nombres enters
   - Quocient de nombres enters
   - Altres operacions amb nombres enters
   - Operar amb parèntesi

Al llarg d'aquest tema aprendrem per què amb els nombres naturals no tenim suficient competència numèrica per a resoldre problemes aritmètics i necessitarem nous nombres per a abordar-los. Construirem aquests nombres enters basant-nos, com no podria ser d'una altra manera, en el treball fet en els temes anteriors, de manera que els nombres enters siguen realment un sistema numèric resultant d'una ampliació del sistema numèric dels nombres naturals.

Com sabem, els nombres enters els podem veure en la vida quotidiana i són necessaris, moltes vegades, per a expressar situacions en les quals amb $\mathbb{N}$ no en tenim prou, com, per exemple, indicar nivells en un ascensor, temperatures sota zero, pèrdues en balanç financer, profunditat (Figura 5.1), ...

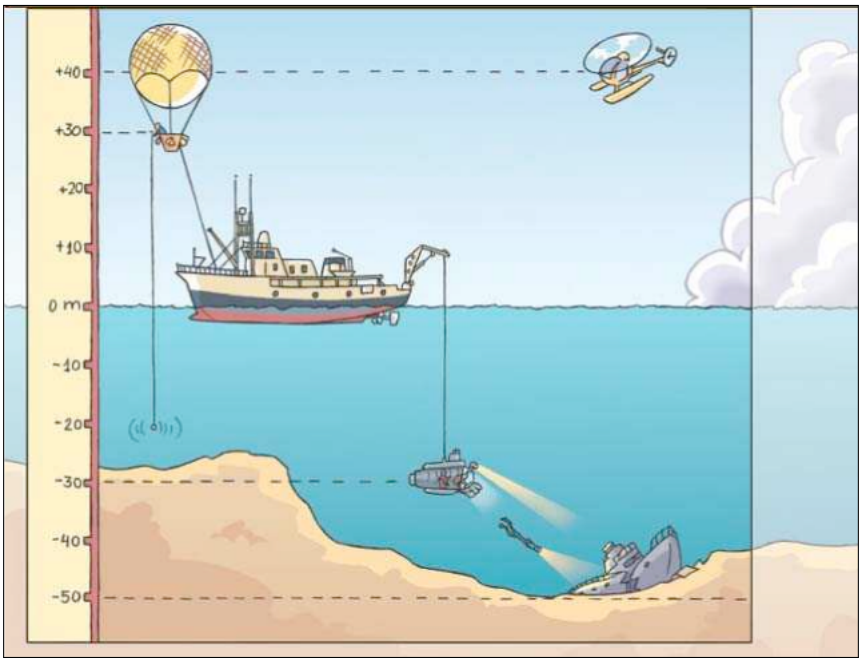


Figura 5.1. Exemple extret d'un llibre de primària en què s'introdueixen els nombres negatius

Això no obstant, històricament l'acceptació de l'existència dels nombres enters no sempre ha sigut general. En concret, des de la seua aparició fins a la seua acceptació van caldre més de 1000 anys. És cap a l'any 628 quan el matemàtic hindú Brahmagupta comença a fer ús dels nombres negatius per a fer càlculs, dels quals hi ha registre escrit. Els primers intents de legitimar l'ús dels negatius es fan cap al segle XVII; intents que continuen en els segles XVIII i XIX. L'admissió completa dels negatius la podem situar en l'any 1867, en part gràcies a l'obra de l'alemany Hankel sobre el sistema de *nombres complexos*. No obstant aquesta acceptació, els nombres negatius van continuar sent font de desacords, i això va donar lloc a diferents teories per a construir-los i fonamentar-los dins dels sistemes numèrics.

Finalment, a principis del segle XX, a partir dels treballs del grup de matemàtics coneguts amb el pseudònim de Bourbaki els nombres enters s'integren dins del sistema de nombres que usem actualment, en què les estructures abstractes mostrades en la Figura 5.2, s'integren una dins de l'altra: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Podeu consultar l'obra Vargas-Machuca i cols. (1999) per a llegir més sobre la llarga i atzarosa història dels nombres negatius.

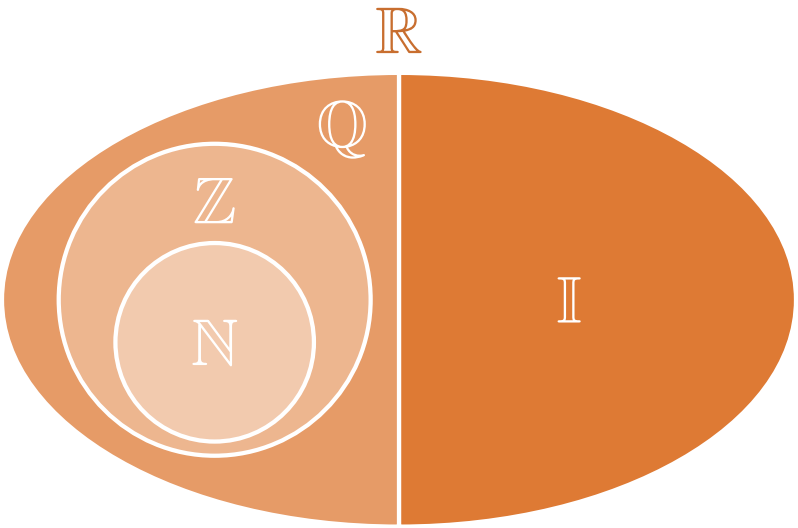


Figura 5.2. Estructura dels conjunts de nombres que estudiarem en l'assignatura

5.1. Construcció dels nombres enters

La construcció formal dels nombres negatius ens obligaria a fer ús d'un rigor matemàtic que considerem que està fora dels objectius de l'assignatura, és per això que farem una aproximació intuïtiva a la construcció de $\mathbb{Z}$.

El conjunt dels nombres enters ($\mathbb{Z}$)

Anomenem conjunt dels **nombres enters** el conjunt següent definit per extensió:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, \dots\}$$

- El subconjunt format pels nombres $\{+1, +2, +3, \dots\} = \mathbb{Z}^+$ s'anomena el dels **enters positius**, els elements del qual poden indistintament representar-se amb el signe $+$, o sense. Així, $+4 = 4$.
- El subconjunt format pels nombres $\{-1, -2, -3, \dots\} = \mathbb{Z}^-$ s'anomena el dels **enters negatius**.
- El nombre 0 és un enter que no es considera ni positiu ni negatiu.

A més, tenim que $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^+ \cup \mathbb{Z}^- \cup \{0\}$.

De manera informal, podem entendre la construcció dels nombres enters com una assignació. Així, per a cada nombre natural a es pot considerar el corresponent nombre "negatiu", que s'escriu $-a$ (i es llig *menys* a) i compleix la condició $a + (-a) = 0$. D'aquesta manera, intuïtivament tenim que **el conjunt dels nombres enters** està format pels nombres naturals (que anomenarem *enters positius*), els seus corresponents *nombres negatius* i el zero.

> **!** La manera en què $\mathbb{Z}$ s'ha construït, amb la intenció de ser una ampliació dels nombres naturals, dona com a resultat que $\mathbb{N}$ i $\mathbb{Z}^+$ són isomorfs, hereten totes les propietats, operacions i relacions que ja hem estudiat. Açò es tradueix en el costum d'anomenar els nombres naturals com a enters positius.

5.2. El model de la recta numèrica per a representar els nombres enters

Com s'indica en Vargas-Machuca i cols. (1999), les situacions on són presents, i s'usen, els nombres enters moltes vegades no tenen un significat intuïtiu o concret en tots els contextos. Per exemple, multiplicar temperatures no té sentit, restar deutes tampoc té un suport intuïtiu fàcil. Per això en l'ensenyament dels nombres enters es fa ús, típicament, de models que ajuden a comprendre'ls i intenten fonamentar algunes de les regles aritmètiques.

Un d'aquestos models que típicament es fa servir és el **model de la recta numèrica per a representar nombres enters** (o model de mesura). En aquest model, la interpretació dels nombres amb signe com a punts de la recta permet interpretar l'ordre entre ells des d'un punt de vista espacial, com es veu en la Figura 5.3. En aquest model, el signe negatiu s'interpreta com un desplaçament a l'esquerra del zero i el signe positiu com un desplaçament cap a la dreta (Figura 5.3, a), de tal manera que cada enter queda situat en la recta numèrica (Figura 5.3, b).

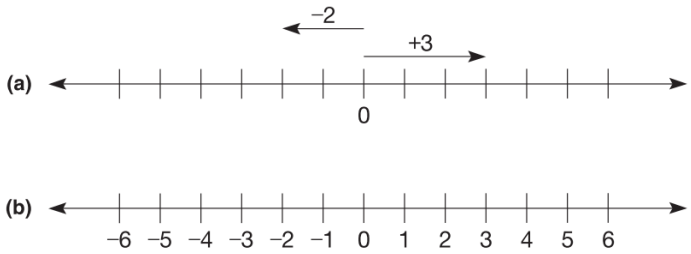


Figura 5.3. Model de mesura per als enters (extreta de Musser, Peterson, i Burger, 2013)

5.3. El valor absolut

El valor absolut d'un nombre enter

El **valor absolut d'un nombre enter** a és el seu valor numèric prescindint del signe, i es denota entre barres, $|a|$. El valor absolut de zero és zero.

Exemple 5.1

En el model de la recta numèrica, el valor absolut d'un nombre enter a s'interpreta com la distància a la qual es troba a del zero (Figura 5.4).

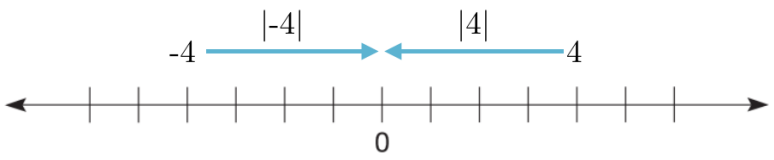


Figura 5.4. Representació del valor absolut de 4 i −4 en el model de mesura

L'oposat d'un nombre enter

Donat un nombre enter, anomenarem **oposat** el nombre enter amb igual valor absolut però amb diferent signe. L'ús del signe $-$ davant d'un nombre fa referència al seu oposat. Així, $-x$ seria l'oposat de x. El **zero** no té oposat.

Exemple 5.2

En l'Exemple 5.1 tenim que 4 i -4 són nombres oposats.

Exemple 5.3

- L'oposat d'un nombre enter positiu és negatiu: l'oposat de 45 és -45
- L'oposat d'un nombre enter negatiu és positiu: l'oposat de -13 és $-(-13) = 13$

Activitat 5.1

Calculeu les següents expressions amb valors absoluts:

a) $|5|$

b) $|-17|$

c) $|5-7|$

d) $|5|-|7|$

e) $-|7-5|$

f) $-|-(7-5)|$

Solució en pàg. 395

Activitat 5.2

Estudieu el signe de les següents expressions:

a) $|x|$ b) $-|x|$ c) $|-x|$ d) $-|-x|$

Solució en pàg. 395

Activitat 5.3

Entre un nombre positiu i el seu oposat hi ha 25 nombres. Quin és el nombre positiu?

Solució en pàg. 395

5.4. Ordenació de nombres enters

Els conceptes *més gran que* i *més petit que* en els enters es defineixen com a extensions de la relació d'ordre però aplicada a tots els nombres enters. De manera general, qualsevol enter positiu és més gran que qualsevol enter negatiu. A més, zero és més petit que qualsevol positiu i més gran que qualsevol negatiu.

Exemple 5.4

És fàcil reconèixer que $+6 > -3$, $+1 > -8$, $+4 > -100$ o que $-5 < 0 < +5$.

5.4.1 El model de la recta numèrica per a establir ordenació en $\mathbb{Z}$

Una manera molt intuïtiva per a establir l'ordre en els enters és fer ús del model de la recta numèrica, de manera que donats $a, b \in \mathbb{Z}$, $a < b$ si a està situat a l'esquerra de b.

Exemple 5.5

Així, per a veure que $-3 < 2$ només cal representar-los en la recta i comprovar que -3 està situat a l'esquerra de 2 (Figura 5.5).



Figura 5.5. Representació del fet que $-3 < 2$ en el model de mesura (extreta de Musser i cols., 2013)

5.4.2 El valor absolut per a establir ordenació en $\mathbb{Z}$

També podem fer ús del valor absolut per a establir una ordenació en els enters, fent ús de les següents propietats:

- Donats dos nombres enters positius és major el que té major valor absolut
- Donats dos nombres enters negatius és major el que té menor valor absolut

Exemple 5.6

- $+5 > +3$, ja que $|+5| = 5 > |+3| = 3$
- $-4 > -9$, ja que $|-4| = 4 < |-9| = 9$

Activitat 5.4

Ordeneu, en sentit creixent, representeu gràficament, i calculeu els oposats i valors absoluts dels següents nombres enters: $8, -6, -5, 3, -2, 4, -4, 0, 7$.

Solució en pàg. 395

Activitat 5.5

Indiqueu de manera justificada quines de les següents afirmacions són correctes:

a. Com més gran és el valor absolut d'un nombre enter, major és el nombre.

b. L'oposat d'un nombre enter és sempre menor que aquest nombre.

c. El valor absolut de l'oposat d'un nombre és igual al valor absolut del nombre.

d. L'oposat de l'oposat d'un nombre enter és zero.

Solució en pàg. 396

5.5. Operacions amb nombres enters

La creació de nous nombres implica, com hem vist abans, noves regles per a relacionar-los, encara que exportades dels nombres dels quals provenen. En el cas de les operacions les idees que ens hem format sobre les operacions entre nombres naturals s'han d'exportar, d'alguna manera, als nous nombres creats a partir d'ells. És per això que es diu que les operacions amb enters, suma i multiplicació, són una extensió natural de les operacions amb nombres naturals, si s'atén a les regles de signes que estudiarem més avant. Cal, a més, tenir en compte el significat de les operacions amb nombres enters, ja que aquests estan ordenats segons els signes que tenen i el seu valor absolut.

5.5.1 Suma de nombres enters

Suma de nombres enters

- Per a sumar dos nombres enters del **mateix signe**:
  - Se sumen els seus valors absoluts
  - Al resultat s'afegeix el signe que tenen
- Per a sumar dos nombres enters de **diferent signe**:
  - Es resten els seus valors absoluts (el major menys el menor)
  - Al resultat s'afig el signe del que té major valor absolut

Exemple 5.7

- $+3+(+5)=+8$
- $-3+(-7)=-10$
- $+3+(-6)=-3$
- $-7+(+6)=-1$

Aquestes regles per a la suma d'enters poden representar-se amb un diagrama com el que es veu en la Figura 5.6, on una major grandària significa nombres enters amb major valor absolut.

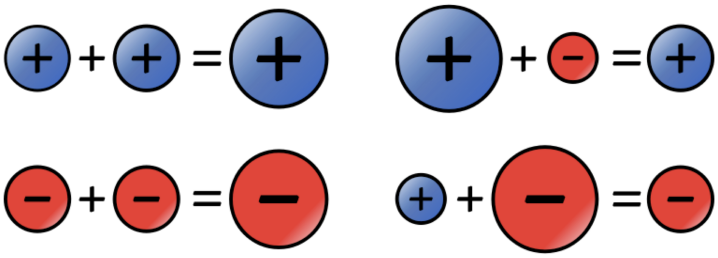


Figura 5.6. Representació de les regles de la suma d'enters

Propietats de la suma de nombres enters

La suma de nombres enters és una operació binària que verifica les següents propietats:

Llei de composició interna: (propietat de clausura) La suma de dos nombres enters és un altre nombre enter únic. És a dir: $\forall a, b \in \mathbb{Z} \Longrightarrow a + b \in \mathbb{Z}$

Commutativa: $\forall a, b \in \mathbb{Z} \Longrightarrow a + b = b + a$

Associativa: $\forall a, b, c \in \mathbb{Z} \Longrightarrow a + (b + c) = (a + b) + c$

Element neutre: el nombre 0. $\forall a \in \mathbb{Z} \Longrightarrow a + 0 = 0 + a = a$

Element simètric o oposat: donat un nombre enter, l'element simètric o oposat és aquell que després de fer l'operació amb el nombre inicial dona com a resultat l'element neutre (0). És a dir $\forall a \in \mathbb{Z}\, \exists a' \in \mathbb{Z} : a + a' = a' + a = 0$

Així, entre les conseqüències de la suma podem destacar:

- La suma de dos nombres enters positius és un altre nombre enter positiu.
- La suma de dos nombres enters negatius és un altre nombre enter negatiu.
- Per a sumar dos nombres enters de diferent signe es resten els seus valors absoluts i es posa en la diferència el signe del nombre amb major valor absolut.

5.5.2 Resta de nombres enters

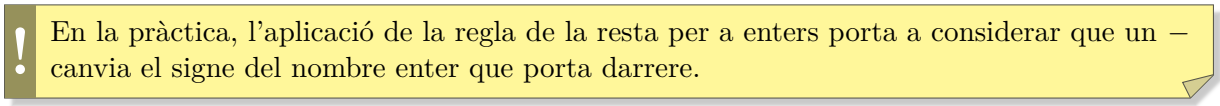
Resta de nombres enters

- Per a restar dos nombres enters se suma al minuend l'oposat del subtrahend
- La resta en $\mathbb{Z}$ sempre és possible

Exemple 5.8

- $+3 - (+6) = +3 + (-6) = -3$
- $-7 - (+6) = -7 + (-6) = -13$

- $-10-(-3)=-10+(+3)=-7$


En la pràctica, l'aplicació de la regla de la resta per a enters porta a considerar que un $-$ canvia el signe del nombre enter que porta darrere.

Propietats de la resta de nombres enters

La resta de nombres enters és una operació binària que verifica les següents propietats:

Llei de composició interna: (propietat de clausura) La resta de dos nombres enters és un altre nombre enter únic. És a dir: $\forall a,b\in\mathbb{Z}\Longrightarrow a-b\in\mathbb{Z}$

No commutativa

No associativa

No té element neutre: ja que $\forall a\in\mathbb{Z}, a\neq 0\Longrightarrow a-0\neq 0-a=-a$

Element simètric o oposat: igual que en la suma és aquell que després de fer l'operació amb el nombre inicial dona com a resultat l'element neutre (0)

Activitat 5.6

Intenteu crear una regla pictòrica per a la resta d'enters com la que hem mostrat en la Figura 5.6, on una mida més gran significa nombres enters amb valor absolut més gran.

Solució en pàg. 396

Activitat 5.7

Expresseu, si és possible:

a) (-20) com a suma de dos enters del mateix signe

b) $(+20)$ com a suma de dos enters de diferent signe

c) $(+15)$ com a diferència de dos enters del mateix signe

d) $(+15)$ com a diferència de dos enters de diferent signe

e) $(+53)$ com a suma de dos nombres enters consecutius

f) $(+54)$ com a suma de dos nombres enters consecutius

g) (-32) com a suma de dos nombres enters consecutius

h) (-33) com a suma de dos nombres enters consecutius

Solució en pàg. 396

5.5.3 Multiplicació de nombres enters

Multiplicació de nombres enters

- El producte de dos nombres enters és un nombre enter el valor absolut del qual és el producte dels valors absoluts
- El signe és determinat per la regla dels signes que es mostra en la Figura 5.8

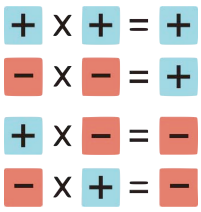


Figura 5.8. Representació de les regles del producte d'enters

Exemple 5.9

Intentarem oferir un raonament de la regla dels signes mostrada en la Figura 5.8 amb diferents exemples:

$+ \times + = +$: *Manolo estalvia cada dia 20€. Quant estalvia al llarg de 7 dies?*

Cada dia estalvia 20 € $(+20)$. Al llarg de 7 dies $(+7)$, estalvia $(+20)\cdot(+7) = (+140) \Longrightarrow$ 140 €

El resultat és positiu perquè correspon a diners que estalvia

$- \times - = +$: *Lluís es gasta 25€ cada diumenge en l'entrada de futbol. Deixa d'anar 4 diumenges. Quant estalvia en total?*

Gasta 25 € cada diumenge (-25). Deixa d'anar 4 diumenges (-4), estalvia $(-25)\cdot(-4) = (+100) \Longrightarrow 100$ €

El resultat és positiu perquè correspon a diners que deixa de gastar i, per tant, estalvia

$+ \times - = -$: *Joan és professor d'autoescola i guanya 6€ per una classe de 30 minuts. Si es posa malalt i deixa de fer classes quants diners ha perdut?*

Per una classe guanya 6€ $(+6)$. Deixa de donar 4 classes (-4). Ha perdut $(+6).(-4) = (-24) \Longrightarrow 24$ €

El resultat és negatiu perquè correspon a diners que perd

Com hem vist en l'Exemple 5.9, si considerem $+$ com a "afegir" i $-$ com a "llevar" i, d'altra banda, també $+$ com un "ingrés" i $-$ com un "deute" podem donar sentit a la regla del producte. D'aquesta manera:

- $+$ per $+$ dona $+$ (afig un ingrés = guanye diners)
- $+$ per $-$ dona $-$ (afig un deute = perd diners)

- $-$ per $+$ dona $-$ (lleve un ingrés = perd diners)
- $-$ per $-$ dona $+$ (lleve un deute = guanye diners)

Propietats del producte de nombres enters

El producte de nombres enters és una operació binària que verifica les següents propietats:

Llei de composició interna

Commutativa

Associativa

Element neutre: 1. $\forall a \in \mathbb{Z}, a \neq 0 \Longrightarrow a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

Distributiva respecte a la suma (i a la resta)

5.5.4 Quocient de nombres enters

Quocient de nombres enters

- El quocient de nombres enters no sempre és un nombre enter (no sempre és LCI).
- Només quan el dividend és múltiple del divisor el quocient és nombre enter.
- La regla dels signes per al quocient de nombres enters és idèntica a la regla del producte (vista en la Figura 5.8).

Exemple 5.10

Intentarem oferir un raonament de la regla dels signes mostrada en la Figura 5.8 amb diferents exemples:

- $(+4) \div (+2) = +2$
- $(+18) \div (-6) = -3$
- $(-15) \div (+3) = -5$
- $(-28) \div (-7) = +4$

5.5.5 Altres operacions amb nombres enters

Potència d'exponent positiu d'un nombre enter

La **potència d'exponent natural (positiu) d'un nombre enter** a^n on $n \in \mathbb{N}$ i $a \in \mathbb{Z}$, és l'operació que consisteix a repetir com a factor un nombre enter anomenat base (a) tantes vegades com indica l'exponent (n).

Exemple 5.11

- $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$
- $(-3)^4 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = 81$
- $(-4)^3 = (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) = -64$

! Per les propietats de la multiplicació, els signes de les potències seguiran aquesta regla:

- $(+)^n = +$
- $(-)^{parell} = +$
- $(-)^{imparell} = -$

Potència d'exponent negatiu d'un nombre enter

La **potència d'exponent negatiu d'un nombre enter** a^{-n} on $n \in \mathbb{N}$ i $a \in \mathbb{Z}$ es defineix com a

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Exemple 5.12

- $7^{-3} = \frac{1}{7^3} = \frac{1}{7 \cdot 7 \cdot 7} = \frac{1}{343}$
- $(-3)^{-3} = \frac{1}{(-3)^3} = \frac{1}{(-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3)} = \frac{1}{-27} = -\frac{1}{27}$

Propietats de la potenciació de nombres enters

Siguen $a, b, c \in \mathbb{Z}$:

Producte de potències d'igual base: $a^b \cdot a^c = a^{b+c}$

Quocient de potències d'igual base: $\frac{a^b}{a^c} = a^{b-c}$

Potència d'una potència: $a^{b^c} = a^{b \cdot c}$

Potència d'un producte: $(a \cdot b)^c = a^c \cdot b^c$

Potència d'un quocient: $\left(\frac{a}{b}\right)^c = \frac{a^c}{b^c}$

Potència d'exponent zero: $1 = \left(\frac{a^b}{a^b}\right) = a^{b-b} = a^0$

Potència d'exponent un: $a^1 = a$

Activitat 5.8

Si x representa un nombre enter diferent de zero qualsevol, quines de les següents expressions són negatives? Justifiqueu la resposta.

a) x
b) $-(-x)$
c) $(-x)^2$
d) $(-x)^3$
e) $-|x|$
f) $|(-x)^3|$

Activitat 5.9

Estudieu el signe de les següents expressions:

a) x
b) $-x$
c) x^2
d) x^3

Solució en pàg. 397

Arrel d'índex natural

L'**arrel d'índex natural (positiu)** $\sqrt[n]{a}$, on $n \in \mathbb{N}$ i $a \in \mathbb{Z}$, és l'operació inversa de la potenciació. La definició és:

$$\sqrt[n]{a} = b \iff b^n = a$$

El nombre natural n és l'índex de l'arrel, el nombre enter a és el radicant i b és l'arrel enèsima.
Quan l'índex és 2 l'arrel es diu **quadrada** i quan l'índex és 3 l'arrel es diu **cúbica**.

! En les arrels quadrades el **radicand a és sempre un nombre positiu o igual a zero**, ja que es tracta del quadrat d'un nombre (no existeix cap nombre enter que en multiplicar-lo per si mateix resulte negatiu):

$\sqrt{-16} = b$ implicaria que existeix un nombre $b \in \mathbb{Z}$ de tal manera que $b^2 = -16$

Per tant, **l'arrel quadrada d'un nombre negatiu no existeix en $\mathbb{Z}$**.

! Les arrels quadrades en tenen dos signes: **positiu i negatiu**.

- $\sqrt{16} = 4$, perquè $4^2 = 4 \cdot 4 = 16$
- $\sqrt{16} = -4$, perquè $(-4)^2 = (-4) \cdot (-4) = 16$

Arrel d'índex negatiu

L'**arrel d'índex negatiu** $\sqrt[-n]{a}$, on $n \in \mathbb{N}$ i $a \in \mathbb{Z}$, es defineix com a

$$\sqrt[-n]{a} = b \iff b^{-n} = a \iff \frac{1}{b^n} = a$$

5.5.6 Operar amb parèntesi

Una expressió que es troba entre parèntesis es pot operar de dues maneres:

Opció 1: Fent en primer lloc les operacions indicades dins del parèntesi

$$8 + (4 - 14) = 8 + (-10) = -2$$
$$7 - (12 - 20) = 7 - (-8) = 7 + (+8) = 15$$

Opció 2: Suprimint els parèntesis tenint en compte les regles següents:

a) Si davant del parèntesi tenim un signe $+$, no canviem el signe dels nombres de dins del parèntesi

$$8 + (4 - 14) = 8 + (+4) + (-14) = (+12) + (-14) = -2$$

b) Si davant del parèntesi hi ha un signe $-$, canviem de signe dels nombres que hi ha dins del parèntesi (substituïm els nombres pels seus oposats)

$$7 - (12 - 20) = 7 + (-12) + (+20) = (+27) + (-12) = 15$$

Jerarquia de les operacions

A l'hora d'operar amb nombres enters seguirem les mateixes pautes que amb nombres naturals:

1. S'efectuen primer el contingut dels parèntesis. Si hi ha parèntesis niats, s'efectuen de dins cap a fora.
2. Les operacions s'efectuen en l'ordre següent:
   - **Primer** les potències i les arrels
   - **Segon** les multiplicacions i les divisions
   - **Tercer** les sumes i les restes

5.6. Activitats complementàries del tema

Activitat 5.10

Euclides va nàixer l'any 300 abans de Crist i Pitàgores l'any 580, també abans de Crist. Qui va nàixer abans? Quants anys abans?

Solució en pàg. 397

Activitat 5.11

Si aparquem en el tercer soterrani i pugem 7 plantes, penseu:

a) A quin pis arribem?

b) I si pugem 2 plantes des del tercer soterrani?

Solució en pàg. 397

Activitat 5.12

El termòmetre marca 10°C després d'haver pujat 7°C, baixat 5°C, pujat altres 8°C i haver baixat 9°C. Quina era la temperatura inicial?

Solució en pàg. 397

Activitat 5.13

Una empresa estava travessant una mala situació, i va tenir pèrdues aquell any. El següent va perdre 20 000 € més que l'anterior, i el tercer any va perdre 30 000 € menys que el segon. Entre els tres anys, el balanç de l'empresa ha sigut de −100 000 €. Quant va perdre el primer any?

Solució en pàg. 397

Activitat 5.14

Quina diferència de temperatura suporta una persona que passa de la cambra de conservació de les verdures, que es troba a 4°C, a la del peix congelat, que està a −18°C? I si passara de la cambra del peix a la de la verdura? Expressa tots dos resultats amb nombres enters. Són iguals?

Solució en pàg. 398

Activitat 5.15

La temperatura de l'aire baixa segons s'ascendeix en l'atmosfera, a raó de 9°C cada 300 metres. Si la temperatura al nivell de la mar en un punt determinat és de 12°C, a quina altura vola un avió si la temperatura de l'aire és de −105°C?

Solució en pàg. 398

Activitat 5.16

En un depòsit hi ha 920 litres d'aigua. Per la part superior un tub aboca en el depòsit 28 litres per minut, i per la part inferior per un altre tub ixen 33 litres per minut. Quants litres d'aigua hi haurà en el depòsit després d'una hora de funcionament?

Solució en pàg. 398

Activitat 5.17

Representeu gràficament, i calculeu els oposats i valors absoluts dels següents nombres enters: $-4, 6, -2, 1, -5, 0, 9$.

Solució en pàg. 398

Activitat 5.18

Escriviu tots els nombres enters el valor absolut dels quals siga major que 2 i menor que 6.

Solució en pàg. 398

Activitat 5.19

Entre un nombre negatiu i el seu oposat hi ha 19 nombre Quin és el nombre negatiu?

Solució en pàg. 398

Activitat 5.20

Si a un nombre enter se li resta l'oposat de 47, la diferència és igual a -18. Quin és el nombre?

Solució en pàg. 398

Activitat 5.21

Escriviu cada un dels següents nombres com a suma de dos consecutius: $-13, 31, -19, -25, 67$.

Solució en pàg. 398

Activitat 5.22

Tots els nombres enters es poden escriure com a suma de dos consecutius? Poseu dos exemples de nombres que no es puguen escriure com a suma de dos consecutius.

Solució en pàg. 399

Activitat 5.23

Escriviu cada un dels següents nombres com a suma de tres consecutius: $-6, 12, 18, 15, 30$.

Solució en pàg. 399

Activitat 5.24

Quina propietat tenen en comú els nombres enters que poden escriure's com a suma de tres consecutius? Poseu dos exemples de nombres no es puguen escriure com a suma de tres consecutius.

Solució en pàg. 399

Activitat 5.25

Calculeu:

a) $(-5)^3$ b) $(+3)^3$ c) $(-2)^4$ d) $(-3)^4$ e) $(+2)^4$ f) $-(5^3)$

Solució en pàg. 399

Activitat 5.26

Estudieu el signe de les expressions següents:

a) $-x$ b) $(-x)^3$ c) $-(x^2)$ d) x^3

Solució en pàg. 400

Activitat 5.27

Expresseu, si és possible:

a) (-10) com a suma de dos enters, de quatre maneres diferents.

b) (-3) com a diferència de dos enters, de quatre maneres diferents.

c) $(+15)$ com a producte de dos enters, de totes les maneres possibles.

d) $(+4)$ com a quocient de dos enters, de quatre maneres diferents.

Activitat 5.28

Escriviu, si és possible:

a) Dues divisions d'enters el quocient dels quals siga enter

b) Dues divisions d'enters el quocient dels quals no siga enter

c) Una arrel quadrada exacta

d) Una arrel quadrada sencera de resta 3

Solució en pàg. 400

Activitat 5.29

Traieu factor comú en les expressions següents i calcula el resultat:

a) $3 \cdot 2 + 3 \cdot (-5)$

b) $(-2) \cdot 12 + (-2) \cdot (-6)$

c) $8 \cdot 5 + 8$

d) $(-3) \cdot (-2) + (-3) \cdot (-5)$

Solució en pàg. 400

Activitat 5.30

Efectueu les següents operacions amb nombres enters:

a) $(3 - 8) + [5 - (-2)]$

b) $5 - [6 - 2 - (1 - 8) - 3 + 6] + 5$

c) $9 \div [6 \div (-2)]$

d) $\left[(-2)^5 - (-3)^3\right]^2$

Solució en pàg. 400

Activitat 5.31

Efectueu les següents operacions amb potències de nombres enters:

a) $(-2)^2 \cdot (-2)^3 \cdot (-2)^4$

b) $(-8) \cdot (-2)^3 \cdot (-2)^0 \cdot (-2)$

c) $2^{-2} \cdot 2^{-3} \cdot 2^4$

d) $2^2 \div 2^3$

e) $2^{-2} \div 2^{-3}$

f) $\left[(-2)^{-2}\right]^3 \cdot (-2)^3 \cdot (-2)^4$

Solució en pàg. 401

Referències

Musser, G. L., Peterson, B. E., i Burger, W. F. (2013). *Mathematics for Elementary teachers: A Contemporary Approach* (10th ed.). Wiley.

Vargas-Machuca, I., Jimeno, M., Iriarte, M. D., González, J. L., Ortiz, A., Sanz, E., i Ortiz, A. (1999). *Números Enteros*. Síntesis.

6

Nombres racionals

Organització de continguts del Tema 6

1. Nombres fraccionaris
   - El concepte de fracció
   - Construcció del conjunt dels nombres racionals
   - Fraccions pròpies i impròpies
2. Ordre en els nombres racionals
3. Densitat del conjunt de nombres racionals
4. Sentit de les operacions amb racionals
5. Nombres decimals
6. Expressió decimal d'un nombre
   - Expressió decimal d'un nombre decimal
   - Expressió decimal d'un nombre no decimal: el període
   - Fracció generadora
   - Ordre en les expressions decimals
   - Operacions amb expressions decimals
7. Nombres irracionals

Arranquem aquest últim tema sobre l'estudi i caracterització dels diferents conjunts de nombres. Amb aquest tema completarem el conjunt dels nombres reals ($\mathbb{R}$), que és format per la unió del conjunt de nombres racionals ($\mathbb{Q}$) i dels irracionals ($\mathbb{I}$), com es mostra en el diagrama de Venn de la Figura 6.1. En l'esquema que adjuntem a la Figura 6.2 es pot veure la composició del conjunt dels racionals ($\mathbb{Q}$), que ens servirà de guia durant l'explicació d'aquest tema.

Començarem aquest tema explicant els nombres fraccionaris o fraccions que conformaran, junt amb els nombres enters ($\mathbb{Z}$), els nombres racionals ($\mathbb{Q}$).

Activitat 6.1

Un collaret es va trencar durant una lluita amorosa. Una tercera part de les perles van caure a terra, una cinquena part va quedar al sofà, una sisena part va ser trobada per la noia, i una desena part va ser recuperada pel seu amant. Sis perles van quedar al cordell. Digues quantes perles formaven el collaret.

Problema adaptat del llibre *Lilavati*, del matemàtic hindú Bhaskara (1119-1185)

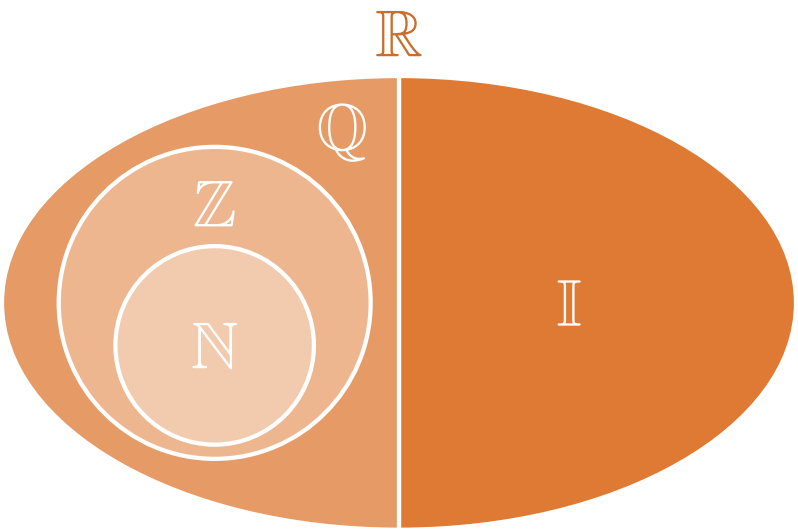


Figura 6.1. Diagrama representatiu de tots els nombres reals

- Reals $\mathbb{R}$
  - Racionals $\mathbb{Q}$
    - Enters $\mathbb{Z}$
      - Enters positius / Naturals $\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N}$
      - Zero 0
      - Enters negatius $\mathbb{Z}^-$
    - Fraccions
      - Fraccions decimals: nombres decimals $\frac{1}{8} = 0.125$
      - Fraccions no decimals
        - Nombres periòdics purs $\frac{1}{3} = 0.\widehat{3}$
        - Nombres periòdics mixtos $\frac{1}{6} = 0.1\widehat{6}$
  - Irracionals $\mathbb{I}$ $\pi = 3.14159265\ldots$

Figura 6.2. Esquema dels nombres reals

6.1. Nombres fraccionaris

Activitat 6.2

Dels alumnes que van cursar l'assignatura de *Matemàtiques per a Mestres* en el curs passat, dues terceres parts van aprovar en la primera convocatòria. Dels que no van aprovar a juny, una tercera part van aprovar en la segona convocatòria. Penseu:

a) Quina fracció representa la relació entre aprovats i suspesos en la primera convocatòria?

b) Quina fracció del total va aprovar a juliol?

c) Si 39 alumnes van aprovar l'assignatura en segona convocatòria, quants alumnes van aprovar l'assignatura en primera convocatòria?

d) Si del total d'alumnes matriculats inicialment, 1/14 part no van arribar a cursar-la, atès que van abandonar la titulació durant el transcurs de l'any acadèmic per diferents motius, quants alumnes es van matricular inicialment?

e) Representeu gràficament la situació descrita en els apartats c) i d).

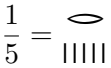
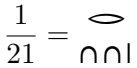
Avís legal: *qualsevol semblança amb la ficció és pura realitat*

Solució en pàg. 401

El terme "racional" al · ludeix a una fracció o part d'un tot, i és per això que els nombres racionals són efectivament tots aquells que poden escriure's en forma de fracció. El primer tractament extens de les fraccions en el sentit que nosaltres coneixem apareix en el papir Ahmes (o Rhind, cap al 1600 aC), el qual conté els treballs de matemàtics egipcis (Musser, Peterson, i Burger, 2013). Els egipcis expressaven proporcions sempre amb fraccions de la unitat, és a dir, aquelles fraccions amb numerador 1. Per exemple, la proporció $2 : 43$ s'expressava amb

$$\frac{2}{43} = \frac{1}{42} + \frac{1}{86} + \frac{1}{129} + \frac{1}{301}$$

Naturalment, els egipcis usaven jeroglífics per a representar les fraccions, per exemple:

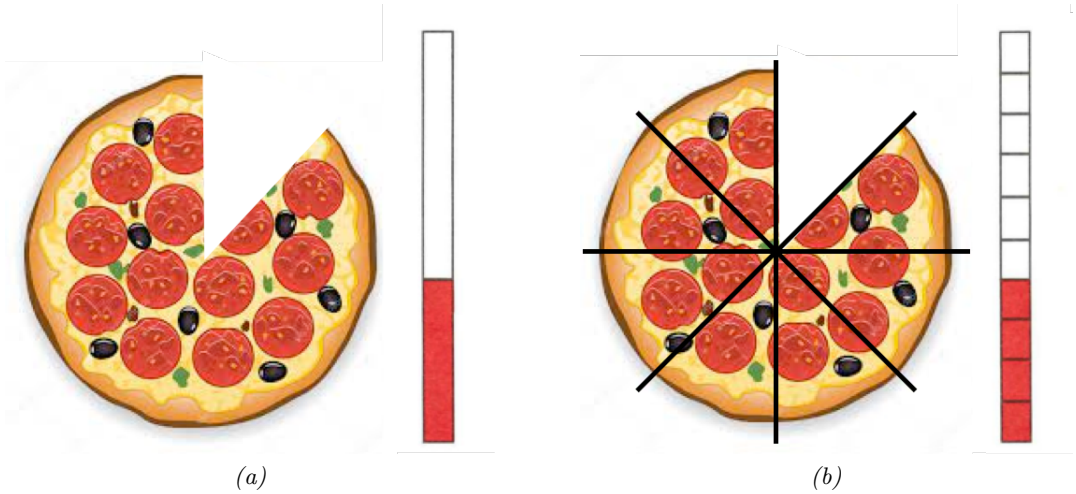
$\frac{1}{5} =$  $\qquad \frac{1}{10} =$  $\qquad \frac{1}{21} =$ 

Cal que pensem que, conceptualment, la idea de fracció sempre representa una part de la unitat i, per tant, no és estrany que la idea d'una fracció major que la unitat (que anomenarem *fracció impròpia* més avant, com per exemple 3/2) no es desenvolupà fins al segle XVI. En el que segueix aprofundim en el conjunt de nombres fraccionaris, que junt amb els enters ($\mathbb{Z}$), conformen els racionals ($\mathbb{Q}$), com indiquem en l'esquema de la Figura 6.2.

La forma actual d'expressar les fraccions és probablement deguda als hindús. Brahmagupta (prop de l'any 630 aC) representava les fraccions sense la barra intermèdia. Així, es feia servir $\begin{smallmatrix}2\\3\end{smallmatrix}$ per a assenyalar "dos terços". Els àrabs van introduir la barra per a separar les dues parts d'una fracció, però aquest primer intent no va calar. Més avant, per evitar errors, aquesta fracció va començar a escriure's com a 2/3, per a no confondre-ho amb 2 3.

6.1.1 El concepte de fracció

Com s'indica en Musser i cols. (2013), moltes vegades els nombres enters no descriuen completament una situació matemàtica. Per exemple, en la Figura 6.5a, usant nombres enters ens és impossible respondre a les preguntes *quanta pizza queda?* o *quant del bastó està ombrejat?* En canvi, la situació canvia en la Figura 6.5b, perquè és prou intuïtiu dir que "queden set *vuitens* de pizza" o que "s'han ombrejat quatre *desenes* parts del bastó".



(a) (b)

Figura 6.5. Sabem *quanta pizza queda* o *quant del bastó està ombrejat* en cada imatge?

Activitat 6.3

A continuació, es presenten quatre contextos diferents en què la fracció $\frac{3}{4}$ apareix involucrada.

1. Quatre amics volen compartir tres pastissos, de tal manera que tots mengen el mateix. Quant de pastís correspon a cada un?
2. Joan va créixer $\frac{3}{4}$ d'un centímetre el mes passat.
3. En una reunió recent, $\frac{3}{4}$ dels participants eren dones. Si hi havia 12 persones en la reunió, quantes eren dones?
4. En una universitat, $\frac{3}{4}$ dels estudiants són dones.

Discutiu si $\frac{3}{4}$ té el mateix significat en cada situació. Useu diagrames per a representar la situació si ho trobeu necessari.

Solució en pàg. 402

El terme "fracció" s'usa de moltes maneres diferents en les matemàtiques elementals. L'estudi exhaustiu dels diferents usos i significats de les fraccions es portarà a terme de manera sistemàtica en l'assignatura de *Didàctica de l'Aritmètica i la Resolució de Problemes*, per la importància que té de cara a l'ensenyament dels racionals en Educació Primària. En aquesta assignatura bàsica ens centrarem en els usos més comuns de les fraccions, però sí que repassarem els models de representació de les fraccions perquè ens serviran per a resoldre algunes activitats relacionades amb els nombres racionals i per a dotar-les de significat. Aquests models s'han estudiat en

etapes educatives prèvies.

Inicialment, les fraccions s'usen amb sentit *numeral*, per a indicar la quantitat de parts d'un tot que es considerarà. Aquest ús implica dividir la unitat en parts iguals, com per exemple s'ha fet en la pizza de la Figura 6.5b que s'ha tallat en 8 peces equivalents (de grandària equivalent). En aquest cas usem la fracció 7/8 per a representar les 7 parts equivalents que han quedat de les 8 inicials en què s'havia dividit. L'ús d'una fracció com un nombre d'aquesta manera es denomina comunament *part d'un tot* o *part-tot*. Típicament, en l'ensenyament de les fraccions es comença des del sentit *part-tot* amb l'ús de diferents models. En la taula 6.1 resumim algunes característiques bàsiques dels models més habituals.

Taula 6.1
Característiques de models per a la representació de fraccions

	El tot	**Les parts iguals es defineixen com**	**La fracció indica**
Model d'àrea	Determinat per la superfície d'una regió.	Igual quantitat de superfície	La part presa del total de superfície del tot
Model discret	Determinat per la definició d'un conjunt de referència.	Igual nombre d'objectes	El nombre d'objectes d'un subconjunt en relació amb el total del conjunt
Model lineal	Unitat de distància o longitud	Igual longitud	La posició d'un punt en relació amb la distància des de 0 i a la unitat definida

Adaptada de Petit, Laird, i Marsden (2010).

Així, per exemple, els models d'àrea (Figura 6.5) ajuden a la visualització de les parts del tot, mentre que, d'altra banda, els models lineals (Figura 6.6) faciliten l'observació de la propietat de densitat dels nombres racionals (Van de Walle, Karp, i Bay-William, 2016). En el model discret (Figura 6.7), la unitat es compon d'un conjunt d'elements discrets, de tal manera que diferents subconjunts constitueixen parts fraccionàries d'aquesta. Aquest model dona compte i permet portar a l'aula situacions de la vida quotidiana dels alumnes (per exemple, ous en una ouera). No obstant això, aquesta idea que la unitat puga constituir-se a partir d'un grup d'elements discrets genera dificultats en els estudiants (Behr, Harel, Post, i Lesh, 1992).

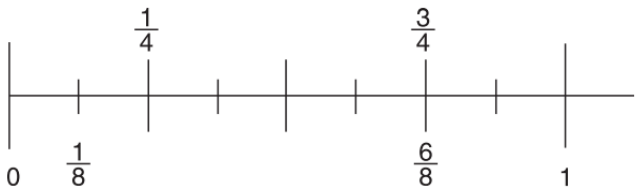


Figura 6.6. Model lineal o basat en la recta numèrica (imatge agafada de Musser i cols., 2013)

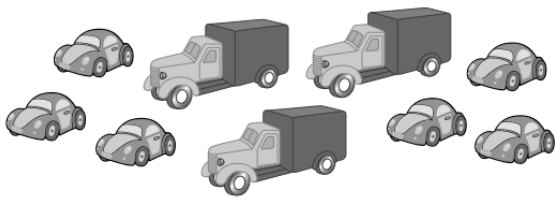


Figura 6.7. Model discret en què es representa que $\frac{2}{3}$ o $\frac{6}{8}$ són cotxes (Van de Walle i cols., 2016)

Encara que les fraccions també poden tenir altres significats, com hem vist en l'Activitat 6.3, presentarem ací un altre significat de la fracció més *abstracte*, amb sentit numèric i aritmètic. Com s'observa en la Figura 6.8, encara que els diversos diagrames mostrats són diferents en grandària i forma, comparteixen un atribut comú, perquè 5 de 8 parts equivalents estan ombrejades en tots. És a dir, tots presenten la mateixa *quantitat relativa* ombrejada. Aquest atribut pot ser representat per la fracció $\frac{5}{8}$. Per tant, a més de representar parts d'un tot, una fracció pot ser considerada com un nombre que representa una *quantitat relativa* o *raó*, la definició de la qual la veurem en el tema següent.

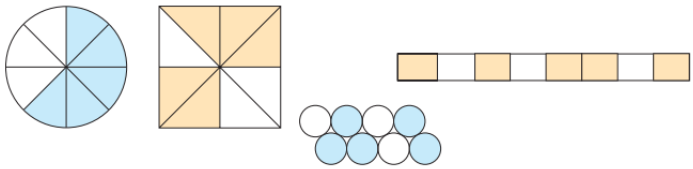


Figura 6.8. Representació de la raó 5 :: 8 amb models d'àrea i discrets (imatge de Musser i cols., 2013)

Finalment, no podem deixar de mencionar l'ús de la fracció *com a operador*. Sota aquesta interpretació les fraccions actuen com a funcions (Lamon, 2012). Depenent del context, els operadors constitueixen transformacions que augmenten o redueixen quantitats. Si, per exemple, Albert té 18 bales i Manel té $\frac{3}{4}$ de les que té Albert, per a esbrinar el nombre de bales de Manel apliquem l'operador $\frac{3}{4}$ a les 18 bales d'Albert: multiplicant per 3 i dividint per 4.

6.1.2 Construcció del conjunt dels nombres racionals

El conjunt de les fraccions

Una **fracció** és un nombre que pot ser representat per un parell ordenat de nombres enters a i b ($b \neq 0$). Escrivim $\frac{a}{b}$ o a/b on a s'anomena numerador i b denominador.
El conjunt $\mathcal{F}$ de totes les fraccions el podem definir com a

$$\mathcal{F} = \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

Exemple 6.1

A continuació tenim representats alguns elements del conjunt de fraccions $\mathcal{F}$ amb models lineals i d'àrea:

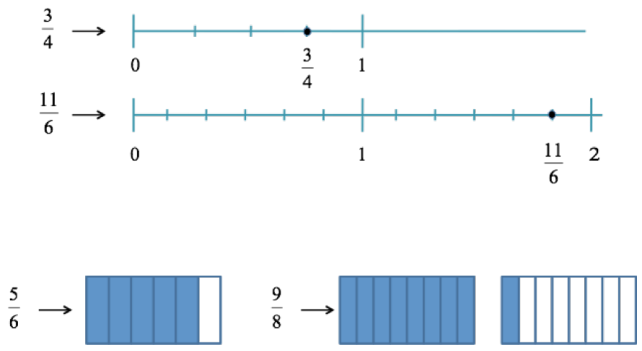


Figura 6.9. Exemples de representació de fraccions amb models lineals i d'àrea

Activitat 6.4

a) Representa les fraccions 2/5, 1/8, 7/12 i 6/5 fent ús del model d'àrea.

b) Representa els nombres fraccionaris 7/9, 5/8 i 4/5 fent ús del model lineal.

Ara bé, com podem observar en les representacions de la Figura 6.10 la porció d'area ombrejada pot ser representada per diferents fraccions. En cada parella de diagrames de la Figura 6.10 la regió marcada és exactament igual, tot i que les subdivisions en parts iguals són diferents.

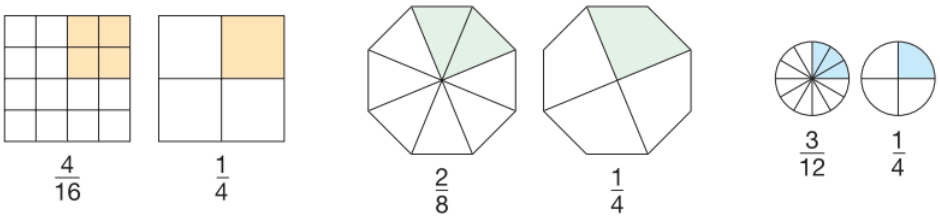


Figura 6.10. Fraccions equivalents representades amb el model d'àrea (Musser i cols., 2013)

Fraccions equivalents

En el conjunt $\mathcal{F}$ definim la següent relació d'equivalència: donades dues fraccions a/b i c/d direm que són **fraccions equivalents** si i solament si es compleix que $a \cdot d = b \cdot c$. És a dir:

$$\frac{a}{b} \cong \frac{c}{d} \Longleftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

Exemple 6.2

A continuació es representa amb el model d'àrea l'equivalència de fraccions següent:

$$\frac{2}{8} \cong \frac{3}{12} \cong \frac{4}{16} \cong \frac{1}{4}$$

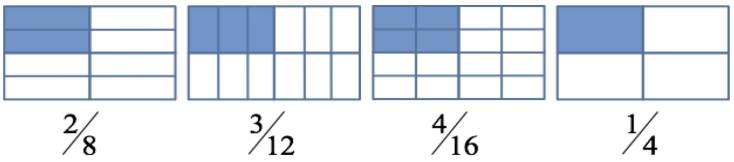


Figura 6.11. Fraccions equivalents representades amb el model d'àrea

Activitat 6.5

Comprova que les fraccions de l'Exemple 6.2 són equivalents.

Solució en pàg. 402

Activitat 6.6

Indiqueu quines fraccions equivalents s'han representat gràficament en el model discret de la Figura 6.12 amb boles roges i grises.

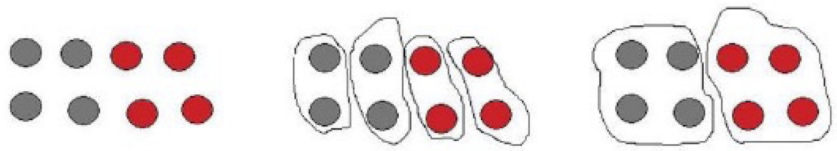


Figura 6.12. Quines són les fraccions equivalents representades amb aquest model discret?

Solució en pàg. 402

Propietat per a obtenir fraccions equivalents

Siga una fracció a/b, i un nombre $n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$, llavors

$$\frac{a}{b} \cong \frac{a \cdot n}{b \cdot n}$$

És a dir, donada una fracció a/b, si multipliquem numerador i denominador pel mateix nombre enter (diferent de zero) el resultat és una nova fracció equivalent a l'anterior.

Activitat 6.7

Demostra que les següents fraccions són equivalents:

a) $\frac{5}{6} \cong \frac{25}{30}$ b) $\frac{27}{36} \cong \frac{54}{72}$ c) $\frac{16}{48} \cong \frac{1}{3}$

Solució en pàg. 402

Hem de posar atenció que la propietat que acabem de veure ens ofereix un procediment per a obtenir fraccions equivalents entre si multiplicant o dividint tant numerador com denominador pel mateix nombre. Recordem que totes les fraccions que són equivalents entre si **representen un mateix nombre racional**. Així, per exemple amb la fracció $4/6$ tenim que:

$$\frac{4}{6} \Longrightarrow \begin{cases} n = 2 \Longrightarrow \frac{4}{6} \cong \frac{4 \cdot 2}{6 \cdot 2} \cong \frac{8}{12} \\ n = 100 \Longrightarrow \frac{4}{6} \cong \frac{4 \cdot 100}{6 \cdot 100} \cong \frac{400}{600} \\ n = 3 \Longrightarrow \frac{4}{6} \cong \frac{4 \cdot 3}{6 \cdot 3} \cong \frac{12}{18} \end{cases}$$

Així, $\frac{4}{6} \cong \frac{8}{12} \cong \frac{400}{600} \cong \frac{12}{18}$

! En el que segueix farem ús de manera indistinta dels símbols $=$ i $\cong$ per a denotar fraccions equivalents.

Fracció irreductible

Anomenarem **fracció irreductible** aquella en què numerador i denominador no poden dividir-se per un mateix nombre, és a dir, $\text{mcd}(\textit{numerador}, \textit{denominador}) = 1$.

Unicitat i existència de la fracció irreductible

Tota fracció té una fracció equivalent irreductible i només una.

! El que acabem de veure estableix un procediment de **simplificació d'una fracció a la fracció irreductible**:

- Si el numerador i el denominador són nombres compostos i tenen divisors comuns, podrem dividir el numerador i el denominador per aquests divisors comuns.
- El resultat és una nova fracció equivalent (per *simplificació*) a l'anterior.
- Si el numerador i denominador de la fracció simplificada són primers entre si direm que la fracció és irreductible.

Exemple 6.3

La fracció $\frac{6615}{4500}$ es pot reduir a $\frac{147}{100}$. Per a fer-ho, podem recórrer a la descomposició en factors primers que ja hem vist en els temes anteriors:

Com que $6615 = 3^3 \cdot 5 \cdot 7^2$ i $4500 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^3$ tenim que:

$$\frac{6615}{4500} = \frac{3^3 \cdot 5 \cdot 7^2}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^3} = \frac{3 \cdot 7^2}{2^2 \cdot 5^2} = \frac{147}{100}$$

Activitat 6.8

Trobeu les fraccions irreductibles corresponents a les fraccions equivalents de l'Activitat 6.7.

Solució en pàg. 403

Activitat 6.9

Trobeu les fraccions irreductibles de 18/27, 70/168 i 75/90.

Solució en pàg. 403

6.1.3 Fraccions pròpies i impròpies

Com ja hem comentat en la introducció del tema, la idea d'una fracció ha anat associada clàssicament a una part de la unitat. No obstant això, a partir del segle XVI es va començar a fer ús de fraccions per a representar quantitats no unitàries, majors que la unitat.

Fracció pròpia i impròpia

Anomenarem **fracció pròpia** aquella que representa una quantitat menor que la unitat.

Anomenarem **fracció impròpia** aquella fracció que no és pròpia, és a dir, que representa quantitats majors a 1. En aquest cas, aquestes fraccions podran escriure's com a **nombre mixt** (una combinació d'un nombre enter amb una fracció pròpia).

Exemple 6.4

Les fraccions $\frac{7}{2}$, $\frac{8}{5}$ o $\frac{9}{8}$ són fraccions impròpies, ja que els numeradors són majors que els denominadors i, per tant, representen quantitats majors que la unitat.

Aquestes fraccions també poden ser representades pels models gràfics que hem vist. En la Figura 6.13 es representa la fracció 7/2, que efectivament equival a més d'una unitat.

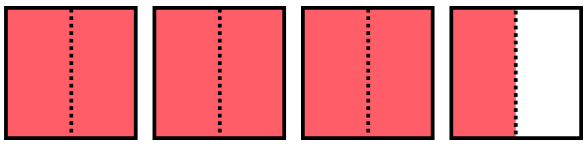


Figura 6.13. Fracció impròpia 7/2 representada amb un model d'àrea

Gràcies a la representació mostrada en la Figura 6.13, podem donar sentit al significat habitual de la fracció:

- Com que tenim un 2 en el denominador de 7/2 cal dividir una unitat en 2 parts.
- Com que tenim un 7 en el numerador de 7/2 cal agafar 7 de les parts que hem fet.
- Com que només tenim 2 parts, cal anar afegint unitats fins a completar les 7 parts.

A partir de la representació mostrada en la Figura 6.13 es pot observar que 7/2 són 3 unitats i mitja o 4 unitats menys mitja:

$$\frac{7}{2} = 3 + \frac{1}{2} = 4 - \frac{1}{2}$$

Exemple 6.5

Per a representar gràficament la fracció $\frac{9}{8}$ cal partir una unitat en 8 parts (vuitens) i agafar-ne 9. Com que no en tenim prou amb una unitat, caldrà afegir-ne tantes com calga tal com observem en la Figura 6.14.



Figura 6.14. Representació gràfica de la fracció impròpia 9/8 amb el model d'àrea

Així, és senzill visualitzar que

$$\frac{9}{8} = 1 + \frac{1}{9} = 2 - \frac{8}{9}$$



Encara que sempre podem fer ús de representacions gràfiques per a passar de fracció impròpia a nombre mixt, el més habitual és interpretar la divisió tradicional de nombres. Per exemple, per a obtenir el nombre mixt de la fracció $\frac{17}{5}$ faríem la divisió de 17 entre 5:

$$\begin{array}{r|l} 17 & 5 \\ \cline{2-2} 2 & 3 \end{array} \qquad \text{és a dir } 17 = 5 \cdot 3 + 2$$

Així, dividint l'expressió $17 = 5 \cdot 3 + 2$ per 5 tenim que

$$\frac{17}{5} = \frac{5 \cdot 3 + 2}{5} = \frac{5 \cdot 3}{5} + \frac{2}{5} = 3 + \frac{2}{5}$$

Habitualment escriurem $\frac{17}{5} = 3 + \frac{2}{5} = 3\frac{2}{5}$.

Activitat 6.10

Expresseu els resultats com a nombres mixtos:

a) Quantes caixes de 8 unitats podem omplir amb 37 formatges?

b) I amb 45 formatges?

Solució en pàg. 403

Activitat 6.11

Representeu gràficament i escriviu en forma de nombre mixt cada una de les següents fraccions: 16/9, 35/20, 23/7 i 5/3.

Solució en pàg. 403

6.2. Ordre en els nombres racionals

Per a comparar entre si dos nombres racionals haurem de saber comparar dues fraccions que siguen representants dels nombres racionals que volem comparar. Com en el cas dels nombres enters, serà més gran el nombre racional que estiga situat més a la dreta en el model de representació lineal (Figura 6.15).

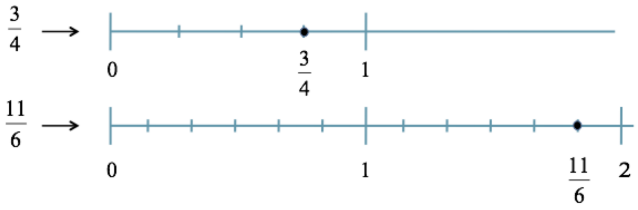


Figura 6.15. Representació lineal de 3/4 i 11/6

La comparació de fraccions amb igual denominador pot fer-se directament en termes de comparació de numeradors, com veiem en la Figura 6.16. Per a fraccions amb igual numerador hauríem de raonar pensant en les parts en què hem dividit la unitat (el denominador). Així, quan comparem dues fraccions amb igual numerador la fracció amb denominador menor serà la que representarà un nombre major (Figura 6.17). No obstant això, en general farem servir la següent relació d'ordre:

Relació d'ordre en $\mathbb{Q}$

Donades dues fraccions $a/b, c/d \in \mathbb{Q}$, establim la següent relació d'ordre:

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Longleftrightarrow a \cdot d < b \cdot c$$

Exemple 6.6

Vegem diferents possibilitats per a comparar fraccions:

a) **A igual denominador:** $3/7 < 5/7$. Podem fer ús d'un model lineal per a veure-ho:

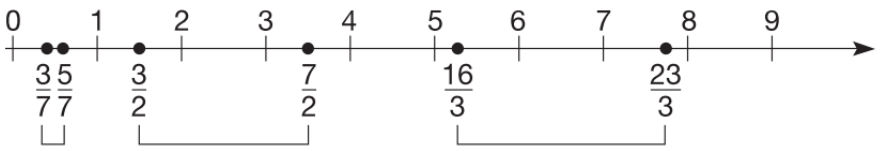


Figura 6.16. Representació lineal de diversos racionals (extreta de Musser i cols., 2013)

b) **A igual numerador:** $8/5 < 8/3$. Podem fer ús d'un model d'àrea per a veure-ho, però en essència el raonament és degut a les parts en què dividim la unitat (el denominador):

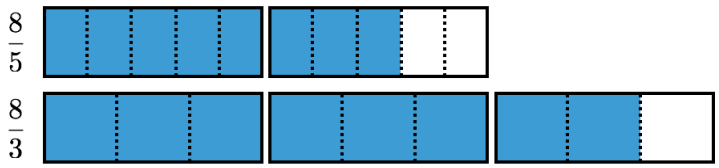


Figura 6.17. Representació en el model d'àrea dels nombres 8/5 i 8/3

c) **De manera general:** podem deduir les relacions anteriors d'ordre aplicant el raonament general:

- $\frac{3}{7} < \frac{5}{7}$, ja que $3 \cdot 7 < 7 \cdot 5$
- $\frac{8}{5} < \frac{8}{3}$, ja que $8 \cdot 3 < 5 \cdot 8$



Del que acabem de veure, podem deduir dos procediments per a comparar fraccions i establir-ne l'ordre:

a) Calcular els **productes creuats** ($a \cdot d$ i $b \cdot c$) i comparar.

b) Obtenir **fraccions equivalents amb denominador comú**, i després comparar els numeradors com hem vist en l'apartat a) de l'Exemple 6.6.

Activitat 6.12

Ordeneu segons la relació "ser menor o igual" els següents nombres racionals: $-2/5, 0, 7/3, -1/4, 4/5$.

6.3. Densitat del conjunt de nombres racionals

Els nombres racionals compleixen una propietat que no compleixen la resta de conjunts numèrics estudiats fins ara. Aquesta propietat s'anomena **densitat dels racionals**.

Densitat de $\mathbb{Q}$

Entre dos nombres racionals qualssevol, **sempre** pot trobar-se un altre nombre racional intermedi.

Aquesta propietat, òbviament, no la compleixen els nombres naturals o enters perquè, per exemple, entre el nombre 3 i el 4 no hi ha cap altre nombre natural. Com que els nombres racionals s'expressen mitjançant fraccions, la propietat anteriorment citada es tradueix com

Entre dues fraccions donades sempre pot intercalar-se una altra fracció

Açò pot fer-se de diverses maneres. Ara en veurem alguna:

a) Transformant les fraccions en altres equivalents d'igual denominador, buscant un numerador intermedi

b) Usant la mitjana aritmètica

c) Formant la fracció amb la suma de numeradors i denominadors

Exemple 6.7

Vegem el mètode a) per a intercalar una fracció entre les fraccions $3/2$ i $5/3$. Primerament, les convertim en fraccions equivalents amb el mateix denominador. Agafem $3 \cdot 2 = 6$ com a denominador, ja que és el mínim comú múltiple, per tant:

$$\frac{3}{2} = \frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 3} = \frac{9}{6} \qquad \frac{5}{3} = \frac{5 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{10}{6}$$

El problema ara s'ha traduït a trobar una fracció intermèdia entre 9/6 i 10/6. Això no obstant, tal com tenim expressades aquestes fraccions, és impossible col · locar una fracció amb denominador 6 entremig, ja que en els numeradors tenim 6 i 10. Per tant, hem de continuar obtenint altres fraccions equivalents. Agafem com a denominador $6 \cdot 2$, per exemple, i tindrem:

$$\frac{9}{6} = \frac{9 \cdot 2}{6 \cdot 2} = \frac{18}{12} \qquad \frac{10}{6} = \frac{10 \cdot 2}{6 \cdot 2} = \frac{20}{12}$$

Com que $3/2 = 18/12$ i $5/3 = 20/12$, podem agafar la fracció intermèdia 19/12, entre ambdues, açò és:

$$\frac{3}{2} < \frac{19}{20} < \frac{5}{3}$$

Exemple 6.8

Fent ús del mètode b) podrem intercalar una fracció entre les fraccions 3/8 i 5/10 fent la mitjana aritmètica (sumar ambdues fraccions i dividint-les entre dos).

$$\frac{\frac{3}{8} + \frac{5}{10}}{2} = \frac{\frac{15}{40} + \frac{20}{40}}{2} = \frac{\frac{35}{40}}{2} = \frac{35}{80} = \frac{7}{16}$$

Així,

$$\frac{3}{8} < \frac{7}{16} < \frac{5}{10}$$

Exemple 6.9

Finalment, farem fer servir el mètode c) per a intercalar una fracció entre les fraccions 6/17 i 7/17, les quals tenen numeradors correlatiu, com ens passava a l'inici de l'Exemple 6.7. Aplicant l'últim mètode formem la fracció següent:

$$\frac{6+7}{17+17} = \frac{13}{34}$$

Així,

$$\frac{6}{17} < \frac{13}{34} < \frac{7}{17}$$

Activitat 6.13

Intercaleu 5 nombres racionals entre 2/3 i 7/8.

6.4. Sentit de les operacions amb racionals

No és l'objectiu d'aquesta secció fer una revisió profunda de l'aritmètica entre nombres racionals, que suposem adquirida en etapes educatives anteriors. Més aviat el que volem fer és dotar de significat les operacions entre racionals, en un treball que es completarà en les assignatures específiques de *Didàctica de les Matemàtiques* de cursos posteriors. Per a açò, farem ús de la representació gràfica de fraccions.

6.4.1 Representació gràfica de fraccions

Ja hem vist al llarg del tema que les fraccions poden ser representades en forma d'àrees o com a punts a la recta numèrica. Així, en el cas de les fraccions pròpies el que es fa per a representar gràficament les fracciones és dividir una unitat d'àrea (o l'interval $[0, 1]$) en tantes parts iguals com indica el denominador i agafant-ne tantes com indica el denominador. En el cas de fraccions impròpies, els models d'àrea o de recta numèrica perden part del seu sentit i cal omplir tantes unitats d'àrea o intervals com calguen, però sempre dividint cada unitat en tantes parts com indique el denominador.

Activitat 6.14

Observeu la representació gràfica de la Figura 6.18. Per tant, podem afirmar que $1/4 > 1/2$, ja que l'àrea del quadrat roig és major que la del rectangle roig. És correcte l'argument?

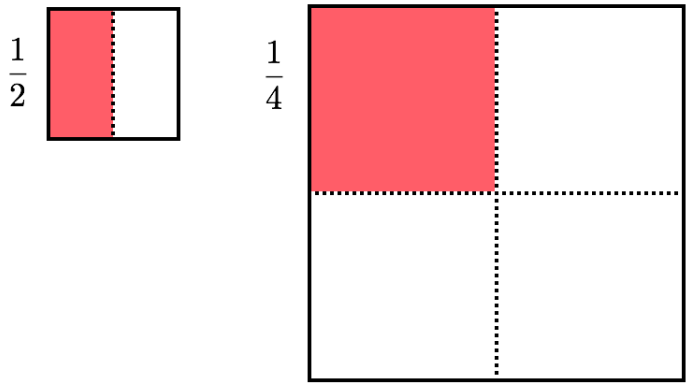


Figura 6.18. És $1/2 < 1/4$?

Solució en pàg. 403

Com acabem de veure en l'Activitat 6.14, cal parar atenció perquè l'ús de models gràfics pot introduir alguns inconvenients. Així, l'ús del model d'àrea en concret com el que acabem de veure (o el que es mostra en la Figura 6.19) porta associat l'inconvenient de la grandària de la "unitat" emprada. En aquests exemples no podem comparar les fraccions implicades perquè

fan referència a *totals* diferents i es crea una situació enganyosa.

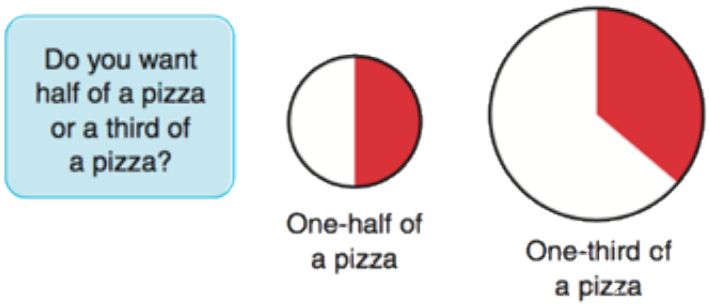


Figura 6.19. El problema de la pizza

Activitat 6.15

Raoneu si la Figura 6.20 representa 3/4?

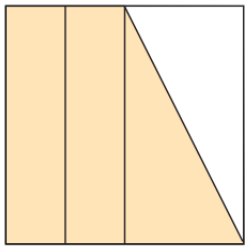


Figura 6.20. Són 3/4? (extreta de Musser i cols., 2013)

Solució en pàg. 404

Com hem vist en l'Activitat 6.15, un altre concepte implícit en les representacions gràfiques és l'equipartició: la unitat ha de ser dividida exhaustivament en parts iguals perquè el model puga dotar-se del sentit *part-tot*.

6.4.2 Suma de fraccions

Suma de fraccions

Donats dos nombres racionals, llavors definim la **suma** de la següent manera:

a) Si els nombres racionals tenen el **mateix denominador**, és a dir, són de la forma $a/b, c/b \in \mathbb{Q}$, llavors per a sumar-los n'hi ha prou amb sumar els numeradors i conservar el denominador:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$$

b) Si tenen **diferent denominador**, les transformarem en fraccions equivalents amb el mateix denominador, i aplicarem el cas anterior. Per a obtenir el denominador, podem optar per:

i. Usar el producte dels dos denominadors: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d}$

ii. O usar el mcm(b, d), mínim comú múltiple dels denominadors

Exemple 6.10

Podem observar que el cas de la suma de nombres racionals amb igual denominador és una extensió de la suma d'enters, perquè sumem elements de la mateixa naturalesa. En l'exemple de la Figura 6.21, sumem *vuitens*, de tal manera que $\frac{3}{8} + \frac{2}{8} = \frac{5}{8}$.

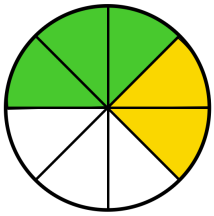


Figura 6.21. Representació de la suma de fraccions amb igual denominador

Exemple 6.11

Per al cas de la suma de fraccions mostrada en la Figura 6.22, $\frac{1}{4} + \frac{1}{3}$, cal obtenir les fraccions equivalents amb denominador comú (12), de tal manera que després puga aplicar-se la suma de fraccions amb el mateix denominador:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{3}{12} + \frac{4}{12} = \frac{7}{12}$$

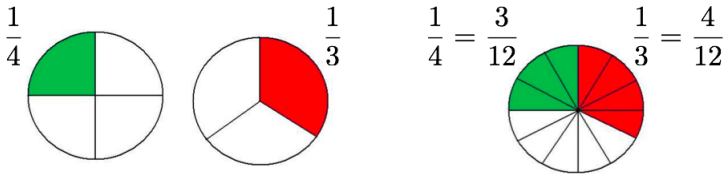


Figura 6.22. Representació de la suma de fraccions amb diferent denominador

Propietats de la suma de nombres racionals

Donades les fraccions $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ i $\frac{e}{f} \in \mathbb{Q}$, la suma de nombres racionals és una operació binària que verifica les següents propietats:

Llei de composició interna: La suma de dos nombres racionals és un altre nombre racional únic.

Commutativa: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$

Associativa: $\frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{e}{f}$

Element neutre: la fracció $\frac{0}{b} \in \mathbb{Q}, b \neq 0$

6.4.3 Resta de fraccions

Resta de fraccions

Per a la definició de la **resta** de nombres racionals procedim igual que amb la suma:

a) Si els nombres racionals tenen el **mateix denominador**, és a dir, són de la forma $a/b, c/b \in \mathbb{Q}$, llavors per a restar-los n'hi ha prou amb restar els numeradors i conservar el denominador:

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$$

b) Si tenen **diferent denominador**, les transformarem en fraccions equivalents amb el mateix denominador, i aplicarem el cas anterior. Per a obtenir el denominador, podem optar per:

i. Usar el producte dels dos denominadors: $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - c \cdot b}{b \cdot d}$

ii. O usar el $\text{mcm}(b, d)$, mínim comú múltiple dels denominadors

Propietats de la resta de nombres racionals

Llei de composició interna: La resta de dos nombres racionals és un altre nombre racional únic.

No commutativa

No associativa

No té element neutre

6.4.4 Multiplicació de fraccions

Multiplicació de fraccions

Donats dos nombres racionals representats per les fraccions $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$, llavors definim la **multiplicació** com a

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Podem entendre el significat de la multiplicació de dues fraccions com una **fracció d'una fracció**. Així, la multiplicació $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3}$ la podem considerar com *les tres cinquenes parts de un terç*. Amb un model gràfic d'àrea, com el de la Figura 6.23, representaríem primer la fracció $\frac{1}{3}$, marcada en blau. A continuació, dividiríem aquesta part en 4 parts iguals i ens quedaríem amb 3, marcades en color taronja en la Figura 6.23. Si ara pensem sobre el *total*, la part taronja representa $\frac{3}{12}$, perquè hem de dividir el total en parts iguals (per cada *terç* obtenim $\frac{4}{12}$), com veiem al final de la Figura 6.23. Finalment, el resultat de l'operació (part taronja) resulta ser 3

parts d'$\frac{1}{12}$. D'aquesta manera:

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{12}$$

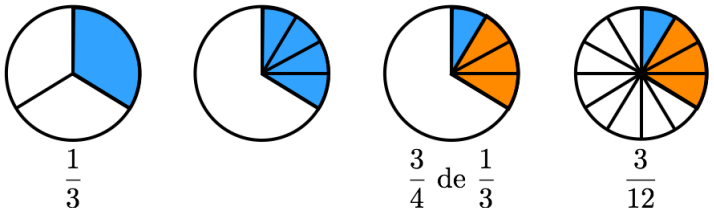


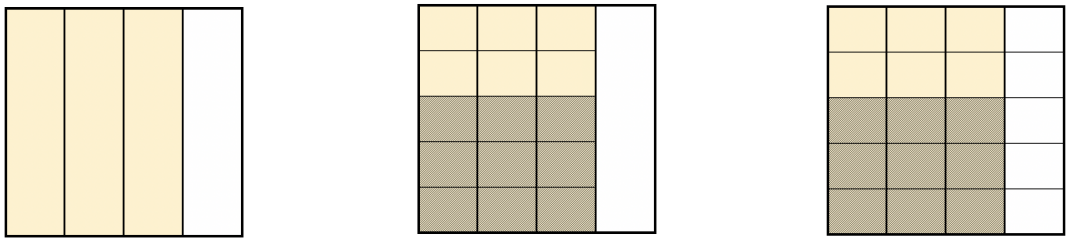
Figura 6.23. Representació de la multiplicació de fraccions

Exemple 6.12

Una forma útil i operativa de representar la multiplicació de dues fraccions és fer servir divisions horitzontals i verticals, una per cada factor de la multiplicació), en un model d'àrea rectangular o quadrat. Així,

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 3}{5 \cdot 4} = \frac{9}{20}$$

es pot interpretar com a $\frac{3}{5}$ de $\frac{3}{4}$. Representaríem inicialment $\frac{3}{4}$, Figura 6.24 (a). Després, subdividiríem en *cinquens* la fracció inicial representada ($\frac{3}{4}$), que ara actua com un nou *total*, per a representar $\frac{3}{5}$ d'aquesta part, com es mostra en la Figura 6.24 (b). Finalment, considerant la subdivisió en el *total original* podrem visualitzar de quantes parts iguals es compon el resultat, Figura 6.24 (c).



(a) Pas 1. Representació de $\frac{3}{4}$

(b) Pas 2. Nova partició i representació de l'altre factor

(c) Pas 3. Extensió de la partició

Figura 6.24. Representació amb model d'àrea de la multiplicació $\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{4}$

Propietats del producte de nombres racionals

Donades les fraccions $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ i $\frac{e}{f} \in \mathbb{Q}$, es verifiquen les següents propietats:

Llei de composició interna La multiplicació de dos nombres racionals és un altre nombre racional únic

Commutativa $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}$

Associativa $\frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}\right) = \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) \cdot \frac{e}{f}$

Element neutre: 1, perquè $\frac{a}{b}\cdot = \frac{a}{b}$

Distributiva respecte a la suma (i la resta) $\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)=\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right)+\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{e}{f}\right)$

Activitat 6.16

Fent ús d'un model d'àrea rectangular, dibuixeu les representacions de les següents multiplicacions de fraccions (activitat extreta de Musser i cols., 2013):

a) $\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}$ b) $\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{6}$ c) $\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{10}$

Solució en pàg. 404

Fracció inversa

Dues fraccions són **inverses** quan el numerador de la primera és igual al denominador de la segona, i viceversa, és a dir $\frac{b}{a}$ és la fracció inversa de $\frac{a}{b}$. A més, el producte de dues fraccions inverses és igual a la unitat:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=\frac{a\cdot b}{b\cdot a}=1$$

6.4.5 Divisió de fraccions amb igual denominador

Com s'indica en Musser i cols. (2013), la divisió de fraccions és un concepte difícil tant per a infants com per a adults, en part, a causa de la falta de models concrets senzills. Per a aproximar-nos a la divisió de fraccions, donarem un enfocament basat en una extensió de la divisió de nombres enters, per tal d'allunyar-nos de la simple memorització de la *regla dels productes creuats* que típicament s'aplica i que no dota de significat la divisió de fraccions.

Vegem el cas de fraccions amb denominador comú, com per exemple $\frac{4}{3}\div\frac{2}{3}$. Fent una analogia amb nombres enters, aquesta operació equival a un problema de repartiment en què cal repartir $\frac{4}{3}$ entre $\frac{2}{3}$, o un problema de mesura en què ens fem la pregunta *quants grups de mida* $\frac{2}{3}$ *hi ha en* $\frac{4}{3}$*?* La Figura 6.28 il·lustra aquesta situació.

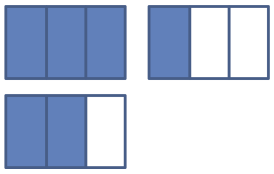


Figura 6.28. Representació de la divisió de fraccions amb igual denominador

Com que hi ha *dos* $\frac{2}{3}$ en $\frac{4}{3}$, el problema equival a fer la divisió $4\div 2=2$. Així, podem donar la següent definició per al cas de fraccions amb igual denominador:

Divisió de fraccions amb igual denominador

Donades dues fraccions amb el **mateix denominador**, representades per $\frac{a}{b}, \frac{c}{b}, c \neq 0$, definim la **divisió de fraccions** com una extensió de la divisió de nombres enters, en què n'hi ha prou amb dividir els numeradors:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{b} = \frac{a}{c}$$

Exemple 6.13

En el cas de $\frac{12}{13} \div \frac{5}{13}$, cal preguntar-se *quants* $\frac{5}{13}$ *caben en* $\frac{12}{13}$*?* És a dir, quants *cincs*, incloent-hi parts fraccionàries, hi ha en 12? Com es mostra en la 6.29, la resposta és 2 i $\frac{2}{5}$, és a dir el nombre mixt $2\frac{2}{5}$, que equival a $\frac{12}{5}$. Operativament, aquesta operació es correspon amb la divisió dels numeradors $12 \div 5$, perquè $12 \div 5 = \frac{12}{5}$.

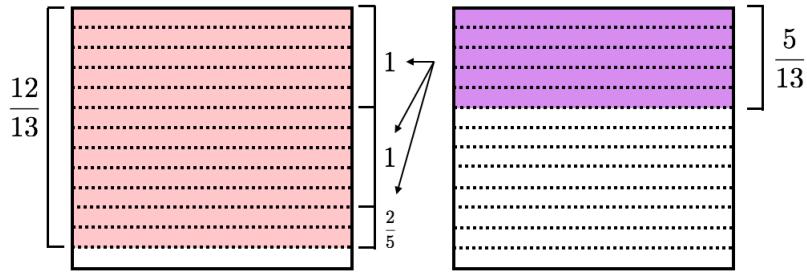


Figura 6.29. Representació de la divisió de fraccions amb igual denominador

Activitat 6.17

Trobeu els quocients següents:

a) $\frac{12}{13} \div \frac{4}{13}$ b) $\frac{6}{17} \div \frac{3}{17}$ c) $\frac{16}{19} \div \frac{2}{19}$

Solució en pàg. 404

Per al cas de fraccions amb diferent denominador deduirem la famosa *regla dels productes creuats*. Donades les fraccions $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ amb diferent denominador, calcularem la divisió:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}$$

Obtenim primerament les fraccions equivalents, amb denominador comú $b \cdot d$. D'aquesta manera, la divisió es transforma en

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} \div \frac{c \cdot b}{b \cdot d}$$

Ara, ja podem aplicar la divisió entre fraccions amb igual denominador que hem vist abans, de tal manera que:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} \div \frac{c \cdot b}{b \cdot d} = \frac{a \cdot d}{c \cdot b}$$

D'on extraiem la famosa *regla dels productes creuats*. Així, un procediment per a dividir fraccions és obtenir el producte creuat, o multiplicar la primera fracció per la fracció inversa de la segona.

Divisió de fraccions (general)

Donades dues fraccions $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$, amb diferent denominador, definim la seua **divisió** com la multiplicació de la primera per la inversa de la segona (*regla dels productes creuats*).

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

Propietats de la divisió de nombres racionals

Llei de composició interna La divisió de dos nombres racionals és un altre nombre racional únic

No commutativa

No associativa

Activitat 6.18

Suposem un model d'àrea en què un rectangle (o quadrat) representa el nombre enter 1. Usant aquest model gràfic, una divisió com $3 \div \frac{1}{2}$ equival a preguntar quants $\frac{1}{2}$ hi ha en 3 unitats, i la solució és 6, ja que hi ha 6 meitats en 3 unitats. Feu una representació gràfica similar per a representar gràficament les següents divisions:

a) $4 \div \frac{1}{3}$ b) $2\frac{1}{2} \div \frac{1}{4}$ c) $3 \div \frac{3}{4}$

Solució en pàg. 404

6.4.6 Altres operacions amb fraccions

A continuació definim algunes operacions amb fraccions que convé recordar:

Potenciació de fraccions

Donat el nombre racional representat per la fracció $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ i l'exponent n:

a) Si l'exponent és enter positiu, siga $n \in \mathbb{N}, n > 0$: l'n-èsima potència és el resultat de multiplicar tantes vegades la base com indica l'exponent.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b} \times \cdots \times \frac{a}{b}}_{n \text{ vegades}} = \frac{a^n}{b^n}$$

b) Si l'exponent és enter negatiu, siga $n \in \mathbb{N}$ i $-n < 0$: l'n-èsima potència és una fracció de numerador 1 i de denominador la mateixa potència, però amb exponent

positiu (n).

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n} = \frac{1}{\frac{a^n}{b^n}}$$

c) Si l'exponent és un nombre racional, siguen $m, n \in \mathbb{N}$ i $\frac{n}{m}$ una fracció: l'n-èsima potència és una arrel que el seu radicand és la base elevada al numerador de l'exponent i d'índex el denominador de l'exponent.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{\left(\frac{a}{b}\right)^n} = \sqrt[m]{\frac{a^n}{b^n}}$$

Exemple 6.14

a) $\left(\frac{5}{2}\right)^3 = \frac{5^3}{2^3} = \frac{125}{8}$

b) $\left(\frac{14}{9}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{14}{9}\right)^2} = \frac{1}{\frac{14^2}{9^2}} = \frac{81}{196}$

c) $\left(\frac{9}{25}\right)^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{\left(\frac{9}{25}\right)^3} = \sqrt[2]{\frac{9^3}{25^3}} = \left(\frac{\sqrt[2]{9}}{\sqrt[2]{25}}\right)^3 = \left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{3^3}{5^3} = \frac{27}{125}$

6.5. Nombres decimals

Les fraccions que inicialment (històricament) s'ha convingut a denominar com a decimals són les que compleixen que el seu denominador és de la forma 10^n. Als nombres racionals que admeten com a representant una fracció decimal els anomenarem **nombres decimals**, i passem a estudiar-los en aquesta secció.

Fracció decimal i nombre decimal

- Direm que una fracció és **fracció decimal** si el denominador és una potència de 10, és a dir, la fracció és del tipus $\frac{x}{10^n}$, sent $x \in \mathbb{Z}$.
- Un **nombre decimal** serà aquell nombre racional que pot ser representat mitjançant una fracció decimal.

Exemple 6.15

El nombre racional 1/8 és un nombre decimal, ja que és equivalent a la fracció 125/1000:

$$\frac{1}{8} = \frac{1}{2^3} = \frac{1 \cdot 5^3}{2^3 \cdot 5^3} = \frac{125}{10^3} = \frac{125}{1000}$$

A més, queda clar que tots els nombres naturals i enters són nombres decimals, ja que

$$5 = \frac{5}{1} = \frac{5}{10^0}, \text{ o també } 5 = \frac{5}{1} = \frac{50}{10}$$

Però tots els nombres racionals són nombres decimals?

Activitat 6.19

Indiqueu quines de les següents fraccions representen nombres decimals i trobeu una fracció decimal equivalent, en els casos en què siga possible:

a) $\frac{14}{130}$ d) $\frac{105}{700}$ g) $-\frac{2}{3}$ j) $-\frac{1}{4}$ m) 2 p) $\frac{210}{1680}$

b) $\frac{27}{28}$ e) $\frac{63}{110}$ h) 1 k) $\frac{3}{8}$ n) $\frac{23}{460}$ q) $\frac{117}{375}$

c) $\frac{49}{80}$ f) $\frac{145}{600}$ i) $\frac{2}{7}$ l) $\frac{5}{6}$ o) $\frac{2}{17}$ r) $\frac{117}{2625}$

Solució en pàg. 405

Com acabem de descobrir en l'Activitat 6.19, no totes les fraccions poden escriure's com a fraccions decimals, és a dir: no tots els nombres racionals són nombres decimals. El que també hem pogut comprovar és que hi ha una condició que és suficient i necessària perquè una fracció puga ser transformada en fracció decimal:

Teorema per a saber quan una fracció és nombre decimal

Una fracció és **equivalent a una fracció decimal** si i només si els factors primers del denominador de la seua fracció irreductible equivalent són 2 i/o 5.

Exemple 6.16

- La fracció $\frac{77}{44}$ sabem que és decimal perquè la seua fracció equivalent irreductible és $\frac{7}{2^2}$, i, per tant, el denominador podrem aconseguir expressar-lo en termes de potències de 10 (multiplicant-lo per 5^2).

$$\frac{77}{44} = \frac{7}{2^2} = \frac{7 \cdot 5^2}{2^2 \cdot 5^2} = \frac{7 \cdot 5^2}{10^2} = \frac{75}{100}$$

- La fracció $\frac{1}{3}$ sabem que no és decimal és irreductible i no conté cap 2 o 5 en el denominador. Per tant, no podrem aconseguir expressar mai el denominador en termes de potències de 10 (perquè el 3 no desapareixerà mai).

6.6. Expressió decimal d'un nombre

En 1585 el matemàtic belga Simon Stevin, en el llibre *De Thiende* (El decimal), va proposar, fraccionar la unitat en desenes, centèsimes, mil · lèsimes, etc., per a mesurar quantitats de

magnituds menors que la unitat. Amb aquest sistema, el resultat d'una mesura seria sempre expressat mitjançant un nombre enter i fraccions decimals.

$$7+\frac{3}{10}+\frac{5}{100}+\frac{6}{1000}=7+\frac{3}{10^1}+\frac{5}{10^2}+\frac{6}{10^3}\Longrightarrow \boxed{7}\,\|\,\boxed{3}\,\boxed{5}\,\boxed{6}\Longrightarrow 7'356$$

La manera de representar aquesta situació va donar lloc a un sistema de representació posicional (de base decimal) equivalent al definit per als nombres naturals, en què el lloc que ocupen les xifres indica si són dècimes ($\frac{1}{10}$), centèsimes ($\frac{1}{100}$), mil · lèsimes ($\frac{1}{1000}$), etc.

! Encara que la notació decimal ha evolucionat amb els anys, avui continua sense acord universal. Els americans usen una versió de Napier "notació de punt" decimal (3.142), els anglesos mantenen la versió original ($3\cdot 142$), i els francesos i alemanys usen la "notació de coma" de Vieta ($3,142$).

Nosaltres en els apunts seguirem la notació de la coma superior, per a discrepar de tots també (tot i que a vegades se'ns pot colar un punt o una coma inferior).

Expressió decimal d'un nombre

L'**expressió decimal** de qualsevol nombre és una expressió mixta que consta de part entera i part fraccionària.

$$\mathbf{76'563}$$

- La part entera és la situada a l'esquerra de la coma (**76**).
- La part decimal la situada a la dreta (**563**).

6.6.1 Expressió decimal d'un nombre decimal

Un mètode per a **obtenir l'expressió decimal d'una fracció** és fer la divisió entre el numerador i el denominador. Les expressions decimals així obtingudes podran ser finites o infinites. Si en algun moment obtenim residu zero, l'expressió serà finita i, en cas contrari, infinita.

Exemple 6.17

Per a obtenir l'expressió decimal de la fracció $\frac{6}{125}$ podem fer la divisió:

6	1 2 5
6 0 0	0.0 4 8
1 0 0 0	
0	

Recordeu que com que 6 entre 125 *no cap*, s'escriu "zero al quocient i una coma (o punt)". S'afegeixen tants zeros com calga en el dividend per a continuar la divisió ("*zero al quocient i baixe la xifra següent*").

Amb aquest mètode podrem obtenir les expressions decimals de qualsevol nombre fraccionari. El resultat que obtenim podrà variar en funció de si la fracció és decimal o no, com ara veurem.

Exemple 6.18

En el cas que tinguem una fracció, com per exemple $\frac{1}{8}$, tindrem que:

$$\begin{array}{r|l} 1 & 8 \\ \cline{2-2} 1\,0 & 0.1\,2\,5 \\ \quad 2\,0 & \\ \quad\quad 4\,0 & \\ \quad\quad\quad 0 & \end{array}$$

Com que obtenim residu zero, l'expressió decimal és finita, i per tant, $\frac{1}{8} = 0'125$.

Propietat

L'**expressió decimal d'una fracció decimal** és finita.

6.6.2 Expressió decimal d'un nombre no decimal: el període

Si l'expressió decimal d'un nombre és infinita, en la divisió (numerador/denominador) apareixeran infinites xifres en el quocient i també apareixeran infinits residus parcials, però els residus han de ser, per definició de divisió euclidiana, enters menors que el divisor (d). És a dir, per al nombre racional $\frac{1}{3}$, en fer la divisió, els residus podem ser només les xifres 1 o 2:

$$\begin{array}{r|l} 1 & 3 \\ \cline{2-2} 1\,0 & 0.3\,3\,3\,3\,3\,3\,3\,3\,3 \\ \quad 1\,0 & \\ \quad\quad 1\,0 & \\ \quad\quad\quad 1\,0 & \\ \quad\quad\quad\quad 1\,0 & \\ \quad\quad\quad\quad\quad 1\,0 & \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad 1\,0 & \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad 1\,0 & \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad 1\,0 & \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad 1 & \end{array}$$

Per tant, només hi ha $d-1$ valors possibles per a cada un d'aquests residus infinits i **necessàriament es repetiran**. Es diu llavors que l'expressió decimal d'aquests nombres és periòdica i s'escriu amb un arc a dalt de la part que es repeteix, $\frac{1}{3} = 1'\widehat{3}$.

Expressió decimal periòdica

Anomenem **expressió decimal periòdica** aquelles expressions decimals infinites en què es repeteix un grup d'una o més xifres de manera indefinida (periòdica). S'indica amb un arc a dalt de la part que es repeteix.

$$1'2\widehat{89} = 1'2898989898989898989\ldots$$

Exemple 6.19

Siga el nombre no decimal $\frac{1}{7}$, llavors, quan fem la divisió per a obtenir l'expressió decimal tenim que

$$\begin{array}{l|l}
1 & 7 \\
\cline{2-2}
1\,0 & 0.1\,4\,2\,8\,5\,7\,1\,4\,2 \\
\quad 3\,0 & \\
\quad\quad 2\,0 & \\
\quad\quad\quad 6\,0 & \\
\quad\quad\quad\quad 4\,0 & \\
\quad\quad\quad\quad\quad 5\,0 & \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad 1\,0 & \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad 3\,0 & \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad 2\,0 & \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad 6 &
\end{array}$$

Com que el divisor és 7, els residus possibles són $1, 2, 3, 4, 5, 6$ (excloent el 0, ja que sabem que la divisió no serà exacta en cap moment). Com veiem, a partir d'un cert moment els residus es repeteixen i, per tant, la divisió no acabarà mai, és a dir, l'expressió decimal és infinita però amb residus repetits. Per tant: $\frac{1}{7} = 0'\widehat{142857}$

L'**expressió decimal d'una fracció no decimal** és infinita però amb xifres repetides periòdicament i en el mateix ordre.

Com a conclusió d'aquests dos apartats, tenim la següent propietat que ens aclarirà les úniques expressions decimals que posseeix un nombre racional.

Úniques expressions decimals d'un nombre racional

Tot nombre racional admet una expressió decimal constituïda per un nombre finit de xifres decimals o una infinitat d'aquestes, però en aquest últim cas aquestes xifres es repeteixen periòdicament en el mateix ordre.
És a dir, l'expressió decimal d'un nombre racional només pot ser:

a) **Finita**, en el cas que el nombre siga una fracció decimal

b) **Infinita i periòdica**, en el cas que el siga no siga una fracció decimal

Diferenciarem dos tipus de períodes en les expressions decimals infinites periòdiques:

Classes d'expressions decimals periòdiques

a) **Pures:** aquelles en què en la part decimal només apareixen les xifres corresponents al període, com per exemple $1'\widehat{6756}$.

b) **Mixtes:** aquelles que presenten xifres intercalades entre la coma i el període, com per exemple $2'67\widehat{12}$.

Hem de tenir en compte que una fracció del tipus periòdica mixta, com $0'5\widehat{3}$, pot transformar-se en suma d'un decimal finit i d'un decimal periòdic pur de la següent manera:

$$0'5\widehat{3} = 0'5 + 0'0\widehat{3} = \frac{5}{10} + \frac{1}{10} \cdot 0'\widehat{3} = 0'5 + 0'1 \cdot 0'\widehat{3}$$

Per tant, gràcies a la divisió decimal, qualsevol fracció té expressió decimal ja siga finita o infinita i en aquest cas periòdica pura o mixta.

Activitat 6.20

Identifiqueu quin tipus d'expressió decimal té cada un d'aquests nombres racionals i escriviu-los amb la notació del període que acabem de descriure:

a) $0'83333333333\ldots$
b) $8'15151515151\ldots$
c) $6'53222222222\ldots$
d) $1'33323232232\ldots$
e) $24'9313131313\ldots$
f) $5'67367676767\ldots$

Solució en pàg. 405

Activitat 6.21

Quina és la propietat que ha de complir una fracció per a representar un nombre decimal? Apliqueu-la per a determinar si les fraccions següents representen o no un nombre decimal:

$$\frac{37}{5} \quad \frac{10}{7} \quad \frac{21}{60} \quad \frac{12}{10} \quad \frac{4}{6} \quad \frac{77}{30} \quad \frac{7}{50} \quad \frac{63}{140}$$

Solució en pàg. 405

Activitat 6.22

Per a cada fracció de l'Activitat 6.21:

a) Calculeu la seua expressió decimal
b) Calculeu la fracció irreductible equivalent a la donada
c) Calculeu (si és el cas) la fracció decimal equivalent

6.6.3 Fracció generadora

Ja sabem que tots els nombres racionals tenen expressions decimals finites o infinites periòdiques. Però tota expressió decimal procedeix d'una fracció? Per a estudiar-ho, analitzarem el concepte de fracció generadora associada a una expressió decimal:

Fracció generadora

La **fracció generadora associada a una expressió decimal** és aquella fracció que en fer la divisió del numerador pel denominador dona com a resultat aquesta expressió decimal.

Per a estudiar si tota expressió decimal procedeix d'una fracció diferenciarem dos casos:

1. Si l'**expressió decimal és finita**, com $0'12$, la fracció associada o generadora és senzilla d'obtenir, perquè:

$$0'12 = \frac{12}{100} = \frac{2^2 \cdot 3}{2^2 \cdot 5^2} = \frac{3}{5^2} = \frac{3}{25}$$

Qualsevol d'aquestes fraccions són les generatrius de l'expressió decimal $0'12$. De manera general, el procediment per als nombres decimals (amb expressió finita) seria el següent:

Fracció generadora d'una expressió decimal finita

La **fracció generadora associada a una expressió decimal finita** (corresponent a un nombre decimal) s'obté creant una fracció amb els següents requisits en el numerador i denominador:

1) Col · loquem les xifres de l'expressió decimal en el numerador, eliminant la coma i els zeros de l'esquerra.
2) En el denominador col · loquem un 1 seguit de tants zeros com decimals tinga l'expressió decimal.
3) Si cal, simplifiquem la fracció.

2. Vegem ara el cas de les **expressions decimals infinites periòdiques**, separades en casos:

   i. Si l'expressió decimal infinita és **periòdica pura**, com per exemple aquesta:

   $$202'9134913491349134\cdots = 202'\widehat{9134}$$

   Primerament, anomenarem aquest nombre x, amb la intenció d'expressar x com una fracció:

   $$x = 202'\widehat{9134}$$

   L'objectiu general en aquest procediment serà aconseguir eliminar la part periòdica fent ús d'una resta d'expressions decimals amb exactament la mateixa part repetida. Com que la part periòdica de x té quatre xifres, multiplicarem el nombre per 10 000. Així, obtenim una expressió decimal periòdica amb el mateix període:

   $$10000\,x = 2029134'\widehat{9134}$$

   Ara simplement fem una resta d'ambdues expressions decimals. Atenció perquè mantindrem la forma d'equació en la resta per a mantenir la x:

   $$\begin{array}{rrl} & 10000\,x & = \quad 2029134'\widehat{9134} \\ - & x & = \quad 202'\widehat{9134} \\ \hline & 9999\,x & = \quad 2029134 - 202 \\ & 9999\,x & = \quad 2028932 \end{array}$$

   Per tant, aïllant la x obtenim:

   $$x = \frac{2028932}{9999}, \text{ és a dir, } 202'\widehat{9134} = \frac{2028932}{9999}$$

Així, $\frac{2028932}{9999}$ és la fracció generadora de $202'\widehat{9134}$, fet que podem comprovar a mà o amb la calculadora. De manera general, podem enunciar aquesta regla típica de les etapes d'Educació Primària:

Fracció generadora d'una expressió decimal infinita periòdica pura

La **fracció generadora associada a una expressió decimal infinita periòdica pura** s'obté creant una fracció amb els requisits següents en el numerador i denominador:

1) En el numerador escriurem el resultat de la diferència entre el nombre format per **tota** l'expressió decimal (part entera i part decimal periòdica sense la coma) i el nombre format exclusivament per la part entera.
2) En el denominador col · loquem tants 9 com xifres té el període.
3) Si cal, i es pot, simplifiquem la fracció.

ii. Si l'expressió decimal infinita és **periòdica mixta** seguirem el mateix procediment, però fent un pas previ que convertirà l'expressió decimal periòdica mixta en pura, com ara veurem. Agafem una expressió decimal d'exemple, que anomenarem x per a expressar-la com a fracció:

$$x = 5'45382382382\cdots = 5'45\widehat{382}$$

En aquest cas, el primer que farem serà convertir aquesta expressió periòdica mixta en pura. Per tant, com que l'expressió té dues xifres no periòdiques, multiplicarem x per 100 obtenint:

$$100\,x = 545'382382382\cdots = 545'\widehat{382}$$

A partir d'aquest punt, aplicarem exactament el mateix procediment que el que hem fet servir per a l'apartat i. anterior, perquè es tracta ja d'una expressió decimal periòdica pura. L'únic que hem de tenir en compte és que l'expressió decimal de partida ja no involucra x, sinó $100\,x$, perquè és la que representa l'expressió decimal periòdica pura. Raonant com en l'apartat i., construirem una altra expressió amb el mateix període, en aquest cas, multiplicant $100\,x$ per 1000, perquè tenim 3 xifres en la part periòdica de l'expressió de $100\,x$. Obtenim, per tant:

$$100000\,x = 545382'\widehat{382}$$

Si ara restem les dues últimes expressions, tindrem que:

$$\begin{array}{rrcr} & 100000\,x & = & 545382'\widehat{382} \\ - & 100\,x & = & 545'\widehat{382} \\ \hline & 99900\,x & = & 544837 \end{array}$$

Per tant, aïllant la x obtenim:

$$x = \frac{544837}{99900}, \text{ és a dir, } 5'45\widehat{382} = \frac{544837}{99900}$$

Així, $\frac{544837}{99900}$ seria la fracció generadora de $5'45\widehat{382}$. De manera general, podem enun-

ciar la regla següent:

Fracció generadora d'una expressió decimal infinita periòdica mixta

La **fracció generadora associada a una expressió decimal infinita periòdica mixta** s'obté creant una fracció amb els següents requisits en el numerador i el denominador:

1) En el numerador escriurem el resultat de la diferència entre el nombre format per **tota** l'expressió decimal (part entera, part decimal no periòdica i part periòdica sense la coma) i el nombre format per la part entera i no periòdica (sense la coma).
2) En el denominador col · loquem tants 9 com xifres té el període seguit de tants 0 com xifres té la part no periòdica
3) Si cal, i es pot, simplifiquem la fracció.

Activitat 6.23

Trobeu les fraccions generatrius corresponents a les següents expressions decimals:

a) $0'\widehat{34}$
b) $9'501$
c) $12'6\widehat{1}$
d) $556'6123\widehat{134}$
e) $4'17691830034$
f) $0'\widehat{16}$
g) $0'\widehat{387}$
h) $7'\widehat{25}$
i) $2'2$

Solució en pàg. 406

Amb el que acabem de veure podem enunciar el següent teorema:

Relació entre fracció i expressió decimal

Tota fracció té una expressió decimal associada (finita o infinita amb una part periòdica). A més, tota expressió decimal finita o infinita i amb part periòdica té una fracció associada (fracció generadora).

Aquest teorema pot resumir-se amb aquest quadre:

$$\text{Fraccions} \begin{cases} \text{Fraccions decimals} \iff \text{Expressió decimal finita} \\ \text{Fraccions no decimals} \begin{cases} \iff \text{Expressió decimal infinita periòdica pura} \\ \iff \text{Expressió decimal infinita periòdica mixta} \end{cases} \end{cases}$$

Activitat 6.24

Usu el raonament que s'ha fet servir anteriorment per a trobar la fracció generadora i demostreu les igualtats següents:

a) $0'\widehat{9} = 1$
b) $1'2\widehat{9} = 1'3$
c) $9'\widehat{9} = 10$

Solució en pàg. 406

6.6.4 Ordre en les expressions decimals

L'ordre en els nombres representats com a expressions decimals s'establirà en funció d'aquest criteri:

Criteri per a establir l'ordre amb expressions decimals

Per a comparar dos nombres representats com a expressions decimals compararem, inicialment, la part entera de cada un com si es tractara de nombres enters; serà major l'expressió decimal amb major part entera.
Si les parts enteres són iguals, llavors cal comparar les parts decimals. Podem usar dos mètodes:

i. Escrivint les parts decimals en forma de fracció i comparant les fraccions com ja hem fet anteriorment.

ii. Fent ús del "valor de posició", com es fa amb els nombres naturals.

Exemple 6.20

- Donades dues expressions decimals amb diferent part entera tindrem que:

$$1'3456 < 2'01 \text{ ja que } 1 < 2$$

- En comparar dues expressions decimals amb parts enteres iguals podem optar per:

i. Escriure les fraccions corresponents a les parts decimals:

$$3'7 > 3'23 \text{ perquè les parts decimals compleixen que: } 0'7 > 0'23$$

$$\frac{7}{10} > \frac{23}{100} \text{ ja que } 7 \cdot 100 < 10 \cdot 23$$

ii. Fer ús del "valor de posició":

$$23'873 > 23'8725 \text{ perquè } 8730 > 8725$$

En aquest cas, cal recordar que convé igualar el nombre de xifres decimals en tots dos nombres afegint zeros a la dreta si cal.

Activitat 6.25

Raoneu si les següents igualtats són vertaderes o falses a partir de la comparació de les expressions decimals:

a) $23'\widehat{2} < 22'7\widehat{1}$

b) $0'\widehat{345} < 0'\widehat{1}$ (compareu fent ús de les fraccions generatrius)

c) $0'235\widehat{235} < 0'\widehat{235}$ (compareu fent ús del "valor de posició")

Exemple 6.21

En el cas de voler comparar dos nombres racionals representats mitjançant expressions decimals periòdiques procedirem d'igual manera:

- Donades dues expressions decimals periòdiques amb diferent part entera, tindrem que:

$$1'\widehat{2} < 2'\widehat{89} \text{ ja que } 1 < 2$$

- Siguen ara dues expressions decimals periòdiques amb parts enteres iguals, com $0'\widehat{25}$ i $0'2\widehat{525}$. Per a comparar-les, podem optar per:

  i. Escriure les fraccions corresponents a les parts decimals:

$$0'\widehat{25} = \frac{25}{99} \text{ i } 0'2\widehat{525} = \frac{2523}{9990}$$

  Per tant, es compleix que:

$$0'\widehat{25} < 0'2\widehat{525} \text{ perquè } 25 \cdot 9990 < 99 \cdot 2523$$

  ii. Fer ús del "valor de posició":

$$\begin{aligned} 0'\widehat{25} &= \quad 0'25252525\ldots \\ 0'2\widehat{525} &= \quad 0'25255255\ldots \end{aligned}$$

  Observem que les quatre primeres xifres són iguals (2525) i que la cinquena xifra de la segona expressió (5) és major que la cinquena xifra de la primera (2). Per tant, $0'\widehat{25} < 0'2\widehat{525}$.

Activitat 6.26

Raoneu si les següents afirmacions són vertaderes o falses. En cas de ser falses, doneu un contraexemple. En cas de ser vertaderes, raoneu la resposta.

a) $4'72$ està comprès entre $4'6$ i $4'730$

b) $2'150 > 2'35$

c) Entre $2'45$ i $2'46$ no hi ha cap número

6.6.5 Operacions amb expressions decimals

Amb les expressions decimals podem efectuar les mateixes operacions que amb fraccions, perquè tenim la fracció generadora associada. Per tant, la suma, la resta, la multiplicació i la divisió d'expressions decimals finites tindran les mateixes propietats que les ja enunciades amb fraccions.

Encara que les expressions decimals infinites periòdiques caldrà expressar-les en forma de

fracció per a fer els càlculs, el treball amb les expressions decimals finites (corresponents a nombres decimals) es podrà fer directament, tenint en compte el "valor de posició", de manera que els algoritmes bàsics tindran la seua equivalència.

6.7. Nombres irracionals

Per a acabar, comentarem que les expressions decimals infinites no periòdiques no tenen fracció generadora associada. Aquesta propietat caracteritza els nombres irracionals, els quals formen, junt amb els racionals, el conjunt de nombres reals (Figura 6.33).

Nombres irracionals

S'anomenen **nombres irracionals** ($\mathbb{I}$) aquells que tenen una expressió decimal infinita i no periòdica. És a dir, aquells que no poden escriure's en forma de fracció.

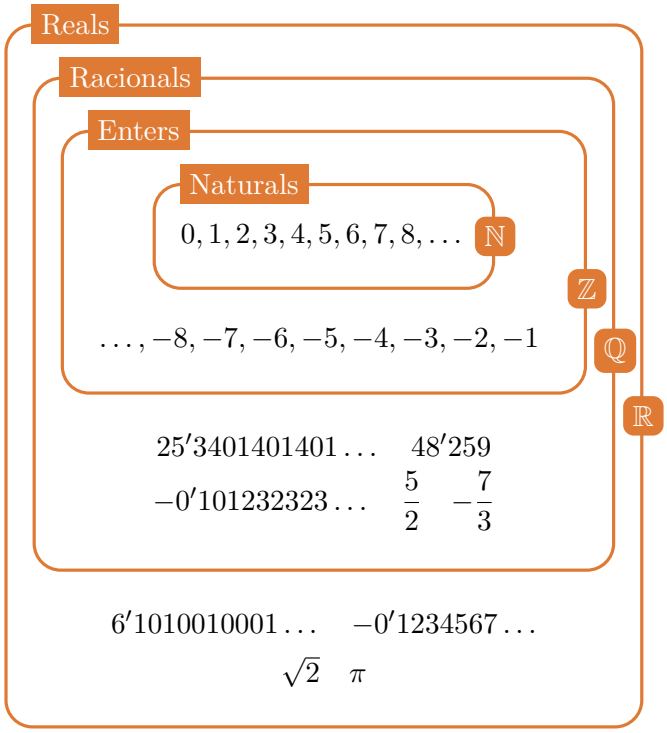


Figura 6.33. Diagrama representatiu de tots els nombres reals

6.8. Activitats complementàries del tema

Activitat 6.27

Representeu les fraccions $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{8}$ i $\frac{7}{12}$ amb models d'àrea

Solució en pàg. 407

Activitat 6.28

Representeu les fraccions $\frac{7}{9}$, $\frac{5}{8}$ i $\frac{4}{5}$ amb models lineals

Solució en pàg. 407

Activitat 6.29

Quina fracció de l'any és un mes? I un dia? Quina fracció de la setmana és un dia?

Solució en pàg. 408

Activitat 6.30

Ordeneu de major a menor les fraccions següents: $\frac{3}{5}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{6}$.

Solució en pàg. 408

Activitat 6.31

Ordeneu de menor a major les fraccions següents: $\frac{6}{10}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{66}{10}$.

Solució en pàg. 408

Activitat 6.32

a) Ordeneu segons la relació "menor o igual" els següents nombres: $-\frac{2}{5}, 0, \frac{7}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{4}{5}$.

b) Ordeneu de la mateixa manera els nombres oposats als dels apartats a).

c) Ordeneu de la mateixa manera els nombres inversos als dels apartats a).

d) Ordeneu de la mateixa manera els nombres oposats als inversos dels apartats a).

Solució en pàg. 408

Activitat 6.33

Trobeu les fraccions irreductibles de $\frac{18}{27}$, $\frac{70}{168}$ i $\frac{75}{90}$.

Solució en pàg. 408

Activitat 6.34

Donat el nombre mixt $1\frac{7}{8}$,

a) Identifiqueu la part entera i la part decimal.

b) Assenyaleu entre quins nombres enters està comprès.

c) Escriviu el nombre mixt com a nombre decimal.

d) Representeu-lo en un model de lineal.

Solució en pàg. 408

Activitat 6.35

Representeu gràficament, escriviu en forma de nombre mixt i també en forma d'expressió decimal cada una de les següents fraccions $\frac{16}{9}, \frac{35}{20}, \frac{23}{7}, \frac{5}{3}$.

Solució en pàg. 409

Activitat 6.36

Quantes caixes de 8 unitats podem omplir amb 37 formatges? I amb 45 formatges? Expresseu els resultats com a nombres mixtos.

Solució en pàg. 409

Activitat 6.37

Indiqueu quina variació experimenta una fracció (augmenta / disminueix / no modifica el seu valor) en cada una de les següents situacions:

a) Restem 1 unitat al denominador.

b) Multipliquem per 2 el numerador.

c) Sumem 10 unitats tant al numerador com al denominador.

d) Dividim per 3 el numerador i el denominador.

Solució en pàg. 409

Activitat 6.38

Intercaleu 5 nombres racionals entre $\frac{2}{3}$ i $\frac{7}{8}$.

Solució en pàg. 409

Activitat 6.39

Si el numerador d'una fracció l'augmentem en 21 unitats la fracció queda augmentada en 3 unitats. Quin és el denominador de la fracció?

Solució en pàg. 410

Activitat 6.40

En un quiosc s'ha venut al llarg del matí un terç d'un lot de periòdics. A la vesprada s'han venut la meitat dels que han quedat.

a) Quina fracció del total de periòdics representen els venuts a la vesprada?

b) Si s'han quedat sense vendre 20 periòdics, quants hi havia en començar la venda?

Solució en pàg. 410

Activitat 6.41

Elvira ha usat un pitxer, un poal i un llibrell per a reunir 22 litres d'aigua. La capacitat del pitxer és $\frac{1}{3}$ de la del poal i un $\frac{1}{7}$ de la del llibrell. Quants litres caben en cada un?

Solució en pàg. 410

Activitat 6.42

En un joc de 100 preguntes, Maria n'ha encertat 64, Guillem n'ha encertat 67 i Jaume n'ha fallat 31. Assenyaleu quina de les següents fraccions decimals representa el nombre d'encerts de Loreto si sabem que va tenir més encerts que Maria, menys encerts que Jaume i menys fallades que Guillem $\frac{63}{100}, \frac{65}{100}, \frac{68}{100}, \frac{71}{100}, \frac{69}{100}$.

Solució en pàg. 410

Activitat 6.43

En la classe de Raquel hi ha 30 alumnes. 12 van al col · legi amb autobús, 10 amb metro i els altres fan el viatge caminant. Quina fracció dels alumnes de la classe representa cada un dels grups? Escriviu-les en forma irreductible.

Solució en pàg. 410

Activitat 6.44

Cada vegada que arriba al pis, una pilota rebota els $\frac{3}{5}$ de l'altura des de la qual ha caigut. Si la deixem caure d'una altura de 125 metres, a quina altura arribarà després del tercer bot?

Solució en pàg. 410

Activitat 6.45

En un pitxer cap el mateix contingut que en 8 gots xicotets, i el mateix que en 5 gots grans. Si al principi el pitxer era ple, quina fracció del contingut hi quedarà després d'haver omplit un got xicotet i un de gran?

Solució en pàg. 410

Activitat 6.46

Un pintor pinta un garatge en 8 hores i el seu fill en 12 hores. Quina part del garatge pot pintar cada un en una hora? Si pare i fill treballaren junts quant tardarien?

Solució en pàg. 410

Activitat 6.47

En una carrera de motos s'han de fer 24 voltes a un circuit de 5 km. Per la televisió es reben les següents informacions:

a) El pilot que ocupa el primer lloc acaba d'efectuar $\frac{1}{4}$ de la prova. Calculeu les voltes

que ha fet al circuit i els quilòmetres que ha recorregut.

b) El primer pilot acaba d'efectuar $\frac{3}{4}$ de la prova i l'últim es troba en els $\frac{2}{3}$ d'aquesta. Calculeu les voltes que han fet al circuit i els quilòmetres que han recorregut tots dos pilots.

Solució en pàg. 410

Activitat 6.48

Un gat persegueix un ratolí. En principi el ratolí es troba a 5 m del gat. El gat corre 6 m en un segon i el ratolí $\frac{2}{3}$ del que recorre el gat. Caçarà el gat al ratolí abans de 3 segons? I abans de 2 segons?

Solució en pàg. 411

Activitat 6.49

Un club de futbol té dividida la seua temporada en quatre parts. En la primera juga la meitat del total dels partits; en la segona, la quarta part, i en la tercera, un vuitè. Per a acabar la temporada li falten encara 6 partits per jugar. De quants partits consta la temporada d'aquest club? Quants partits juga en cada part de la temporada?

Solució en pàg. 411

Activitat 6.50

Calculeu mentalment:

a) $0'3 \times 0'2$
b) $0'004 \times 1000$
c) $0'3 \times 0'31$
d) $0'8 \times 0'5$
e) $987'34 \times 100$
f) $0'981 \times 10$
g) $1200 \div 40$
h) $7 \div 10$
i) $2098 \div 1000$

Solució en pàg. 411

Activitat 6.51

Escriviu en forma de nombre decimal les següents fraccions:

a) $\frac{9}{12}$
b) $\frac{1}{6}$
c) $\frac{30}{24}$
d) $\frac{6}{15}$
e) $\frac{3}{4}$
f) $\frac{315}{21}$

Solució en pàg. 411

Activitat 6.52

Calculeu les fracciones generatrius, efectueu les següents operacions i deixeu el resultat en forma de fracció irreductible:

a) $4'2\widehat{8} + 3'1\widehat{27}$

b) $51'4\widehat{28} - 42'3\widehat{7}$

c) $\left(13'68 - 12'\widehat{5}\right) + 4'2\widehat{8}$

d) $61'\widehat{51} \div 4'\widehat{6}$

e) $5'8 \times 3'\widehat{69}$

f) $453'1\widehat{6} \div 25$

Solució en pàg. 411

Activitat 6.53

En una planta depuradora d'aigües residuals, el tractament de l'aigua es duu a terme en tres etapes. En la primera es lleven els $^9/_{10}$ dels fosfats. En la segona es lleven els $^3/_4$ dels que queden. I en la tercera, es lleva $^1/_2$ dels que encara porta l'aigua. Quina fracció de fosfats es lleva en total de l'aigua?

Solució en pàg. 411

Activitat 6.54

A Pere li ha tocat la loteria i decideix guardar-ne la meitat en el banc i repartir la resta entre els seus tres fills. A Artur li dona $^5/_{15}$ i a Lledó $^2/_{15}$ del que li queda després de ficar els diners en el banc. El que queda li ho dona a Carles. Si a Carles li dona 300 €, quants diners li han tocat?

Solució en pàg. 411

Activitat 6.55

Una finca es divideix en tres parcel · les. La primera és igual als $^4/_7$ de la superfície de la finca i la segona és igual a la meitat de la primera:

a) Quina fracció de la finca representa la tercera parcel · la?

b) Si l'extensió de la finca és de 14 000 m^2, quina és la superfície de cada parcel · la?

Solució en pàg. 411

Activitat 6.56

Un futbolista ha ficat un terç dels gols marcats pel seu equip aquesta temporada, i un altre la quarta part de la resta. Si els altres jugadors han aconseguit 30 gols quants gols ha marcat l'equip en tota la temporada?

Solució en pàg. 412

Activitat 6.57

Un recipient és ple d'aigua fins als $^4/_5$ de la seua capacitat. Es trau la meitat d'aigua que conté.

a) Quina fracció de la capacitat total del recipient s'ha tret?

b) Si la capacitat del recipient és de 80 litres, quants litres hi queden?

Solució en pàg. 412

Activitat 6.58

D'un solar es van vendre els $^2/_3$ de la superfície i després els $^2/_3$ del que quedava. L'ajuntament va expropiar els $3200\,\mathrm{m}^2$ restants per a un parc públic. Quina era la superfície?

Solució en pàg. 412

Referències

Behr, M., Harel, G., Post, T., i Lesh, R. (1992). Rational number, ratio, and proportion. En D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 296 —-333). Macmillan Publishing Company.

Lamon, S. J. (2012). *Teaching fractions and ratios for understanding* (3rd ed.). New York: Routledge. doi: 10.4324/9780203803165

Musser, G. L., Peterson, B. E., i Burger, W. F. (2013). *Mathematics for Elementary teachers: A Contemporary Approach* (10th ed.). Wiley.

Petit, M. M., Laird, R. E., i Marsden, E. L. (2010). *A Focus on Fractions. Bringing Research to the Classroom.* New York and London: Routledge.

Van de Walle, J. A., Karp, K. S., i Bay-William, J. M. (2016). *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally* (9th ed.). Essex, UK: Pearson Education.

7

Raó i proporció

Organització de continguts del Tema 7

1. Raó i proporció
2. Percentatges
3. Magnituds proporcionals i no proporcionals
   - Proporcionalitat directa
   - Proporcionalitat inversa
   - La regla de tres
   - Factor de conversió
   - Conversió d'unitats del sistema mètric

7.1. Raó i proporció

En aquest tema farem ús dels conjunts de nombres ja estudiats (enters, fraccions o decimals que representen fraccions) per a expressar raons i relacions de proporcionalitat. Els conceptes relacionats amb la raó i la proporció apareixen en molts llocs de les matemàtiques, però tenen especialment molta utilitat en la vida quotidiana, com il · lustrem en els exemples següents.

Exemple 7.1

- A la Facultat de Magisteri de la Universitat de València la raó entre estudiants i professors és 17 a 1.
- A Nules, la raó de xiquetes a xiquets és de 3 a 2.
- Una mescla de pintura requereix una raó de 5 a 3 entre pintura i aigua.

- La raó de centímetres a polzades és de 2'54 a 1.

ATENCIÓ! Pareu atenció perquè en el llenguatge habitual les expressions que apareixen en l'Exemple 7.1 solen expressar-se en termes de "proporció", la qual cosa és incorrecta, com veurem més avant.

Raó

Una **raó** és una relació entre dues quantitats p i q. En aquest cas direm que aquesta raó es p *a* q i ho escriurem com a $p : q$ o p/q.

La raó entre dues quantitats p i q ens dona informació de com varia una en relació amb l'altra. No és gens d'estrany trobar-nos expressions de les raons de la forma $p : q$, com ara en les escales dels mapes o els plànols.

Exemple 7.2

En relació amb l'Exemple 7.1, podem dir que:

- Els mestres de la Facultat de Magisteri representen $\frac{1}{17}$ dels estudiants
- Al poble de Nules la quantitat de xiquets són $\frac{2}{3}$ de la quantitat de xiquetes, o que la raó entre xiquets i xiquetes és de $2 : 3$. Expressions com 2 de cada 5 infants són xiquets o 3 de cada 5 infants són xiquetes són equivalents
- En el cas de la pintura, fixeu-nos que la raó és independent de la mesura que s'use. Podem dir que de cada 8 parts, 5 han de ser de pintura i 3 d'aigua, és a dir, la raó entre quantitat de mescla i quantitat de pintura és de $8 : 5$ o la quantitat de mescla i quantitat d'aigua és de $8 : 3$.

Així, com hem vist en l'Exemple 7.2, les raons poden expressar-se com relacions *part-tot* o *part-part*. No obstant això, **cal no confondre raó amb fracció**, encara que en alguns casos el significat de la fracció siga similar al de raó. Hem de tenir clar que:

- El valor numèric associat a una fracció és un nombre racional, en canvi el valor numèric associat a una raó no sempre és un nombre racional, ja que en la raó $a : b$, a i b no sempre tenen per què ser nombres enters (inclús en alguns casos podria ser que $b = 0$, cosa que és impossible en les fraccions). Vegeu l'Exemple 7.3, per a veure'n un cas.
- En les fraccions, numerador i denominador denoten quantitats homogènies (les mateixes unitats). En canvi en les raons aquestes quantitats poden no ser les mateixes ni mesurar-se en la mateixa unitat. Com l'últim cas de l'Exemple 7.1, en què el numerador de la raó $\frac{2{,}54}{1}$ indica centímetres i el denominador polzades.

Exemple 7.3

La relació (raó) entre la longitud d'una circumferència (L) i el diàmetre (D) és constant i el seu valor numèric associat no és un nombre racional (no és una fracció). Com van provar els grecs, la raó entre diàmetre i longitud d'una circumferència no representa un nombre racional encara que pot expressar-se en forma de fracció:

$$L : D = \frac{L}{D} = \pi$$

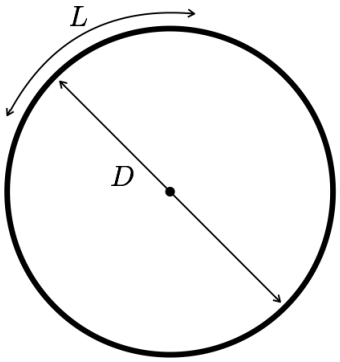


Figura 7.1. La raó entre diàmetre i longitud d'una circumferència no representa un nombre racional

Activitat 7.1

En una bossa amb boles blanques i negres, la raó de boles blanques a negres és de 2 a 7.

i. Escriviu les següents relacions en forma de raó:

   a) Relació entre boles blanques i negres a la bossa.
   b) Relació entre boles blanques i boles totals de la bossa.
   c) Relació entre boles negres i boles totals de la bossa.
   d) Relació entre boles negres i blanques a la bossa.

ii. Quantes boles hi ha en la bossa?

Solució en pàg. 412

Activitat 7.2

La raó entre aprovats i suspesos en l'examen final de *Matemàtiques per a mestres* és de 4 a 3, és a dir, per cada 4 alumnes aprovats hi ha 3 suspensos. Escriviu les raons d'aprovats i suspesos respecte al total d'alumnes.

Solució en pàg. 412

Proporció

Una **proporció** serà una igualtat de raons. És a dir, donades $a : b$ i $c : d$ dues raons, direm que estan en proporció si

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

És a dir, es complirà que $a \cdot d = b \cdot c$. En aquest cas direm que "$a : b$ com $c : d$".

Activitat 7.3

Tornant a l'Activitat 7.1, en què la raó de boles blanques a negres d'una bossa era de 2 a 7. Si a la bossa hi ha 21 boles negres:

a) Quantes boles blanques hi ha?

b) Quantes boles té la bossa en total?

Solució en pàg. 412

La solució de l'Activitat 7.3 ens mostra en la definició de proporció es pot fer ús de les propietats de les *fraccions equivalents*, ja que donada una raó $a : b$, i un nombre $n \neq 0$, la raó $\frac{a \cdot n}{b \cdot n}$ estarà en proporció amb la raó inicial. És a dir, $a : b$ com $a \cdot n : b \cdot n$.

Exemple 7.4

El grup 2n A de *Matemàtiques per a mestres* està format per 53 estudiants, dels quals 38 són xiques i 15 xics. En canvi, la classe de 2n B està format per 46 estudiants, dels quals 27 són xiques i 19 són xics.

La ràtio (raó) de xiques respecte al total per a la classe 2n A és de 38 : 53. Per al grup 2n B aquesta raó és de 27 : 46. Com podem observar, entre els grups 2n A i 2n B les raons xiques-total no són proporcionals, perquè 38 : 53 no està en proporció amb 27 : 46, és a dir:

$$\frac{38}{53} \neq \frac{27}{46}$$

Activitat 7.4

En el desdejuni de l'hotel serveixen 3 botelles de llet per cada 7 hostes. En l'hotel hi ha allotjades 581 persones, quantes botelles necessitaran tenir preparades per al desdejuni?

Solució en pàg. 413

Activitat 7.5

Sabent que l'escala del mapa mostrat en la Figura 7.2 és 1 : 25000000, quina distància en quilòmetres hi ha entre París i Toulouse si entre elles hi ha 2'5 cm al mapa?



Figura 7.2. Mapa amb escala 1 : 25000000

Solució en pàg. 413

7.2. Percentatges

Percentatge

Un **percentatge** és una raó en la qual la comparació es fa amb 100. Se sol escriure mitjançant el signe %. La paraula llatina *percent* ens ho indica clarament.

Exemple 7.5

Així, l'expressió del percentatge 30% ens indica que hi ha una raó entre els valors 30 i 100.

Activitat 7.6

Sabem que de 30 alumnes d'una classe han aprovat *Matemàtiques* 18. Quin tant per cent de la classe ha aprovat?

Solució en pàg. 413

A continuació mostrem alguns exemples de càlcul de percentatges:

a) **Càlcul percentatge d'una quantitat**. *Calcula el* 15% *de 5000*

En aquest cas, volem establir la proporció $15 : 100 :: x : 5000$, per tant,

$$\frac{15}{100} = \frac{x}{5000} \Longrightarrow x = \frac{15 \cdot 5000}{100} = 750$$

El 15% de 5000 són 750.

b) **Càlcul de la quantitat inicial conegut el % i la quantitat final**. *Se sap que el* 20% *d'una quantitat són 45 euros. Quina és la quantitat inicial?*

La proporció en aquest cas és $20 : 100 :: 45 : x$, per tant,

$$\frac{20}{100} = \frac{45}{x} \Longrightarrow x = \frac{45 \cdot 100}{20} = 225$$

La quantitat inicial és 225.

c) **Increment**. *El cost d'un producte sense impostos és de 150 euros. Si aquest producte està gravat amb un* 10% *d'impostos, quin serà el cost final?*

En aquest cas la situació anomenem x l'increment que es produeix en el preu. Així, la proporció entre l'increment i el preu inicial és $10 : 100 :: x : 150$; per tant,

$$\frac{10}{100} = \frac{x}{150} \Longrightarrow x = \frac{10 \cdot 150}{100} = 15$$

Ací cal parar atenció perquè, tot i que el 10% del preu del producte correspon a 15 euros, el problema no està acabat, perquè cal calcular el preu final que serà $150 + 15 = 165$ euros.

d) **Disminució**. *Un pantaló costa 50 euros, si ens rebaixen el* 20%. *Quant ens costa el pantaló?*

La raó de la rebaixa és de $20 : 100$; per tant, siga x la rebaixa sobre el preu del pantaló, tindrem que $20 : 100 :: x : 50$, de manera que,

$$\frac{20}{100} = \frac{x}{50} \Longrightarrow x = \frac{20 \cdot 50}{100} = 10$$

És a dir, la rebaixa corresponent al 20% del preu del pantaló són 10 euros. Com abans, per a acabar el problema cal fer la resta $50 - 10 = 40$ euros.

Activitat 7.7

A continuació tenim alguns exercicis relacionats amb percentatges per a practicar:

a) Un vestit costa 70 €. Quin serà el seu preu si el rebaixen un 40%?

b) Un vestit està rebaixat el 30% i el preu de venda ha quedat rebaixat a 56 €. Quin era el preu abans de la rebaixa?

c) Lluís guanya 1200 € al mes i per a un nou lloc li ofereixen una pujada del 8%. Quin serà el sou en el nou lloc?

d) Anna ha obtingut recentment una pujada de sou del 6% i ara guanya 1400 € euros al mes. Quin era el sou mensual abans de la pujada?

Solució en pàg. 413

7.3. Magnituds proporcionals i no proporcionals

Introduirem ara el concepte de proporcionalitat directa i inversa, però abans necessitarem saber què és una magnitud. Una **magnitud** és allò que es pot mesurar. Per exemple, el pes d'una persona, el nombre d'obrers treballant, el nombre de plàtans, la quantitat de pinso que menja

un gos, la distància entre dos pobles o la velocitat d'un cavall en galopar. Aquestes magnituds, mesures, poden relacionar-se amb altres, per exemple es pot relacionar:

- El pes d'una persona amb la talla de roba que usa.
- El nombre d'obrers treballant amb el temps que tarden a acabar l'obra.
- El nombre de plàtans amb el nombre de caixes necessàries per a col · locar-los.
- La distància entre dos pobles amb el temps que es tarda a anar de l'un a l'altre.
- La velocitat d'un cavall galopant amb el temps que tarda el cavall a arribar d'un punt a un altre.

És important entendre que no totes aquestes magnituds estan relacionades de la mateixa manera. En les parelles de magnituds, algunes augmenten o disminueixen a mesura que ho fa l'altra, però no sempre aquest augment o disminució és proporcional, per exemple:

- El pes d'una persona no sempre és proporcionat amb la talla de roba que usa. Factors com l'alçada, l'amplada de muscles, de cintura, de pit, etc., tenen un efecte sobre la talla i un altre sobre el pes.
- En el cas del nombre d'obrers treballant en una obra, pareix molt clar que a mesura que augmentem la quantitat d'empleats (suposant que tots treballen de manera similar) el temps que tarden a acabar l'obra anirà disminuint, a més, de manera proporcional.
- El mateix passa amb el nombre de plàtans i el nombre de caixes necessàries per a col · locar-los, ja que a mesura que augmenta un, necessàriament ha d'augmentar l'altre.
- En el cas de distàncies, l'assumpte es complica. La distància entre dos pobles només estarà relacionada de manera proporcional amb el temps que es tarda a viatjar si la comparació la fem amb un mateix vehicle (i a velocitat constant). Així, té sentit pensar que major distància entre ciutats implica un major temps per a desplaçar-se.
- En l'exemple de la velocitat del cavall galopant, pareix clar que a major velocitat, tardarem menys temps a arribar (sempre que la velocitat es mantinga constant).

Nosaltres ara estudiarem la proporcionalitat directa i inversa, que és la que més ús té en la vida quotidiana.

7.3.1 Proporcionalitat directa

Proporcionalitat directa

Donades dues magnituds (mesures) M_1 i M_2, direm que són **directament proporcionals** quan, en augmentar una, l'altra augmenta en la mateixa proporció.

Així, perquè dues magnituds mantinguen una relació de proporcionalitat directa han d'estar relacionades de tal manera que en augmentar una (el doble, el triple, etc.) l'altra augmenta de la mateixa manera (el doble, el triple, etc.); i en disminuir una (la meitat, un terç, etc.), l'altra disminueix de la mateixa manera. Es pot entendre, per tant, que si augmentem o disminuïm la quantitat d'una, l'altra ha d'augmentar o disminuir proporcionalment.

Exemple 7.6

A cada caixa podem empaquetar 6 llibres, quina relació podem veure entre el nombre de llibres i el nombre de caixes que necessitem per a empaquetar-los?

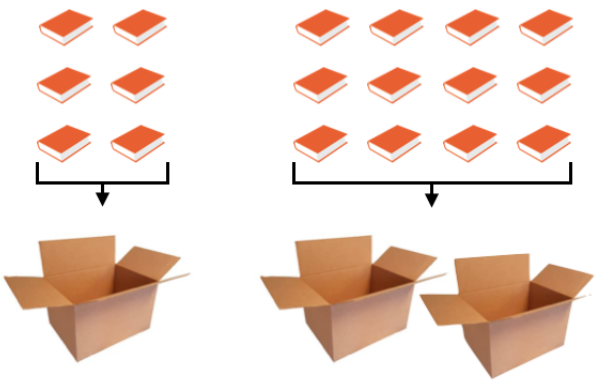


Figura 7.3. Empaquetant llibres

Podreu observar que com més llibres tenim, més caixes necessitem. És a dir, aquestes dues magnituds mantenen una relació de proporcionalitat directa. Si expressem en una taula els valors, tindrem que:

Taula 7.1
Relació entre la quantitat de llibres i les caixes necesàries

Llibres	6	12	18	24	30	36	...
Caixes	1	2	3	4	5	6	...

Així, els valors obtinguts per a cada magnitud estan en proporció dos a dos:

$$\frac{6}{1} = \frac{12}{2} = \frac{18}{3} = \cdots = 6, \text{ valor constant}$$

Constant de proporcionalitat

De manera general, donades dues magnituds (mesures) M_1 amb les mesures $a_1, a_2, a_3, \ldots$ i M_2 amb les mesures $b_1, b_2, b_3, \ldots,$

M_1	a_1	a_2	a_3	...
M_2	b_1	b_2	b_3	...

Direm que la magnitud M_1 és directament proporcional a la magnitud M_2 si els termes que es corresponen verifiquen:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \cdots = K \text{ valor constant}$$

Així, dos valors de M_1 amb dos que es corresponen M_2 sempre estaran en proporció, i al valor K l'anomenarem **constant de proporcionalitat**.

Activitat 7.8

En la fotocopiadora del centre es paguen 30 cèntims per 6 còpies. Sabent que el preu de cada fotocòpia és fix, completa la taula següent:

Taula 7.2
Relació entre el preu i les còpies

Còpies	1	2	3	4	5	6	18	36	50	...
Preu						0'3				...

Quina és la constant de proporcionalitat?

Solució en pàg. 414

Activitat 7.9

Estudieu i justifiqueu si són magnituds directament proporcionals en cada cas:

a) El costat d'un quadrat i la seua àrea.

b) La massa d'una substància i el seu volum.

c) El temps que tarda a caure un objecte i l'altura de la torre des d'on es llança.

d) El costat d'un quadrat i el seu perímetre.

Solució en pàg. 415

7.3.2 Proporcionalitat inversa

Ja hem vist que en la relació de proporcionalitat directa quan una magnitud més creix, més creix l'altra. Però hi ha altres magnituds en les quals açò no ocorre, com per exemple quan relacionem:

- La quantitat de joguets que tenim amb l'espai que ocupen.
- La velocitat d'un cotxe i el temps que tarda a recórrer un trajecte.
- La grandària de l'habitació amb el temps que tardes a netejar-la.
- El temps que passa un aliment en un forn encès amb el que tarda a cuinar-se.
- El que tarda a omplir-se una piscina en relació amb el cabal de l'aigua.

En aquests casos, podem inferir que quan una de les magnituds creix i l'altra disminueix proporcionalment, a aquest fet l'anomenem proporcionalitat inversa.

Proporcionalitat inversa

Dues magnituds M_1 i M_2 són **inversament proporcionals** si en multiplicar-ne (o dividir-ne) una per un nombre, l'altra queda dividida (o multiplicada) pel mateix nombre.

Dues magnituds són inversament proporcionals quan en augmentar una, l'altra disminueix en la mateixa proporció. Així, quan una magnitud augmenta (el doble, el triple, etc.) l'altra disminueix de la mateixa manera (el doble, el triple, etc.) i en disminuir una (la meitat, un terç, etc.), l'altra augmenta de la mateixa manera.

Exemple 7.7

Tres pintors tarden 10 dies a pintar una tàpia. Quant tardaran sis pintors a fer la mateixa faena?

En augmentar el nombre de pintors disminueix el temps que es tarda a pintar la tàpia, com el nombre de pintors es multiplica per 2, el nombre de dies (10) que s'empren a pintar es divideix per 2. Així, tardaran 5 dies.

Vegem ara la relació de proporcionalitat amb una taula, que completada quedaria:

Taula 7.4
Relació entre els pintors i els dies necessaris

Pintors	1	2	3	4	5	6	...	30
Dies	30	15	10	7'5	6	5	...	1

Així, quan observem les proporcions dos a dos, per exemple amb 1 i 2 pintors, observem que la raó d'un valor de (1 : 30) és igual a la raó inversa de l'altre (15 : 2). És a dir, una de les raons cal invertir-la per a escriure la proporció. En el cas d'1 i 2 pintors, la relació de proporcionalitat ha d'expressar-se com a

$$\frac{1}{30} = \frac{15}{2}$$

Aquesta és l'explicació del fet que la *regla de tres simple* aplicada en casos de proporcionalitat inversa implique una inversió en escriure la fracció corresponent.

Constant de proporcionalitat inversa

De manera general, donades dues magnituds (mesures) M_1 amb les mesures $a_1, a_2, a_3, \ldots$ i M_2 amb les mesures $b_1, b_2, b_3, \ldots$:

M_1	a_1	a_2	a_3	...
M_2	b_1	b_2	b_3	...

Direm que la magnitud M_1 és inversament proporcional a la magnitud M_2 si els termes que es corresponen verifiquen:

$$a_1 \cdot b_1 = a_2 \cdot b_2 = a_3 \cdot b_3 = \cdots = Y \text{ valor constant}$$

Al valor Y l'anomenarem **constant de proporcionalitat inversa**.

Activitat 7.10

La construcció d'una casa costa 240 hores si tenim 1 treballador, 120 hores si tenim 2 treballadors, etc. Quant tarden 18 treballadors?

Taula 7.5
Relació entre treballadors i el temps

Treballadors	1	2	3	4	...	18	30	...
Temps	240	120	80	60	...	x	8	...

Quina és la constant de proporcionalitat inversa?

Solució en pàg. 415

Activitat 7.11

Estudieu i justifiqueu si són magnituds inversament proporcionals en cada cas:

a) El volum d'un objecte en cm^3 i la seua densitat en gr/cm^3.

b) L'acceleració d'un mòbil en m/seg^2 i el temps d'acceleració en seg.

c) La base en metres d'un triangle i la seua altura en metres (considerant triangles d'igual àrea).

d) La base en metres d'un rectangle i la seua altura en metres (considerant rectangles d'igual àrea).

Solució en pàg. 415

7.3.3 Mesures no proporcionals

En un context escolar, quan apareixen dues mesures, sovint sol haver-hi alguna relació de proporcionalitat entre elles. No obstant això, sempre cal interpretar la situació i fer una valoració de si realment aquesta relació existeix. A continuació tenim un exemple de situació no proporcional:

Exemple 7.8

Dos grups de turistes ixen de la plaça de la Reina cap a l'Estació del Nord caminant al mateix ritme. En el primer grup hi ha 20 persones i tarden 12 minuts a completar el recorregut. Si el segon grup té 25 turistes, quant tardarà a recórrer el mateix recorregut?

En aquest problema no hi ha proporcionalitat, perquè les taxes (velocitats en aquest cas) són iguals. Com que els grups de turistes caminen a la mateixa velocitat, tardaran exactament el mateix a recórrer la mateixa distància: 12 minuts.

Activitat 7.12

Analitzeu els següents problemes. Indiqueu si hi ha proporcionalitat entre magnituds.

a) Marc i Eva han anat al supermercat. Hi ha una promoció en la qual donen bons regal segons quants dies consecutius s'haja fet alguna compra en el supermercat. Pels seus 56 dies de compra consecutius, a Marc li donen 140 bons regal. Si Eva s'ha emportat 175 bons regal, quants dies consecutius ha comprat Eva en el supermercat?

b) Pere i Raquel són pintors, i els encarreguen pintar unes línies en la carretera. Comencen alhora, però Pere pinta més de pressa que Raquel. Quan Pere ha pintat una línia de 57 metres, Raquel ha pintat una de 19 metres. En el moment en què Raquel haja pintat una línia de 63 metres, quants metres de línia haurà pintat Pere?

c) Joan i Anna han anat al camp, i practiquen tir al plat. Encara que comencen alhora, com que Anna porta tota la vida disparant, va a un ritme més ràpid. Quan Joan ha trencat 15 plats, Anna en porta 60. En el moment en què Joan porte 27 plats trencats, quants plats haurà trencat Anna?

d) Sara i Laura ixen a córrer. Decideixen començar a córrer al mateix temps. Laura s'entrena molt, i per això va més de pressa. Quan Sara ha recorregut 26 metres, Laura ja ha recorregut 78 metres. En el moment en què Sara haja recorregut 54 metres, quants n'haurà recorregut Laura?

e) Dos grups d'ocells ixen d'una ciutat A i van volant fins a una ciutat B al mateix ritme. El primer grup té 37 ocells i ha tardat 12 dies a recórrer el camí entre les dues ciutats. Si el segon grup té 148 ocells, quant tardarà a recórrer el camí entre les ciutats A i B?

f) A Marta i a Sara els agrada el teatre, però no solen coincidir en la mateixa sala. Marta ha vist avui una nova obra, i hi van assistir 50 persones. La duració ha sigut de 90 minuts. Si Sara ha vist la mateixa obra, però hi van assistir 75 persones, quina ha sigut la duració de l'obra que ha vist Sara?

g) Daniel i Jonatan estan embalant paquets a la mateixa velocitat, però comencen en moments diferents. Ara que Daniel ha empaquetat 24 paquets, Jonatan n'ha empaquetat 51. Quan Jonatan haja empaquetat 68 paquets, quants n'haurà empaquetat Daniel?

h) Sara i Joan tenen gustos musicals semblants, i avui decideixen escoltar el mateix disc. Sara ha començat més tard. Quan Sara ha escoltat 18 minuts, Joan ha escoltat 48 minuts. Quants minuts haurà escoltat Joan quan Sara n'haja escoltat 45?

i) A Ricard i a Pere els han encarregat pintar un terreny en forma de quadrat a cada un. Ricard ha necessitat 24 litres de pintura per a pintar la superfície del terreny, que té 10 metres de costat. Si el terreny de Pere és un quadrat el costat del qual fa 15 metres, quants litres de pintura necessitarà Pere per a pintar el seu terreny?

j) Marta i Daniel tenen uns recipients en forma de cilindre. El costat del recipient de Marta fa 24 centímetres i té una capacitat de 14 litres. Si el recipient de Daniel té 60 centímetres de costat, quina capacitat té en litres?

k) En una granja, 20 ànecs tarden 10 dies a menjar l'aliment que hi ha guardat. Quant de temps tardaran 40 ànecs a acabar-se l'aliment?

l) Hem anat a la font del poble per a agafar aigua. Sabem que 5 botelles d'aigua, de 2 litres cada una, pesen 10 quilos. Quant pesen 2 botelles de 3 litres cada una?

m) En 4 dies, 6 impressores han imprès 100 llibres. Quants dies tardaran a imprimir 50 llibres si tenim 4 impressores?

Solució en pàg. 415

7.3.4 La regla de tres

En problemes en què intervenen dues magnituds M_1 i M_2, directament o inversament proporcionals, de les quals coneixem, respectivament, dues quantitats a i b que es corresponen, la *regla de tres* permet obtenir un valor desconegut corresponent a una tercera quantitat que forma proporció (directa o inversa) amb la raó donada per a i b. Aquests problemes són coneguts com a problemes de valor perdut.

En aquest apartat, raonarem l'origen d'aquesta regla, associada típicament al coneixement escolar, i mostrarem el fonament dels esquemes típics, com els mostrats en la Figura 7.4.

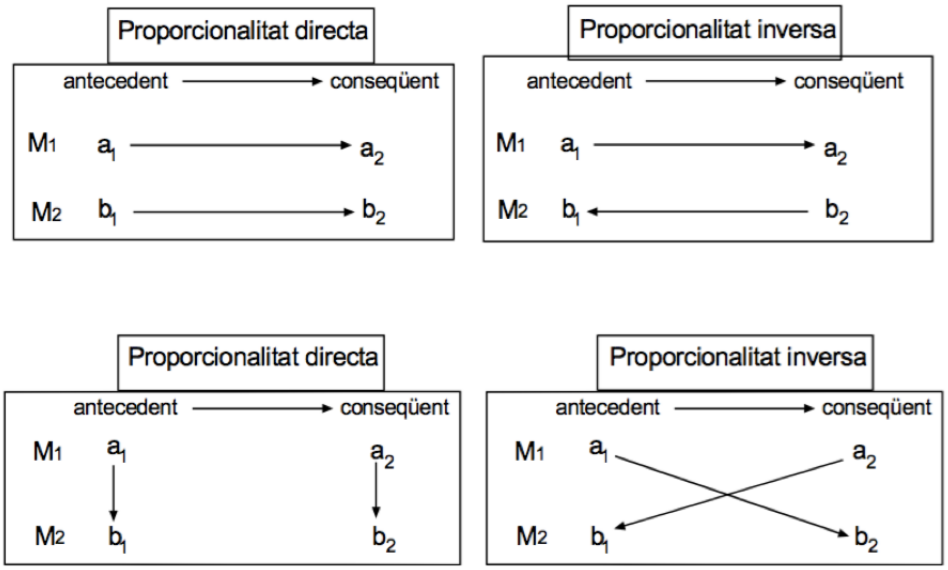


Figura 7.4. Esquemes associats a la *regla de tres* (extreta de Huerta, 2011)

Imaginem un conjunt de mesures de les magnituds M_1 i M_2 com les que hem descrit prèviament:

M_1	a_1	a_2	a_3	...
M_2	b_1	b_2	b_3	...

- **Si la relació de proporcionalitat és directa**, tindrem que:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}, \text{ esquema inferior esquerre de la Figura 7.4, o bé,}$$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}, \text{ esquema superior esquerre de la Figura 7.4.}$$

- **Si la relació de proporcionalitat és inversa**, tindrem que:

$$a_1 \cdot b_1 = a_2 \cdot b_2, \text{ és a dir, } \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_2}{b_1}, \text{ esquema superior dret de la Figura 7.4, o bé,}$$

$$\frac{a_1}{b_2} = \frac{b_1}{a_2}, \text{ esquema inferior dret de la Figura 7.4.}$$

En tots els casos, fixeu-vos que l'aplicació de l'esquema de regla de tres (o problema de valor perdut) deriva de restringir una taula de mesures a 4 valors (un desconegut, marcat amb x típicament) i d'aplicar les proporcions corresponents segons siga directa o inversa.

Exemple 7.9

En arribar a l'hotel ens han donat un mapa amb els llocs d'interès de la ciutat, i ens han dit que 5 centímetres del mapa representen 600 metres de la realitat. Avui volem anar a un parc que es troba a 8 centímetres de l'hotel en el mapa. A quina distància de l'hotel és aquest parc?

$$\left.\begin{array}{lcl} \text{Mapa} & & \text{Realitat} \\ 5\,\text{cm} & \to & 600\,\text{m} \\ 8\,\text{cm} & \to & x\,\text{m} \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{5}{8} = \frac{600}{x} \Longrightarrow x = \frac{600 \cdot 8}{5} = 960\,\text{m}$$

El parc és a 960 metres de l'hotel.

Exemple 7.10

Ahir 2 camions van transportar una mercaderia des del port fins al magatzem. Avui 3 camions, iguals als d'ahir, hauran de fer 6 viatges per a transportar la mateixa quantitat de mercaderia del magatzem al centre comercial. Quants viatges van haver de fer ahir els camions?

$$\left.\begin{array}{lcl} \text{Camions} & & \text{Viatges} \\ 2\,\text{camions} & \to & x \\ 3\,\text{camions} & \to & 6 \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{2}{3} = \frac{6}{x} \Longrightarrow x = \frac{6 \cdot 3}{2} = 9\,\text{viatges}$$

Els dos camions van fer 9 viatges.

Activitat 7.13

Resoleu mitjançant regla de 3 els exercicis de percentatges de l'Activitat 7.21.

Activitat 7.14

Resoleu mitjançant regla de 3 l'exercici de proporcionalitat directa següent, basat en l'Activitat 7.8:
En la fotocopiadora del centre es paguen 30 cèntims per 6 còpies. Sabent que el preu de cada fotocòpia és fix, quant pagarem per 50 fotocòpies?

Activitat 7.15

Resoleu mitjançant regla de 3 l'exercici de proporcionalitat inversa següent, basat en l'Activitat 7.10:
La construcció d'una casa costa 240 hores si tenim 1 treballador, 120 hores si tenim 2 treballadors, etc. Quant tarden 18 treballadors?

Activitat 7.16

Si 3 treballadors empren 16 hores a fer una determinada faena, quantes hores empraran 7 treballadors a fer la mateixa faena?

Activitat 7.17

Un cotxe tarda 8 hores a recórrer un trajecte circulant a una velocitat mitjana de 90 km/h. Quant trigarà a recórrer el mateix trajecte si circula a una velocitat mitjana de 60 km/h?

Activitat 7.18

Si el preu d'un article informàtic és de 25 € sense l'IVA del 16%, quin serà el preu de venda al públic d'aquest article? Si el venedor aplica sobre el preu de venda un descompte del 10%, quin serà el preu final que haurem de pagar?

a) Identifiqueu les magnituds que estan relacionades.

b) Digueu si aquestes magnituds són directament proporcional i, si és el cas, determineu la constant de proporcionalitat.

c) Mostreu diferents lectures de les regles de tres que permeten resoldre el problema.

Activitat 7.19

Resoleu cada un dels problemes de l'Activitat 7.12 fent ús de la *regla de tres*, sempre que siga possible:

a) Marc i Eva han anat al supermercat. Hi ha una promoció en la qual donen bons regal segons quants dies consecutius s'haja fet alguna compra en el supermercat. Pels seus 56 dies de compra consecutius, a Marc li donen 140 bons regal. Si Eva s'ha emportat 175 bons regal, quants dies consecutius ha comprat Eva en el supermercat?

b) Pere i Raquel són pintors, i els encarreguen pintar unes línies en la carretera. Comencen alhora, però Pere pinta més de pressa que Raquel. Quan Pere ha pintat una

línia de 57 metres, Raquel ha pintat una de 19 metres. En el moment en què Raquel haja pintat una línia de 63 metres, quants metres de línia haurà pintat Pere?

c) Joan i Anna han anat al camp, i practiquen tir al plat. Encara que comencen alhora, com que Anna porta tota la vida disparant, va a un ritme més ràpid. Quan Joan ha trencat 15 plats, Anna en porta 60. En el moment en què Joan porte 27 plats trencats, quants plats haurà trencat Anna?

d) Sara i Laura ixen a córrer. Decideixen començar a córrer al mateix temps. Laura s'entrena molt, i per això va més de pressa. Quan Sara ha recorregut 26 metres, Laura ja ha recorregut 78 metres. En el moment en què Sara haja recorregut 54 metres, quants n'haurà recorregut Laura?

e) Dos grups d'ocells ixen d'una ciutat A i van volant fins a una ciutat B al mateix ritme. El primer grup té 37 ocells i ha tardat 12 dies a recórrer el camí entre les dues ciutats. Si el segon grup té 148 ocells, quant tardarà a recórrer el camí entre les ciutats A i B?

f) A Marta i a Sara els agrada el teatre, però no solen coincidir en la mateixa sala. Marta ha vist avui una nova obra, i hi van assistir 50 persones. La duració ha sigut de 90 minuts. Si Sara ha vist la mateixa obra, però hi van assistir 75 persones, quina ha sigut la duració de l'obra que ha vist Sara?

g) Daniel i Jonatan estan embalant paquets a la mateixa velocitat, però comencen en moments diferents. Ara que Daniel ha empaquetat 24 paquets, Jonatan n'ha empaquetat 51. Quan Jonatan haja empaquetat 68 paquets, quants n'haurà empaquetat Daniel?

h) Sara i Joan tenen gustos musicals semblants, i avui decideixen escoltar el mateix disc. Sara ha començat més tard. Quan Sara ha escoltat 18 minuts, Joan ha escoltat 48 minuts. Quants minuts haurà escoltat Joan quan Sara n'haja escoltat 45?

i) A Ricard i a Pere els han encarregat pintar un terreny en forma de quadrat a cada un. Ricard ha necessitat 24 litres de pintura per a pintar la superfície del terreny, que té 10 metres de costat. Si el terreny de Pere és un quadrat el costat del qual fa 15 metres, quants litres de pintura necessitarà Pere per a pintar el seu terreny?

j) Marta i Daniel tenen uns recipients en forma de cilindre. El costat del recipient de Marta fa 24 centímetres i té una capacitat de 14 litres. Si el recipient de Daniel té 60 centímetres de costat, quina capacitat té en litres?

k) En una granja, 20 ànecs tarden 10 dies a menjar l'aliment que hi ha guardat. Quant de temps tardaran 40 ànecs a acabar-se l'aliment?

l) Hem anat a la font del poble per a agafar aigua. Sabem que 5 botelles d'aigua, de 2 litres cada una, pesen 10 quilos. Quant pesen 2 botelles de 3 litres cada una?

m) En 4 dies, 6 impressores han imprès 100 llibres. Quants dies tardaran a imprimir 50 llibres si tenim 4 impressores?

Solució en pàg. 416

Activitat 7.20

Per a cada un dels problemes de l'Activitat 7.19 que heu resolt, indiqueu:

a) El tipus de proporcionalitat, si n'hi havia (directa o inversa).

b) Les magnituds implicades en la proporcionalitat.

c) La constant de proporcionalitat.

Solució en pàg. 419

7.3.5 Factor de conversió

Factor de conversió

El **factor de conversió** és una raó, de valor unitat (i per això també s'anomena factor unitari), que representa una proporcionalitat directa i que permet passar fàcilment i ràpida d'una unitat a una altra (en els canvis d'unitats) o calcular unes magnituds a partir d'unes altres (en la resolució de problemes que impliquen proporcions directes).

El factor de conversió és un mètode de conversió que es basa a multiplicar per una o diverses fraccions en les quals el numerador i el denominador són quantitats iguals expressades en unitats de magnituds diferents. És un mètode molt efectiu per a canvi d'unitats i resolució d'exercicis senzills sense usar la regla de tres.

Exemple 7.11

Farem ús del factor de conversió per a expressar la longitud 15 polzades en cm. Primerament, agafem la raó unitat entre les polzades i els centímetres, $2'54\,\text{cm} : 1\,\text{polzada}$ i el fem servir d'aquesta manera:

$$15\,\text{polzades} \cdot \frac{2'54\,\text{cm}}{1\,\text{polzada}} = 38'1\,\text{cm}$$

Una opció molt útil (especialment quan tenim més factors de conversió) és anar ratllant les unitats que ja han sigut convertides:

$$15\,\cancel{\text{polzades}} \cdot \frac{2'54\,\text{cm}}{1\,\cancel{\text{polzada}}} = 38'1\,\text{cm}$$

Activitat 7.21

Feu les següents conversions fent ús del factor de conversió:

a) Passar 2 dies i mig a hores

b) Passar 30 cm/s a km/h

Solució en pàg. 420

7.3.6 Conversió d'unitats del sistema mètric

A continuació deixem algunes de les equivalències més usades per a procedir amb la conversió d'unitats corresponents al *sistema mètric decimal*, un sistema d'unitats en el qual els múltiples i submúltiples de cada unitat de mesura estan relacionats entre si per múltiples o submúltiples de 10. Aquest sistema es va adoptar internacionalment en la Conferència General de Pesos i Mesures de 1889 i ha donat lloc al posterior *sistema internacional d'unitats*.

Longitud

Es tracta de la magnitud física que expressa la distància entre dos punts. La principal unitat de longitud és el **metre** (m). Cada unitat de longitud és 10 vegades major que la unitat immediata inferior i 10 vegades menor que la unitat immediata superior, com es mostra en la Figura 7.5.

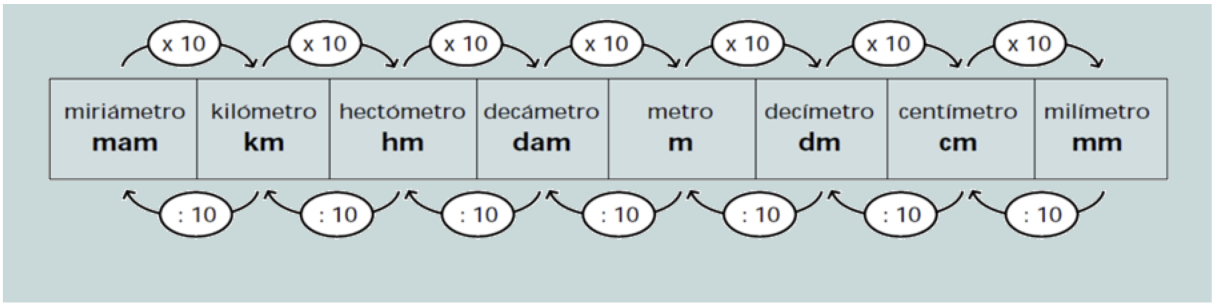


Figura 7.5. Conversió d'unitats de longitud

Massa i pes

La principal unitat de **massa** és el quilogram (kg). El **pes** és una força i es mesura en newtons (N). Cada unitat de massa és 10 vegades major que la unitat immediata inferior i 10 vegades menor que la unitat immediata superior, com es mostra en la Figura 7.6.

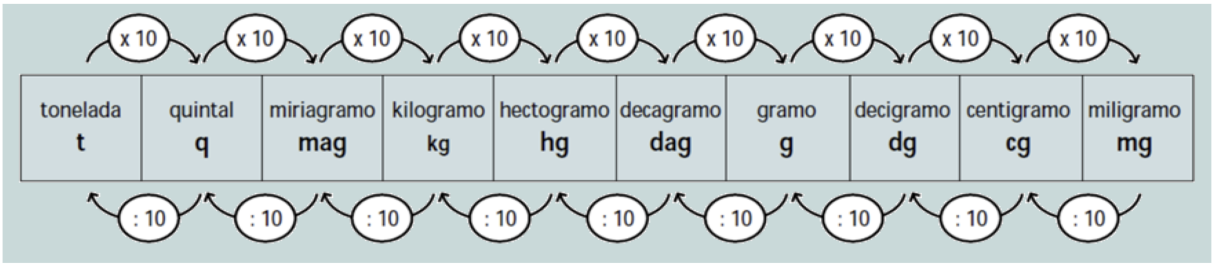


Figura 7.6. Conversió d'unitats de massa

Àrea o superfície

La principal unitat de **superfície (o àrea)** és el metre quadrat (m^2). Cada unitat de superfície és 100 vegades major que la unitat immediata inferior i 100 vegades menor que la unitat immediata superior, com es mostra en la Figura 7.7.

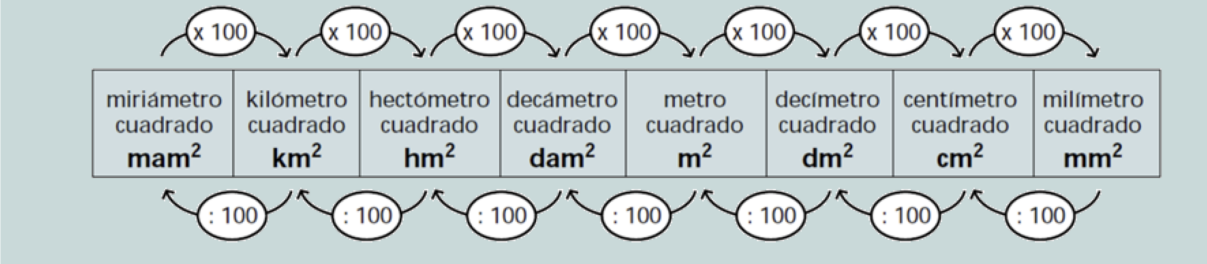


Figura 7.7. Conversió d'unitats de superfície

Volum i capacitat

El **volum** és la característica de tots els cossos d'ocupar un espai. Es mesura en metres cúbics (m^3), encara que també es pot mesurar en litres (L). Cada unitat de volum és 1 000 vegades major que la unitat immediata inferior, com es mostra en la Figura 7.8.

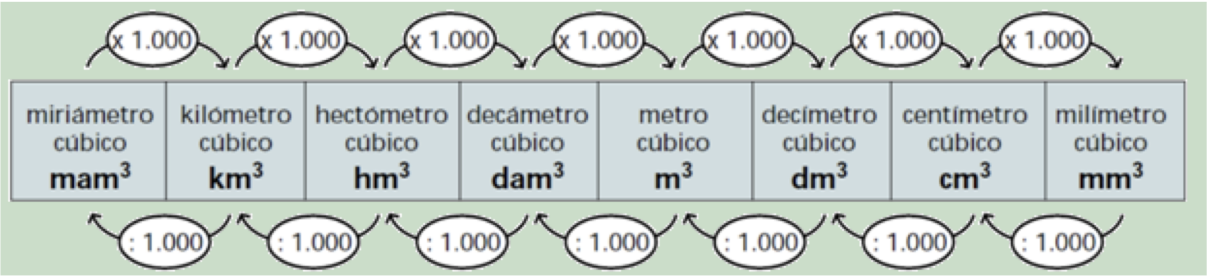


Figura 7.8. Conversió d'unitats de volum

En canvi, la **capacitat** és la qualitat de certs objectes (recipients) de poder contenir líquids o materials solts (arena, cereals, etc.). Es mesura en litres (L), encara que també es pot mesurar en unitats cúbiques com en el cas del volum. Cada unitat de capacitat és 10 vegades major que la unitat immediata inferior, com es mostra en la Figura 7.9.

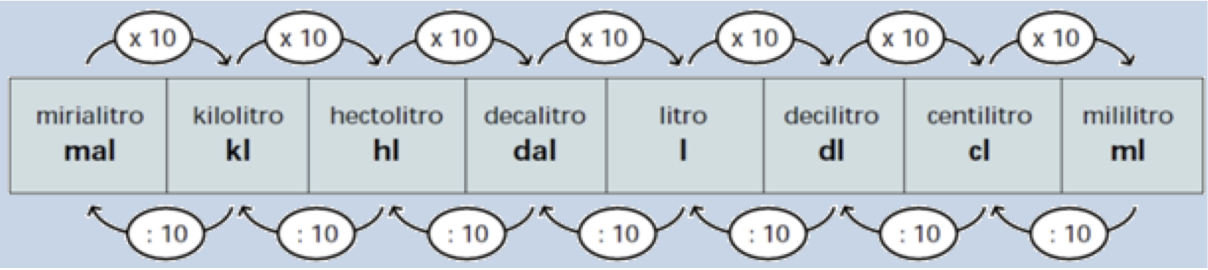


Figura 7.9. Conversió d'unitats de capacitat

Relació entre les unitats de volum i capacitat

Un litre (L) és la capacitat d'un decímetre cúbic (dm^3). És a dir $1\,L = 1\,dm^3$.

Temps i angles

Tant el temps com els angles es mesuren en un sistema *sexagesimal* (base 60). En el cas dels **angles** aquest sistema està format per graus, minuts i segons sexagesimals, en què el grau sexagesimal és l'angle que s'obté en dividir la circumferència en 360 parts iguals i, a més:

- Un grau sexagesimal té 60 minuts: $1° = 60'$
- Un minut sexagesimal té 60 segons: $1' = 60"$

En el cas del **temps**, el sistema està format per hores, minuts i segons; l'hora és la unitat de temps resultant de dividir el dia en 24 parts iguals, i a més:

- Una hora té 60 minuts: $1\,\text{h} = 60\,\text{m}$
- Un minut té 60 segons: $1\,\text{m} = 60\,\text{seg}$

7.4. Activitats complementàries del tema

Activitat 7.22

Jordi tarda 25 minuts de casa al col · legi, fent 100 passos per minut. Un dia es retarda en eixir i ha d'arribar al col · legi en 20 minuts. Quants passos haurà de fer per minut?

Solució en pàg. 420

Activitat 7.23

En una granja, la pesta porcina mata el 18% dels porcs, i en queden 164. Quants se n'han mort?

Solució en pàg. 420

Activitat 7.24

Una impressora costa 215 € sense IVA i 249'40 € amb IVA. Quin és el percentatge d'IVA que es carrega?

Solució en pàg. 420

Activitat 7.25

Un vaixell porta menjar per a alimentar durant 45 dies la tripulació, formada per 60 persones. Si embarquen 30 persones més d'un vaixell avariat, quants dies duraran els aliments?

Solució en pàg. 420

Activitat 7.26

Si una multa de trànsit es paga en el moment de ser imposada es fa un descompte del 10%. Si es paga amb retard, s'afig un recàrrec del 20%. Joaquim ha calculat que ha perdut 9'6 € euros per haver-se retardat en el pagament. Quina era la quantia de la multa?

Solució en pàg. 420

Activitat 7.27

Indiqueu en quins casos són magnituds directament o inversament proporcionals, i en quins les magnituds no són proporcionals:

a) alçada d'un arbre i longitud de la seua ombra

b) edat d'un xiquet i els centímetres d'alçada que fa

c) temps que es tarda a fer un recorregut amb avió i velocitat d'aquest

d) nombre d'aixetes obertes d'una banyera i temps que tarda a omplir-se

e) espai recorregut per un cotxe i temps emprat a recórrer-lo

f) nombre de persones treballant en una obra i temps necessari per a acabar-la

Solució en pàg. 420

Activitat 7.28

Per a fer un pastís de 6 racions es necessiten 3 ous, 100 g de mantega, 120 g de xocolate i 60 g de llevat. Quines quantitats caldran per a fer un pastís de 8 racions?

Solució en pàg. 421

Activitat 7.29

S'ha excavat la meitat d'un fossat en 35 dies amb 120 obrers. En quants dies acabaran la faena si acudeixen 30 obrers més?

Solució en pàg. 421

Activitat 7.30

Omplim un camió amb 1215 sacs de 4 kg de creïlles cada un i un altre camió d'igual capacitat s'ompli amb sacs de 5 kg. Quants sacs cabran en el segon camió?

Solució en pàg. 421

Activitat 7.31

Dos ramaders lloguen un terreny per a pastura dels seus dos ramats per 2100 €. El ramat del primer es compon de 40 vaques i el ramat del segon de 300 ovelles. Quant ha de pagar cada un si una vaca menja com 10 ovelles?

Solució en pàg. 421

Activitat 7.32

Cada pàgina d'un llibre té 32 línies. El llibre té 70 pàgines. Quantes pàgines ocuparia el mateix llibre si en cada pàgina es col · locaren 35 línies?

Solució en pàg. 421

Activitat 7.33

En una empresa hi ha dues categories d'obrers, i s'incrementen els sous d'aquesta manera:

- Categoria 1: de 480 € a 553 €
- Categoria 2: de 721 € a 794 €

Ha sigut l'augment de sou proporcional?

Solució en pàg. 421

Activitat 7.34

Si la distància entre dos pobles és de 23 km, a quina distància estaran en un mapa fet a escala 1:300 000?

Solució en pàg. 421

Activitat 7.35

Si la grandària real d'una finestra és de 90 cm i en un plànol fa 0'9 cm. Sabríeu dir l'escala amb què està fet el plànol?

Solució en pàg. 421

Activitat 7.36

En un mapa fet a escala 1:100 000 la distància entre dos punts és de 8 cm. A quina distància es troben en la realitat?

Solució en pàg. 421

Activitat 7.37

Es ven un objecte perdent el 20% sobre el preu de compra. Sabent que es va comprar per 150 €, trobeu el preu de venda del citat article.

Solució en pàg. 421

Activitat 7.38

Una moto, que va costar 5000 €, costa en l'actualitat 250 € més. Quin és el percentatge d'augment?

Solució en pàg. 421

Activitat 7.39

Passeu aquestes mesures a la unitat que s'indica:

a) 5 km 6 hm 7 dam 8 m a metres

b) 0'3 dam 15 m 3 cm 456 mm a dm

c) 4 kg 12 dag 15 cg 80 mg a dag

d) 1'2 t 6 q 8 mag 5 kg a kg

e) 7 kl 2 dal 41 6 dl a hl

f) 0'005 hl 15 l 4 dl 6 cl a ml

g) 12 hm^2 5 dam^2 2 cm^2 15 mm^2 a m^2

h) 65 ha 32 a 150 ca a km^2

i) 0'0213 km^3 0'45 dam^3 30.000 cm^3 a m^3

j) 25 m^3 50 dm^3 675 cm^3 a litres

Solució en pàg. 422

Activitat 7.40

Passeu de la forma incomplexa a complexa les següents quantitats:

a) 4879'32 dm

b) 5'0267 hg

c) 45 608 ml

d) 35 489'4 cm^2

e) 0'0548678 km^3

Solució en pàg. 422

Activitat 7.41

Calculeu les següents operacions i expresseu en la unitat corresponent:

a) (5 hm 6 m 8 dm) + (0'3 km 9 dam 4 cm) en m

b) 5864'3 dam^2 − (37 hm^2 500 m^2 6000 dm^2) en dam^2

c) (0'03 hm^3 5 dam^3 6354 cm^3) ÷ 8 en dm^3

d) (2 hm^2 72 dam^2 40 m^2) + 43 570 a en ha

e) (4 m^3 15 dm^3 600 cm^3) − 0'0003586 dam^3 en ml

Solució en pàg. 422

Referències

Huerta, M. P. (2011). *Apunts de Matemàtiques per a Mestres* (Unpublished doctoral dissertation). Universitat de València.

8

Probabilitat i estadística

Organització de continguts del Tema 8

1. Estadística
   - Variables estadístiques
   - Representació i organització de dades
     - Taules de freqüències
     - Gràfics
   - Anàlisi de dades
     - Mesures de centralització
     - Mesures de dispersió
     - Mesures de localització
2. Probabilitat
   - Fenòmens o experiments aleatoris, espai mostral i successos
   - Càlcul de probabilitats en experiments simples
   - Assignació de probabilitats a successos compostos mitjançant teoria de conjunts
   - Probabilitat amb experiments complexos: diagrames d'arbre
   - Probabilitat condicionada
   - Valor esperat i pronòstics

8.1. Estadística

Com ens indiquen Batanero i Godino (2014), els orígens de l'estadística són molt antics, ja que s'han trobat proves de recollida de dades sobre població, béns i producció en les civilitzacions

xinesa (aproximadament 1000 anys aC), sumèria i egípcia. Ben coneguts són també els censos que l'imperi romà ja feia en el segle IV aC. No obstant això, només molt recentment l'estadística ha adquirit la categoria de ciència. En el segle XVII sorgeix l'*aritmètica política*, en què es fa ús de la recollida i l'anàlisi de dades numèriques, amb finalitats específiques orientades a ajudar a les decisions de govern. En els segles XVII i XVIII l'estadística es va fer servir per a fer estimacions i conjectures relacionades amb la política, i això va donar lloc al sorgiment dels primers elements bàsics del mètode estadístic.

Actualment, tal com apunten Batanero i Godino (2014), són moltes les definicions possibles que podem trobar de l'estadística, i entre aquestes n'hem triat dues que reflecteixen bé les característiques d'aquesta ciència:

L'estadística segons Gutiérrez Cabriá (1994)

L'estadística estudia el comportament dels fenòmens anomenats de col · lectiu. Es caracteritza per:

- Una informació sobre un col · lectiu o univers.
- Una manera pròpia de raonament, el mètode estadístic.
- Unes previsions de cara al futur, la qual cosa implica un ambient d'incertesa.

(Gutiérrez Cabriá, 1994)

L'estadística segons Moore (1991)

L'**estadística** és la ciència de les dades. Amb més precisió, l'objecte de l'estadística és el raonament a partir de dades empíriques. L'estadística és una disciplina científica autònoma, que té els seus mètodes específics de raonament. Encara que és una ciència matemàtica, no és un subcamp de la matemàtica. Encara que és una disciplina metodològica, no és una col · lecció de mètodes.

(Moore, 1991)

Encara que és difícil dividir l'estadística en parts separades, una divisió *clàssica* fins fa uns anys ha sigut distingir entre estadística descriptiva i estadística inferencial. Vegem de què s'ocupa cada una amb algun exemple:

Estadística descriptiva

L'**estadística descriptiva** té com a fi presentar resums d'un conjunt de dades i posar de manifest les seues característiques, mitjançant representacions gràfiques. Les dades s'usen per a fins comparatius, i no s'usen principis de probabilitat. L'interès se centra a **descriure el conjunt de dades** i no es planteja estendre les conclusions a altres dades diferents o a una població.

Exemple 8.1

El diagrama de barres de la figura 8.1 resumeix el temps en una localitat durant el mes de gener. A la vista del gràfic, un ús descriptiu de la informació donaria peu a concloure que hi ha hagut aproximadament el doble de dies bons que amb nevades.

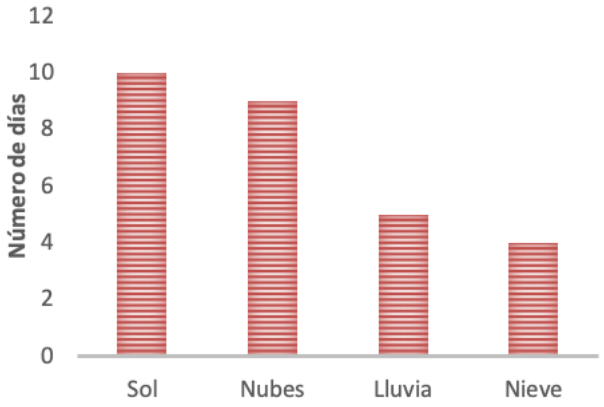


Figura 8.1. Informació meteorològica

Inferència estadística

La **inferència estadística**, per contra, estudia els resums de dades amb referència a un model de tipus probabilístic. Se suposa que el conjunt de dades analitzades és una mostra d'una població i l'interès principal és **predir el comportament de la població**, a partir dels resultats de la mostra.

Exemple 8.2

En 1948 s'enfrontaven en les eleccions presidencials nord-americanes Thomas Dewey i Harry Truman. Quasi totes les enquestes donaven com a favorit a Dewey. El dia de les eleccions el *Chicago Tribune*, abans que es conegueren els resultats definitius, i sobre la base d'enquestes fetes telefònicament, va enviar a les rotatives un número amb el titular en portada "Dewey defeats Truman" (Figura 8.2). Hores més tard, Truman guanyava les eleccions. En aquest moment, ja s'havien imprès 150 000 exemplars amb la infausta portada.



Figura 8.2. Truman mostra la famosa portada del *Chicago Tribune*

Aquest exemple mostra un ús de l'estadística per a fer inferència i de predir possibles resultats a partir d'una mostra (conjunt de dades) d'una població. A més, de manera més concreta, podem intuir un biaix mostral. Cal que siguem conscients que en 1948 un telèfon era un producte que no estava a l'abast de totes les famílies, i en aquest cas, és molt possible que fos l'origen del biaix cap al candidat republicà (relatat detalladament en Seethaler, 2009).

8.1.1 Variables estadístiques

L'estadística s'ocupa del disseny d'estudis en els quals cal fer una recollida de dades, una anàlisi d'aquestes dades, i una predicció o presa de decisions a partir dels resultats. La representació dels diferents tipus de dades es fa a partir del que anomenem variables.

Una variable és un símbol que pot prendre diferents valors. Quan aquests valors són els resultats d'un recompte estadístic, l'anomenarem **variable estadística**, i representa (generalment) una característica concreta dels individus d'una població. Les variables estadístiques es classifiquen en qualitatives i quantitatives.

Variable estadística qualitativa

Les variables **qualitatives** són aquelles l'observació de les quals ens proporciona una qualitat, com per exemple *el grup sanguini*, *l'estat civil* o *la professió*. Per norma general, aquestes variables no prenen valors numèrics i també reben el nom d'atributs. Poden classificar-se en:

- Variables ordenables, que poden ser ordenades, com per exemple, *el nivell d'estudis* o *la graduació militar*.
- Variables no ordenables, aquelles característiques que no permeten establir un ordre per la seua naturalesa (tot i que admetrien una ordenació alfabètica). Per exemple, *el color dels cabells* o *el lloc de residència*.

Variable estadística quantitativa

Les variables **quantitatives** són aquelles a les quals se'ls pot assignar un número. Dins de les variables quantitatives es distingeix entre:

- Variables discretes, aquelles que per la seua naturalesa només poden prendre valors aïllats (generalment nombres enters), com per exemple *el número de sabata*.
- Variables contínues, les que poden prendre tots els valors d'un cert interval, com per exemple *la quantitat de cafè servida al dia en la cafeteria del campus*.

Activitat 8.1

Classifiqueu les següents variables estadístiques:

a) *Temps per a recórrer 100 metres llisos*

b) *El nombre de germans que teniu*

c) *La vostra assignatura favorita*

d) *La producció de ferro d'una mina*

Solució en pàg. 422

Activitat 8.2

Identifiqueu el tipus de variable en les següents situacions:

a) *La quantitat de llibres que cada estudiant ha llegit en un any*

b) *Color dels cabells dels estudiants d'una escola*

c) *Temps requerit per a ser atès en un servei d'atenció telefònica*

d) *Nombres de dispositius electrònics en una casa*

e) *El candidat polític preferit per uns votants*

f) *El grau de satisfacció amb els professors de la facultat*

g) *El pes d'una persona*

Solució en pàg. 423

! Cal apuntar que les variables qualitatives poden ser considerades també com a quantitatives discretes, perquè es pot assignar un número diferent a cada un dels valors que poden prendre les variables qualitatives. De tota manera, en l'assignatura separarem les qualitatives de les quantitatives, com hem fet fins ara.

8.1.2 Representació i organització de dades

Típicament en els estudis estadístics, una vegada obtingudes les dades, se sol expressar la informació resumida en taules o gràfics. A continuació veurem dues de les maneres més habituals de representar dades i d'obtenir-ne informació:

1. **Taules de freqüències**
2. **Gràfics**

Taules de freqüències

La representació en taules dona, sovint, una manera clara i ordenada de representar les dades d'un estudi estadístic. El tipus de taula a fer servir dependrà del nombre de variables mesurades i del recorregut d'aquestes.

Exemple 8.3

Imaginem que hem preguntat el nombre de persones actives que hi ha en 50 famílies, i n'hem obtingut les dades següents:

$$2,1,2,2,1,2,4,2,1,1,2,3,2,1,1,1,3,4,2,2,2,2,1,2,1,$$
$$1,1,3,2,2,3,2,3,1,2,4,2,1,4,1,1,3,4,3,2,2,2,1,3 \text{ i } 3$$

Típicament, cada element del conjunt de dades és representat per x_i, on i correspon a la posició que ocupa aquesta dada en la llista ordenada de manera creixent. És a dir, una vegada ordenades les dades de manera creixent tindríem:

$$\underbrace{1,1,\ldots 1}_{\text{16 vegades}},\underbrace{2,2,\ldots 2}_{\text{20 vegades}},\underbrace{3,3,\ldots 3}_{\text{9 vegades}},\underbrace{4,4,\ldots 4}_{\text{5 vegades}}$$

De tal manera que el valor que ocupa la posició 1 en les dades és $x_1 = 1$, el valor que ocupa la posició 2 és, $x_2 = 1$, ... i així fins al valor que ocupa la posició final $x_{50} = 4$. A més, la mida de les dades arreplegades el representarem per N, en aquest cas $N = 50$.

Observem que la variable *nombre de persones actives* pren valors entre 1 i 4, i per això podem resumir les dades en la Taula 8.1:

Taula 8.1
Representació de les dades obtingudes per a la variable nombre de persones actives *en una mostra de 50 famílies*

Nombre de persones actives (x_i)	Nombre de famílies
1	16
2	20
3	9
4	5
	50

Com acabem d'observar en l'Exemple 8.3, la llista dels diferents valors d'una variable estadística, juntament amb les freqüències d'aparició de cada valor és el resum més senzill i primari d'una col · lecció de dades. A continuació definirem algunes nocions necessàries per a poder interpretar correctament aquestes taules amb dades estadístiques.

Freqüència absoluta

La **freqüència absoluta** d'un valor determinat d'una variable estadística és el nombre de vegades que apareix en la mostra aquest valor de la variable, es representa per n_i. La suma de les freqüències absolutes és el nombre total de dades.

Exemple 8.4

Amb aquesta nomenclatura, la Taula 8.1 de l'Exemple 8.3 quedaria com a

Taula 8.2
Freqüència absoluta per a la variable nombre de persones actives

Nombre de persones actives	Freq. absoluta (n_i)
1	16
2	20
3	9
4	5

Com podem veure, les freqüències absolutes són $n_1 = 16$, $n_2 = 20$, $n_3 = 9$ i $n_4 = 5$. La suma de les freqüències absolutes n_i és igual a N, en aquest cas 50. El subíndex (i) de les freqüències absolutes fa referència als valors que pren la variable *nombre de persones actives*, 1, 2, 3, i 4. En aquest cas coincideix amb el seu valor numèric, però no sempre és així com veurem més avant.

La freqüència absoluta és una mesura influïda per la grandària de la mostra, això fa que no siga una mesura útil per a poder comparar. Continuant amb l'Exemple 8.4 amb una mostra de 50 famílies obtenim que només 5 presenten 4 membres actius (n_4). Si ara fem la mateixa enquesta a 1000 famílies, podria donar-se el cas d'obtenir una freqüència absoluta igual per al valor *4 membres actius*. No obstant això, **no podem extraure les mateixes conclusions de l'estudi**, perquè el nombre de famílies enquestades no és igual. En concret, amb la mostra de 50 famílies el percentatge de famílies que presenten 4 membres actius és del 10%, mentre que en la mostra de 1000 famílies és del 0'5%. Per a poder comparar estudis estadístics farem ús de la **freqüència relativa**.

Freqüència relativa

La **freqüència relativa** és la raó entre la freqüència absoluta (n_i) i la grandària de la mostra (N) i es representa per f_i. És a dir, la freqüència relativa s'obté dividint la freqüència absoluta pel total de casos en la mostra:

$$f_i = \frac{n_i}{N}$$

La suma de les freqüències relatives serà sempre igual a 1.

! Avui dia és molt habitual parlar en termes de *tant per cent* o **percentatge**. Tenint en compte que la freqüència relativa és un *tant per 1*, per a calcular el percentatge només cal multiplicar la freqüència relativa per 100 i es representa per p_i:

$$p_i = f_i \cdot 100$$

Exemple 8.5

Les freqüències relatives i percentatges de l'Exemple 8.3 són els següents:

Taula 8.3
Freqüències absolutes, relatives i percentatges per a la variable nombre de persones actives

Nombre de persones actives	Freq. absoluta (n_i)	Freq. relativa (f_i)	Percentatge (p_i)
1	16	0'32	32%
2	20	0'4	40%
3	9	0'18	18%
4	5	0'1	10%

Com podem veure, la suma de freqüències relatives f_i suma 1, i la suma de percentatges p_i equival al 100%.

Activitat 8.3

Anteriorment hem comentat el supòsit de fer l'enquesta de l'Exemple 8.3 a 1000 famílies, i obteníem una freqüència absoluta de $n_4 = 5$ per al valor *4 membres actius* de la família. Compara les freqüències relatives (i els percentatges) per a les mostres de $N = 50$ i $N = 1000$.

Solució en pàg. 423

Finalment, introduirem el càlcul de freqüències acumulades. Cal fer notar que el càlcul de les freqüències acumulades, només té sentit quan les variables estadístiques són quantitatives o qualitatives ordenables (aquells que poden prendre valors ordenats seguint una escala establida, com per exemple: *nivell de dolor*: lleu, moderat i fort).

Freqüències acumulades

a) La **freqüència absoluta acumulada** d'un valor d'una variable és el nombre de vegades que ha aparegut en la mostra un valor menor o igual que aquest valor i es representa per N_i. Es calcula sumant les freqüències absolutes dels valors de la variable menors o iguals que el valor la freqüència acumulada del qual volem calcular.

b) La **freqüència relativa acumulada** és el quocient entre la freqüència absoluta acumulada (N_i) i el nombre total de dades (N), i es representa per F_i:

$$F_i = \frac{N_i}{N}$$

c) El **percentatge acumulat**, que es representa per P_i, és el resultat de multiplicar per 100 la freqüència relativa acumulada:

$$P_i = F_i \cdot 100$$

Taula de freqüències

La **taula de freqüències** és la taula de dades que conté la informació referent a les freqüències absolutes, relatives i acumulades (i percentatges).

Exemple 8.6

La taula de freqüències per a l'Exemple 8.3 quedaria així:

Taula 8.4
Taula de freqüències per a la variable nombre de persones actives

Persones actives	n_i	f_i	p_i	N_i	F_i	P_i
1	16	0'32	32%	16	0'32	32%
2	20	0'4	40%	36 (n_1+n_2)	0'72	72%
3	9	0'18	18%	45 $(n_1+n_2+n_3)$	0'9	90%
4	5	0'1	10%	50 $(n_1+n_2+n_3+n_4)$	1	100%

Activitat 8.4

Després d'enquestar a 25 famílies sobre el nombre de fills que tenien, es van obtenir les següents dades:

Taula 8.5
Dades obtingudes per a la variable nombre de fills *de 25 famílies*

Nombre de fills	Nombre de famílies (n_i)
0	5
1	6
2	8
3	4
4	2

Completeu la taula de freqüències.

Solució en pàg. 423

Activitat 8.5

Després de fer una enquestar als alumnes d'una classe sobre la talla de sabatilles que calça, es van obtenir les dades següents:

Taula 8.7
Dades obtingudes per a la variable talla de sabata

Talla	Estudiants (n_i)
35	4
36	8
37	14
38	10
39	2
40	4
41	5
42	6
43	4
44	1
45	1
46	1

a) Quants alumnes van ser enquestats?

b) Quin és el valor o valors més freqüents del número de calçat?

c) Quin tant per cent d'alumnes calcen el 40 o un número més gran de calçat?

Solució en pàg. 424

! Encara que és un poc enganyós, els subíndexs i a què fem referència en les taules de freqüència són relatius als valors que pren la variable estudiada. Així, en l'Activitat 8.4 per a parlar de la freqüència absoluta del valor 0 escriuríem $n_0 = 5$, de tal manera que el valor $i = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.
D'igual manera, en l'Activitat 8.5, com que la variable d'estudi pren els valors $\{35, \ldots, 46\}$, parlarem de $n_{35}, \ldots, n_{46}$ per a referir-nos a les freqüències absolutes de cada un dels valors de la variable *talla*. Igual per a la resta de paràmetres calculats (f_i, p_i, N_i, F_i i P_i).

En el cas que les variables quantitatives siguen **contínues**, i quan la grandària de la mostra i el recorregut de la variable són grans, convé agrupar les dades en **intervals o classes**. Vegem-ne un exemple a continuació:

Exemple 8.7

A un grup de 30 alumnes els hem preguntat els diners que porten damunt, i obtenim les següents dades (expressades en €):

$$9'50, 6'20, 2'10, 3, 1'50, 4'05, 1'85, 12'60, 7'48, 5'75, 10'55, 13'70, 31, 30, 8'12,$$
$$1'90, 0'55, 2'18, 3'20, 15, 3'35, 2'37, 4'25, 6'90, 18'5, 25, 13'15, 16'45, 21'60, 7'10$$

En aquest cas, la mostra és de 30 alumnes i farem una representació de les dades en 8 intervals de 4 €, començant en 0 € i acabant en 32 €. El nombre d'intervals o classes que s'ha de fer és variable, però tots han de tenir *la mateixa amplitud*[a]. Així, les dades agrupades en intervals serien:

Taula 8.9
Dades obtingudes per a la variable diners *organitzades en els intervals proposats*

Diners (€)	n_i
$[0, 4[$	10
$[4, 8[$	7
$[8, 12[$	3
$[12, 16[$	4
$[16, 20[$	2
$[20, 24[$	1
$[24, 28[$	1
$[28, 32[$	2

Finalment, calcularíem tota la taula de freqüències tal com hem estat fent fins ara, només que les nostres dades ara serien les obtingudes en la Taula 8.9. Ens quedaria el següent:

Taula 8.10
Taula de freqüències completa de les dades organitzades per intervals en la Taula 8.9

Diners (€)	n_i	f_i	$p_i(\%)$	N_i	F_i	$P_i(\%)$
$[0, 4[$	10	0'333	33'3	10	0'333	33'3
$[4, 8[$	7	0'233	23'3	17	0'567	56'7
$[8, 12[$	3	0'1	10	20	0'667	66'7
$[12, 16[$	4	0'133	13'3	24	0'8	80
$[16, 20[$	2	0'0667	6'67	26	0'867	86'7
$[20, 24[$	1	0'0333	3'33	27	0'9	90
$[24, 28[$	1	0'0333	3'33	28	0'933	93'3
$[28, 32[$	2	0'0667	6'67	30	1	100

[a] L'amplitud d'un interval és la diferència entre els extrems superior i inferior.

Activitat 8.6

Obtingueu la taula de freqüències estàndard de les dades de l'Exemple 8.7. Fixeu-vos com, organitzada de forma estàndard, aquesta taula dona poca informació sobre el comportament de la mostra estudiada.
Atenció: és prou laboriosa d'obtenir.

Solució en pàg. 425

Marques de classe (en dades contínues organitzades per intervals)

Quan organitzem dades contínues en intervals, es diuen **marques de classe** els punts mitjans de cada interval calculat.

Exemple 8.8
En les dades de l'Exemple 8.7, les marques de classe serien 2, 6, 10, 14, 18, 22, 26 i 30. Podem crear una nova columna amb la informació de les marques de classe en la taula de freqüències, com representem en la Taula 8.19.

En l'Exemple 8.7 els intervals ja ens han vingut donats, però **quin criteri hem d'agafar per a triar els intervals en el cas en què no ens donen cap indicació?** Cal tenir en compte que prendre pocs intervals implicaria una pèrdua d'informació major, però treballar amb molts intervals resultaria poc pràctic. Com a norma general, podem fer ús de la regla següent:

Criteri per a triar intervals amb dades contínues

Per a decidir l'**amplitud dels intervals** quan organitzem la representació de dades contínues, podem fer ús d'una norma que aconsella agafar el valor de l'arrel quadrada del nombre de dades (N) com a aproximació al nombre d'intervals. És a dir:

$$\text{Nre. intervals} \sim \sqrt{N}$$

Exemple 8.9

En l'Exemple 8.7 ens han indicat que representarem les dades amb 8 intervals. No obstant això, si no ens hagueren donat cap indicació, com que tenim $N = 30$, podríem haver fet el següent càlcul per a determinar el nombre d'intervals:

$$\sqrt{30} \sim 5'477 \sim 6$$

És a dir, segons aquest criteri hauríem d'haver organitzat les dades en 6 intervals. Per a calcular l'**amplitud de cada interval** dividirem el recorregut de la variable (valor màxim menys valor mínim) entre el nombre d'intervals desitjat. En el nostre cas aquest càlcul seria com segueix:

Com que la la variable *diners que porten damunt* pren valors des de 0'55 € fins a 31 €, el recorregut és de $31 - 0'55 = 30'45$. Així:

$$\text{Amplitud} = 30'45 \div 6 = 5'075$$

Fixeu-vos que si volem que isquen exactament 6 intervals l'amplitud ha de ser 6 (més que 5'075), si agafem el valor 5 ens eixirà un interval més, perquè no cobrim tot el recorregut. Per tant, per a obtenir 6 intervals, agafarem una amplitud de 6 €. Els intervals serien:

$$[0, 6[\,, [6, 12[\,, [12, 18[\,, [18, 24[\,, [24, 30[\,, [30, 36[$$

Quan representem intervals hem de fer-los sempre oberts per la dreta i tancats per l'esquerra (o a l'inrevés) i es procurarà que els valors observats no coincidisquen amb els valors dels extrems.

Activitat 8.7

Obtingueu la taula de freqüències de les dades de l'Activitat 8.5 fent ús d'intervals. Feu ús de la fórmula *intervals* $\sim\sqrt{N}$, on N és el nombre de dades, per a calcular la quantitat d'intervals.

Solució en pàg. 425

Activitat 8.8

Una classe va obtenir les següents puntuacions en una prova sobre 100 punts: 67, 63, 76, 82, 85, 65, 95, 98, 92, 76, 80, 72, 76, 80, 80, 78, 72, 69, 92, 72, 74, 85, 58, 86, 74, 67, 78, 93, 80 i 70.

a) Organitzeu les puntuacions en ordre creixent

b) Quina és la puntuació més baixa i la més alta?

c) Creeu la taula de freqüències, agrupant les dades en increments de 10 (50–60, 60–70, etc.)

d) Quin interval té més puntuacions?

e) Quina puntuació ocorre més sovint?

f) Quines són les marques de classe?

Solució en pàg. 426

Activitat 8.9

Les dades que es donen a continuació són els pesos en kg de 80 persones: 60, 66, 77, 70, 66, 68, 57, 70, 66, 52, 75, 65, 69, 71, 58, 66, 67, 74, 61, 63, 69, 80, 59, 66, 70, 67, 78, 75, 64, 71, 81, 62, 64, 69, 68, 72, 83, 56, 65, 74, 67, 54, 65, 69, 61, 67, 73, 57, 62, 67, 68, 63, 67, 71, 68, 76, 61, 62, 63, 76, 61, 67, 67, 64, 72, 64, 73, 79, 58, 67, 71, 68, 59, 69, 70, 66, 62, 63, 65 i 66.
Calculeu la taula de freqüències organitzant les dades en intervals (comenceu en 50 kg), indicant també les marques de la classe en la taula.

Solució en pàg. 427

Gràfics

Les distribucions de freqüències de les variables estadístiques sovint es representen també fent ús de gràfics. A vegades és preferible un gràfic perquè permet ressaltar les principals característiques de la distribució de freqüències. A continuació anomenarem alguns dels gràfics més usats:

Diagrama de barres

Com veiem en la Figura 8.3, el **diagrama de barres** consisteix en dos eixos perpendiculars i una barra o rectangle per a cada valor de la variable. Normalment, se sol col · locar en l'eix horitzontal els valors de la variable (encara que també es pot fer en el vertical). L'altre eix es gradua segons els valors de les freqüències. La representació gràfica consisteix a dibuixar una barra o un rectangle per a cada un dels valors de la variable d'altura igual a la freqüència.

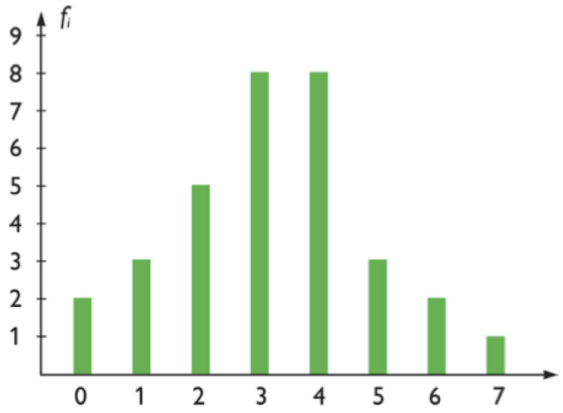


Figura 8.3. Diagrama de barres genèric

Exemple 8.10

Les dades de l'Exemple 8.3 sobre el nombre de persones actives que hi ha en 50 famílies organitzades segons la freqüència relativa en la Taula 8.4 següent quedarien així en un diagrama de barres:

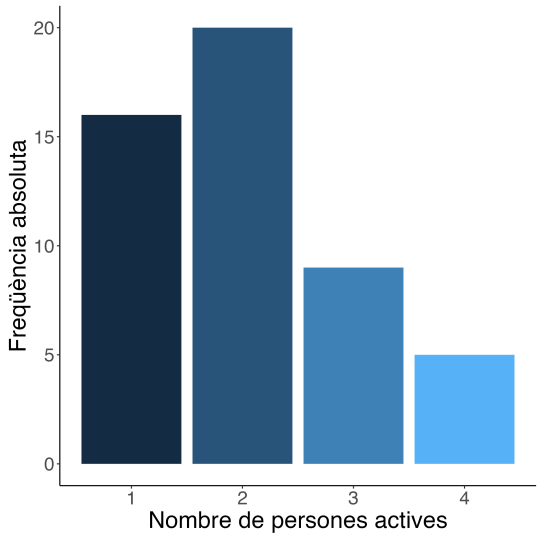


Figura 8.4. Diagrama de barres amb les dades de l'Exemple 8.3

Taula 8.16
Freqüències absolutes de l'Exemple 8.3

x_i	n_i
1	16
2	20
3	9
4	5

Histograma

L'**histograma** és un cas particular del diagrama anterior per al cas de variables contínues. En aquesta ocasió, el que fem és agafar les dades per intervals, com hem fet abans, i fem una representació del nombre d'ocurrències (o de les freqüències absolutes) que hi ha en cada interval. Com veiem en la Figura 8.5, si els intervals són correlatius, els rectangles apareixen apegats en la representació gràfica. Un exemple molt usat d'histograma és una piràmide de població.

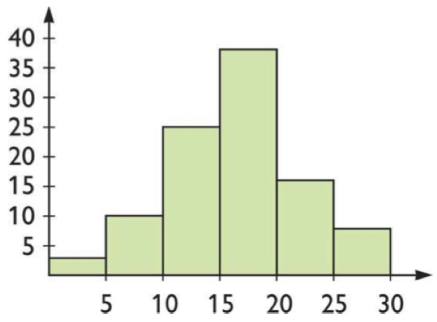
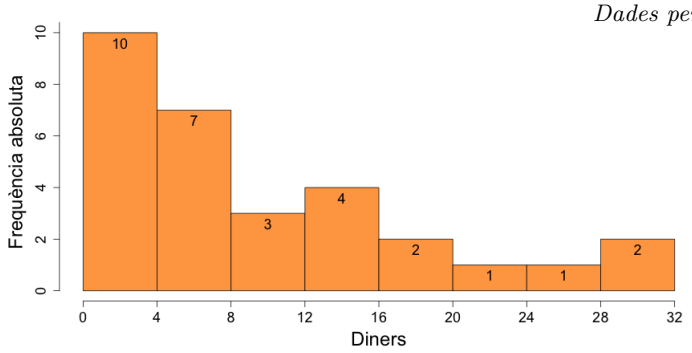


Figura 8.5. Histograma genèric

Exemple 8.11

Les dades del grup de 30 alumnes als quals hem preguntat els diners que porten damunt, organitzades per intervals en l'Exemple 8.7 quedarien representades de la següent manera en

un histograma:



Taula 8.17
Dades per intervals

Diners (€)	n_i
$[0, 4[$	10
$[4, 8[$	7
$[8, 12[$	3
$[12, 16[$	4
$[16, 20[$	2
$[20, 24[$	1
$[24, 28[$	1
$[28, 32[$	2

Figura 8.6. Histograma de les dades de l'Exemple 8.7

Activitat 8.10

Feu un histograma per a representar les dades de l'Activitat 8.8, organitzades en intervals.

Solució en pàg. 427

Polígon de freqüències

Un **polígon de freqüències** és un gràfic que pot construir-se a partir d'un diagrama de barres o d'un histograma. En el primer cas caldria unir la part superior de cada barra, i en el cas d'un histograma, el punt mitjà de cada barra. Finalment, unint tots els punts obtenim una línia poligonal que és la representació que busquem. Aquesta representació permet mostrar dades de diferents conjunts en una mateixa zona, de manera que resulta fàcil fer una comparació, com s'aprecia en la Figura 8.8.

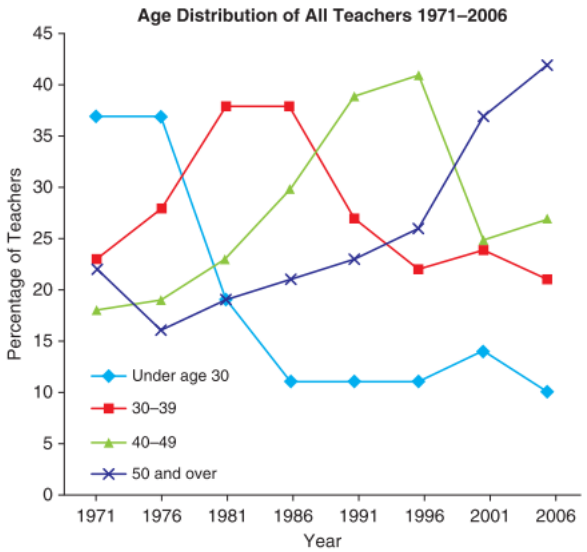


Figura 8.8. Polígon de freqüències (extret de Musser, Peterson, i Burger, 2013)

Diagrama de sectors

El **diagrama de sectors** consisteix a dividir un cercle en tants sectors circulars com valors de la variable. L'amplitud de cada sector ha de ser proporcional a la freqüència del valor corresponent. Podem veure un exemple en la Figura 8.9.

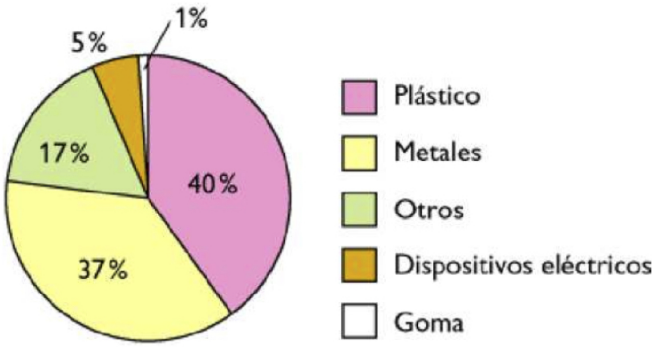


Figura 8.9. Diagrama de sectors representant la freqüència de materials trobada en els residus d'una ciutat

Activitat 8.11

A partir de l'histograma mostrat a continuació, respon a les següents preguntes:

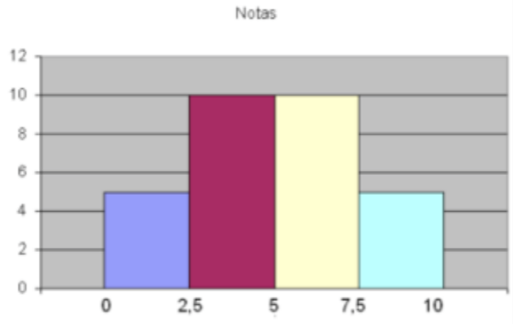


Figura 8.10. Histograma de les notes d'una classe

a) Quants alumnes hi ha en classe?

b) Quin és el percentatge de suspensos?

c) Quin percentatge d'alumnes té un 7′5 o més?

Solució en pàg. 428

Activitat 8.12

El següent diagrama de sectors mostra com un estat gasta els seus ingressos en un any. Sabent que el pressupost anual correspon a 4500 milions de dòlars, esbrineu quant s'ha gastat en cada categoria (Activitat extreta de Musser i cols., 2013).

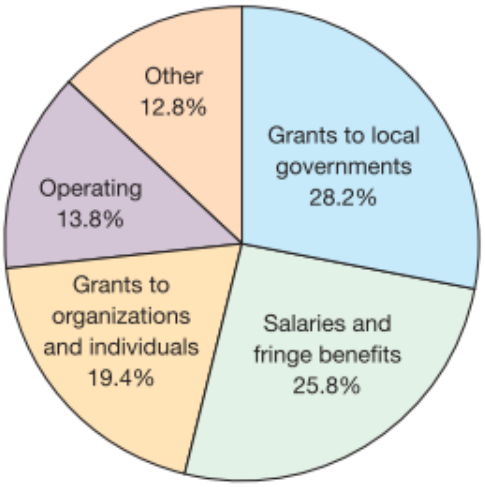


Figura 8.11. Despesa per concepte

Solució en pàg. 428

8.1.3 Anàlisi de dades

Les taules de freqüències són una ferramenta molt útil a l'hora d'analitzar conjunts de dades, ja que ens donen una idea dels resultats d'un estudi estadístic. No obstant això, a vegades les taules són massa grans i resulta difícil extraure conclusions. En aquest bloc estudiarem les mesures estadístiques de centralització, dispersió i localització més comunes per a resumir, amb un sol valor, la informació obtinguda després de l'estudi d'una població. Aquestes mesures estadístiques seran nombres que descriuen el comportament i les característiques generals del conjunt de dades estudiat.

! És evident que per a calcular mesures estadístiques les variables han de ser **quantitatives**, ja que amb els atributs no es poden efectuar operacions aritmètiques. A més, haurem de tenir en compte si les dades es presenten agrupades en intervals o no, perquè el càlcul d'aquests paràmetres estadístics es complicarà si els resultats estan agrupats per intervals (encara que solament hi ha dos paràmetres que canviaran: la moda i els quartils; inclosa la mitjana).

Mesures de centralització

Les mesures de centralització ens serveixen per a saber la tendència central de les dades, és a dir, saber sobre quins valors es concentra la variable estudiada. Les mesures de centralització més comunes són la moda, la mediana i la mitjana.

Moda

Amb dades no agrupades, la **moda** és el valor que més es repeteix, és a dir el valor de la variable que té una freqüència absoluta més elevada.

Exemple 8.12

Amb les dades de l'estudi sobre la variable *nombre de persones actives* en una família (Exemple 8.6), la moda agafaria valor 2, perquè correspon al valor que més es repeteix.

Taula 8.18
Taula de freqüències per a la variable nombre de persones actives *per família utilitzada anteriorment*

Persones actives	n_i	f_i	p_i	N_i	F_i	P_i
1	16	0′32	32%	16	0′32	32%
2	20	0′4	40%	36	0′72	72%
3	9	0′18	18%	45	0′9	90%
4	5	0′1	10%	50	1	100%

Aquesta és l'única mesura de centralització que té sentit estudiar en una variable qualitativa, ja que no requereix efectuar cap càlcul. Per la definició, la moda pot no existir (si totes les dades tenen igual freqüència); pot ser única (dades amb totes les freqüències absolutes distintes), o pot haver-hi dos o més valors de la variable que tinguen la mateixa freqüència que és màxima.

Classe o interval modal amb dades agrupades

Per al cas de dades que estan agrupades existirà un o més intervals amb major freqüència que anomenarem **classe o interval modal**. Encara que per a aquests casos existeix una expressió per a calcular el valor exacte de la moda, prendrem com a valor aproximat de la moda la marca de classe de la classe modal.

Exemple 8.13

En l'estudi sobre la variable *diners que porten damunt* els estudiants, mostrat en l'Exemple 8.7, com que hem presentat les dades agrupades en intervals, parlaríem de l'interval modal $[0, 4[$ o de la marca de classe 2 com a valor aproximat de la moda en aquest conjunt de dades.

Taula 8.19
Dades obtingudes per a la variable diners *en l'Exemple 8.7*

Diners (€)	Marca de classe	n_i
$[0, 4[$	2	10
$[4, 8[$	6	7
$[8, 12[$	10	3
$[12, 16[$	14	4
$[16, 20[$	18	2
$[20, 24[$	22	1
$[24, 28[$	26	1
$[28, 32[$	30	2

La mediana (*median* en anglès, *mediana* en castellà) d'un conjunt de dades és el *punt mitjà* de la llista de puntuacions obtingudes per a una variable quan s'organitzen en ordre creixent (o decreixent). Així, la mediana és el valor central de la variable, perquè una vegada ordenades les puntuacions el valor que divideix en dues parts iguals la mostra correspon a la mediana. Per tant, la mediana és un valor tal que el nombre de dades menors que aquest valor és igual al nombre de dades majors que aquest valor.

Mediana

Siga un conjunt d'N dades quantitatives ordenades de manera creixent, és a dir,

$$x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_N$$

La **mediana** es calcula de la següent forma:

- Si N és imparell, la mediana és el valor que està situat a la meitat de la llista de valors x_i, és a dir, el valor que ocupa la posició $\frac{N+1}{2}$
- Si N és parell, la mediana és la mitjana aritmètica dels dos valors centrals, és a dir, els valors que ocupen les posicions $\frac{N}{2}$ i $\frac{N}{2}+1$ (el següent).

Exemple 8.14

- La mediana del conjunt de dades $7, 11, 13, 17, 23$ és $x_3 = 13$.
- Per al conjunt de dades $7, 11, 13, 17$, com que no hi ha un valor central, la mediana es considera la mitjana aritmètica dels dos valors que ocupen les posicions centrals, $x_2 = 11$ i $x_3 = 13$. Per tant, la mediana serà $\frac{11+13}{2} = 12$

! Quan el conjunt de dades és extens, és convenient **raonar a partir de la taula de freqüències** per a obtenir la mediana, perquè resultarà molt costós ordenar els valors. Així, donada la taula de freqüències, per a calcular la mediana **ens fixarem en el valor de la variable la freqüència absoluta acumulada (N_i) del qual supera, per primera vegada, la meitat del total de dades**. En l'Exemple 8.15 ho veiem amb detall.

Exemple 8.15

Continuant amb l'Exemple 8.13 anterior, relatiu a l'estudi sobre la variable *nombre de persones actives* en una família (Exemple 8.6), la mediana agafaria valor 2. Podem arribar a aquesta conclusió a partir de la taula de freqüències (Taula 8.18) fixant-nos en les freqüències absolutes acumulades (N_i), ja que ordenant els valors de la variable tindríem una llista com la següent:

$$\underbrace{1, 1, \ldots 1}_{16 \text{ vegades}}, \underbrace{2, 2, \ldots 2}_{20 \text{ vegades}}, \underbrace{3, 3, \ldots 3}_{9 \text{ vegades}}, \underbrace{4, 4, \ldots 4}_{5 \text{ vegades}}$$

A continuació tenim un extracte de la Taula 8.18 per a il · lustrar aquest exemple:

Taula 8.20
Extracte de la Taula 8.18 mostrant només freqüència absoluta i absoluta acumulada

Persones actives	n_i	N_i
1	16	16
2	20	36
3	9	45
4	5	50

Com que tenim un nombre parell de dades ($N = 50$), la mediana és la mitjana aritmètica dels valors (ordenats) de la llista anterior que ocupen les posicions centrals (valor 25 i valor 26), que corresponen a $x_{25} = 2$ i $x_{26} = 2$, i, per tant, la mediana resulta ser 2.

Activitat 8.13

Obtingueu la mediana del conjunt de dades de l'Activitat 8.5.

Solució en pàg. 428

Activitat 8.14

Obtingueu la moda i la mediana del conjunt de dades de l'Activitat 8.8.

Solució en pàg. 428

Activitat 8.15

Obtingueu la moda i la mediana del conjunt de dades de l'Activitat 8.9.

Solució en pàg. 428

! Fixeu-vos que les taules de freqüència agrupades en intervals no són suficients per a calcular la mediana. En aquest cas, cal fer una ordenació de les puntuacions o bé una taula de freqüències no agrupada en intervals, com mostrem en les activitats 8.14 i 8.15.

Finalment, estudiarem una tercera mesura de tendència central, potser la més útil, la mitjana (*mean* en anglès, *media* en castellà), també anomenada mitjana aritmètica.

Mitjana

Donat un conjunt de N dades quantitatives ordenades de manera creixent $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_N$, la **mitjana** resulta ser el quocient entre la suma de totes les dades i el nombre d'aquests (N). Es representa per $\overline{x}$.

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_N}{N}$$

! Com que habitualment les dades les tenim representades en taules de freqüències, per a calcular la mitjana moltes vegades és més útil fer ús de les freqüències absolutes, com mostrem en l'Exemple 8.16. Així, a partir d'una taula de freqüències n'hi ha prou de multiplicar el valor de cada un dels valors de les dades (x_i) per la seua freqüència absoluta (n_i) i dividir el resultat pel total de les dades (N).

$$\overline{x} = \frac{x_1 \cdot n_1 + x_2 \cdot n_2 + \ldots}{N}$$

Aquesta fórmula i l'anterior són equivalents.

Exemple 8.16

Donades les dades de la variable *persones actives en una família* de l'Exemple 8.6:

Persones actives	n_i	N_i
1	16	16
2	20	36
3	9	45
4	5	50

La mitjana es calcularia com a

$$\overline{x} = \frac{\overbrace{1+1+\cdots+1}^{16 \text{ vegades}} + \overbrace{2+2+\cdots+2}^{20 \text{ vegades}} + \overbrace{3+3+\cdots+3}^{9 \text{ vegades}} + \overbrace{4+4+\cdots+4}^{5 \text{ vegades}}}{50} = \frac{103}{50} = 2'06$$

Equivalentment, podríem fer:

$$\overline{x} = \frac{1 \cdot 16 + 2 \cdot 20 + 3 \cdot 9 + 4 \cdot 5}{50} = \frac{103}{50} = 2'06$$

! Per la manera en què es calculen les **marques de classe** (punt mitjà de cada interval), quan tinguem **dades agrupades en intervals** la mitjana pot calcular-se directament com una mitjana aritmètica prenent com a dades les marques de classe.

$$\overline{x} = \frac{\text{marca}_1 \cdot n_1 + \text{marca}_2 \cdot n_2 + \ldots}{N}$$

Exemple 8.17

En l'estudi sobre la variable *diners que porten damunt* els estudiants, mostrat en l'Exemple 8.7, com que es presenten les dades agrupades en intervals podem calcular la mitjana a partir de les marques de classe.

La mitjana, a partir de les marques de classe de la Taula 8.21, es calcula com a

Taula 8.21
Dades obtingudes per a la variable diners *en l'Exemple 8.7*

Diners (€)	Marca de classe (m_i)	n_i
$[0, 4[$	2	10
$[4, 8[$	6	7
$[8, 12[$	10	3
$[12, 16[$	14	4
$[16, 20[$	18	2
$[20, 24[$	22	1
$[24, 28[$	26	1
$[28, 32[$	30	2

$$\begin{aligned}\overline{x} &= \frac{m_1 \cdot n_1 + m_2 \cdot n_2 + \cdots + m_8 \cdot n_8}{30} = \\ &= \frac{2 \cdot 10 + 6 \cdot 7 + 10 \cdot 3 + 14 \cdot 4 + 18 \cdot 2 + 22 \cdot 1 + 26 \cdot 1 + 30 \cdot 2}{30} = \\ &= \frac{20 + 42 + 30 + 56 + 36 + 22 + 26 + 60}{30} = \frac{292}{30} = 9'7\widehat{3}\end{aligned}$$

Activitat 8.16

Obtingueu la mitjana del conjunt de dades de l'Activitat 8.5.

Solució en pàg. 429

Activitat 8.17

Obtingueu la mitjana del conjunt de dades de l'Activitat 8.8.

Solució en pàg. 429

Activitat 8.18

Obtingueu la mitjana del conjunt de dades de l'Activitat 8.9.

Solució en pàg. 429

Mesures de dispersió

Les mesures de dispersió ens donen una idea sobre la *representativitat* de les mesures centrals que hem definit anteriorment. En aquest cas, parlem de *representativitat* per a referir-nos al grau de semblança de les mesures centrals (moda, mediana i mitjana) amb tota la mostra estudiada. A major grau de dispersió de les dades parlarem de menor representativitat de les mesures centrals. Les mesures de dispersió ens donaran una idea de com estan distribuïdes les dades. En aquesta secció estudiarem el rang, la desviació típica i la variància com a mesures de dispersió.

Rang

El **rang** d'un conjunt de dades és la diferència entre el valor màxim i el valor mínim. Es representa per R i també s'anomena **recorregut de la variable**.

Exemple 8.18

El rang de la variable *persones actives en una família* de l'Exemple 8.6 és $R = 4 - 1 = 3$, perquè les dades eren aquestes:

Persones actives	n_i	N_i
1	16	16
2	20	36
3	9	45
4	5	50

El rang té l'inconvenient que només depèn dels valors extrems i, per tant, no és una mesura molt significativa. No obstant això, és una mesura molt fàcil de calcular. A continuació veurem les mesures més comunes de dispersió: la variància i la desviació típica o estàndard.

Variància

La **variància** d'una col · lecció de N dades és la mitjana aritmètica de les diferències quadrades entre cada valor i la mitjana de la col · lecció. Simbòlicament, donat el conjunt de dades $x_1, x_2, \ldots, x_N$, la variància, designada pel símbol σ^2, es calcula com a

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \cdots + (x_N - \overline{x})^2}{N}$$

NOTA: pareu atenció perquè aquesta distància a la mitjana es calcula per als N valors recollits en l'estudi, no només per als valors que agafa la variable. Això fa que hi haja una manera alternativa de calcular la variància, com mostrem en l'Exemple 8.19.

Exemple 8.19

Novament, amb les dades de la variable *persones actives en una família* de l'Exemple 8.6 el procediment operatiu per a obtenir la variància respondria als passos següents:

Persones actives	n_i	N_i
1	16	16
2	20	36
3	9	45
4	5	50

a) Trobeu la mitjana de les dades (calculada en l'Exemple 8.16): $\overline{x} = 2'06$.

b) Per a cada valor de la variable x_i, $i = 1, \ldots, 50$, trobem la diferència entre el valor (x_i) i la mitjana $(\overline{x})$, és a dir $x_i - \overline{x}$. En aquest cas:

$$\begin{aligned}
&x_1 - \overline{x} = 1 - 2'06 = -1'06\\
&x_2 - \overline{x} = 1 - 2'06 = -1'06\\
&\vdots\\
&x_{16} - \overline{x} = 1 - 2'06 = -1'06\\
&x_{17} - \overline{x} = 2 - 2'06 = -0'06\\
&\vdots\\
&x_{36} - \overline{x} = 2 - 2'06 = -0'06\\
&x_{37} - \overline{x} = 3 - 2'06 = 0'94\\
&\vdots\\
&x_{45} - \overline{x} = 3 - 2'06 = 0'94\\
&x_{46} - \overline{x} = 4 - 2'06 = 1'94\\
&\vdots\\
&x_{50} - \overline{x} = 4 - 2'06 = 1'94
\end{aligned}$$

c) Elevem totes les diferències calculades en el pas anterior, és a dir $(x_i - \overline{x})^2$ per a $i =$

$1, \ldots, N$:

$$
\begin{aligned}
&(x_1 - \overline{x})^2 = -1'06^2 = 1'1236 \\
&\vdots \\
&(x_{17} - \overline{x})^2 = -0'06^2 = 0'0036 \\
&\vdots \\
&(x_{36} - \overline{x})^2 = 0'94^2 = 0'8836 \\
&\vdots \\
&(x_{46} - \overline{x})^2 = 1'94^2 = 3'7636 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

d) Trobem la mitjana aritmètica de tots ($N = 50$) els quadrats del pas anterior. Aquesta mitjana és la variància (σ^2). En aquest cas:

$$
\begin{aligned}
&\sigma^2 = \\
&= \frac{\overbrace{1'1236 + \cdots + 1'1236}^{\text{16 vegades}} + \overbrace{0'0036 + \cdots + 0'0036}^{\text{20 vegades}} + \overbrace{0'8836 + \cdots + 0'8836}^{\text{9 vegades}} + \overbrace{3'7636 + \cdots + 3'7636}^{\text{5 vegades}}}{50} = \\
&= \frac{44'82}{50} = 0'8964
\end{aligned}
$$

Podem veure que aquest càlcul pot simplificar-se (o fer-se més senzill) fent ús de les freqüències absolutes (n_i), perquè apareixen sumes repetides. Per tant, podem fer el següent:

$$
\begin{aligned}
\sigma^2 &= \frac{1'1236 \cdot 16 + 0'0036 \cdot 20 + 0'8836 \cdot 9 + 3'7636 \cdot 5}{50} = \\
&= \frac{17'9776 + 0'072 + 7'9524 + 18'818}{50} = \frac{44'82}{50} = 0'8964
\end{aligned}
$$

Com heu pogut comprovar en l'Exemple 8.19, el càlcul de la variància pot fer-se d'una manera més operativa a partir de la taula de freqüències fent ús de la freqüència absoluta n_i per a cada valor de la variable d'estudi x_i. Així:

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \overline{x})^2 \cdot n_1 + (x_2 - \overline{x})^2 \cdot n_2 + \cdots + (x_i - \overline{x})^2 \cdot n_i}{N} \quad (8.1)$$

Atenció: Ací el subíndex i fa referència només als valors que agafa la variable, $\{1, 2, 3, 4\}$.

Per al càlcul de la variància és útil incloure els càlculs parcials en la taula de freqüències per a després aplicar l'Equació 8.1, com mostrem a continuació per a les dades de l'exemple anterior:

Taula 8.22
Taula de freqüències ampliada per al càlcul de la variància

Persones actives	n_i	f_i	p_i	N_i	F_i	P_i	$x_i - \overline{x}$	$(x_i - \overline{x})^2$	$(x_i - \overline{x})^2 \cdot n_i$
1	16	0′32	32%	16	0′32	32%	−1′06	1′1236	17′9776
2	20	0′4	40%	36	0′72	72%	−0′06	0′0036	0′072
3	9	0′18	18%	45	0′9	90%	0′94	0′8836	7′9524
4	5	0′1	10%	50	1	100%	1′94	3′7636	18′818
									44′82

Desviació típica

La **desviació típica** és l'arrel quadrada de la variància. Es representa per σ. L'estadístic σ és expressat en les mateixes unitats que la variable d'estudi. En general, a major desviació típica major dispersió de les dades.

Exemple 8.20

La desviació típica de les dades de l'Exemple 8.19 és:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{0'8964} = 0'9468$$

Per a **dades agrupades en intervals** els càlculs de la variància i la desviació típica s'haurien de fer a partir de les marques de classe (m_i) en lloc dels valors que agafa la variable (x_i):

$$\sigma^2 = \frac{(m_1 - \overline{x})^2 \cdot n_1 + (m_2 - \overline{x})^2 \cdot n_2 + \cdots + (m_i - \overline{x})^2 \cdot n_i}{N} \quad (8.2)$$

Atenció: Novament el subíndex i fa referència només als valors que agafa la variable.

Activitat 8.19

Obtingueu el rang, la variància i la desviació típica per al conjunt de dades agrupades en intervals de l'Activitat 8.8, del qual ja hem calculat la mitjana en l'Activitat 8.17,

obtenint $\overline{x} = 78'67\,\text{kg}$.

Activitat 8.20

Obtingueu el rang, la variància i la desviació típica per al conjunt de dades agrupades en intervals de l'Activitat 8.9, del qual ja hem calculat la mitjana en l'Activitat 8.18, obtenint $\overline{x} = 67'6\,\text{kg}$.

Solució en pàg. 430

Mesures de localització

A més de les mesures estudiades n'hi ha unes altres que complementen l'anàlisi estadística. Entre aquestes, destaquem les mesures de localització, que divideixen les dades en parts iguals i, per tant, són útils per a la classificació dels individus d'una població. Són mesures de localització els quartils, decils i percentils.

En concret, estudiarem els quartils, perquè són d'utilitat per a dibuixar els *diagrames de caixa i bigot*, que s'expliquen en la pràctica corresponent a partir dels quartils inferior i superior.

Quartils

Els **quartils** són una mesura de localització que divideix les dades, una vegada ordenats de menor a major, en quatre grups que contenen tots el mateix nombre de dades. Hi ha, per tant, tres quartils: primer, segon i tercer quartil que representarem per Q_1, Q_2 i Q_3, respectivament. Una vegada ordenades les dades de manera creixent, i obtinguda la mediana, els quartils es calculen de la següent manera:

1) La mediana sempre és el **segon quartil** (Q_2).
2) Per a calcular el **primer** i el **tercer quartil** Q_1 i Q_3 farem:
   i) Si el nombre de dades és parell, diguem $2n$:
      - El **quartil inferior** (Q_1) és la mediana de les n primeres dades
      - El **quartil superior** (Q_3) és la mediana de les n dades restants (les que queden per damunt de la mediana)
   ii) Si el nombre de dades és imparell, diguem $2n+1$:
      - El **quartil inferior** (Q_1) és la mediana de les n primeres dades
      - El **quartil superior** (Q_3) és la mediana de les n dades restants (les que queden per damunt de la mitjana)

Els quartils Q_i divideixen el conjunt de dades, una vegada ordenats de menor a major, en quatre grups que contenen tots el mateix nombre de dades, com mostrem en la Figura 8.12. Per això també s'anomena:

- **Primer quartil** (Q_1) al quartil inferior. Divideix la mostra en dos grups: 25% i 75% de les dades
- **Segon quartil** (Q_2) a la mediana. Divideix la mostra en dos grups: 50% i 50% de les dades

- **Tercer quartil** (Q_3) al quartil superior. Divideix la mostra en dos grups: 75% i 25% de les dades

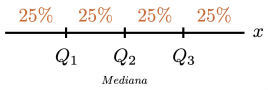


Figura 8.12. Divisió de la distribució de dades (x) en parts que contenen cada una el 25% de les dades (quartils)

Rang interquartil

La diferència entre els quartils superior (Q_3) i inferior (Q_1) d'un conjunt de dades s'anomena **rang interquartil** (RIQ), és a dir:

$$RIQ = Q_3 - Q_1$$

Valors atípics

Un **valor atípic** o *outlier* és qualsevol valor de les dades que es troba a més d'$1'5 \times RIQ$ unitats per davall del quartil inferior (Q_1) o a més d'$1'5 \times RIQ$ unitats per damunt del quartil superior (Q_3).

! Recordeu que quan entre les dades identifiquem valors atípics, els bigots acaben en el valor més llunyà de la caixa que encara estiga a la distància d'$1'5 \times IQR$.

El càlcul dels quartils i del RIQ és ben útil quan es tracta de completar una anàlisi del comportament de dades. Una de les maneres més habituals és presentar les dades en **diagrames de caixa i bigot** (en la pràctica corresponent s'explica com construir-los). En aquests diagrames es representa la informació de cinc estadístics que, ordenats de manera creixent, són: puntuació més baixa, quartil inferior (Q_1), mediana (Q_2), quartil superior (Q_3) i puntuació més alta.

Com es mostra en la Figura 8.13, tenim la següent informació:

- **El bigot esquerre:** format pel segment que uneix l'extrem esquerre (que indica la puntuació més baixa) amb el quartil inferior (Q_1). Aquesta zona conté el 25% de les dades.
- **El bigot dret:** format pel segment que uneix el quartil superior (Q_3) amb la puntuació més alta. Aquesta zona també conté el 25% de les dades.
- **La caixa** representa aproximadament el 50% de les dades, i s'hi mostren dues parts separades per la mediana (quartil Q_2). Cada una de les parts també conté aproximadament el 25% de les dades.
- **Els valors atípics:** es representen separats dels bigots, i són calculats a partir del IRQ (recordem que cal recalcular els bigots en cas que hi haja valors atípics).

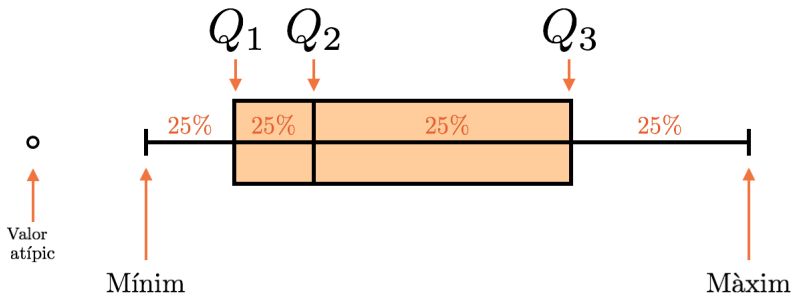


Figura 8.13. Exemple de diagrama de caixa i bigots

Activitat 8.21

Una classe de 24 estudiants ha fet un test sobre 75 punts. Si la mitjana de la classe ha sigut de 63 punts, és possible que 18 dels estudiants tinguessen una puntuació de 59 o menys punts? Raoneu la resposta.

Solució en pàg. 430

Activitat 8.22

Feu un diagrama de caixa i bigots per a les següents dades recollides en una classe de 6è de primària sobre l'alçada dels estudiants (en cm): 120, 121, 121, 124, 126, 128, 132, 134, 140, 142, 147, 150, 152, 160.

Solució en pàg. 431

Activitat 8.23

Per a estudiar si la metodologia emprada en el grup de *Matemàtiques per a Mestres* del professor Pascual D. Diago és eficient, els estudiants han fet un test a l'inici del curs (pre-test) i un altre test equivalent a final del curs (post-test). Aquestes dues proves han avaluat els mateixos continguts a partir d'activitats de similar dificultat, per això considerem que són equivalents. Les puntuacions obtingudes han sigut les següents (sobre 100 punts):

Pre-test: 57, 58, 59, 60, 62, 72, 75, 76, 76, 79, 80, 80, 81, 86, 86, 86, 87, 93, 93, 93

Post-test: 66, 67, 68, 75, 77, 77, 79, 82, 83, 84, 85, 85, 87, 87, 90, 90, 92, 92, 92, 95

- Dibuixeu els diagrames de caixa i bigot per a les dues proves.
- Raoneu si els estudiants d'aquest grup han millorat o no després de les classes rebudes per Pascual.
- Feu ús de la informació que donen els quartils i les medianes per a respondre a les següents preguntes:
  a) En el pre-test, quines són les notes que superen el 75% de les puntuacions de la classe?
  b) En el post-test, quines són les notes inferiors al 25% de les puntuacions de la classe?

Solució en pàg. 432

Activitat 8.24

Les mitjanes salarials dels professors dels EUA corresponents a l'any 2009 es donen en la Taula 8.27. Construïu un diagrama de caixa i bigots per a poder comparar les dades dels professors d'Educació Primària amb el de Secundària. Quines conclusions podeu extraure d'aquesta comparació?

Solució en pàg. 433

Taula 8.27
Mitjana salarial del professorat als EUA durant el 2009 (×$1000; extreta de Musser i cols., 2013)

Estat	Primària	Secundària
Alabama	46'3	47'4
Alaska	58'4	58'4
Arizona	45'1	49'3
Arkansas	45'7	45'7
California	67'0	67'0
Colorado	48'1	48'9
Connecticut	63'2	63'2
Delaware	56'6	56'7
DC	62'6	62'6
Florida	46'9	46'9
Georgia	52'5	53'5
Hawaii	55'0	55'0
Idaho	45'1	45'3
Illinois	58'9	66'7
Indiana	50'6	50'9
Iowa	48'9	48'1
Kansas	46'2	46'2
Kentucky	47'7	48'4
Louisiana	48'6	48'6
Maine	44'7	44'7
Maryland	62'6	63'4
Massachusetts	67'6	67'6
Michigan	57'3	57'3
Minnesota	52'4	52'4
Mississippi	44'5	44'5
Missouri	44'2	44'2
Montana	44'4	44'4
Nebraska	45'0	45'0
Nevada	50'1	50'1
New Hampshire	50'1	50'1
New Jersey	62'3	64'8
New Mexico	45'5	46'3
New York	69'5	68'8
North Carolina	48'5	48'5
North Dakota	41'9	41'1
Ohio	55'4	54'2
Oklahoma	43'5	44'6
Oregon	53'8	54'7
Pennsylvania	57'8	57'8
Rhode Island	58'4	58'4
South Carolina	45'7	46'5
South Dakota	33'9	37'7
Tennessee	45'5	45'5
Texas	46'7	47'6
Utah	45'9	45'9
Vermont	47'9	47'9
Virginia	48'1	48'7
Washington	52'4	52'7
West Virginia	44'4	45'4
Wisconsin	51'2	51'0
Wyoming	54'4	54'9

8.2. Probabilitat

Com descriu en la introducció del llibre "Combinatoria y Probabilidad" Wilhelmi (2004), la teoria de la probabilitat ha estat des dels seus inicis vinculada amb els jocs d'atzar. De fet, etimològicament, la paraula atzar deriva de l'àrab *az-zahr*, que vol dir: *el dau per a jugar*. Les cultures egípcia, grega i romana, van compartir aquesta afició als jocs d'atzar i es conserven restes veraces de l'ús lúdic d'ossos d'animals o altres objectes.

Històricament, s'associa l'origen de la teoria moderna de la probabilitat a un intercanvi de cartes (correspondència) entre B. Pascal (1623-1662) i P. Fermat (1601-1665), després de les preguntes que el cavaller de Méré va fer al primer, sobre uns certs jocs d'atzar relacionats amb el llançament d'un dau i a mètodes de repartiment d'apostes en partides no concluses. Més recentment, sobretot arran dels treballs de A. Kolmogórov (1903-1987), es va desenvolupar una teoria axiomàtica, formalitzada i abstracta de la probabilitat. Aquests treballs han tingut gran influència en els sistemes d'ensenyament, i han donat prioritat al desenvolupament més abstracte i normatiu de la teoria (consulteu el Cap. 5 de Wilhelmi, 2004).

8.2.1 Fenòmens o experiments aleatoris, espai mostral i successos

En aquest tema als fenòmens (observables) que ocorren espontàniament en la naturalesa o que provoquem intencionalment els anomenarem *experiments* o directament *fenòmens*. Per exemple, la comprovació del número de sabata que usa una persona es pot considerar com la realització d'un experiment.

Experiments aleatoris i deterministes

En probabilitat, diferenciarem entre dos tipus d'experiments:

- **Deterministes**: aquells que tenen resultats que poden predir-se.
- **Aleatoris**: aquells que tenen resultats que no es poden predir.

Exemple 8.21

Així, el *temps de caiguda d'una pilota* llançada des d'una determinada altura és un **experiment determinista**, perquè podem predir el resultat sabent certs paràmetres (direcció del vent, altura, etc).

En canvi, el *número obtingut al llançar un dau* o el resultat que obtindrem en *llançar una moneda* serien **fenòmens aleatoris**. Encara que puguem investigar sobre tots els paràmetres de què depenen els resultats, no podrem estar mai segurs de què eixirà en el dau o en la moneda.

La probabilitat ens indicarà la freqüència relativa (n_i) amb la qual esperem que es produïsca un experiment aleatori concret, tot i que no farem una demostració d'aquest fet. Així, podrem expressar la probabilitat com a fracció, decimal, percentatge o proporció. Com més gran siga la probabilitat, més probable serà que es produïsca el succés. Per contra, com més petita siga, menys probable serà que ocórrega. Per a poder fer un estudi rigorós dels fenòmens aleatoris i la seua probabilitat d'una manera precisa, necessitarem una terminologia especial.

Espai mostral

El conjunt de tots els resultats possibles d'un experiment aleatori es denomina **espai mostral**. El representarem mitjançant la lletra E.

Exemple 8.22

L'espai mostral de l'experiment *llançar un dau* seria $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Aquest espai mostral és finit, però podríem considerar un espai mostral amb infinits resultats possibles, com per exemple l'associat al fenomen *duració d'una bombeta de llum*, que podria estar constituït per un interval continu $E = [0, 1000]$, on hi ha punts infinits. Altres casos amb resultats infinits podrien sern *el pes* o *la talla* d'una persona presos a l'atzar d'una població.

Atès que un espai mostral és un conjunt, farem ús en aquesta secció de tota la notació de conjunts estudiada en els temes anteriors. D'aquesta manera, un succés es pot definir com un subconjunt de l'espai mostral, és a dir:

Succés

Anomenarem **succés** d'un experiment aleatori (A) cada un dels subconjunts d'un espai mostral E, és a dir $A \subseteq E$.

Exemple 8.23

Ja hem vist que per a l'experiment *llançar un dau* l'espai mostral seria $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Ara bé, per a aquest experiment podem definir diversos successos, com per exemple:

a) $A =$ Obtenir un $1 = \{1\}$

b) $B =$ Obtenir un $2 = \{2\}$

c) ...

d) $D =$ Obtenir un 1 o un $2 = \{1, 2\}$

e) ...

f) $F =$ Obtenir un 1 o un 2 o un $3 = \{1, 2, 3\}$

g) ...

h) $H =$ Obtenir més d'un $2 = \{3, 4, 5, 6\}$

i) $I =$ Obtenir més d'un $4 = \{5, 6\}$

j) ...

k) $K =$ Obtenir un nombre parell $= \{2, 4, 6\}$

l) $L =$ Obtenir un nombre imparell $= \{1, 3, 5\}$

m) ...

Com podem observar, hi ha multitud de possibles successos (de fet, hi ha $2^6 = 64$ possibles successos), i cada un és un subconjunt de E.

! En general, donat un espai mostral E amb n elements ($|E| = n$), el nombre total de successos (cardinal del conjunt *espai de successos*) és expressat per 2^n. Però no farem ús d'aquesta propietat, ja que no estem interessats en el total dels successos, sinó en successos particulars.

Com acabem de veure en l'Exemple 8.23, el succés B només es compleix si en llançar el dau s'obté un 2. És a dir, el succés coincideix amb un únic element de l'espai mostral E, és a dir $B = \{2\}$. En canvi, podem trobar successos que es verificaran quan ocórreguen diferents resultats de l'espai mostral, com per exemple el succés H, *obtenir més d'un 2*, que ocorrerà quan s'obtinga qualsevol dels nombres 3, 4, 5 o 6 en llançar el dau, és a dir $H = \{3, 4, 5, 6\}$. Aquest fet ens permetrà diferenciar entre *successos simples* i *compostos*, com ara definim:

Successos simples i compostos

En general, un succés A d'un experiment aleatori es diu **succés elemental o simple** si és un subconjunt unitari de l'espai mostral E. És a dir $|A| = 1$.
En cas contrari, $|A| > 1$, el succés es diu **compost**.

Succés segur i impossible

A més, definirem dos tipus de successos molt particulars. Siga A un succés associat a l'espai mostral E, direm que:

- A és un **succés segur** si sempre ocorre. És a dir $A = E$.
- A és un **succés impossible** si no ocorre mai. És a dir, considerant l'espai mostral E, A no està representat. Per tant, escriurem que $A = \varnothing$.

Exemple 8.24
En l'experiment de l'Exemple 8.23 podem definir el succés $A =$ *obtenir un nombre menor que 10* com a succés segur. El succés $B =$ *obtenir un nombre major que 6* serà impossible, és a dir $B = \varnothing$.

Activitat 8.25

Donat l'experiment simple corresponent a *tirar una moneda una vegada*, identifiqueu:

a) L'espai mostral E.

b) Els possibles successos associats a aquest experiment.

c) Doneu un exemple de succés segur i impossible.

Solució en pàg. 433

Activitat 8.26

Donat l'experiment corresponent a *tirar dues monedes no simultàniament*, identifiqueu:

a) L'espai mostral E.

b) Alguns possibles successos associats a aquest experiment (tots és difícil).

c) Doneu un exemple de succés segur i impossible.

Solució en pàg. 434

! Fixeu-vos que els experiments comentats fins ara són tots consistents en **una sola acció**. En el cas de llançar dues monedes o tirar dos daus, es tracta d'una sola acció, però feta sobre més d'un objecte.

8.2.2 Càlcul de probabilitats en experiments simples

La definició que farem servir en el que segueix pren com a premissa que els resultats dels experiments són *equiprobables*, és a dir, que tots els resultats tenen les mateixes oportunitats d'ocórrer. Si açò no es complira, res del que diem seria aplicable, perquè ja no actuaria l'atzar. A continuació donem la *definició clàssica de probabilitat*[1], derivada dels estudis inicials de Laplace en 1812:

Probabilitat d'un succés en un experiment amb resultats equiprobables

Suposem que tenim un experiment simple amb un espai mostral no buit E, en què tots els resultats tenen la mateixa probabilitat d'ocórrer (resultats *equiprobables*). Siga A un succés, $A \subseteq E$, llavors, la **probabilitat del succés A** és definida per:

$$P(A) = \frac{\text{resultats favorables a } A}{\text{resultats possibles (equiprobables) que conté } E} = \frac{|A|}{|E|}$$

Exemple 8.25

Donat l'experiment simple corresponent a *tirar una moneda una vegada*, mostrat en l'Exemple 8.25, tindríem que $E = \{C, +\}$. Per tant, donat el succés A, consistent a obtenir una cara, com que $A = \{C\}$, la seua probabilitat serà:

$$P(A) = \frac{|A|}{|E|} = \frac{1}{2}$$

[1] Fixeu-vos que, des del punt de vista matemàtic, la definició clàssica no és rigorosa, perquè conté la mateixa paraula *probabilitat* en la definició (en parlar d'*equiprobabilitat*).

Exemple 8.26

Donat l'experiment de l'Exemple 8.22, *llançar un dau*, amb espai mostral $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Per a calcular la probabilitat del succés $A =$ obtenir més de 4, com que $A = \{5, 6\}$ tindrem que:

$$P(A) = \frac{|A|}{|E|} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Exemple 8.27

Considerem ara l'experiment de l'Exemple 8.26, *tirar dues monedes no simultàniament*. Si volem estudiar la probabilitat del succés $A =$ traure una cara, $A = \{+C, C+, CC\}$, tindrem:

$$P(A) = \frac{|A|}{|E|} = \frac{3}{4}$$

Perquè $E = \{++, +C, C+, CC\}$.

Amb aquests exemples és senzill observar que la probabilitat d'un succés A sempre serà un número entre 0 i 1. Com que $\varnothing \subseteq A \subseteq E$, sent E l'espai mostral associat, i per tant

$$0 = |\varnothing| \leq |A| \leq |E|$$

Així:

$$0 = \frac{|\varnothing|}{|E|} \leq \frac{|A|}{|E|} \leq \frac{|E|}{|E|} = 1$$

Per tant,

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

Açò ens dona peu a reformular els successos impossibles i segurs en termes de la probabilitat associada, tal com segueix:

Probabilitat del succés segur i impossible

Siga A un succés associat a l'espai mostral E, direm que:

- A és un **succés segur** si $P(A) = 1$.
- A és un **succés impossible** si $P(A) = 0$.

Fins ara, tal com ens indica Musser i cols. (2013), en cada un dels exemples considerats, hem vist que la probabilitat és simplement una proporció entre el nombre de resultats d'interès i el nombre total possibles resultats. Els resultats d'interès constitueixen el succés que estem estudiant. Calcular probabilitats pot complicar-se un poc quan hi ha múltiples objectes o accions involucrades, com ara veurem:

Exemple 8.28

Canviaria l'espai mostral de l'Activitat 8.26 si el llançament de les dues monedes fora simultani?

A priori, si llancem les dues monedes a la vegada podríem pensar que l'espai mostral podria estar conformat per únicament tres resultats: $E = \{CC, C+, ++\}$, perquè l'ordre és irrellevant en ser llançades les monedes a la vegada.

Això no obstant, cal que ens adonem que si considerem aquest espai mostral **no podem aplicar la fórmula de la probabilitat** que acabem d'estudiar. Això és així perquè el resultat $C+$ no és equiprobable als altres dos. Per tant, si intentem aplicar la fórmula de la probabilitat sobre aquest espai mostral, cometríem un error.

Activitat 8.27

Donat l'experiment corresponent a *sumar dels punts obtinguts en llançar simultàniament dos daus*, identifiqueu:

a) L'espai mostral E.

b) Alguns possibles successos associats a aquest experiment.

c) Doneu un exemple de succés segur i impossible.

d) Calculeu la probabilitat dels successos A (*obtenir un 5*), B (*obtenir un 8*) i C (*obtenir almenys un 4*).

Solució en pàg. 435

L'Exemple 8.28 i l'Activitat 8.27 donen compte de la importància de representar accions *equiprobables* en l'espai mostral, si volem fer ús de la fórmula de la probabilitat clàssica. Així, si haguérem fet ús de l'espai mostral $E = \{2, 3, 4, 5, \ldots, 12\}$, en aplicar la fórmula per a calcular la probabilitat de A (*obtenir un 5*), obtindríem erròniament que

$$P(A) = \frac{|A|}{|E|} = \frac{1}{35}$$

Quan realment, considerant l'espai mostral equiprobable, tenim **quatre casos favorables per a obtenir un 5**. Podem obtenir 5 tant si en els daus ixen les parelles $(2, 3), (3, 2), (1, 4), (4, 1)$, com veiem en la Figura 8.19. Així:

$$P(A) = \frac{|A|}{|E|} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Figura 8.19. Resultats equiprobables per a l'experiment *llançar dos daus*

! Com acabem de ressaltar amb l'Exemple 8.28 i l'Activitat 8.27, **necessitem un *espai mostral equiprobable* per a poder aplicar la fórmula clàssica de la probabilitat.**

Activitat 8.28

Imagineu que tenim la ruleta que es mostra en la Figura 8.20. Calculeu la probabilitat que quede apuntant a la zona roja aplicant la fórmula clàssica de la probabilitat (Activitat presa de Musser i cols., 2013).

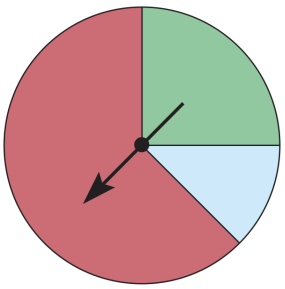


Figura 8.20. Ruleta de colors

Solució en pàg. 436

Activitat 8.29

Una ruleta americana té 38 ranures al voltant del cercle central (Figura 8.22). Dues estan numerades com 0 i 00 i són de color verd; les altres estan numerades de l'1 al 36, la meitat són roges i l'altra meitat negres. Mentre la ruleta gira en una direcció, una xicoteta bola de marfil roda pel cèrcol en la direcció oposada. La probabilitat que la boleta caiga en qualsevol de les 38 ranures és la mateixa (suposant que la ruleta no està trucada). Trobeu la probabilitat de cada un dels següents successos (Activitat presa de Musser i cols., 2013):

a) La bola cau en 0 o 00

b) La bola cau en el 23.

c) La bola cau en una casella roja.

d) La bola no cau en una casella entre 20 i 36.



Figura 8.22. Ruleta americana

Solució en pàg. 436

8.2.3 Assignació de probabilitats a successos compostos mitjançant teoria de conjunts

Com hem vist, els successos són subconjunts d'un espai mostral, aquest fet ens permet fer ús de la teoria de conjunts per a fer l'assignació de probabilitats de certs successos, com ara veurem (i com va fer Kolmogórov el 1933 per a definir el concepte de probabilitat de manera axiomàtica).

Exemple 8.29

Un pot conté quatre bales: una roja, una verda, una groga i una blanca. Considerem el següent experiment (extret de Musser i cols., 2013): *Extraiem dues bales del pot, una darrere de l'altra, sense substituir la primera.*

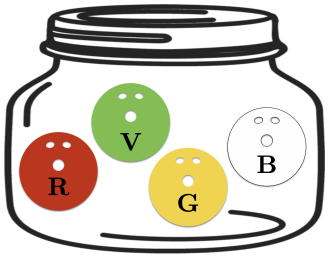


Figura 8.23. Pot amb bales

Calcularem quina és la probabilitat de cada un dels següents successos:

i) $A =$ una de les bales és roja

ii) $B =$ la primera bala és roja o groga

iii) $C =$ les dues bales són del mateix color

iv) $D =$ la primera bala no és blanca

v) $F =$ cap de les bales és blava

Procedint com hem fet fins ara, construiríem l'espai mostral equiprobable següent (en què cada bala es representa per la inicial, tal com apareixen en la Figura 8.23:

$$E = \{RV, RG, RB, VR, VG, VB, GR, GV, GB, BR, BV, BG\}$$

Amb aquesta nomenclatura i com que $|E| = 12$, tindríem que:

i) $A = \{RV, RG, RB, VR, GR, BR\} \Longrightarrow P(A) = \frac{6}{12}$

ii) $B = \{RV, RG, RB, GR, GV, GB\} \Longrightarrow P(B) = \frac{6}{12}$

iii) $C = \varnothing \Longrightarrow P(C) = \frac{0}{12} = 0$

iv) $D = \{RV, RG, RB, VR, VG, VB, GR, GV, GB\} \Longrightarrow P(D) = \frac{9}{12}$

v) $F = \{RV, RG, RB, VR, VG, VB, GR, GV, GB, BR, BV, BG\} = E \Longrightarrow P(F) = \frac{12}{12} = 1$

Si ens fixem en el succés B de l'Exemple 8.29, *la primera bal és roja o groga*, podem deduir que és compost per la *unió* d'altres dos esdeveniments $R \cup G$, sent:

- $R =$ *la primera bala és roja* $= \{RV, RG, RB\}$
- $G =$ *la primera bala és groga* $= \{GR, GV, GB\}$

Si calculem les probabilitats d'aquests nous esdeveniments, tindrem que $P(R) = {}^3/_{12}$ i $P(G) = {}^3/_{12}$. Observant que $P(B) = {}^6/_{12}$, podem deduir que, atès que $B = R \cup G$, llavors:

(8.3) $P(R \cup G) = P(R) + P(G)$

A continuació, investigarem les **relacions que hi ha entre la unió de dos successos i la suma de probabilitats de successos** per a comprovar si l'Equació 8.3 es compleix sempre:

Activitat 8.30

Considereu, per a l'experiment de l'Exemple 8.29, els següents esdeveniments:

- $Q =$ una de les bales extretes és roja
- $R =$ una de les bales extretes és groga
- $S =$ una de les bales extretes és roja o groga

a) Com que $S = Q \cup R$, és possible aplicar l'Equació 8.3 i calcular la probabilitat $P(S)$ com $P(Q) + P(R)$?

b) Quines conclusions extraieu per a l'Equació 8.3 que calcula la probabilitat de la unió d'esdeveniments?

Solució en pàg. 437

Com acabem de descobrir amb l'Activitat 8.32, quan calculem la probabilitat de la unió de dos successos cal tenir en compte aquells possibles resultats repetits per a restar-los (com mostrem en l'Equació 8.4), de manera que, en general, podem enunciar la següent propietat:

Probabilitat de la unió de dos successos

Siguen A, B dos successos associats a l'espai mostral E, llavors es compleix que:

(8.4) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Observeu com en el cas particular en què $A \cap B = \varnothing$ obtenim que $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, com es mostrava en l'Equació 8.3.

! En general, podem fer ús de les fórmules que ens donaven el cardinal de la unió de conjunts (de 2 o de 3 conjunts) vistes en el tema 1 per a calcular les probabilitats d'un succés que resulte una unió de diferents esdeveniments.

Exemple 8.30

Investiguem ara què ocorre amb la probabilitat del succés D de l'Exemple 8.29, corresponent a *la primera bala no és blanca*. Si recordem, en el primer tema anomenàvem **conjunt complementari** de D el conjunt format pels elements de l'univers que no estan en D, i escrivíem $\overline{D} = \{x \in E : x \notin D\}$.

Per tant, $\overline{D}$ seria el succés *la primera bala és blanca*. Com que $D \cap \overline{D} = \varnothing$ (no tenen resultats en comú), aplicant l'Equació 8.3 tenim que:

$$P(D \cup \overline{D}) = P(D) + P(\overline{D}) - P(D \cap \overline{D}) = P(D) + P(\overline{D})$$

A més com D i $\overline{D}$ són complementaris, $D \cup \overline{D} = E$ i, per tant,

$$P(E) = P(D \cup \overline{D}) = P(D) + P(\overline{D})$$

Finalment, com que $P(E) = 1$, podem reescriure la fórmula anterior com a

$$1 = P(D) + P(\overline{D})$$

Per tant, a l'hora de calcular $P(D)$ podem raonar a partir de succés complementari $\overline{D}$, *la primera bala és blanca*, corresponent a $\overline{D} = \{BR, BV, BG\}$. Aquest succés és menys tediós de gestionar que el mateix D, i aplicant la fórmula anterior tindrem que:

$$P(D) = 1 - P(\overline{D}) = 1 - \frac{3}{12} = \frac{9}{12}$$

Probabilitat del succés complementari d'un altre succés

Siga A un succés associat a l'espai mostral E, i $\overline{A}$ el seu succés complementari. Llavors es compleix que:

(8.5) $P(A) = 1 - P(\overline{A})$

Activitat 8.31

M'he comprat una bossa de *llepolies* amb 6 maduixes, 3 dits de pica-pica i 2 plàtans. La que m'agrada més és la maduixa. Si trie una llepolia a l'atzar, quina és la probabilitat que siga una maduixa?



Figura 8.24. Mala alegria la llepolia!

Solució en pàg. 437

Activitat 8.32

He sabut que en aquesta classe, només 10 alumnes tenen com a preferència solament l'assignatura de *Matemàtiques per a Mestres*, i 15 prefereixen solament *Ciències Naturals per a Mestres*. A més, hi ha 20 alumnes que prefereixen *les dues assignatures a la vegada* i 5 no tenen preferència per cap de les dues assignatures. Calculeu la probabilitat d'aquests successos:

a) $A =$ *que un alumne de la classe seleccionat a l'atzar tinga preferència per alguna de les dues assignatures*

b) $B =$ *que un alumne de la classe seleccionat a l'atzar no tinga preferència per* Matemàtiques per a Mestres

Solució en pàg. 438

Activitat 8.33

Considerem l'experiment consistent a *llançar les 3 monedes* de la Figura 8.26; i els següents successos:
$A =$ *el nombre de cares és exactament tres*
$B =$ *el nombre de cares és exactament dos*
$C =$ *la segona moneda ix cara*



Figura 8.26. Llançament de 3 monedes diferents

Descriviu els següents esdeveniments i trobeu les seues probabilitats associades:

a) $A \cup B$ b) $\overline{B}$ c) $\overline{C}$ d) $B \cap C$

Solució en pàg. 439

8.2.4 Probabilitat amb experiments complexos: diagrames d'arbre

Fins ara hem treballat amb experiments senzills (o relativament senzills), conformats típicament per una sola acció. En aquesta secció estudiarem experiments en què intervenen diverses accions i això farà que aquests experiments presenten un cert grau de complexitat, perquè hi ha més d'una acció involucrada. La manera més senzilla d'aproximar-nos a l'estudi d'aquests experiments complexos és amb els diagrames d'arbre.

Diagrama d'arbre de probabilitat

Un **diagrama d'arbre de probabilitat** proporciona una representació gràfica d'un experiment que consta d'una o diverses accions. La representació d'un experiment per mitjà d'un diagrama d'arbre permet mostrar d'una manera ordenada tots els possibles resultats de l'experiment i calcular de manera eficient la probabilitat d'un succés concret.

En probabilitat, un arbre consta de nodes i branques. Per a construir-lo, es fan els següents passos:

1. Es dibuixa el node inicial que representa el començament de l'experiment
2. Des d'aquest node parteixen tantes branques com resultats possibles té l'experiment
3. Cada una d'aquestes branques s'acaben en un node que s'identifica amb el nom, la icona o el símbol del resultat possible corresponent

Habitualment, en cada branca s'escriu la probabilitat corresponent al resultat possible que representa aquest succés.

Exemple 8.31

El diagrama d'arbre associat a l'experiment *extraure dues bales sense reemplaçament* vist en l'Exemple 8.29 es representaria tal com es mostra en la Figura 8.28.

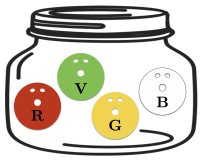


Figura 8.27. Pot amb quatre bales de colors

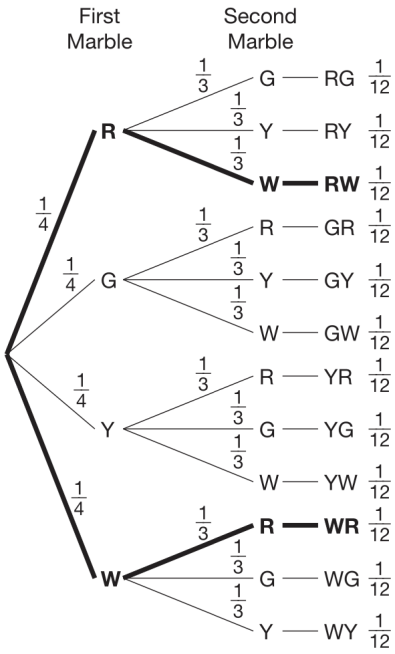


Figura 8.28. Diagrama d'arbre per a l'experiment *extraure dues bales* (amb nomenclatura anglesa; agafat de Musser i cols., 2013)

Com hem vist en l'Exemple 8.31, diem que hi ha **reemplaçament** en una extracció quan, una vegada extreta la primera bola o bala, la tornem a col · locar dins del pot o de l'urna.

Propietat multiplicativa de la probabilitat

Donat un arbre de probabilitat, la probabilitat de cada un dels resultats de l'espai mostral E és igual a la multiplicació de les probabilitats que apareixen en el seu camí associat en el diagrama d'arbre.

Exemple 8.32

En l'Exemple 8.31 podem observar com es compleix la propietat multiplicativa en l'arbre de la Figura 8.28, perquè la probabilitat de cada un dels resultats de l'espai mostral $E = \{RV, RG, RB, VR, VG, VB, GR, GV, GB, BR, BV, BG\}$ és igual a:

$$P(RV) = P(RG) = \cdots = P(BG) = \frac{1}{12} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3}$$

Propietat additiva de la probabilitat

Siga un succés A format per la unió de n successos simples $A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$, $|A_i| = 1$, $A_i \subset E$. Llavors, donat l'arbre de probabilitat associat, la probabilitat del succés A s'obté sumant les probabilitats de tots els camins que porten als resultats que són favorables al succés $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$:

(8.6) $P(A) = P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$

Exemple 8.33

Si considerem el succés A = *obtenir una bala roja i una blanca* en l'experiment de l'Exemple 8.31, observem en el diagrama d'arbre de la Figura 8.28 que hi ha dos camins que fan que el succés A es verifique, corresponents als resultats RB i BR.

Així, la probabilitat de A és la suma de les probabilitats dels resultats que el formen:

$$P(A) = P(RB) + P(BR) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{2}{12}$$

! Fixeu-vos que la propietat additiva de la probabilitat (Equació 8.6) no és més que una conseqüència d'aplicar la fórmula de la probabilitat de la unió (Equació 8.4), però tenint en compte que els resultats són **independents** perquè no tenen res en comú (si ocorre l'un, no pot ocórrer l'altre).
En el cas de l'Exemple 8.33, $\{RB\} \cap \{BR\} = \varnothing$, és a dir els resultats dels camins RB i BR són excloents.

Activitat 8.34

Un pot conté tres boles, dues negres i una roja. S'extrauen dues boles amb reemplaçament. Calculeu a partir del diagrama d'arbre quina és la probabilitat que les dues boles siguen negres, suposant que les boles són igualment probables.

Solució en pàg. 440

Activitat 8.35

Considereu una urna amb tres boles negres i una roja. Per a l'experiment *traure dues boles amb reemplaçament*, fent ús del diagrama d'arbre, quina és la probabilitat de traure una bola negra i després una roja, en aquest ordre concret?

Solució en pàg. 440

8.2.5 Probabilitat condicionada

Imaginem una urna amb 2 boles blanques i 3 boles negres (Figura 8.29). Considerem un primer experiment: *extraiem una bola a l'atzar, anotem el resultat i la fiquem dins de l'urna de nou. A continuació, extraiem una segona bola* (aquest és un experiment amb reemplaçament). Si dibuixem el diagrama d'arbre d'aquest experiment (Figura 8.30a), observarem que el resultat de la primera extracció no canvia la probabilitat de la segona extracció de l'experiment.

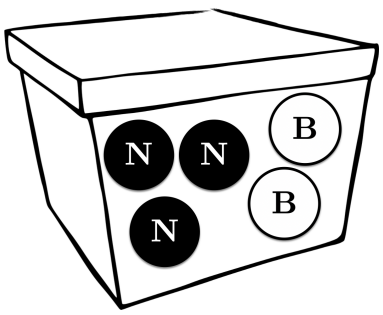
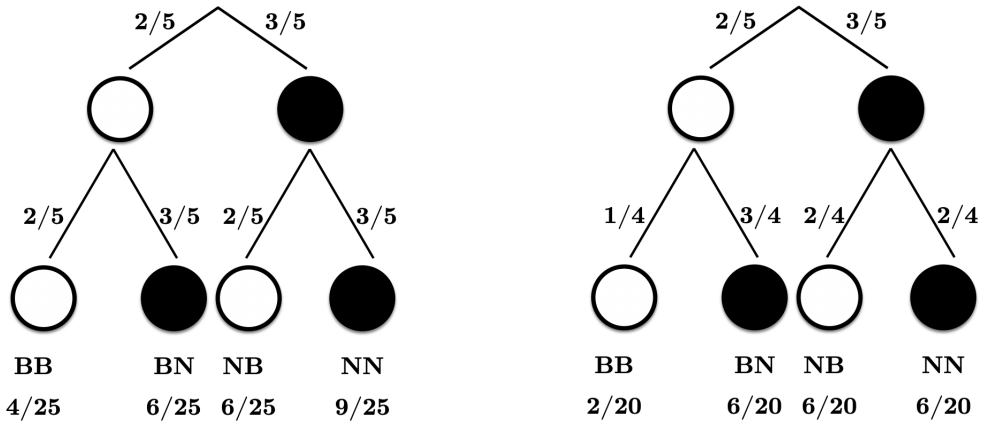


Figura 8.29. Urna amb dues boles blanques i tres negres



(a) Amb reemplaçament *(b)* Sense reemplaçament

Figura 8.30. Arbre de probabilitat

Per tant, quan hi ha reemplaçament, el resultat de la segona acció de l'experiment no depèn del resultat de la primera acció, i per això les probabilitats associades tornen a ser les mateixes que en la primera acció.

Ara bé, si considerem ara un nou experiment: *s'extrau una bola a l'atzar de l'urna i anotem el resultat. Però ara no fiquem la bola dins de l'urna de nou, i extraiem una segona bola* (aquest és un experiment sense reemplaçament). En dibuixar l'arbre de probabilitat associat a aquest nou experiment (Figura 8.30b), podem observar que l'espai mostral per a la segona extracció s'ha reduït, perquè en lloc de les cinc boles inicials, només en tenim quatre. Així, el resultat de la primera extracció canvia la probabilitat de la segona extracció de l'experiment. El resultat de la segona acció, quan no hi ha reemplaçament, depèn del resultat de la primera, i és el que anomenarem **probabilitat condicional o condicionada**.

Aquestes idees que exposem ací donen peu a formalitzar un nou concepte: els successos dependents i independents, que els definim com segueix:

Successos dependents e independents

Dos successos A i B d'un espai mostral E són **independents** si l'ocurrència o no d'un dels successos no canvia la probabilitat que ocórrega l'altre. En cas contrari, ambdós successos són **dependents**.

Exemple 8.34

Per a l'experiment amb reemplaçament, descrit en l'arbre de la Figura 8.30a, si anomenem A l'esdeveniment *la primera extracció és una bola negra*, i B l'esdeveniment *la segona extracció és una bola blanca*, aquests successos són independents. Com hem vist en l'arbre, la probabilitat del succés B és independent de A, perquè tornen a estar totes les boles a l'urna.

Per contra, si en l'experiment hi ha reemplaçament (arbre de la Figura 8.30b), els successos A i B són dependents. L'ocurrència de A a la primera extracció afecta la probabilitat de B.

! Quan dos successos A i B siguen **dependents**, podrem parlar de l'ocurrència d'un sabent que ha ocorregut l'altre i ho denotarem com a $A|B$ per a referir-nos al succés A sabent que abans ha ocorregut B; o $B|A$ per a referir-nos al succés B sabent que abans ha ocorregut A.

Continuant amb successos dependents, aprofundirem ara en la propietat multiplicativa de la probabilitat i la relació entre els camins del diagrama d'arbre associat a l'experiment sense reemplaçament (Figura 8.30b). Anomenen A l'esdeveniment *extraure almenys una bola negra*, i B a l'esdeveniment *la primera extracció és una bola blanca*. Llavors, $A = \{BN, NB, NN\}$ i $B = \{BB, BN\}$.

Podem observar que l'única manera que passe l'esdeveniment A i també B és $\{BN\}$, és a dir: $A \cap B = \{BN\}$. Açò correspon al camí pintat en roig en la Figura 8.31. Com hem vist, $P(A \cap B) = \frac{6}{20}$, per la propietat multiplicativa de la probabilitat.

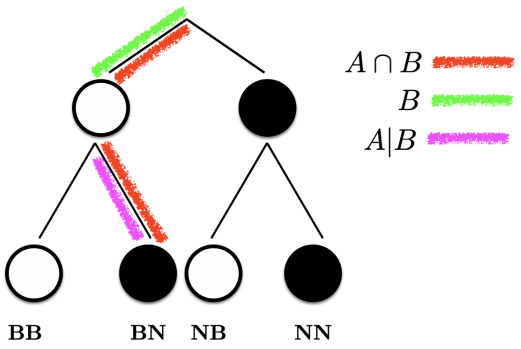


Figura 8.31. Camins en l'experiment sense reemplaçament

Ara bé, la probabilitat ue es done el succés A sabent que ocorre B, que escriurem $P(A|B)$, serà $P(A|B) = \frac{3}{4}$, perquè només queden 4 boles a l'urna i 3 són negres, com hem vist en l'arbre de la Figura 8.30b. Aquesta probabilitat correspon al camí pintat en magenta en la Figura 8.31. Finalment, com que $P(B) = \frac{2}{5}$ (camí verd a la Figura 8.31), podem establir la següent relació entre les probabilitats dels camins (que es deriva directament de la propietat multiplicativa de la probabilitat estudiada abans):

$$P(A|B) = \frac{3}{4} = \frac{6/20}{2/5} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

En general, tindrem la següent definició:

Probabilitat condicional

Siguen els successos A i B de l'espai mostral E, on $P(B) \neq 0$, la **probabilitat condicional o condicionada** que ocórrega A sabent que B ha ocorregut serà:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \tag{8.7}$$

Fixeu-vos que ara la **propietat multiplicativa de la probabilitat** pot formular-se tant per a successos dependents com a independents de la següent manera: siguen A, B dos successos,

- si els successos A i B són **dependents** escriurem:

  (8.8) $P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$

- si els successos A i B són **independents** escriurem:

  (8.9) $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Tal com podem comprovar en el diagrama d'arbre. Recordem que quan els successos són independents, $P(A|B) = P(A)$ i $P(B|A) = P(B)$.

Activitat 8.36

Llancem un dau, penseu en les següents probabilitats fent ús de la fórmula de la probabilitat condicionada:

a) Quina és la probabilitat d'obtenir un 4?

b) Si ens diuen que ha eixit un nombre parell, quina és la probabilitat que haja sigut un 4?

c) Si ens diuen que ha eixit un nombre imparell, quina és la probabilitat que haja sigut un 4?

Solució en pàg. 440

Activitat 8.37

En un recipient hi ha tres boles roges i cinc blaves. S'extrau una bola i es descarta. A continuació, s'extrau una segona bola. Identifiqueu, bé amb diagrama d'arbre o amb la fórmula, les següents probabilitats condicionals:

a) Quina és la probabilitat que la segona bola extreta siga roja si la primera vegada es va extraure una bola roja?

b) Quina és la probabilitat que la segona bola extreta siga blava si la primera bola era roja?

c) Quina és la probabilitat de traure una segona bola blava si la primera bola era blava?

Solució en pàg. 440

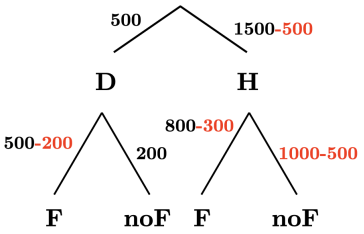
Taula de contingència per a calcular probabilitats condicionades

Com hem vist, la construcció del diagrama d'arbre pot servir-nos per a obtenir la probabilitat condicionada d'un succés concret en un experiment. No obstant això, si el problema implica diverses condicions en la mostra, l'elecció d'una o l'altra en el primer nivell en la construcció del diagrama d'arbre pot portar a confusió. És per això que els problemes de probabilitat condicional o condicionada típicament també poden ser resolts per mitjà d'una **taula de contingència**. La construcció d'aquest tipus de taules és similar a la dels arbres de probabilitat, perquè guarden un cert paral · lelisme. Ho veiem a continuació amb un exemple:

Exemple 8.35

En una empresa hi ha 1500 empleats, dels quals 800 fumen. A més, del total d'empleats sabem que 500 són dones i 200 són dones que fumen. Triant un individu de l'empresa a l'atzar, quina és la probabilitat que fume, sabent que és dona?

En aquest cas, com veiem en la Figura 8.32a, per a dibuixar l'arbre hem començat amb les freqüències relatives (i no amb probabilitats, com hem fet fins ara). El diagrama d'arbre caldria anar omplint-lo amb la informació que anem extraient de l'enunciat del problema. De la mateixa manera, podríem construir la taula de contingència, tal com mostrem en la Figura 8.32b, que acabaríem completant de la manera que apareix en la Figura 8.33.



(a) Arbre de probabilitat

	D Dones	H Homes	TOTALS
F Fumadors/es	200		800
noF No fumadors/es			
TOTALS	500		1500

Sumem en vertical i ha de donar el total

Sumem en horitzontal i ha de donar el total

(b) Taula de contingència

Figura 8.32. Equivalència entre arbre de probabilitat i taula de contingència per a un mateix problema

	D Dones	H Homes	TOTALS
F Fumadors/es	200	800-200	800
noF No fumadors/es	500-200	700-300 ó 1000-600	1500-800
TOTALS	500	1500-500	1500

(a) Càlcul de quadrants

	D Dones	H Homes	TOTALS
F Fumadors/es	200	600	800
noF No fumadors/es	300	400	700
TOTALS	500	1000	1500

(b) Taula completa

Figura 8.33. Taula de contingència omplida

Cal que ens adonem que en cada un dels quadrants tenim una representació del conjunt (en el sentit de diagrama de Venn) de persones que compleixen certes característiques. Així, si anomenem A el conjunt de fumadors de l'empresa i B el conjunt de dones, tindrem les següents relacions en la taula de contingència:

	B Dones	B' Homes	TOTALS
A Fumadors/es	$\lvert A \cap B \rvert$	$\lvert A \cap \overline{B} \rvert$	$\lvert A \rvert$
$\overline{A}$ No fumadors/es	$\lvert \overline{A} \cap B \rvert$	$\lvert \overline{A} \cap \overline{B} \rvert$	$\lvert \overline{A} \rvert$
TOTALS	$\lvert B \rvert$	$\lvert \overline{B} \rvert$	$\lvert E \rvert$

Figura 8.34. Conjunts representats en la taula de contingència

Volem trobar el comportament de les dones en relació amb el tabac. Per a això, triem una dona a l'atzar. Sabent que la persona triada és dona, quina és la probabilitat que aquesta persona fume? En la taula de la Figura 8.34 tenim les següents relacions:

- $P(B) = \dfrac{|B|}{|E|} = \dfrac{500}{1500}$
- $P(A \cap B) = \dfrac{|A \cap B|}{|E|} = \dfrac{200}{1500}$

Per tant, fent ús de l'Equació 8.7 de la probabilitat condicional tenim que

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{{}^{200}/_{1500}}{{}^{500}/_{1500}} = \frac{200}{500}$$

Un detall important és que noteu que la probabilitat condicional, en la taula de contingència, involucra els quadrants relatius a les subclasses generades tal com ressaltem en la Figura 8.35.

	B Dones	$\overline{B}$ Homes	**TOTALS**
A Fumadors/es	**200**	**600**	**800**
$\overline{A}$ No fumadors/es	**300**	**400**	**700**
TOTALS	**500**	**1000**	**1500**

Figura 8.35. Quadrants involucrats en el càlcul de les probabilitats condicionades

Activitat 8.38

Continuant amb l'Exemple 8.35, calculeu les següents probabilitats:

a) Sabent que la persona triada és dona, quina és la probabilitat que aquesta persona no fume?

b) Sabent que la persona triada és home, quina és la probabilitat que aquesta persona no fume?

c) Sabent que la persona triada és home, quina és la probabilitat que aquesta persona fume?

Solució en pàg. 440

Activitat 8.39

Obteniu el diagrama d'arbre associat al problema de l'Exemple 8.35: *En una empresa hi ha 1500 empleats, dels quals 800 fumen. A més, del total d'empleats sabem que 500 són dones i 200 són dones que fumen. Triat un individu de l'empresa a l'atzar, quina és la probabilitat de, sabent que és dona, a més fume?*

Solució en pàg. 441

Activitat 8.40

Un 60% dels alumnes d'un col · legi juga a futbol i un 70% bàsquet. A més, sabem que un 80% dels alumnes que juguen q bàsquet, també juga a futbol. Sabent que Joan juga a futbol, quina probabilitat té que jugue també a bàsquet?

Solució en pàg. 441

Activitat 8.41

En una universitat el 55% dels estudiants són homes. D'aquests, sabem que el 20% estudien carreres de ciències, i de tots els estudiants, el 11'25% són dones i estudien carreres de ciències. Calculeu la probabilitat que, triat un estudiant a l'atzar (home o dona), estudie carrera de ciències.

Solució en pàg. 442

Gràcies a la informació mostrada en les taules de contingència, és fàcil deduir algunes propietats de la probabilitat. Per exemple, a partir de la taula de contingència de l'Activitat 8.41 (Taula 8.32) podem veure la relació:

$$P(C) = P(C \cap H) + P(C \cap \overline{H})$$

Taula 8.32
Taula de contingència de l'Activitat 8.41

	H	$\overline{H}$	
C	11%	11'25%	22'25%
$\overline{C}$	44%	33'75%	77'75%
	55%	45%	100%

8.2.6 Valor esperat i pronòstics

Per a acabar el tema, farem menció de dos continguts relacionats amb la probabilitat que tenen molt d'ús en la vida quotidiana: el valor esperat i els pronòstics. Aquests estan fortament lligats a la probabilitat i habitualment s'usen per a determinar valors com l'admissió a jocs (amb premis) i les primes d'assegurances.

Valor esperat

En un experiment que té com a resultats els valors numèrics $v_1, v_2, \ldots, v_n$, amb probabilitats associades $p_1, p_2, \ldots, p_n$ respectivament, anomenarem **valor esperat o esperança** la suma següent:

$$v_1 \cdot p_1 + v_2 \cdot p_2 + \cdots + v_n \cdot p_n$$

Exemple 8.36

Suposem que una companyia d'assegurances ha desglossat anualment els sinistres d'automòbils dels conductors de 16 a 21 anys, com es mostra en la Taula 8.33. Quant hauria de cobrar la companyia com a prima mitjana per a cobrir els seus costos de sinistralitat?

Taula 8.33
Taula i exemple extrets de (Musser i cols., 2013)

Import reclamat	Probabilitat
0 €	0.80
2000 €	0.10
4000 €	0.05
6000 €	0.03
8000 €	0.01
10000 €	0.01

Per a obtenir una solució, fem ús de l'esperança matemàtica. Siga $n = 6$ (el nombre de categories de sinistres en funció de l'import reclamat), i siguen els valors numèrics v_i i les probabilitats p_i representades en la Taula 8.33.

Per tant, el valor esperat, $0 \cdot 0.80 + 2000 \cdot 0.10 + 4000 \cdot 0.05 + 6000 \cdot 0.03 + 8000 \cdot 0.01 + 10000 \cdot 0.01 = 760$. Atès que el valor mitjà dels sinistres és de 760 €, la prima mitjana de l'assegurança d'automòbil ha de fixar-se en 760 € anuals perquè la companyia d'assegurances tinga el punt d'equilibri en els costos de sinistralitat.

Si analitzem un poc els jocs en els quals hi ha involucrats diners, ens adonarem que les probabilitats per si mateixes són irrellevants. El que realment importa és si el premi multiplicat per la probabilitat (en escala de 0 a 1) és major o menor que el cost de jugar.

Açò ens porta a una definició fàcil d'entendre el que ací hem anomenat valor esperat: **la relació entre el premi obtingut i la probabilitat d'encertar**. Habitualment, si l'esperança matemàtica és 1, el joc és "just". Si l'esperança matemàtica és menor que 1, el joc és "desfavorable per al jugador". Si l'esperança matemàtica és major que 1, el joc és "favorable per al jugador". De fet, **cap loteria compleix aquesta lògica** (i és per això que diuen que **les loteries són un impost del govern al desconeixement de les matemàtiques**).

Exemple 8.37

- Apostar 1 € que una moneda isca cara o creu, si el premi per encertar són 2 €, i si es perd, 0 € és un joc just, ja que l'esperança del joc és $2 \cdot 1/2 = 1$.
- Un sorteig que pague 500 € a 1 €, però en el qual la probabilitat d'encertar siga d'1 entre 1000 és un joc "desfavorable", perquè l'esperança matemàtica és $500 \cdot 1/1000 = 0.5$.
- Un joc en el qual es paga 10 € per 1 € invertit per encertar el número que eixirà en un dau és un joc favorable per al jugador, perquè la probabilitat d'encertar és d'1 entre 6. En aquest exemple el valor de l'esperança matemàtica és $10 \cdot 1/6 = 1.67$ i, per tant, en aquestes condicions és un joc beneficiós per al jugador.

Activitat 8.42

Un jugador llança un dau i rep una quantitat de diners igual al nombre de punts que apareixen en la cara del dau.

a) Si el joc costa 1 €, quant hauria d'esperar guanyar el jugador en cada jugada?

b) Si el joc costa 2 €, quant hauria d'esperar guanyar el jugador en cada jugada?

c) Quin és el màxim que el jugador hauria d'estar disposat a pagar per a jugar i no perdre diners a llarg termini?

Solució en pàg. 442

Els pronòstics (*odds* en angles) s'usen sovint en situacions que van des de les carreres de cavalls a la investigació mèdica. El pronòstic és una probabilitat enunciada en forma de raó. A continuació veurem què significa realment el terme pronòstic i quina relació guarda amb la probabilitat.

Exemple 8.38

Per exemple, l'hepatitis C és una malaltia del fetge. Si una persona és portadora crònica del virus, el pronòstic a favor que desenvolupe *cirrosi hepàtica* és d'1 : 4. Amb determinats tractaments per a l'hepatitis C, el pronòstic d'aconseguir una disminució substancial de la presència del virus és de 2 : 3.

En calcular la probabilitat que es produïsca un esdeveniment, examinem la relació entre els resultats favorables i el nombre total de resultats possibles. Quan es parla de **pronòstic a favor** d'un succés, s'està comparant el nombre de resultats favorables d'un succés amb el nombre de resultats desfavorables d'aquest. Aquesta comparació assumeix, com farem en aquesta secció, que els resultats són igualment probables.

Pronòstic

En general, siga A un succés de l'espai mostral E i $\overline{A}$ el succés complementari de A. Els pronòstics es defineixen formalment com segueix:

- El **pronòstic a favor** de A és $|A| : |\overline{A}|$
- El **pronòstic en contra** de A és $|\overline{A}| : |A|$

Activitat 8.43

Si es llança un dau de sis cares, quins són els pronòstics a favor dels següents successos?

a) Obtenir un 4

b) Obtenir un nombre primer

c) Obtenir un nombre major que 0

d) Obtenir un nombre major que 6

Solució en pàg. 442

Exemple 8.39

Segons aquesta descripció, el pronòstic mostrat en l'Exemple 8.38 ens diu que una persona portadora crònica d'hepatitis C té una possibilitat de desenvolupar cirrosi i quatre de no desenvolupar-la. Així, la relació amb la probabilitat és clara, i resulta:

$$P(\text{desenvolupar cirrosi}) = \frac{1}{5} \quad \text{i} \quad P(\text{no desenvolupar cirrosi}) = \frac{4}{5}$$

De la mateixa manera, una persona que se sotmet a un determinat tractament té dues possibilitats d'obtenir un benefici substancial i tres de no obtenir-lo. D'aquesta manera,

$$P(\text{benefici}) = \frac{2}{5} \quad \text{i} \quad P(\text{no benefici}) = \frac{3}{5}$$

En general, tindrem la següent propietat:

Probabilitat donat un pronòstic

Siga A un succés de l'espai mostral E de manera que el seu pronòstic a favor siga $a : b$, llavors:

$$P(A) = \frac{a}{a+b}$$

Activitat 8.44

Apliqueu la propietat anterior i calculeu les probabilitats associades als successos de l'Activitat 8.43.

Solució en pàg. 443

Com que el pronòstic és una raó entre un succés i el seu complementari, aquest pronòstic pot enunciar-se en termes de probabilitat:

- El **pronòstic a favor** de A és $P(A) : P(\overline{A})$
- El **pronòstic en contra** de A és $P(\overline{A}) : P(A)$

Aquesta definició permet usar el pronòstic en casos en què els resultats no són equiprobables.

Activitat 8.45

Fem girar la ruleta de la Figura 8.37, trobeu els pronòstics dels esdeveniments següents:

a) A favor d'obtenir un color primari (roig, groc o blau)

b) En contra d'obtenir verd o roig

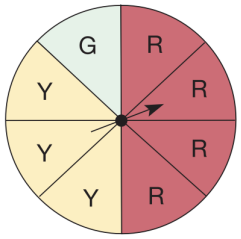


Figura 8.37. Ruleta amb angles centrals iguals

Solució en pàg. 443

8.3. Activitats complementàries del tema

Activitat 8.46

Es va llançar un dau 50 vegades, i es van obtenir els resultats següents:

Taula 8.34
Resultats de 50 llançaments d'un dau

x_i	n_i
1	8
2	7
3	12
4	10
5	8
6	5

a) Indiqueu la freqüència absoluta corresponent a la cara 3:

- 12
- 0'12
- 12%
- 27

b) Indiqueu el percentatge corresponent a la cara 6:

- 5%
- 5
- 0'5%
- 10%

Solució en pàg. 443

Activitat 8.47

En un supermercat han fet un estudi sobre el tipus de refrescos venuts en un dia i s'han obtingut els resultats mostrats en la Taula 8.35. Formeu la taula de freqüències completa per a aquestes dades.

Taula 8.35
Taula de freqüències de l'Activitat 8.47

Tipus de refresc	n_i
Taronja	150
Llima	200
Cola	400
Altres	50

Solució en pàg. 443

Activitat 8.48

L'alçada mitjana d'un grup de 5 persones és 167 cm. Anna s'ajunta al grup i llavors la talla mitjana de les 6 persones és de 169 cm. Quant fa Anna d'alçada?

Solució en pàg. 443

Activitat 8.49

Les edats de 25 persones d'un determinat grup social s'arrepleguen a continuació. Calculeu la mitjana, la mediana i la moda.

```
33 37 42 38 59 38 45 39 29 42 39 40
37 37 66 47 42 45 40 38 50 40 38 45 43
```

Solució en pàg. 443

Activitat 8.50

Quant ha de valdre x perquè la mitjana siga 5?

x_i	1	x	5	7
n_i	1	2	3	4

Solució en pàg. 444

Activitat 8.51

Inventeu un conjunt de 8 dades per a cada un dels casos següents:

a) Que coincidisca la mitja i la moda

b) Que coincidisca la mitjana i la moda

c) Que la seua mitja siga 3

d) Que tinga 6 de mitjana

Solució en pàg. 444

Activitat 8.52

L'assistència d'espectadors a un cinema amb 4 sales en un dia, va ser de 200, 500, 300, 600 persones a cada una. Calculeu el rang del nombre d'assistents. Si el dia de l'espectador acudeixen 50 persones més a cada sala, quin efecte tindria sobre la dispersió? I sobre la mitjana?

Solució en pàg. 444

Activitat 8.53

Pesats els 300 alumnes d'un col · legi, hem obtingut els resultats mostrats en la Taula 8.37. Quants alumnes pesen menys de 70 kg? Quin percentatge d'alumnes pesa entre 65 i 70 kg?

Taula 8.37
Dades obtingudes per a 300 estudiants d'un col · legi

Pes (kg)	n_i
$[45, 50[$	12
$[50, 55[$	34
$[55, 60[$	85
$[60, 65[$	92
$[65, 70[$	60
$[70, 75[$	12
$[75, 80[$	5

Solució en pàg. 444

Activitat 8.54

En els tres exàmens fets per Anna, la mediana va ser de 8′8, la puntuació mitjana va ser de 9′0 i el rang va ser 0′8. Quines van ser les puntuacions en cada un dels exàmens?

Solució en pàg. 444

Activitat 8.55

L'edat mitjana dels 175 alumnes d'una escola és de 8 anys, i la dels 12 adults que hi treballen és de 40 anys. Quina és l'edat mitjana de totes les persones de l'escola?

Solució en pàg. 444

Activitat 8.56

La mitjana i la mediana d'un conjunt de 5 nombres naturals diferents és 7 i el rang 6. Troba els cinc nombres.

Solució en pàg. 444

Activitat 8.57

Trobeu els nombres en les següents taules de freqüències:

Taula 8.38
Conjunt de dades a)

a)

x_i	n_i
1	10
2	12
3	7
4	7
5	3

Taula 8.39
Conjunt de dades b)

b)

x_i	n_i
2	12
4	10
6	8
8	7
10	5
12	8
14	10

Taula 8.40
Conjunt de dades c)

c)

x_i	n_i
10	18
20	13
30	10
40	9

Solució en pàg. 444

Activitat 8.58

La següent sèrie de dades, $18, 21, 24, a, 36, 37, b$, està ordenada i té de mediana 30 i de mitjana 32. Trobeu els valors de a i b.

Solució en pàg. 444

Activitat 8.59

Trobeu la dada que falta en la sèrie $5, 4, 3, ?, 5, 8, 9, 11, 7, 8$, sabent que la mediana és 7. Una vegada trobada la dada, calculeu la mitjana aritmètica i la moda.

Solució en pàg. 445

Activitat 8.60

En un tractament per a reduir l'obesitat d'un grup de malalts es van contrastar dos grups de règims, un (A) que permetia usar pa amb elevat contingut en proteïnes; i un altre (B) en el qual el pa permès havia de ser integral. Els resultats de tots dos tipus de règim es reflecteixen en els histogrames presentats en la Figura 8.38.

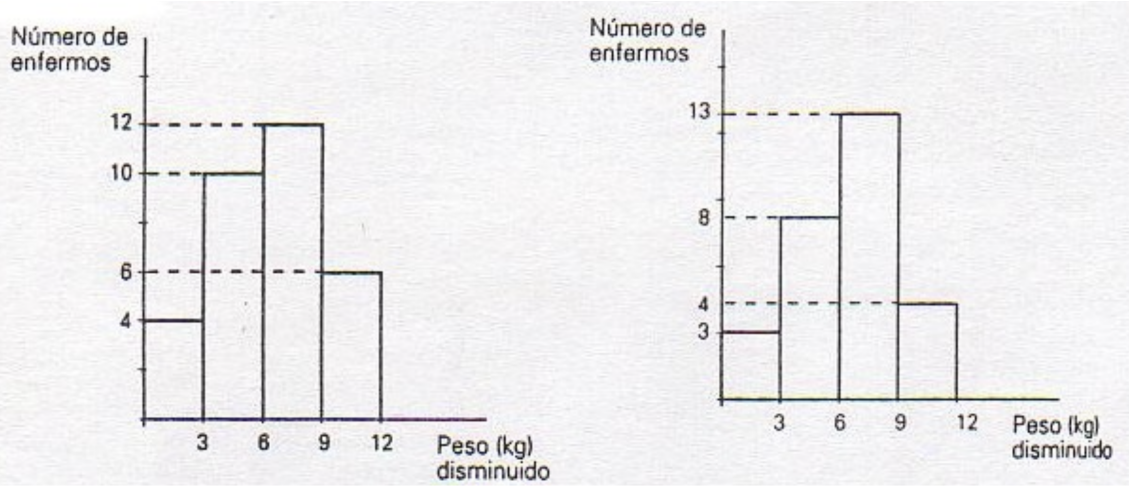


Figura 8.38. Histogrames per als dos grups amb règim A (esquerra) i B (dreta)

Calculeu:

a) Quants malalts han sigut tractats en cada grup?

b) Amb quin dels dos mètodes es perd més pes? Quin dels dos és més fiable?

c) Se suposa que el tractament té èxit quan el malalt perd al final del tractament més de 6 kg. Calculeu el percentatge d'èxits en cada tractament.

Solució en pàg. 445

Activitat 8.61

De les següents taules de freqüències, quina es correspon amb el gràfic de sectors mostrat en la Figura 8.39?

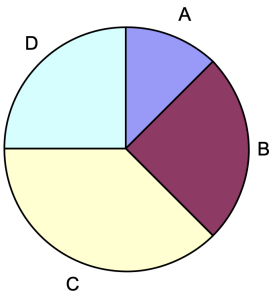


Figura 8.39. Gràfic de sectors misteriós

Taula 8.41
Conjunt de dades a)

a)

x_i	n_i
A	150
B	100
C	50
D	100

Taula 8.42
Conjunt de dades b)

b)

x_i	n_i
A	30
B	170
C	20
D	180

Taula 8.43
Conjunt de dades c)

c)

x_i	n_i
A	10
B	150
C	90
D	150

Taula 8.44
Conjunt de dades d)

d)

x_i	n_i
A	50
B	100
C	150
D	100

Solució en pàg. 445

Activitat 8.62

Les qualificacions obtingudes pels alumnes d'una classe són:

```
SUSPÈS: 5
APROVAT: 12
NOTABLE: 8
EXCEL·LENT: 3
```

Contesteu:

i) El nombre d'alumnes de la classe és: a) 30 b) 28 c) No es pot calcular

ii) La nota mitjana és: a) 6 b) 6′5 c) No es pot calcular

iii) La moda és: a) APROVAT b) 6 c)12

iv) La mediana és: a) APROVAT b)14 c) No es pot calcular

Solució en pàg. 445

Activitat 8.63

Indiqueu si les següents afirmacions són vertaderes o falses, raonant la resposta:

a) Per al càlcul de la mitjana no cal tenir en compte els valors nuls de la variable.

b) Si canviem una de les dades d'una distribució, el valor de la moda també variarà.

c) Com més gran siga la dispersió menys representativa serà la mitjana.

d) Per al càlcul del rang intervenen tots els valors.

e) Per a les variables qualitatives no es pot calcular cap mesura estadística.

f) La suma de totes les freqüències relatives en qualsevol taula de freqüències és el nombre total d'observacions.

g) La suma de tots els percentatges en qualsevol taula de freqüències és 100%.

h) L'any de naixement dels jugadors de futbol professionals és una variable quantitativa contínua.

i) Prendre com a mostra a tots els alumnes de 2n de Magisteri per a fer un estudi sobre els alumnes de la Universitat de València no proporcionarà resultats fiables.

j) En una distribució de dades la mitjana i la moda coincideixen sempre

Solució en pàg. 445

Activitat 8.64

Una urna conté 100 boles numerades 00, 01, 02, ..., 99. Agafem una bola a l'atzar. Si X representa la primera xifra i Y la segona xifra del nombre de cada bola. Determineu les probabilitats dels esdeveniments següents:

a) $X = 3$

b) $Y \neq 4$

c) $X \neq Y$

d) $X > Y$

e) $X \leq Y$

f) $X + Y = 9$

g) $X < 4$ i $Y < 3$

h) $X > 4$ i $Y < 4$

i) $X + Y \neq 8$

j) $X \neq 5$ i $Y \neq 4$

k) $XY > 49$

Solució en pàg. 446

Activitat 8.65

Posem 1000 boles numerades de 0 a 999 en una urna. Agafem una bola a l'atzar. Definim X el número de la bola que hem agafat. Definim els següents esdeveniments:

- Succés A: X és divisible per 5
- Succés B: X acaba en 0
- Succés C: X és divisible per 3
- Succés D: X és divisible per 6
- Succés E: X és divisible per 10
- Succés F: X és divisible per 2

Calculeu les probabilitats dels esdeveniments següents:

a) $P(A)$

b) $P(F)$

c) $P(A \cap F)$

d) $P(D)$

e) $P(E)$

f) $P(D \cap E)$

g) $P(\overline{A} \cap \overline{F})$

h) $P(A \cap \overline{B})$

i) $P(\overline{A} \cap B)$

j) $P(A \cup \overline{B})$

k) $P(A \cap E)$

Solució en pàg. 446

Activitat 8.66

Un club té 100 socis. S'ha fet un qüestionari amb els següents resultats:

	Homes	Dones
Practiquen un esport	48	16
No practiquen un esport	16	24

Triada una persona a l'atzar, calculeu:

a) Quina és la probabilitat que siga home? I dona? I que la persona practique un esport? I que no practique cap esport? I que siga un home que practica un esport?

b) Ens diuen que la persona triada és un home. Quina és la probabilitat que practique un esport? I que no practique un esport?

c) Ens diuen que la persona triada és una dona. Quina és la probabilitat que practique un esport? I que no practique un esport?

Solució en pàg. 446

Activitat 8.67

Tenim una ruleta amb 8 posicions equiprobables (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7). En fer girar la ruleta, obtenim un nombre X. Definim com a A_k l'esdeveniment que X siga menor o igual que k, és a dir, A_3 és el succés en què obtenim un 0, 1, 2 o 3 en la ruleta. Determineu quins són els esdeveniments següents (en termes de A_k):

a) $B = A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$

b) $C = A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6 \cap A_7$

c) $B \cap C$

d) $B \cup C$

Solució en pàg. 446

Activitat 8.68

Agafeu una moneda i poseu un poquet de plastilina perquè pese més un costat que l'altre. Feu l'experiment de tirar la moneda unes quantes vegades (almenys 50) i registreu els resultats.

a) a) Trobeu una estimació de la probabilitat de traure una cara usant un full de càlcul (Excel, Google Sheets, OpenOffice, LibreOffice, etc).

b) Penseu que hauria de tenir la mateixa probabilitat que una moneda sense plastilina?

c) Compareu la freqüència relativa de traure cara quan heu fet l'experiment 10, 25 i 50 vegades. Feu la diferència entre la freqüència relativa de traure cara en fer l'experiment 10, 25 i 50 vegades amb la *probabilitat teòrica*[a].

[a] Per a la *probabilitat teòrica* podem considerar la freqüència relativa de traure cara per al major nombre de tirades que heu calculat, és a dir, 50 tirades).

Activitat 8.69

Es llancen 2 daus de 6 cares. Es demana:

a) Calculeu l'espai mostral i la probabilitat de cada un dels elements de E. Feu un

diagrama d'arbre.

b) Calculeu la probabilitat que la suma de punts siga 7. I que siga 9? I que siga 11?

c) Calculeu la probabilitat que la suma de punts siga múltiple de 3.

d) Calculeu la probabilitat d'obtenir la mateixa cara en els dos daus.

e) Calculeu la probabilitat de l'esdeveniment $A = \{\text{almenys una de les cares és parell}\}$.

Solució en pàg. 447

Activitat 8.70

En una classe, 10 alumnes tenen com preferència solament l'assignatura de Matemàtiques, 15 prefereixen solament Estadística i 20 prefereixen Matemàtiques i Estadística i 5 no tenen preferència per cap de les dues assignatures. Calculeu la probabilitat que un alumne de la classe seleccionat a l'atzar tinga preferència per Matemàtiques o Estadística o ambdues assignatures.

Solució en pàg. 447

Activitat 8.71

Madame Mayer té 6 barrets (3 negres i 3 blancs), 5 bruses (3 negres i 2 blanques) i 5 faldilles (2 negres i 3 blanques). De quantes maneres diferents es pot vestir Madame Mayer? Si Madame Mayer no vol portar dues peces de roba negres, de quantes maneres es pot vestir? Useu un diagrama d'arbre per a ajudar-vos.

Solució en pàg. 447

Activitat 8.72

Jugarem a traure cartes d'una baralla espanyola (48 cartes, 12 cartes per cada pal) ben remenades.

a) Trac una carta, la torne a la baralla i remene i trac una altra carta. Trobeu la probabilitat de traure dues espases.

b) Trac una carta, me la quede i trac una altra carta. Trobeu la probabilitat de traure dues espases.

c) Trac una carta, la torne a la baralla i remene i trac una altra carta. Trobeu la probabilitat de traure almenys una espasa.

d) Trac una carta, la torne a la baralla i remene i trac una altra carta. Trobeu la probabilitat de traure solament una espasa.

Solució en pàg. 447

Activitat 8.73

Observem la jaqueta que porten 50 alumnes en el pati. Solament 10 porten caputxa, 30 tenen mànegues del mateix color que el cos i 12 dels que no tenen caputxa tenen les mànegues d'un color diferent del cos.

a) Feu la taula de contingència

b) Trobeu la probabilitat que una jaqueta triada a l'atzar tinga caputxa i les mànegues del mateix color.

c) Trobeu la probabilitat que una jaqueta a l'atzar tinga caputxa, sabent que les mànegues són roges i el cos negre.

d) Trobeu la probabilitat que una jaqueta amb caputxa puga tenir les mànegues de diferent color del cos.

Solució en pàg. 448

Activitat 8.74

Tenim 3 urnes diferents: $U1$ que conté 3 boles blanques i 7 boles negres; $U2$ que conté 4 boles blanques i 4 boles negres, i $U3$ que conté 4 boles blanques i 1 bola negra. Elegim una urna a l'atzar i agafem una bola.

a) Si $B = \{\text{obtenir bola blanca}\}$ i $N = \{\text{obtenir bola negra}\}$, quina és la probabilitat $P(N)$?

b) Suposem que la bola que hem elegit és negra. Quina és la probabilitat que vinga de l'urna $U1$?

Solució en pàg. 448

Activitat 8.75

Hi ha un test per a diagnosticar el càncer. Si el pacient té càncer (que anomenem esdeveniment K), el test serà positiu (que anomenem esdeveniment $+$) amb el 96% de certitud. Si el pacient no té càncer (esdeveniment $\overline{K}$), el test serà negatiu (esdeveniment $-$, o contrari de $+$) amb un 94% de certitud.

a) Sabent que el resultat del test en un pacient és positiu, quina és la probabilitat que tinga càncer sabent que a l'edat del pacient una persona de cada 145 té càncer sense saber-ho?

b) Si el resultat del test és negatiu, quina és la probabilitat que el pacient no tinga càncer?

Solució en pàg. 448

Referències

Batanero, C., i Godino, J. D. (2014). Estocástica para maestros. En *Matemáticas para maestros* (pp. 334 – 377). Universidad de Granada.

Gutiérrez Cabriá, S. (1994). *Filosofía de la estadística*. Servei de Publicacions de la universitat de València.

Moore, D. S. (1991). Teaching Statistics as a respectable subject. En F. Gordon i S. Gordon (Eds.), *Statistics for the twenty-first century* (pp. 14 – 25). Mathematical Association of America.

Musser, G. L., Peterson, B. E., i Burger, W. F. (2013). *Mathematics for Elementary teachers: A Contemporary Approach* (10th ed.). Wiley.

Seethaler, S. (2009). *Lies, damned lies, and science: How to sort through the noise around global warming, the latest health claims, and other scientific controversies*. Upper Saddle River, N.J.: FT Press Science.

Wilhelmi, M. (2004). *Combinatoria y probabilidad*. Universidad de Granada. Retrieved from https://www.ugr.es/$\sim$batanero/pages/ARTICULOS/librowhilhelmi.pdf

9

Geometria plana

Organització de continguts del Tema 9

1. Conceptes fonamentals
   - Posicions relatives donades dues rectes
   - Angles
2. Construccions amb regla i compàs
3. Polígons
   - Triangles
   - Quadrilàters
4. Moviments en el pla
   - Translacions
   - Girs
   - Simetries
5. Mesura de figures planes: perímetre i àrea
6. Teorema de Pitàgores
7. Semblança i Teorema de Tales

Els continguts geomètrics són una part fonamental dels currículums d'Educació Primària i Infantil. En concret, en referència a la geometria plana i espacial, trobarem aspectes relacionats amb la situació en l'espai, formes planes i espacials, identificació dels cossos geomètrics, regularitats o simetries. En aquest tema veurem els continguts bàsics relacionats amb la geometria plana (de dues dimensions), encara que la major part dels d'aquests conceptes ja han sigut estudiants en etapes educatives anteriors. A més, intentarem no solament definir els objectes geomètrics,

sinó que haurem de ser capaços de construir-los. Primerament, cal que fem una diferenciació del que entenem per geometria plana i espacial, ja que serà l'eix que separa els dos temes que ens resten de l'assignatura.

Geometria plana i espacial

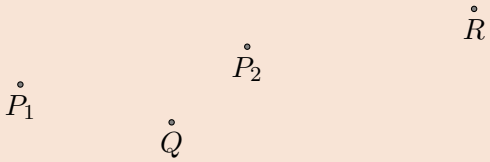
La **geometria plana** és la part de la geometria que tracta sobre elements, propietats i mesures d'objectes que estan continguts en un espai de dues dimensions. D'altra banda, la **geometria espacial** és la branca de la geometria que s'ocupa d'elements, propietats i mesures d'objectes situats en l'espai tridimensional.

9.1. Conceptes fonamentals

Començarem definint els conceptes fonamentals que són necessaris per a poder començar a estudiar els objectes geomètrics de dues dimensions: el punt, la recta i el pla. Aquestes definicions les farem d'acord amb les seues característiques i propietats.

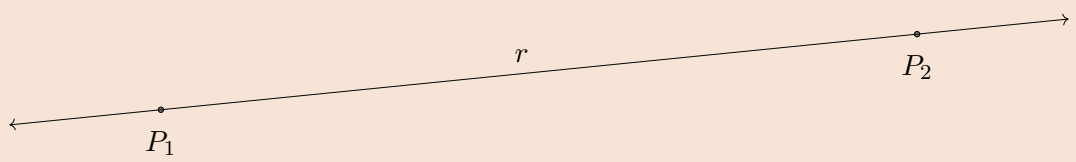
Punt

Anomenarem **punt** un objecte geomètric que no té dimensió i que s'usa per a indicar una ubicació. El punt és el límit mínim d'extensió, que es considera sense longitud, amplària ni profunditat. Els punts s'anomenen mitjançant lletres majúscules $(P, Q, \dots)$. Aquestes lletres poden anar acompanyades de subíndexs $(P_1, P_2, P_3, \dots)$.



Recta

Anomenarem **recta** una successió infinita de punts que verifica la següent propietat: *donats dos punts qualssevol pertanyents a la recta, la distància més curta entre ells és la determinada per la mateixa recta.* Les rectes s'anomenen amb lletres minúscules $r, s, \dots$



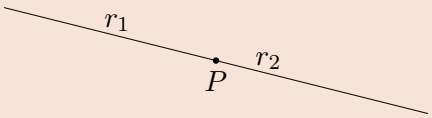
! Les rectes són *infinites* i, per tant, hem de pensar que no acaben. Evidentment, aquesta característica és impossible fer-la patent en aquests apunts. Per això en la representació anterior de la recta r hem fet ús de les "fletxetes" per a indicar aquesta característica. En el que segueix, no sempre farem ús d'aquesta notació, però el caràcter *infinit* de la recta ha de ser tingut en compte.

Pla

Anomenarem **pla** la superfície plana que compleix la propietat següent: *qualsevol recta que uneix dos punts arbitraris pertanyents al pla, queda contingut en en el pla.* Per tant, un pla pot ser determinat per dues rectes, una recta i un punt exterior a ella o tres punts no alineats.

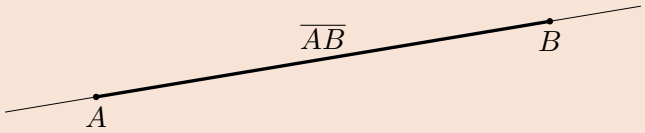
Semirecta

Anomenarem **semirecta** cada una de les dues parts en què un punt divideix una recta.



Segment

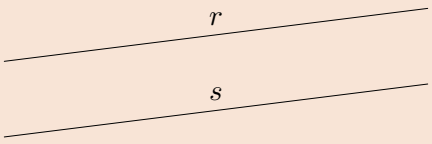
Si en una recta r assenyalem dos punts A i B, el conjunt de punts de la recta situats entre tots dos és el **segment** anomenat $\overline{AB}$. Els punts A i B es diuen extrems.



9.1.1 Posicions relatives donades dues rectes

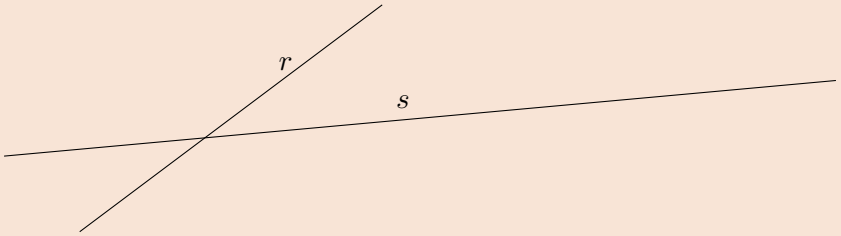
Rectes paral · leles

Direm que dues rectes són **paral · leles** quan no tenen cap punt en comú. La nomenclatura que usarem per a indicar que r i s són rectes (semirectes o segments) paral · leles és $r \parallel s$.

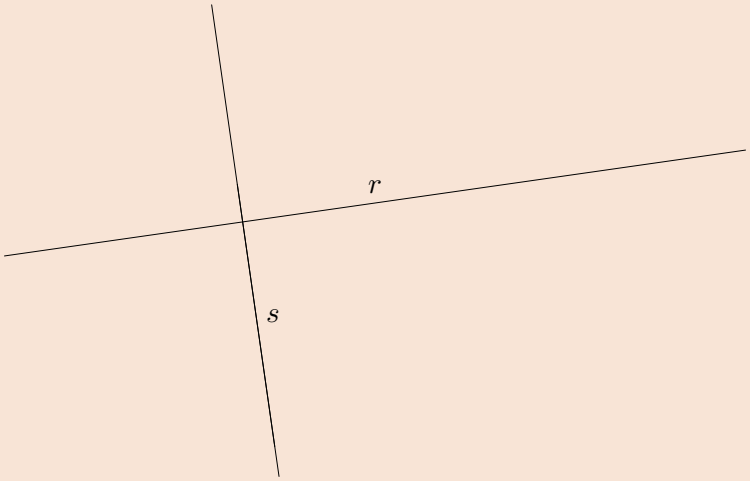


Rectes secants i perpendiculars

Direm que dues rectes són **secants** quan es tallen en un punt, és a dir, tenen un punt en comú. Aquestes rectes divideixen el pla en quatre parts.



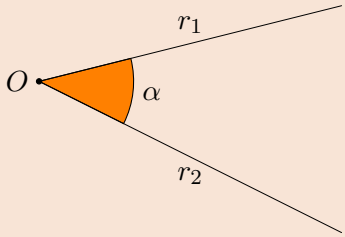
En el cas particular que dues rectes secants dividisquen el pla en quatre parts iguals, direm que les rectes són **perpendiculars**. En aquest últim cas escriurem que $r \perp s$.



9.1.2 Angles

Angle

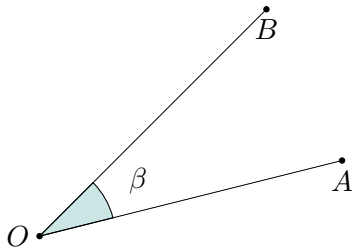
En la literatura podem trobar diverses definicions d'**angle**. Per exemple, podem definir l'angle (α) com el conjunt de punts del pla situats entre dues semirectes (r_1, r_2) d'origen comú (O).



També podem pensar en l'angle (α) com l'amplitud entre les dues semirectes (r_1, r_2) que tenen un extrem comú (O). Habitualment es fa ús de les primeres lletres de l'alfabet grec per a denominar els angles $(\alpha, \beta, \gamma, \dots)$.

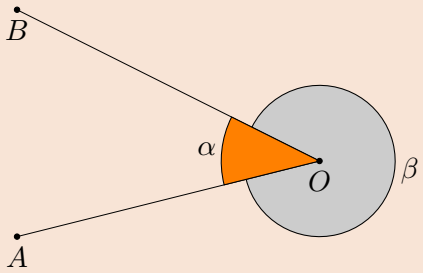
Exemple 9.1

Quan tenim segments en lloc de semirectes, podem fer referència a un angle (β, en l'exemple següent) tant amb la lletra que el determina (β) com amb els punts que el determinen (A, O, B). En aquest cas ho denotem com a $\angle AOB$.



Angle convex i còncau (interior i exterior)

Fixeu-vos que dues semirectes d'origen comú sempre formen dos angles, un que anomenarem **convex** (el de menor amplitud) i un altre **còncau** (el de major amplitud).



L'angle convex (α) també s'anomena angle **interior** i l'angle còncau (β) també es diu angle **exterior**. El punt O s'anomena **vèrtex** i els segments $\overline{AO}$ i $\overline{BO}$ són els **costats** de l'angle.

Exemple 9.2

En el gràfic de la definició anterior, α és un angle convex. Podem observar que el segment que uneix qualsevol parell de punts situats a la regió determinada per l'angle α queda contingut dins de la mateixa regió. Aquesta seria una forma alternativa de definir quan una regió del pla és convexa.

En canvi, l'angle β és còncau i, en aquest cas, no podem garantir la condició anterior. Així, en una regió còncava, el segment que uneix dos punts pot no quedar sempre contingut dins de la mateixa regió.

Fixeu-vos que la nomenclatura $\angle AOB$ en el gràfic de la definició anterior no permet establir a quina de les dues regions (convexa o còncava) fem referència (llevat que establim un sentit de gir determinat). Per tant, per conveni:

- Els angles els mesurarem en **sentit antihorari**. Així $\angle AOB = \beta$ i $\angle BOA = \alpha$ en el dibuix anterior.
- Habitualment ens referirem, per defecte, als **angles interiors** (convexos).

D'igual manera, cal posar atenció al fet que per a comparar dos angles no cal fixar-se que els costats siguen més o menys llargs, sinó en el fet que tinguen més o menys amplitud.

Mesura d'angles

Per a mesurar els angles usem un sistema sexagesimal (base 60) definit per mitjà de graus, minuts i segons sexagesimals:

- **Grau sexagesimal** (°) és la mesura d'un angle que resulta de dividir una circumferència completa en 360 parts iguals.
- **Minut sexagesimal** ($'$) és la mesura que resulta de dividir un grau sexagesimal en 60 parts iguals.
- **Segon sexagesimal** ($''$) és la mesura que resulta de dividir un minut sexagesimal en 60 parts iguals.

Així, $1° = 60'$ i $1' = 60''$. Fixeu-vos que el sistema que emprem per a mesurar angles té base 60.

Activitat 9.1

a) Convertiu a graus decimals l'angle $45°6'2''$

b) Convertiu en graus, minuts i segons sexagesimals (forma complexa) $32.4525°$

Solució en pàg. 448

Una manera de comprovar que hem fet correctament la conversió és fer ús de la calculadora. La majoria de calculadores ens donen directament la conversió entre les expressions decimals i complexes amb una combinació de les tecles [° ' ''] i [=]. A vegades cal fer ús de les tecles [←] o [ENG], depenent del model de què disposem.

Per a introduir el valor $45°6'2''$ en la calculadora pressionaríem: 45 [° ' ''] 6 [° ' ''] 2 [° ' ''].

Activitat 9.2

Calculeu les següents operacions entre angles fent ús de l'algoritme per columnes:

a) $36°15'14'' + 25°58'18''$

b) $143°12'14'' - 75°43'55''$

Solució en pàg. 449

Classificacions dels angles

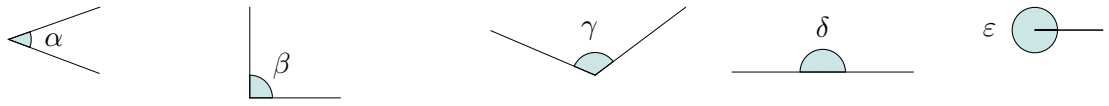
Hi ha diversos criteris per a classificar els angles. Ací n'estudiarem només alguns:

Classificació dels angles segons l'amplitud

Segons l'amplitud, els angles podem classificar-se en:

- **Agut**: és l'angle amb amplitud major de 0° i menor de 90°.
- **Recte**: és l'angle amb amplitud igual a 90°.
- **Obtús**: és l'angle amb amplitud major de 90° i menor de 180°.
- **Pla**: és l'angle amb amplitud igual a 180°.
- **Complet**: és l'angle amb amplitud igual a 360°.

Exemple 9.3



L'angle α és agut, β és recte, γ és obtús, δ és pla i ε és complet.

! La classificació anterior defineix l'angle **convex** com aquell que és major que 0° i menor que 180°; i l'angle **còncau** com el que és major que 180° i menor que 360°.

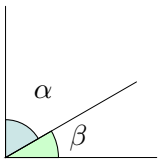
Classificació dels angles segons la suma de les amplituds

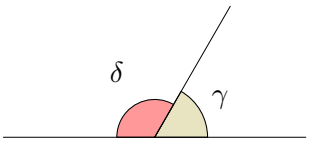
Segons la suma de les amplituds, dos angles podem classificar-se en:

- **Complementaris**: aquells que sumen 90°.
- **Suplementaris**: aquells que sumen 180°.

Exemple 9.4

Els angles α i β són complementaris, ja que sumen un angle recte; mentre que γ i δ són suplementaris, ja que la seua suma és un angle pla.





Activitat 9.3

Sense fer ús de la calculadora, amb l'algoritme per columnes:

a) trobeu l'angle complementari de $25°37'48''$

b) trobeu l'angle suplementari de $105°42'37''$

Solució en pàg. 449

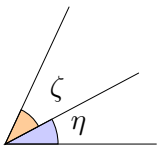
Classificació dels angles segons la seua posició relativa

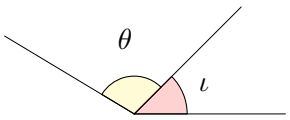
Segons la seua posició relativa, dos angles podem classificar-se en:

- **Consecutius**: són dos angles no superposats que tenen el mateix vèrtex i un costat comú.
- **Adjacents**: són dos angles que tenen el mateix vèrtex, un costat comú i els altres dos costats són semirectes oposades. Per tant, els angles adjacents són consecutius i suplementaris.
- **Oposats pel vèrtex**: són els parells d'angles formats per dues rectes que es tallen i que només tenen el vèrtex comú (no comparteixen costats).

Exemple 9.5

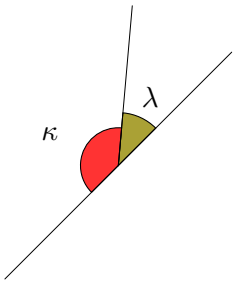
- Angles consecutius:
  - Les parelles d'angles $(\alpha,\ \beta)$ i (γ, δ), de l'Exemple 9.4, són formades per angles consecutius.
  - Les següents parelles d'angles (ζ, η) i (θ, ι) són formades per angles consecutius:

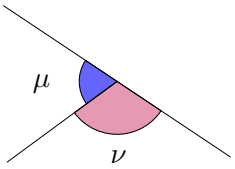




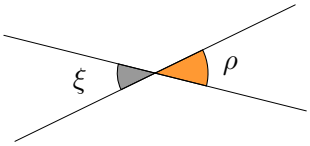
- Angles adjacents:
  - La parella d'angles (γ, δ), de l'Exemple 9.4, està formada per angles adjacents.

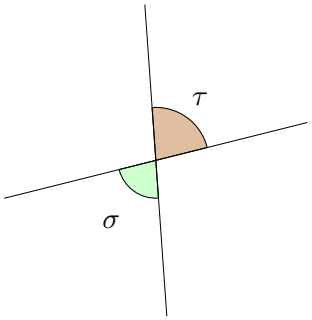
– Les següents parelles d'angles (κ, λ) i (μ, ν) són formades per angles adjacents:





- Angles oposats pel vèrtex: les següents parelles d'angles (ξ, ρ) i (σ, τ) són formades per angles oposats pel vèrtex.





Propietat dels angles oposats pel vèrtex

Dos angles oposats pel vèrtex són iguals (**congruents**).

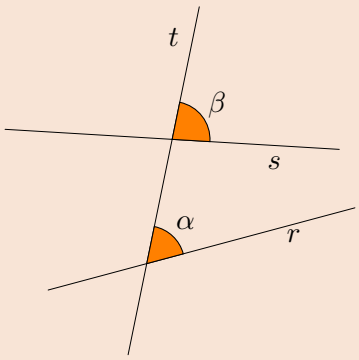
Activitat 9.4

Demostreu la propietat anterior.

Solució en pàg. 449

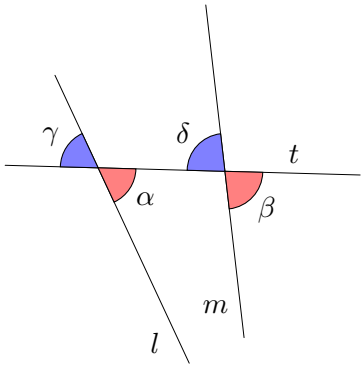
Angles corresponents

Donades dues rectes r i s que són intersecades per una tercera recta t, direm que els angles α i β són **corresponents** si es troben en la mateixa posició relativa respecte a r, s i t.



Exemple 9.6

Les parelles d'angles α, β i γ, δ són corresponents dos a dos, ja que es troben en les mateixes posicions relatives respecte a les rectes l, m i t.



Intuïtivament podem deduir que si les rectes r, s de la definició anterior són paral · leles ($r \parallel s$), els angles corresponents que formen hauran de mesurar exactament el mateix (seran congruents, Figura 9.1). La demostració d'aquesta característica es basa en el fet que les dues rectes m, l, pel fet de ser paral · leles, apunten en la mateixa direcció. Així, per exemple, $\alpha = \beta$, o $\gamma = \delta$, etc. És a dir, **tots els angles corresponents formats per dues rectes paral · leles i una recta transversal que les talla són congruents**. Aquesta característica l'enunciarem en forma de propietat a continuació.

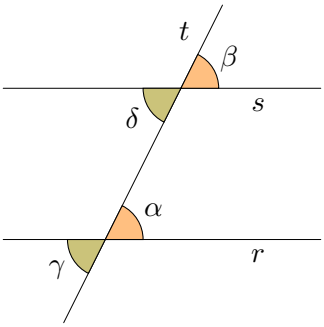


Figura 9.1. Angles corresponents per al cas en què $r \parallel s$

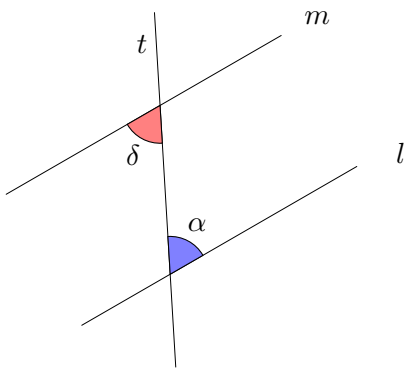
Caracterització de rectes paral · leles amb angles corresponents

Siguen dues rectes r, s que són intersecades per una tercera recta transversal t. Llavors,

$$r \parallel s \iff \text{els angles corresponents formats per } r, s \text{ i } t \text{ són congruents.}$$

Activitat 9.5

Siguen dues rectes l, m, tals que $l \parallel m$. Demostreu que $\alpha = \delta$ fent ús de la propietat anterior.

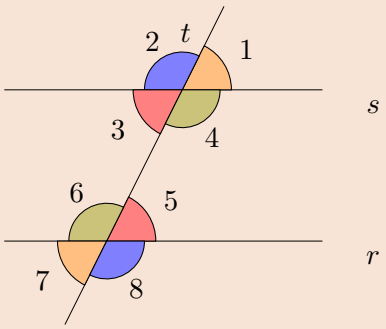


Solució en pàg. 450

Angles alterns

Siguen dues rectes r, s que són intersecades per una tercera recta transversal t. Llavors, definim:

- Angles **alterns interns** com els parells d'angles situats entre les dues rectes paral · leles que es troben un a cada costat de la recta transversal ($\angle 3$ i $\angle 5$; $\angle 4$ i $\angle 6$).
- Angles **alterns externs** com els parells d'angles situats en l'exterior de les rectes paral · leles que es troben un a cada costat de la transversal ($\angle 1$ i $\angle 7$; $\angle 2$ i $\angle 8$).



Caracterització dels angles alterns

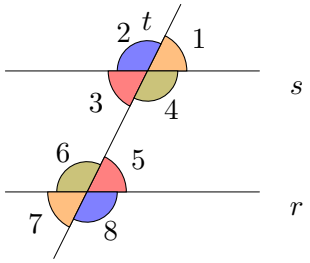
Tal com acabem de demostrar en l'Activitat 9.5, donades dues rectes r, s que són intersecades per una tercera recta transversal t, es complirà que,

$$r \parallel s \iff \text{els angles alterns interiors formats per } r, s \text{ i } t \text{ són congruents.}$$

$$r \parallel s \iff \text{els angles alterns exteriors formats per } r, s \text{ i } t \text{ són congruents.}$$

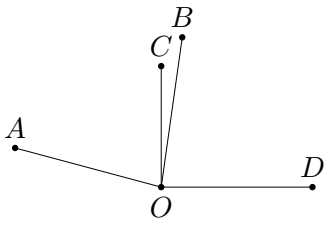
Exemple 9.7

La propietat anterior ens garanteix que, en el gràfic següent (el d'abans), els angles alterns interiors compleixen: $\angle 3 = \angle 5$ i $\angle 4 = \angle 6$. D'igual manera, els angles alterns exteriors compleixen: $\angle 1 = \angle 7$ i $\angle 2 = \angle 8$.



Activitat 9.6

En la següent figura $\overline{AO} \perp \overline{CO}$. Si $\angle AOD = 165°$ i $\angle BOD = 82°$, determineu les mesures dels angles $\angle AOB$ i $\angle BOC$ sense mesurar els angles amb el transportador.

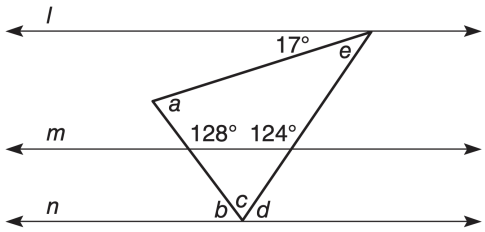


Activitat agafada de Musser, Peterson, i Burger (2013).

Solució en pàg. 450

Activitat 9.7

En la figura següent s'han indicat tres mesures d'angles. Sabent que $l \parallel m \parallel n$, trobeu les mesures dels angles identificats amb les lletres a, b, c, d i e.



Activitat agafada de Musser i cols. (2013).

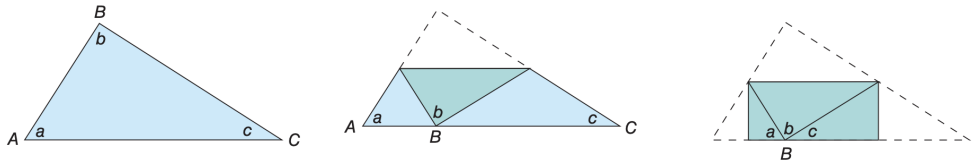
Activitat 9.8

Us demanem que demostreu novament que la suma dels angles interns d'un triangle són 180° (tal com hem fet en l'Activitat 9.17), però aquesta vegada de manera manipulativa. Seguiu aquests passos (activitat agafada de Musser i cols., 2013).

a) Dibuixeu en un paper un triangle (prou gran) i retalleu-lo (Figura 9.2a).

b) Plegueu el vèrtex B de manera que quede sobre $\overline{AC}$ i que la línia de plec siga paral · lela a $\overline{AC}$ (Figura 9.2b).

c) Ara doblegueu els vèrtexs A i C en el punt B (Figura 9.2c).



(a) Primer pas *(b)* Segon pas *(c)* Tercer pas

- Què us diu la figura resultant sobre les mesures de $\angle A, \angle B$ i $\angle C$? Expliqueu-ho.
- Proveu aquest mateix procediment amb altres dos tipus de triangles. Els resultats són els mateixos?

9.2. Construccions amb regla i compàs

Com s'ha dit al principi, la intenció en aquest tema és fer una aproximació a la geometria basada en les construccions euclidianes clàssiques amb regla i compàs. Aquestes construccions ens permetran trobar el *lloc geomètric* (punt o punts del pla) a partir de les propietats que caldrà que complisquen els nous objectes geomètrics que buscarem fent ús de la resolució de problemes.

Regla i compàs

Partirem de la base que la regla i el compàs ens permeten fer aquestes construccions:

- Per a cada nombre positiu r i per a cada punt del pla C, podem construir **amb el compàs** una **circumferència** de radi r i centre C (Figura 9.57). Una porció d'aquesta circumferència es diu **arc** (marcat en roig en la Figura 9.57).
- Cada parell de punts P i Q del pla podem connectar-los **mitjançant la regla** amb un segment $\overline{PQ}$. Aquest segment determina la recta r en què aquest segment és contingut (Figura 9.3).

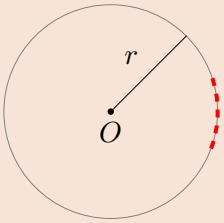


Figura 9.2. Circumferència i arc

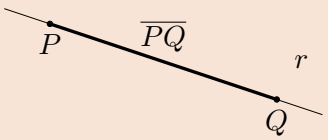


Figura 9.3. Circumferència i arc

Construccions amb regla i compàs

Amb regla i compàs podrem construir **només rectes i punts**, però sempre complint les següents premisses:

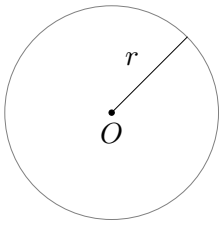
- Una recta només es podrà construir si localitzem dos punts que hi pertanyen.
- Els nous punts només es podran localitzar per mitjà d'interseccions de rectes, segments o arcs.

Lloc geomètric

Un **lloc geomètric** és el conjunt de punts del pla que comparteixen una propietat comuna. El lloc geomètric acostuma a formar una figura o figures contínues.

Exemple 9.8

Un cercle és el lloc geomètric dels punts del pla tals que la distància al centre (punt O) és un valor fixat (r).



D'aquesta manera, la circumferència queda definida com el conjunt de punts del pla que equidisten d'un altre punt anomenat centre (O).

9.2.1 Copiar un segment

Donat un segment $\overline{AB}$, el compàs ens permet copiar la distància entre els punts A i B en una altra recta l, a partir d'un punt situat en ella P, tal com indiquem en la Figura 9.4.

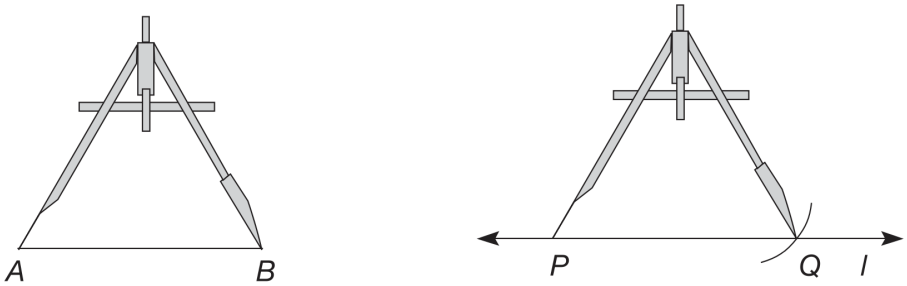


Figura 9.4. Còpia d'un segment (imatge agafada de Musser i cols., 2013)

9.2.2 Copiar un angle

Donat un angle α i una recta l, és possible amb la regla i el compàs traslladar l'angle a la recta. Per a fer-ho, seguirem aquests passos:

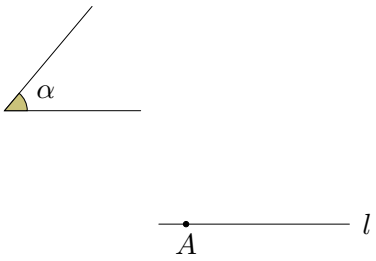


Figura 9.5. Pas 1

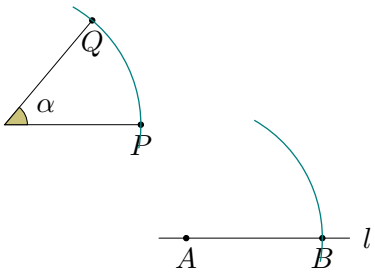


Figura 9.6. Pas 2

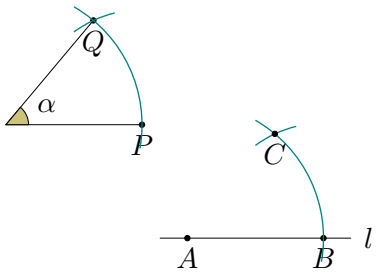


Figura 9.7. Pas 3

1. Definirem un punt A sobre la recta l (Figura 9.5).

2. Traçarem un arc des del vèrtex de l'angle original α amb el compàs i l'obertura que vulguem. D'aquesta manera trobarem els punts P i Q sobre els costats de l'angle. Traslladarem aquesta distància a la recta l, des del punt A amb el compàs, per a trobar el punt B i alçant-la en la direcció en què copiarem l'angle (Figura 9.6).

3. Agafarem l'amplitud de l'angle α amb el compàs, mesurant la distància entre els punts P i Q. Traslladarem aquesta distància a l'arc que hem dibuixat, posicionant-nos en el punt B. Trobarem així el punt C (Figura 9.7).

4. Finalment, unirem els punts A i C per a dibuixar l'angle copiat (Figura 9.8).

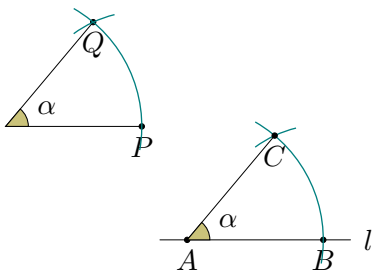
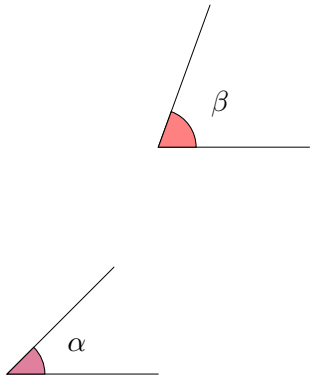


Figura 9.8. Angle α traslladat sobre la recta l

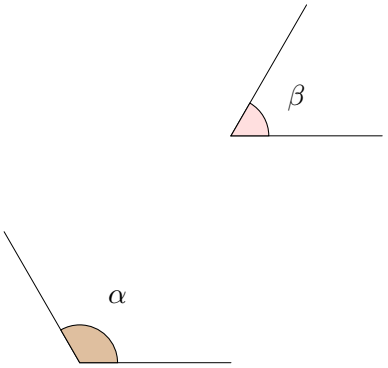
Activitat 9.9

Determineu amb regla i compàs $\alpha+\beta$. Feu-los consecutius, de manera que l'angle suma siga el determinat pels costats no comuns.



Activitat 9.10

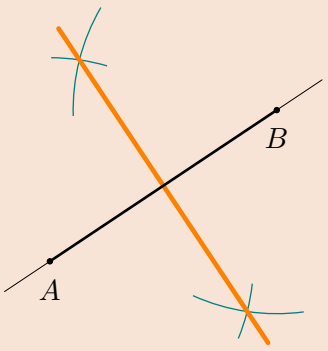
Determineu amb regla i compàs $\alpha-\beta$. Feu-los consecutius, de manera que l'angle diferència siga el determinat pels dos costats no comuns.



9.2.3 Mediatriu d'un segment i punt mitjà

Mediatriu d'un segment

Donat un segment $\overline{AB}$, la **mediatriu** del segment és el lloc geomètric dels punts del pla que equidisten dels punts A i B.
La intersecció de la mediatriu amb el segment determina el punt mitjà del segment.



Per a construir la mediatriu en un segment $\overline{AB}$, seguirem els passos següents:

1. Dibuixem dos arcs de circumferència amb centre en A i radi major que la distància $\frac{\overline{AB}}{2}$.
2. Amb el mateix radi dibuixem dos arcs de circumferència amb centre en B.

3. La recta que uneix els dos punts on es tallen els arcs és la mediatriu del segment $\overline{AB}$. El punt on es talla la mediatriu amb el segment $\overline{AB}$ és el **punt mitjà del segment** $\overline{AB}$.

> **!** La mediatriu d'un segment $\overline{AB}$ i la mateixa recta que conté el segment són sempre **perpendiculars** (es tallen formant un angle de 90°).

9.2.4 Recta perpendicular a una altra

Amb el que hem vist, donada una recta r és senzill determinar una altra recta s, de tal manera que $r \perp s$. Simplement, necessitarem situar un segment sobre la recta original r i calcular-ne la mediatriu. Ho veiem a continuació:

1. Triem un punt a l'atzar en la recta r, anomenat P en la Figura 9.9.
2. Amb el compàs marquem des del punt P altres dos punts equidistants, A i B. Ara ja tenim definit el segment $\overline{AB}$ sobre el qual calcularem la mediatriu (Figura 9.10).
3. Calculem la mediatriu del segment $\overline{AB}$, com hem fet abans (Figura 9.11).

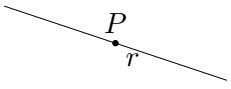


Figura 9.9. Pas 1

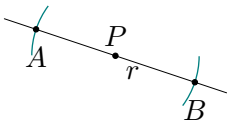


Figura 9.10. Pas 2

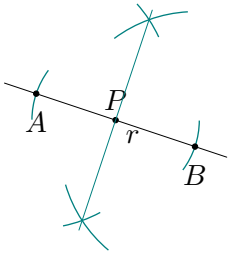


Figura 9.11. Pas 3

9.2.5 Recta perpendicular a una altra passant per un punt exterior a aquesta

Veurem el cas en què tenim una recta r i un punt exterior a la recta P, i en què volem calcular la recta perpendicular a r, però que passa per P (Figura 9.12). Seguirem aquests passos:

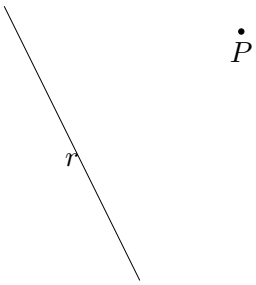


Figura 9.12. Recta i punt exterior a ella

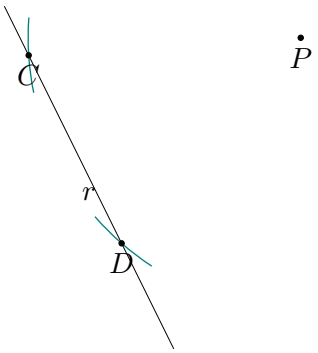


Figura 9.13. Pas 1

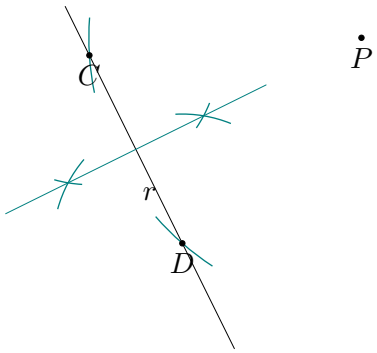


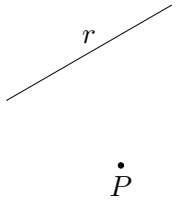
Figura 9.14. Pas 2

1. Des del punt exterior P, trobarem dos punts en la recta r (C i D) que estiguen a la mateixa distància de P. Açò ho aconseguim amb el compàs, tallant la recta r en dos punts (els que vulguem, Figura 9.13).

2. Ara ja tenim un segment ($\overline{CD}$) del qual sabem que P, per construcció, estarà en la seua mediatriu. Construïm la mediatriu del segment $\overline{CD}$ (Figura 9.13)

9.2.6 Recta paral · lela a una altra recta

Per a construir la recta paral · lela a una altra donada farem ús del concepte d'**angles alterns interns**. Imaginem que volem construir la recta paral · lela a r que passa pel punt exterior P, seguirem aquests passos:



1. Dibuixarem una recta t que continga el punt P i que talle la recta r, de la manera que vulguem. Trobarem un punt de tall sobre la recta r, que anomenem T (Figura 9.15).

2. Entre les rectes r o t es formaran diversos angles. Amb el compàs, agafarem la mesura de l'angle α, format per la nova recta t i r. Portarem l'angle α sobre el punt exterior P, però fent que el nou angle siga **altern intern** (Figura 9.16). L'obertura de l'angle traslladat serà definida pel punt A.

3. El segment $\overline{PA}$ determinarà la recta s paral · lela a r (que passa per P), perquè els angles alterns interns marcats en la Figura 9.17 són iguals (α, perquè són alterns interns).

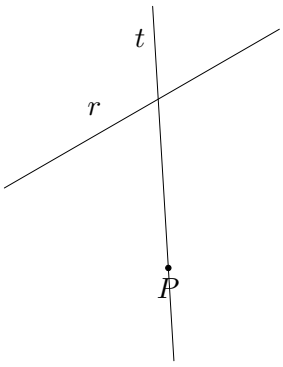


Figura 9.15. Pas 1

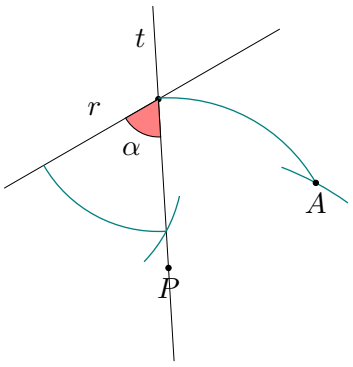


Figura 9.16. Pas 2

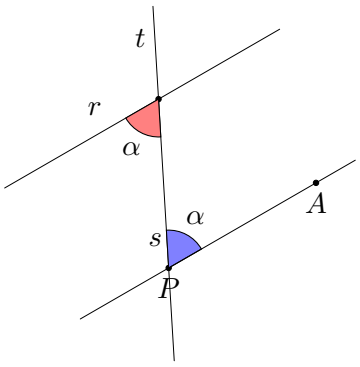


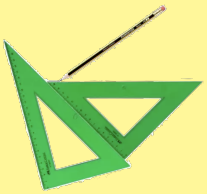
Figura 9.17. Pas 3

Activitat 9.11

Dibuixeu una recta r i un punt exterior a aquesta P. Trobeu la recta s paral · lela a r i que passa per P fent ús de la mediatriu.

Solució en pàg. 451

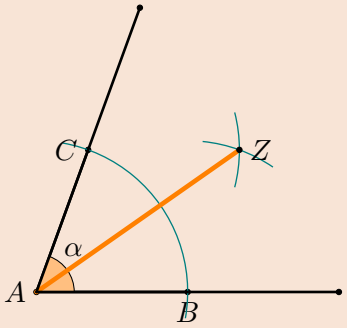
! La construcció de la recta paral · lela a una altra fent ús dels angles alterns interns justifica l'ús típic de l'esquadra i el cartabó per a fer línies paral · leles:



9.2.7 Bisectriu d'un angle

Bisectriu d'un angle

Donat un angle $\angle BAC$, la **bisectriu** és el lloc geomètric dels punts del pla que equidisten dels costats que formen l'angle. La bisectriu divideix un angle en dos angles iguals.



Per a fer la bisectriu d'un angle α qualsevol seguirem els passos següents:

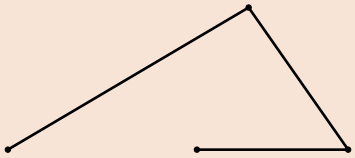
1. Des del vèrtex de l'angle α, anomenat A en la figura anterior, dibuixem un arc de circumferència i qualsevol radi. Així obtindrem dos punts sobre els costats de l'angle, corresponents als punts B i C en el dibuix anterior.
2. Tracem dos arcs de circumferència: un amb centre en B i radi major que $\overline{BC}/2$ i un altre amb centre en C i el mateix radi (ací realment estem fent la mediatriu del segment $\overline{BC}$). Trobarem així el punt Z, com s'indica en el dibuix anterior.
3. La semirecta que uneix el vèrtex A amb el punt Z és la bisectriu de l'angle α

9.3. Polígons

En aquesta secció estudiarem alguns elements generals dels polígons i després aprofundirem en els més comuns, els triangles i quadrilàters. Comencem definint-los a partir de les línies poligonals:

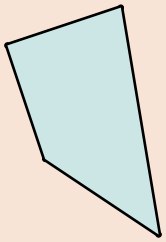
Línia poligonal

Anomenarem **línia poligonal** aquella forma plana que és formada per segments concatenats. Cada segment és un costat de la línia poligonal i els extrems comuns a dos costats s'anomenen vèrtexs. Les línies poligonals poden ser obertes o tancades, segons tinguen o no extrems lliures.



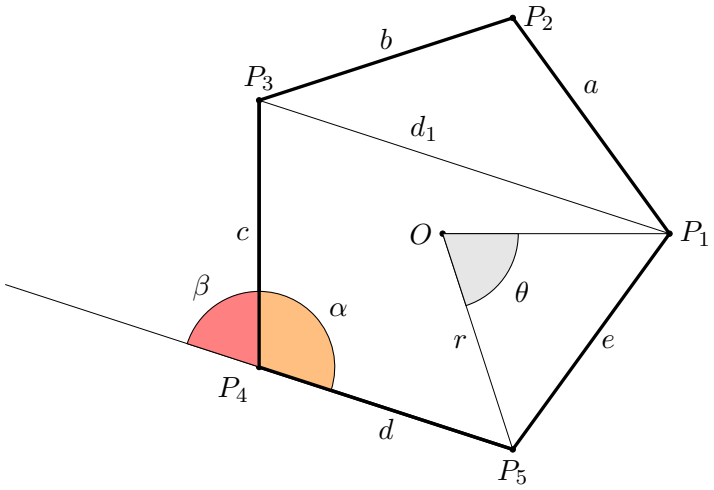
Polígon

Anomenarem **polígon** la porció del pla compresa dins d'una línia poligonal tancada. Els costats, vèrtexs i angles de la línia poligonal tancada que forma la vora del polígon són els costats, vèrtexs i angles del polígon.



Els polígons s'anomenen pel nombre de costats que tenen. Així, per exemple, un polígon amb 4 costats es diu quadrilàter, un amb 5 es diu pentàgon, amb 6 hexàgon, amb 7 heptàgon, etc.

Donat un polígon format pels punts $P_1, \dots, P_n$, podrem identificar-hi els elements següents:



- **Costats**: cada un dels segments que determinen el polígon $(a, b, c, d, e, \dots)$.
- **Vèrtexs**: els extrems comuns de dos costats $(P_1, \dots, P_n)$
- **Diagonals**: segments que uneixen dos vèrtexs no consecutius $(d_1, \dots)$
- **Angle interior** (α): aquell determinat per dos costats consecutius, i que queda dins del polígon.
- **Angle exterior** (β): aquell determinat per un costat i la prolongació d'un altre, i que queda fora del polígon.

- **Angle central** (θ): aquell determinat per dos radis que van a vèrtexs consecutius.

Classificació de polígons segons els angles interiors

Segons els seus angles interiors, un polígon pot classificar-se en:

- **Convex**, si tots els seus angles interiors són menors que un pla.
- **Còncau**, si algun dels angles interiors és major que un angle pla.

Exemple 9.9

L'hexàgon que mostrem en la Figura 9.18 és un polígon còncau, perquè té angles interiors majors a 180°.

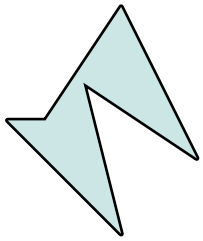


Figura 9.18. Hexàgon còncau no regular

Classificació de polígons segons els costats

Segons la regularitat dels seus elements, un polígon pot classificar-se en:

- **Equilàter**, si tots els costats són iguals.
- **Equiangle**, si tots els angles són iguals.
- **Regular**, si tots els angles i costats són iguals entre si (és equilàter i equiangle a la vegada).

Habitualment, en els **polígons regulars** podem identificar aquests elements característics:

- **Centre**: punt interior del polígon que equidista de tots els vèrtexs (marcat com a O en l'hexàgon regular de la Figura 9.19).
- **Radi**: segment que uneix el centre i un vèrtex (r en la Figura 9.19).
- **Apotema**: segment que uneix el centre amb el punt mitjà de cada costat (a en la Figura 9.19. L'apotema és perpendicular a cada costat.

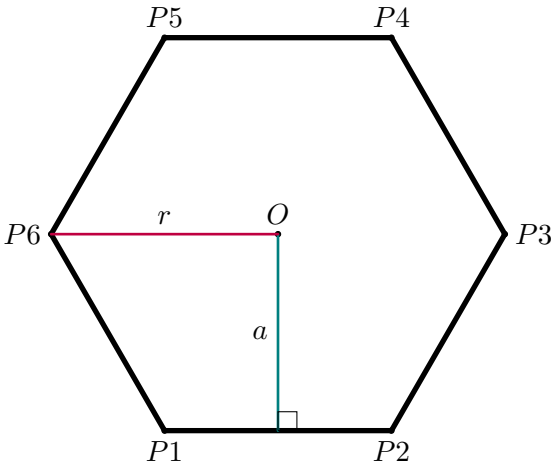


Figura 9.19. Hexàgon regular

Mesura dels angles en un polígon regular

Donat un polígon regular convex amb n costats, els seus angles compliran les següents propietats:

- La suma dels angles interns serà igual a $180° \cdot (n-2)$.
- Cada angle intern serà igual a $\dfrac{180° \cdot (n-2)}{n}$.
- L'angle central serà igual a $\dfrac{360°}{n}$.

! Les demostracions d'aquestes propietats anteriors les farem en **pràctiques**.

Activitat 9.12

Per als següents n-àgons regulars, doneu la mesura d'un angle interior i un angle central (activitat adaptada de Musser i cols., 2013).

a) 12-àgon
b) 16-àgon
c) decàgon (10-àgon)
d) icoàgon (20-àgon)

Solució en pàg. 451

Activitat 9.13

Donades les següents mesures d'un angle intern d'un polígon regular, determineu quants costats té cada un dels polígons (activitat agafada de Musser i cols., 2013).

a) 140°
b) 162°
c) 178º

Solució en pàg. 451

Activitat 9.14

Donades les mesures dels angles centrals de tres polígons regulars. Quants costats té cada un? (activitat agafada de Musser i cols., 2013).

a) 30° b) 72° c) 5°

Solució en pàg. 451

Activitat 9.15

Donades les mesures dels angles interns de tres polígons regulars. Quina és la mesura de l'angle central de cada un? (activitat agafada de Musser i cols., 2013).

a) 90° b) 176° c) 150º

Solució en pàg. 451

9.3.1 Triangles

A continuació dedicarem dues seccions a revisar les classificacions i els elements notables dels polígons més elementals: els triangles i els quadrilàters.

Triangle

Un **triangle** és un polígon format per tres costats.

Activitat 9.16

És possible construir un triangle que tinga els costats de 8 cm, 3 cm i 2 cm? Proveu de construir-lo amb regla i compàs. Quina és la condició necessària per a construir un triangle a partir de 3 costats?

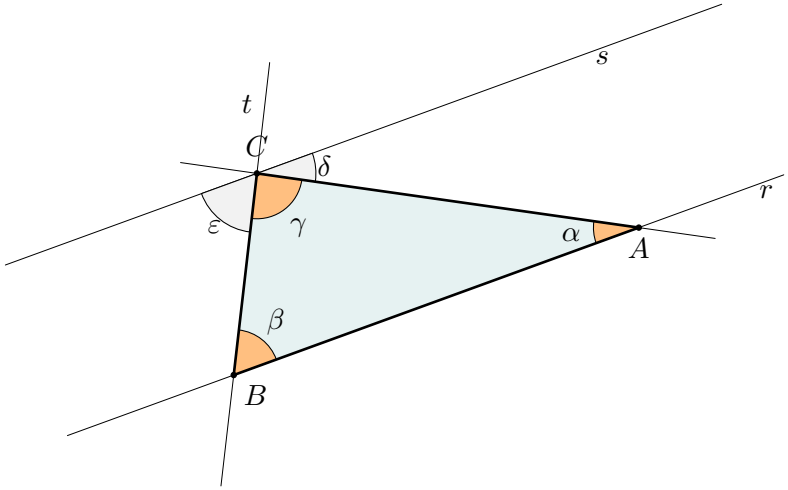
Solució en pàg. 451

Propietat de la suma d'angles interiors en un triangle

La **suma d'angles interiors en tot triangle** és igual a 180°.

Activitat 9.17

Demostreu la propietat anterior: **la suma dels angles d'un triangle és** 180°. Feu ús del concepte d'angles alterns interns (vegeu l'Exemple 9.7), i del següent dibuix, on $r \parallel s$, t és una recta transversal a r i s, el triangle és determinat pels punts A, B, C ($\widehat{ABC}$), α, β i γ són els angles interiors del triangle i δ, ε són angles auxiliars que necessitareu.



Solució en pàg. 452

Classificació de triangles segons els costats

Segons els costats, els triangles es poden classificar en:

- **Equilàter**: aquell triangle que té els tres costats iguals.
- **Isòsceles**: aquell triangle amb solament dos costats iguals.
- **Escalè**: triangle amb els tres costats diferents.

! Poseu atenció perquè habitualment en els llibres de text solen aparèixer classificacions **inclusives**, en què els triangles equilàters pertanyen també a la classe isòsceles; o **excloents**, en què un triangle és isòsceles només si té exactament dos costats iguals. La classificació que hem donat ací és excloent.

Activitat 9.18

Amb regla i compàs, construïu un triangle de cada tipus segons la classificació anterior. Dibuixeu prèviament els segments que usareu com a costats.

Classificació de triangles segons els angles

Segons els angles interns, els triangles es poden classificar en:

- **Acutangle**: aquell triangle que té els angles aguts ($< 90°$).
- **Rectangle**: si té un angle recte (de $90°$).
- **Obtusangle**: aquell triangle que té un angle obtús ($> 90°$).

Activitat 9.19

Ja sabem, certament, que un triangle pot ser equilàter, isòsceles, escalè, segons que els costats. Però, a més, un triangle també pot ser acutangle, rectangle, obtusangle, segons que els angles. Raoneu:

a) Un triangle pot ser acutangle i equilàter a la vegada?

b) Pot ser equilàter i rectangle?

c) I equilàter i obtusangle?

d) Pot ser rectangle i isòsceles?

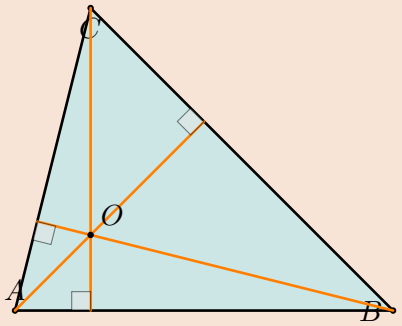
Sabríeu fer una classificació dels triangles que tinguera en compte els costats i els angles a la vegada? (Penseu en una taula de doble entrada o en un diagrama de Venn).

Elements notables del triangle

Altures d'un triangle i ortocentre

Les **altures** d'un triangle són els segments perpendiculars a cada costat que passen pel vèrtex oposat. Tot triangle té tres altures, que típicament dibuixarem com a segments, anomenats h_a, h_b i h_c (indicant els costats als quals són perpendiculars).

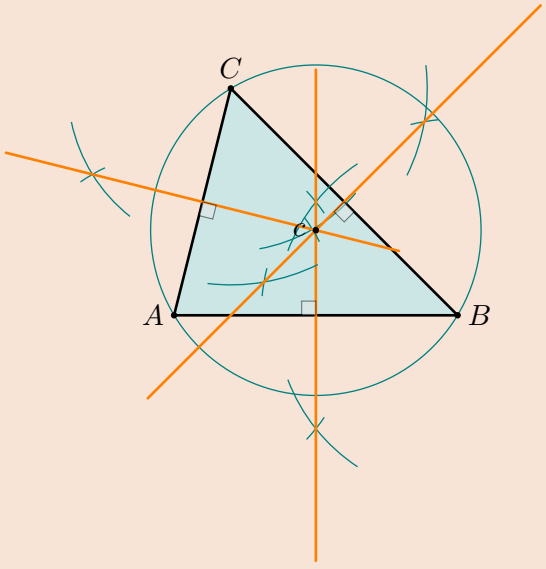
Les tres altures es tallen en un punt anomenat **ortocentre** (O).



Mediatrius d'un triangle i circumcentre

Les **mediatrius** d'un triangle són les rectes perpendiculars a cada costat traçades pel punt mitjà dels costats.

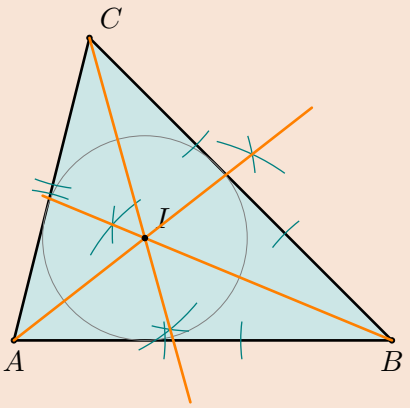
Les tres mediatrius d'un triangle es tallen en un punt anomenat **circumcentre** (c), que correspon al centre de la circumferència circumscrita al triangle.



Bisectrius d'un triangle i incentre

Les **bisectrius** són les semirectes que divideixen cada angle del triangle en dos angles iguals.

Les tres bisectrius d'un triangle es tallen en un punt anomenat **incentre** (I). És el centre de la circumferència inscrita en el triangle.



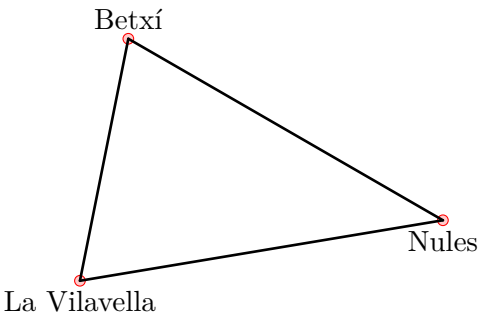
! Adoneu-vos que la circumferència circumscrita conté els vèrtexs del triangle com a punts de la circumferència. D'altra banda, la circumferència inscrita toca cada costat del triangle exactament en un punt (és *tangent* a cada costat del triangle).

Activitat 9.20



Les tres ciutats veïnes de la Vilavella, Betxí i Nules han decidit construir l'*Aeroport Independent de la Plana*. Això no obstant, cada població vol tenir la seguretat que els seus residents no han de conduir més que els residents de qualsevol altre poble per a arribar al nou aeroport (que serà molt millor que el de Castelló). Basant-vos en la posició dels pobles que es mostra ací, dibuixeu la ubicació que proposaríeu per al nou aeroport. Expliqueu com ho heu esbrinat i per què satisfarà el criteri de cada poble (activitat adaptada de Musser i cols., 2013).

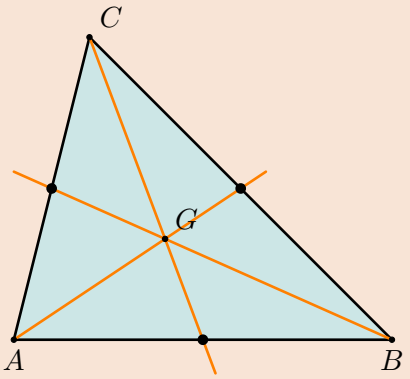
Activitat 9.21



Els ajuntaments de la Vilavella, Betxí i Nules han canviat de plans sobre el criteri per a situar el nou aeroport. El pla de construir l'aeroport equidistant de cada una de les ciutats exigiria la construcció de diverses carreteres noves. Com que ja hi ha carreteres entre cada parell de ciutats, com es mostra en el mapa, volen situar l'aeroport de manera que estiga a la mateixa distància de cada una de les tres carreteres. Trobeu la nova ubicació idònia per a l'aeroport explicant com heu arribat a la vostra proposta que satisfà el nou criteri dels ajuntaments (activitat adaptada de Musser i cols., 2013).

Mitjanes d'un triangle i baricentre

Les **mitjanes** d'un triangle són els segments que uneixen cada vèrtex amb el punt mitjà del costat oposat. Tot triangle té tres mitjanes.



Les tres mitjanes d'un triangle es tallen en un punt anomenat **baricentre**. És el centre de gravetat del triangle.

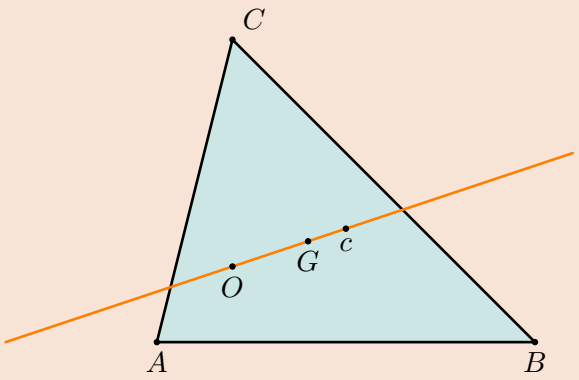
Fixeu-vos que per a calcular els elements notables de qualsevol triangle només cal fer ús dels conceptes que ja sabem:

- Mediatriu d'un segment per a calcular: punt mitjà del segment, recta perpendicular al segment i recta perpendicular al segment passant per un punt exterior a aquest.
- Bisectriu d'un angle.

Recta d'Euler

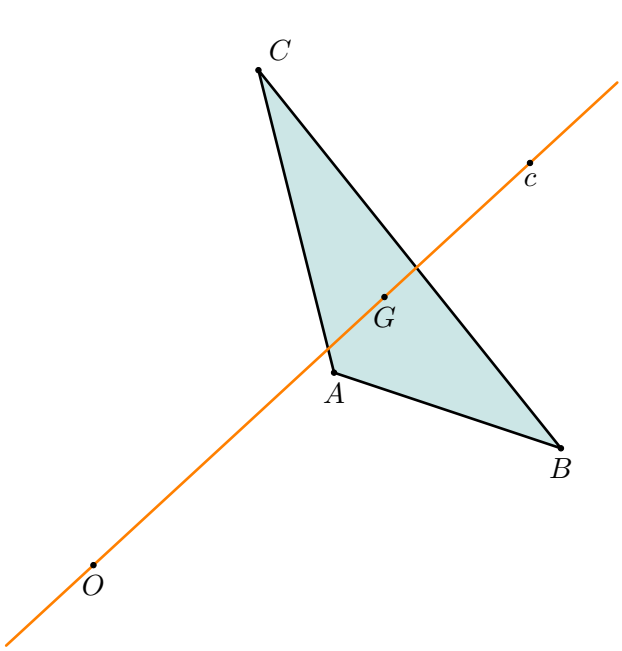
En tot triangle l'ortocentre (O), el baricentre (G) i el circumcentre (c) estan sempre alineats, aquesta recta és la **recta d'Euler**. A més, es compleix que:

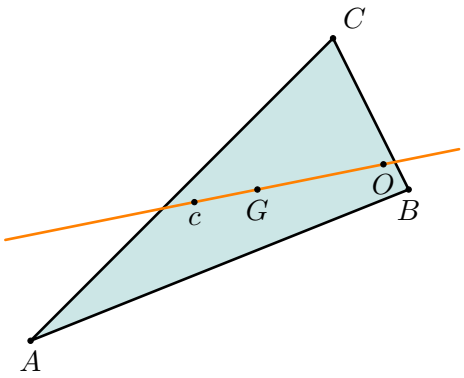
- El baricentre (G) és sempre entre l'ortocentre (O) i el circumcentre (c).
- La distància del baricentre (G) al circumcentre (c) és la meitat que la distància del baricentre (G) a l'ortocentre (O).



Exemple 9.10

A continuació, teniu dos exemples en els quals es pot comprovar com els punts O, G i c formen una recta, i la relació de distàncies compleix: $\overline{OG} = 2 \cdot \overline{Gc}$.





9.3.2 Quadrilàters

Quadrilàters

Un **quadrilàter** és un polígon determinat per una línia poligonal tancada de quatre segments. Té, per tant, quatre costats, quatre vèrtexs i quatre angles.

Classificació dels quadrilàters segons el paral · lelisme

Segons el paral · lelisme, els quadrilàters es divideixen en:

- **Paral · lelograms**: quadrilàters que tenen els costats oposats paral · lels dos a dos.
- **Trapezis**: quadrilàters que únicament tenen un parell de costats oposats paral · lels, anomenats *bases*.
- **Trapezoides**: quadrilàters que no tenen cap costat paral · lel.

Classificació dels quadrilàters segons els costats o angles

Segons els costats o angles, podem diferenciar els següents quadrilàters:

- **Quadrat**: quadrilàter que té tots els costats iguals i tots els angles iguals i rectes.
- **Rectangle**: quadrilàter que té els costats oposats iguals i tots els angles iguals (i rectes). Els costats oposats són d'igual longitud.
- **Rombe**: quadrilàter que té tots els costats iguals, però els angles no són iguals (són iguals 2 a 2). Els costats també són paral · lels 2 a 2.
- **Romboide**: quadrilàter que té els costats oposats iguals però no tots els angles iguals. Els costats oposats són paral · lels.
- **Trapezi isòsceles**: quadrilàter en el qual la longitud dels costats no paral · lels és igual. Els angles de les bases són iguals dos a dos.
- **Trapezi escalè**: quadrilàter en el qual les longituds dels costats no paral · lels són diferents[a].
- **Trapezoide**: quadrilàter que té tots els angles desiguals i els costats de longituds diferents.

[a] Quan en un trapezi escalè un dels costats no paral · lels és perpendicular a les bases s'anomena **trapezi rectangle**.

Activitat 9.22

Dibuixeu (o busqueu) un exemple de cada un dels quadrilàters que s'han descrit en la classificació segons els costats o angles. Penseu en quin tipus de quadrilàter és cada un segons la classificació basada en el paral · lelisme.



Igual que hem vist en la classificació dels triangles, amb els quadrilàters també podem considerar criteris excloents o incloents. Així, per exemple, considerant un criteri excloent, el quadrat no seria un cas particular de rectangle o del rombe. En l'assignatura continuarem amb un criteri excloent per a les classificacions.

Activitat 9.23

La suma dels angles d'un quadrat és de 360° perquè té quatre angles de 90°. Però, ocorrerà igual en el rombe? I en qualsevol quadrilàter? (Pista: en les pràctiques es veu la demostració).

Activitat 9.24

Feu un estudi de com són les diagonals en cada un dels tipus de paral · lelograms que hem estudiat (podeu restringir-ho al quadrat, rectangle, rombe i romboide). Per mitjà d'una taula com la que adjuntem, indiqueu si les diagonals són o no perpendiculars, si tenen o no la mateixa longitud i si es tallen o no en els punts mitjans.

	Diag. $\perp$	**Diag. = long.**	**Es tallen en punt mitjà**
Quadrat			
Rectangle			
Rombe			
Romboide			

Solució en pàg. 452

9.4. Moviments en el pla

Moviments en el pla: isometries

Un **moviment en el pla** és una transformació geomètrica que conserva tant els angles com les distàncies. És a dir, un moviment transforma una figura plana en una altra d'igual forma i grandària.

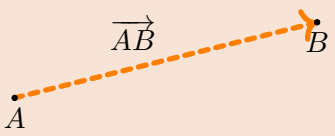
Els moviments en el pla també s'anomenen **isometries**, perquè conserven les mesures, i és un tipus de relació en què s'associa a cada punt P de la figura plana original un altre punt P' en la figura moguda, de manera unívoca.

Són moviments en el pla les **translacions**, els **girs** i les **simetries**.

Per a poder continuar estudiant els moviments necessitarem recordar, prèviament, el concepte de vector o segment orientat i les coordenades cartesianes.

Segment orientat o vector

Anomenarem **segment orientat** o **vector** a tot segment en el qual s'estableix un sentit privilegiat en la direcció que determina la recta que conté el segment. Farem ús de la nomenclatura $\overrightarrow{AB}$ per a indicar que el segment $\overline{AB}$ és un segment orientat, sent A l'origen i B el final. La longitud del segment s'anomena **mòdul**.



9.4.1 Translacions

Translació

Una **translació** implica un moviment en línia recta per una superfície. L'orientació de la forma no canvia, és a dir, sempre "mira cap a la mateixa direcció" (Figura 9.20).

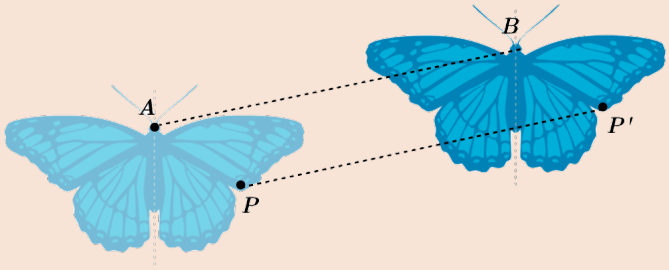


Figura 9.20. Exemple de translació

Des del punt de vista matemàtic, es diu translació de vector $\overrightarrow{AB}$ a una transformació que associa a cada punt P del pla un altre punt P' de manera que el vector $\overrightarrow{PP'}$ siga igual al vector $\overrightarrow{AB}$ (és a dir, paral · lel i amb el mateix mòdul).

Exemple 9.11

A continuació veurem com es traslladaria un punt en el pla fent ús d'una **recta paral · lela** i dels **angles alterns interns**, vistos anteriorment.

1. Partim del fet que volem traslladar el punt P segons el vector $\vec{v}$ (Figura 9.21).
2. Dibuixeu una recta t que talle el vector $\vec{v}$, de la manera que vulgueu. Trobarem un punt de tall sobre el vector (anomenem-lo T, Figura 9.22).
3. Amb el compàs, agafeu la mesura de l'angle α, format per la nova recta t i el vector $\vec{v}$ (Figura 9.23).

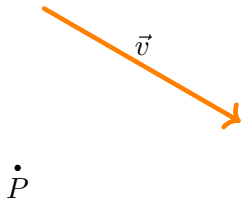


Figura 9.21. Pas 1

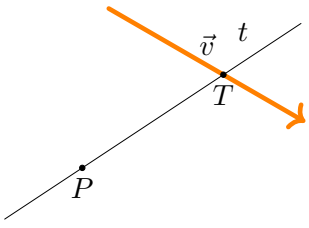


Figura 9.22. Pas 2

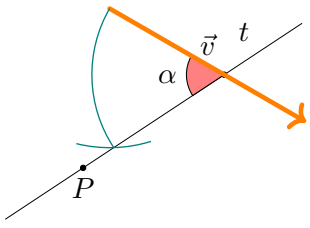


Figura 9.23. Pas 3

4. Construïu l'angle **altern invers** a α: amb origen en el punt que volem traslladar, P, porteu la mesura de l'angle α sobre el costat altern de la recta t. L'obertura de l'angle us la donarà el punt A (Figura 9.24).
5. Uniu P amb A i haureu construït la recta l (amb línia discontínua en la Figura 9.25) **paral · lela** a la recta que conté al vector $\vec{v}$.

6. La recta construïda és paral · lela, ja que heu obtingut l'angle altern invers α (pintat en blau en el dibuix de la Figura 9.26).

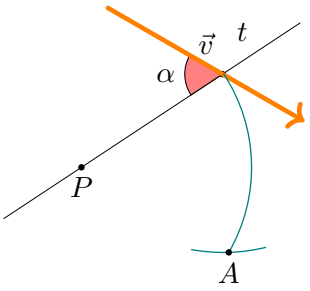


Figura 9.24. Pas 4

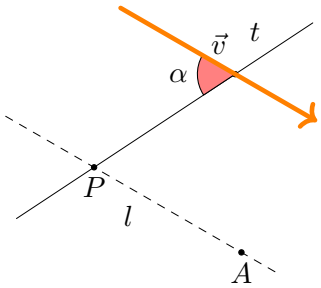


Figura 9.25. Pas 5

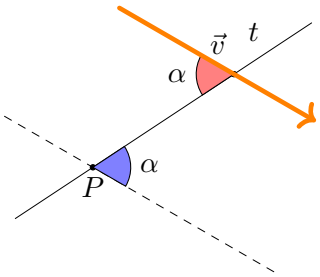


Figura 9.26. Pas 6

7. Una vegada tenim ja la recta $l \parallel \vec{v}$, només cal que agafem la distància associada al vector $\vec{v}$ (amb el compàs) i la transportem sobre el punt P en la direcció que ens indique el vector $\vec{v}$ (Figura 9.27).

8. D'aquesta manera, obtenim el punt P' (Figura 9.28), corresponent al punt traslladat de P segons el vector $\vec{v}$.

9. Fixeu-vos que el vector definit pel segment $\overline{PP'}$ és igual a $\vec{v}$ (Figura 9.29).

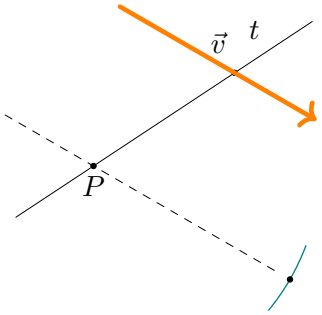


Figura 9.27. Pas 7

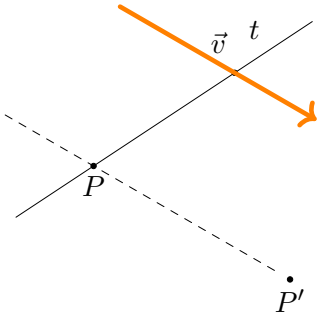


Figura 9.28. Pas 8

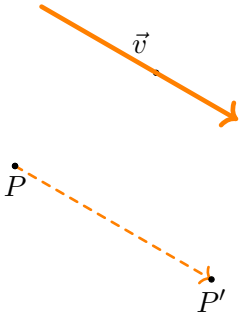


Figura 9.29. Pas 9

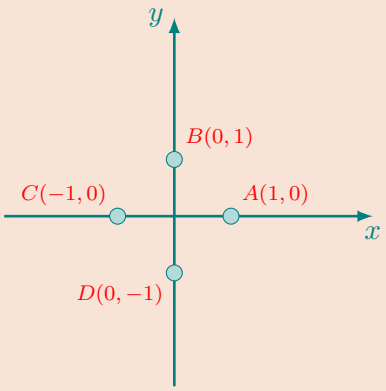
Sovint, com que ens és indiferent l'origen i final del segment orientat, els vectors s'anomenen simplement amb lletres minúscules i una petita fletxa, $\vec{v}$. L'única informació necessària és el sentit en què apunta el vector i el seu mòdul.

Per això, a vegades podem trobar la nomenclatura $\vec{v}(-1,3)$, que el que ens indica és un segment orientat amb origen $(0,0)$ i fi en el punt cartesià $(-1,3)$.

A continuació, recordarem breument les coordenades cartesianes, ja que com veurem, en el cas pràctic en què tenim una quadrícula, només cal que desplacem cada punt segons el vector que ens indiquen.

Coordenades cartesianes

Les **coordenades cartesianes** ens permeten localitzar en el pla qualsevol punt qualsevol mitjançant dos valors: un a l'eix X (o eix d'abscisses, que correspon al desplaçament horitzontal) i un altre valor a l'eix Y (o eix d'ordenades, que correspon al desplaçament vertical). Així, per exemple, podem localitzar els punts $A = (1,0), B = (0,1), C = (-1,0)$ o $D = (0,-1)$.



Habitualment s'usa de manera indistinta la nomenclatura $A = (1,0)$ o $A(1,0)$ per a referir-se al punt A amb coordenades $(1,0)$.

Activitat 9.25

Donat el punt $P = (-3,5)$, traslladeu-lo segons el vector $\vec{v}(3,1)$ amb regla i compàs.

Solució en pàg. 452

Activitat 9.26

Si traslladem el punt $P = (-2,4)$ segons el vector $\vec{v}$, obtenim el punt $P' = (4,1)$. Quin és el vector $\vec{v}$?

Solució en pàg. 452

Activitat 9.27

Si traslladem un punt Q segons el vector $\vec{v}(-2,1)$, obtenim el punt $Q' = (-5,0)$. Quin és el punt Q?

Solució en pàg. 452

Activitat 9.28

Quin és el resultat d'aplicar dues translacions consecutives a una figura plana? Raoneu la resposta i poseu un exemple partint de dues translacions seguides a un triangle i dos segments orientats corresponents a les dues translacions.

Solució en pàg. 452

Activitat 9.29

Dibuixeu el punt $A = (0,4)$, apliqueu-hi una translació de vector $\vec{v}(2,-4)$ per a obtenir el punt B, després apliqueu-hi una translació de vector $\vec{w}(-2,-4)$ per a obtenir el punt C, i finalment apliqueu-hi una translació de vector $\vec{x}(-2,4)$ per a obtenir el punt D.

a) Indiqueu les coordenades dels punts que heu obtingut.

b) Si obtenim A com una translació del punt D, quin és el vector $\vec{y}$ de translació?

c) De quin tipus és el polígon ABCD?

Solució en pàg. 452

Activitat 9.30

Realitzeu la translació de la figura formada pels punts A, B, C, D segons el vector $\vec{u}(-2, -2)$ indicat.

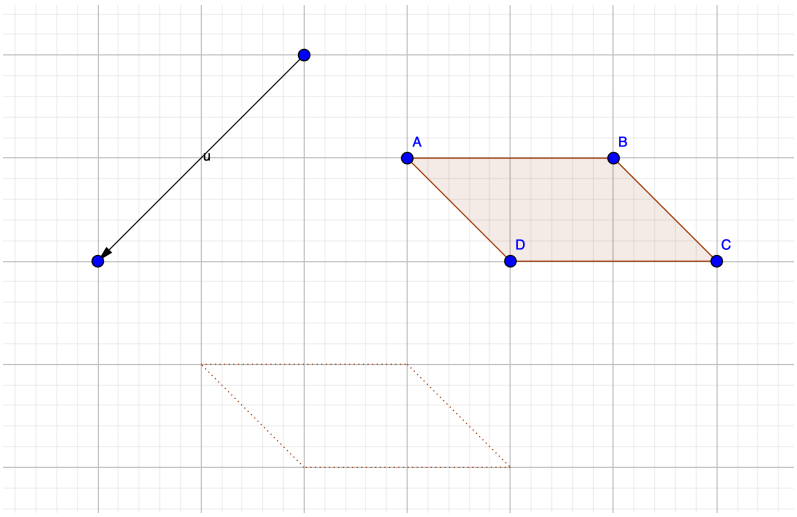


Figura 9.30. Transllladeu aquesta figura

Activitat 9.31

Realitzeu la translació de la figura formada pels punts A, B, C, D segons el vector $\vec{u}(0, -2)$ indicat.

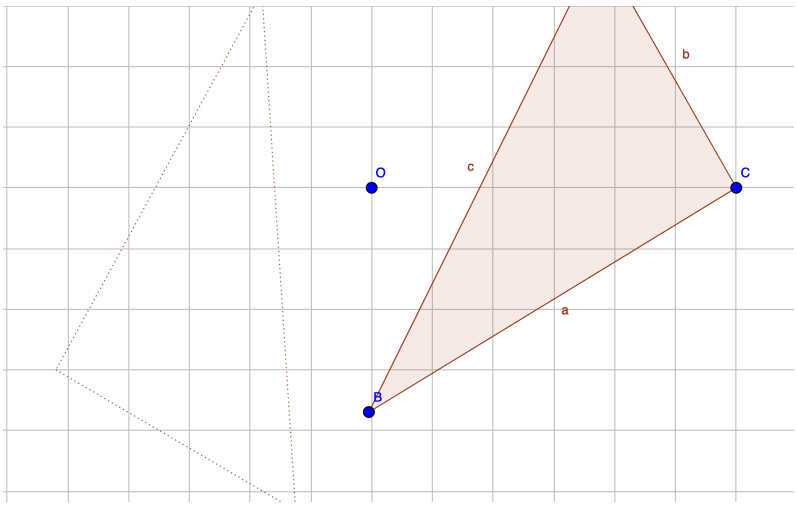


Figura 9.31. Transllladeu aquesta figura

9.4.2 Girs

Gir

Un **gir** o **rotació** implica el canvi d'orientació d'un objecte al voltant d'un punt. L'origen del gir (el punt al voltant del qual gira l'objecte) pot pertànyer al mateix objecte o estar fora de l'objecte (Figura 9.32).

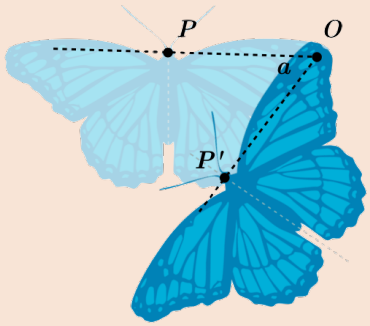


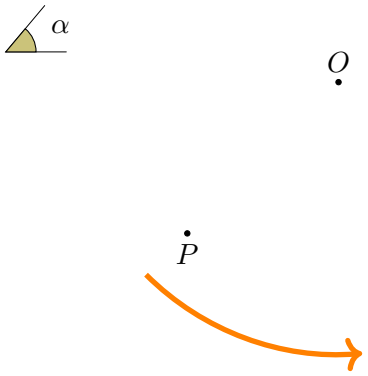
Figura 9.32. Exemple de rotació

Matemàticament, anomenem gir de centre O i angle a un moviment que fa correspondre a cada punt P un altre punt P', de tal manera que la distància de O a P és igual a la distància de O a P' i l'angle $\angle POP'$ és a.

Així, observem que per a ser capaços de fer un gir haurem de saber **copiar un angle** i **mesurar distàncies**. En l'Exemple 9.12, s'indica com es pot girar un punt P respecte a un angle donat. Com veurem, el punt es desplaçarà sobre una circumferència tants graus com ens indique l'angle de gir, en la direcció correcta (recordeu que els angles es mesuren per conveni en sentit antihorari). El centre d'aquesta circumferència serà l'origen del gir.

Exemple 9.12

Volem aplicar una rotació al P de $\alpha = 50°$ amb l'origen en el punt O. Cal que ens fixem en l'angle de gir, α, que caldrà copiar més avant per a completar el gir. Intuïtivament, la fletxa ens indica el moviment que farà el punt P.



1. Primerament, dibuixarem una circumferència amb origen O i radi el segment $\overline{OP}$, com s'indica en la Figura 9.33 (realment és suficient amb un arc de circumferència en la direcció del gir).

2. Sobre el segment $\overline{OP}$, copiem amb el compàs l'angle α en el sentit correcte (com que $\alpha > 0$, el sentit de gir és antihorari (Figura 9.34).

3. Finalment, el punt que busquem resulta de fer la intersecció entre la circumferència que hem dibuixat i el radi $\overline{PP'}$ (Figura 9.35). Noteu que la distància de O a P és igual a la distància de O a P' i l'angle $\angle POP'$ és igual a l'angle de gir α.

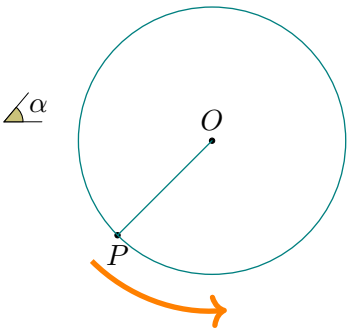


Figura 9.33. Pas 1

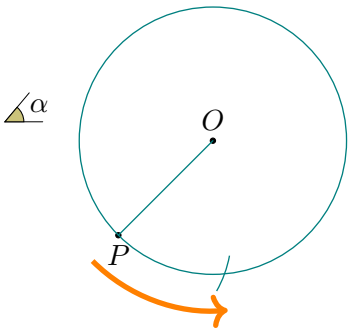


Figura 9.34. Pas 2

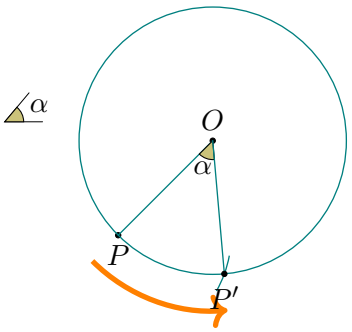


Figura 9.35. Pas 3

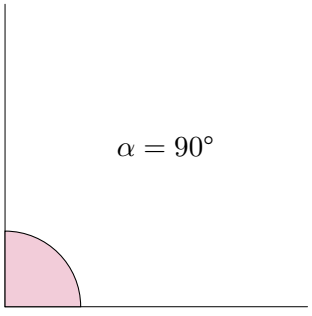
Activitat 9.32

En l'Activitat 9.28 hem vist que el resultat d'aplicar dues translacions consecutives és una altra translació. Ocorre el mateix amb els girs? És a dir, és igual aplicar dos girs consecutius que un gir només? Raoneu la resposta i poseu un exemple partint de dos girs consecutius a un triangle amb els angles que vulgueu.

Solució en pàg. 453

Activitat 9.33

Realitzeu el gir del triangle $\triangle ABC$ de la Figura 9.36 segons l'angle $\alpha = 90°$ en sentit anti-horari.



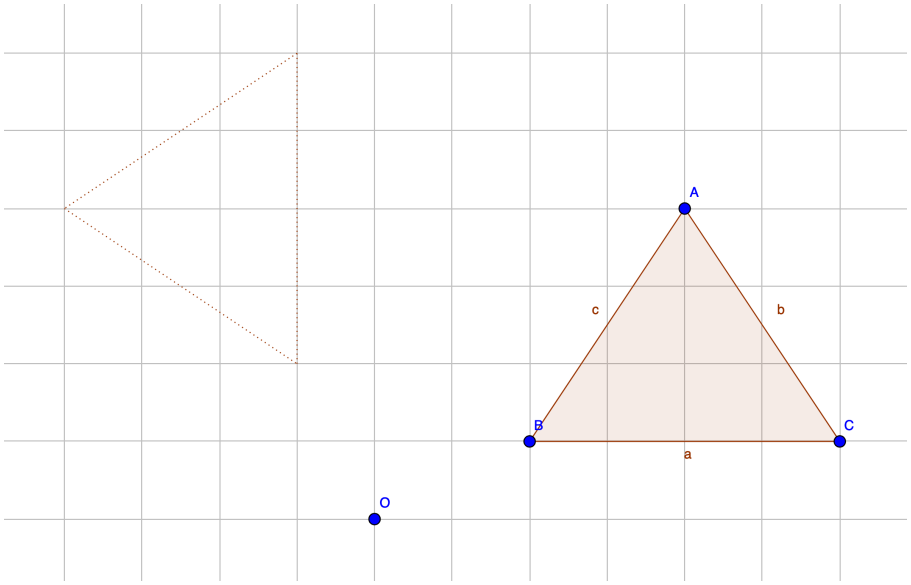
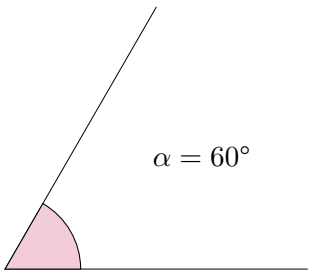


Figura 9.36. Feu un gir a aquest triangle

Activitat 9.34

Realitzeu el gir del triangle $\triangle ABC$ de la Figura 9.37 segons l'angle $\alpha = 60°$ en sentit horari.



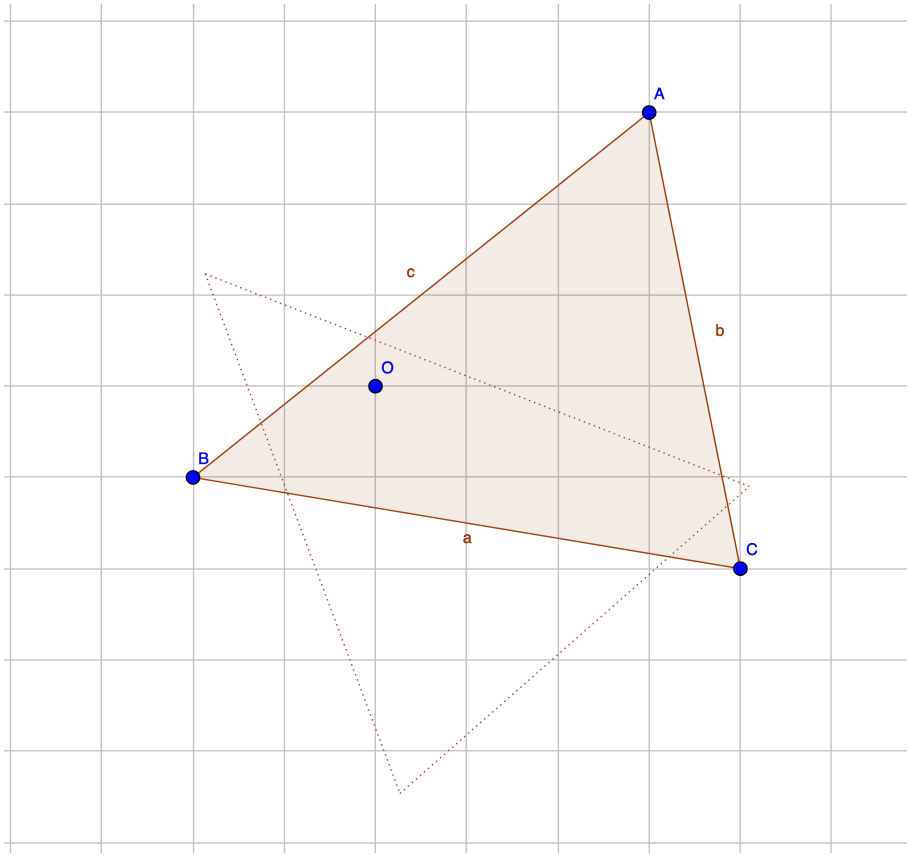


Figura 9.37. Feu un gir a aquest triangle

9.4.3 Simetries

Simetria axial

Una **simetria** (axial), **simetria respecte a un eix** o **reflexió** d'un objecte genera una imatge especular de l'objecte original (Figura 9.38).

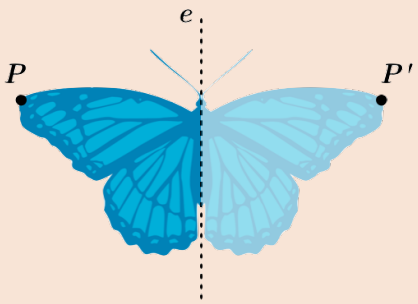


Figura 9.38. Exemple de simetria axial

En llenguatge matemàtic, una simetria axial d'eix e es correspon amb el moviment que transforma un punt P en un altre punt P' verificant:

a) El segment $\overline{PP'}$ és perpendicular a e, i.e., $\overline{PP'} \perp e$.

b) Els punts P i P' equidisten de l'eix e.

La recta e s'anomena **eix de simetria**. A més, l'eix de simetria e és la mediatriu del segment $\overline{PP'}$.

En la simetria axial es dona el mateix fenomen que en una imatge reflectida en l'espill. Ara bé, la simetria axial no implica que l'eix de simetria siga necessàriament extern, ja que hi ha moltes figures que són simètriques respecte a un o més eixos que queden dins de la figura plana en qüestió. En tot cas, si es doblegara la figura sobre un dels eixos de simetria, es podria observar amb tota claredat que els punts de les parts oposades coincideixen, és a dir, totes dues parts són congruents. Fixant-nos en la definició de simetria, queda prou clar que emprarem els conceptes de **recta perpendicular** i **equidistància** per a poder trobar la figura simètrica a una donada.

Exemple 9.13

Es demana trobar el punt simètric a P respecte a l'eix de simetria e:

1. Traçarem la recta l perpendicular a l'eix de simetria e, que passa pel punt que volem moure (Q, Figura 9.39).
2. Agafem amb el compàs la distància (d) sobre la recta l que hi ha des de la intersecció amb l'eix de simetria (I) fins al punt Q (Figura 9.40).
3. Portem la distància d (amb el compàs) a l'altre costat de l'eix de simetria (des del punt I) sobre la perpendicular que hem dibuixat per a trobar el punt simètric Q' (Figura 9.41).

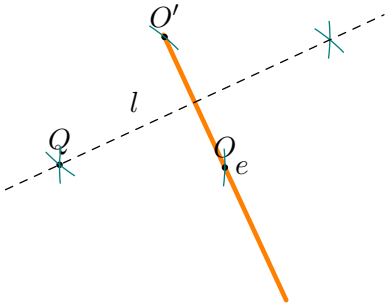


Figura 9.39. Pas 1

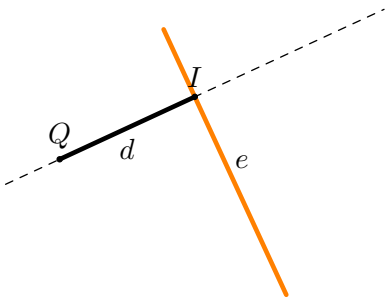


Figura 9.40. Pas 2

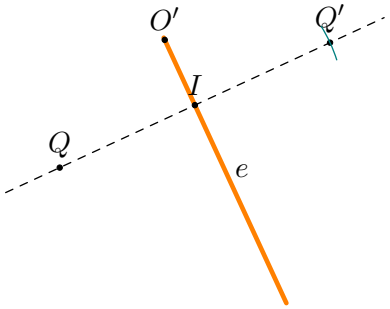


Figura 9.41. Pas 3

Activitat 9.35

Realitzeu amb regla i compàs la simetria del polígon format pels punts A, B, C, D segons l'eix e indicat.

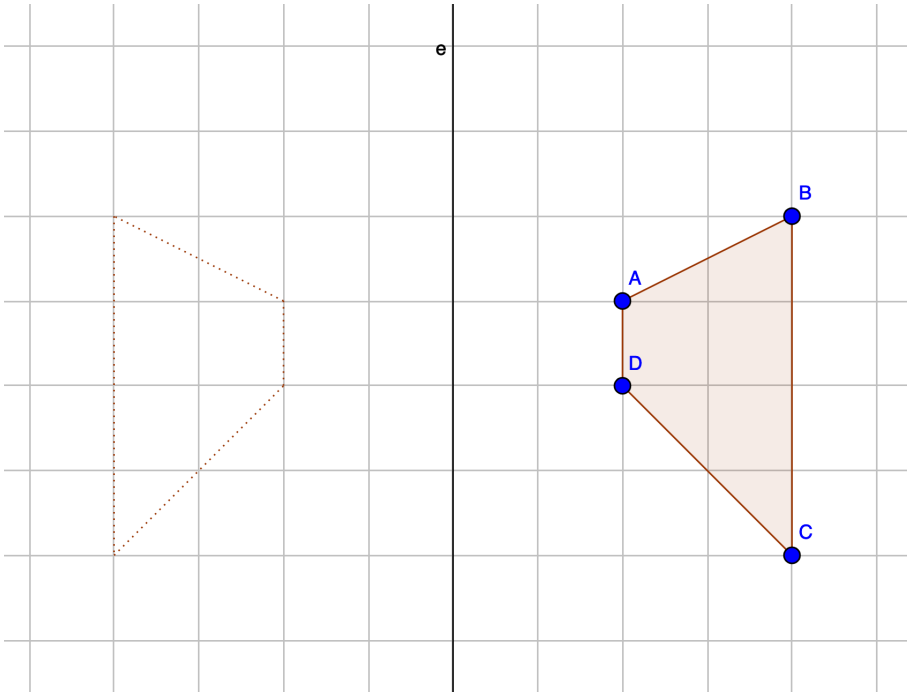


Figura 9.42. Feu la simetria indicada

Activitat 9.36

Realitzeu amb regla i compàs la simetria del polígon format pels punts A, B, C, D segons l'eix e indicat.

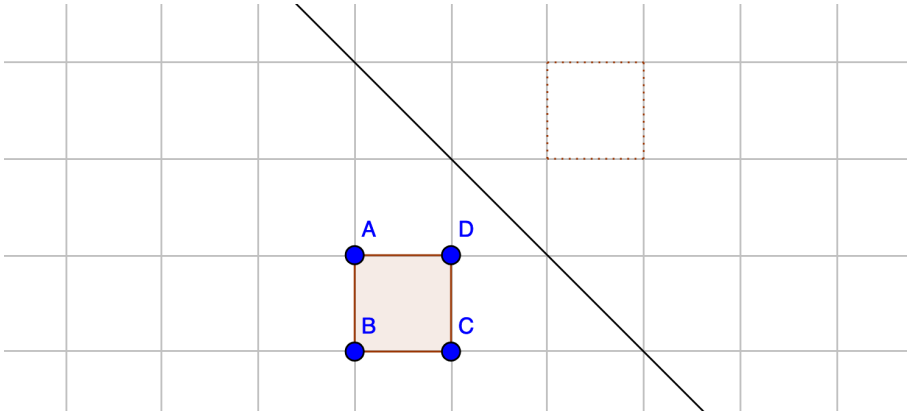


Figura 9.43. Feu la simetria indicada

Activitat 9.37

Realitzeu amb regla i compàs la simetria del polígon format pels punts A, B, C, D segons l'eix e indicat.

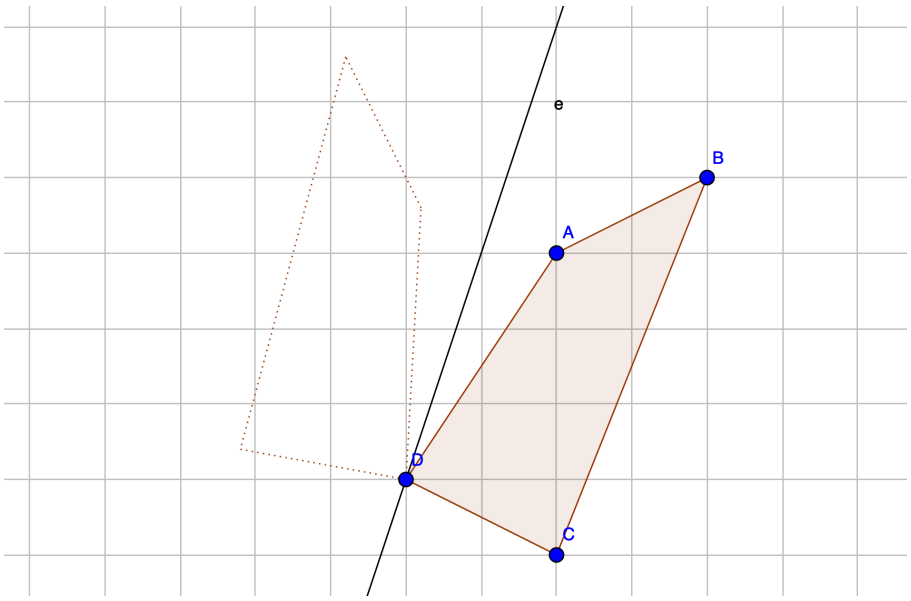


Figura 9.44. Feu la simetria indicada

Activitat 9.38

Dibuixeu la recta que passa pels punts $(-2, 2)$ i $(1, -1)$. Calculeu els simètrics dels següents punts respecte a aquesta recta:

a) $A = (-2, -2)$
b) $B = (4, 2)$
c) $C = (0, 1)$
d) $D = (-1, 0)$
e) $E = (3, -1)$
f) $F = (5, 0)$

Solució en pàg. 453

Activitat 9.39

Dibuixeu el polígon de vèrtexs $(-1, -3), (-3, -1), (-4, -2), (-5, -2)$.

a) Dibuixeu el seu simètric respecte a l'eix X i indiqueu les coordenades dels vèrtexs del nou polígon.

b) Dibuixeu el simètric del polígon obtingut en l'apartat anterior, respecte a l'eix Y i indiqueu les coordenades dels seus vèrtexs.

c) Dibuixeu el simètric del polígon original respecte a l'eix Y i indiqueu les coordenades dels seus vèrtexs.

Solució en pàg. 453

Activitat 9.40

Dibuixeu el triangle de vèrtexs $(-2, 4), (-3, -1), (-5, 0)$. Dibuixeu el seu simètric respecte a l'eix Y i indiqueu les coordenades dels seus vèrtexs.

Solució en pàg. 453

9.5. Mesura de figures planes: perímetre i àrea

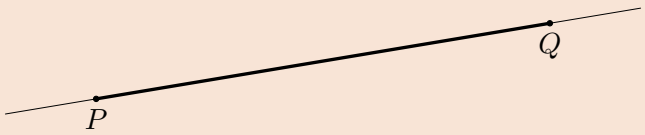
La paraula *geometria* significa en grec *mesura de la terra*. En aquesta secció ens centrarem en les diferents mesures que podem obtenir de figures planes i obtindrem les seues fórmules. Començarem definint la distància a una línia.

Distància a una línia

La distància entre el punt 0 i 1 a la recta numèrica l'anomenarem **unitat de distància**.



Donats dos punts d'una recta, P, Q, la **distància de P a Q** és el nombre real que s'obté de restar el valor numèric de P al valor numèric de Q. A més, la distància de P a Q és idèntica a la distància de Q a P.



Perímetre

El **perímetre** en un polígon és la suma de les longituds (distàncies) dels seus costats.

Activitat 9.41

Fixeu-vos en la Figura 9.45, és un quadrat i diferents rombes construïts deformant el quadrat inicial. Tenen el mateix perímetre totes les figures?

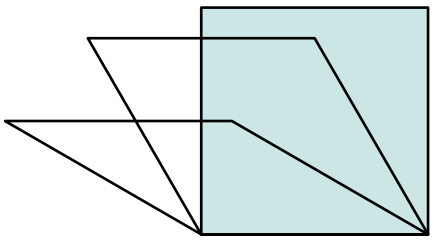


Figura 9.45. Quadrat i rombes

Solució en pàg. 453

El perímetre d'un cercle també pot ser calculat i té un nom especial: **circumferència**. Com ja sabem, en tota circumferència tenim la raó entre el diàmetre (d) i la seua longitud (L), que és constant. Aquesta constant s'anomena π, és a dir:

$$\pi = \frac{L}{d}$$

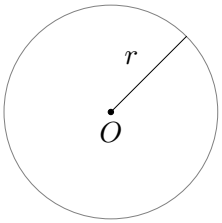


Figura 9.46. Circumferència de radi r

Com que el diàmetre (d) és equivalent a dues vegades el radi de la circumferència, ($d = 2 \cdot r$), tindrem que: $L = 2 \cdot \pi \cdot r$.

Longitud d'una circumferència

La **longitud L d'una circumferència** de radi r és igual a: $L = 2 \cdot \pi \cdot r$.

Àrea

L'**àrea** és la mesura de l'extensió d'una figura de dues dimensions, llarg i ample. Donat un quadrat d'una unitat de costat, la seua àrea és 1 unitat quadrada ($1\,u^2$). D'aquesta manera, el rectangle

Exemple 9.14

Així, per a determinar la mesura de l'àrea d'una figura plana caldrà determinar les *unitats quadrades* per les quals és format aquest cos. D'aquesta manera, el rectangle de la Figura 9.47 és format per 6 unitats quadrades.

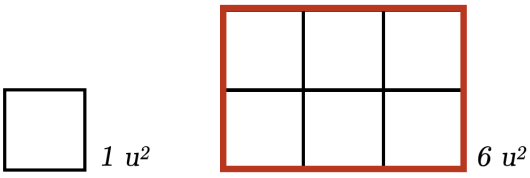
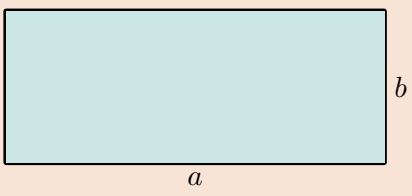


Figura 9.47. Àrea d'un rectangle a partir de les unitats d'un quadrat inicial

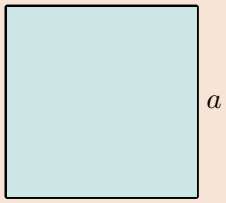
Àrea del rectangle

L'**àrea A d'un rectangle** de costats a i b la calcularem multiplicant les longituds dels costats perpendiculars. És a dir: $A = a \cdot b$.



Àrea del quadrat

A conseqüència de la definició anterior tindrem que l'**àrea A d'un quadrat** de costat a serà $A = a \cdot a = a^2$.



Activitat 9.42

Tornant a la Figura 9.45 de l'Activitat 9.41, es conserva l'àrea en passar del quadrat inicial als diferents rombes?

Solució en pàg. 453

Activitat 9.43

Construïu 3 rectangles o quadrats que tinguen la mateixa àrea però diferent perímetre.

Solució en pàg. 453

Activitat 9.44

Feu ús del dibuix de la Figura 9.48 per a obtenir la fórmula de l'àrea del triangle $\triangle ABC$ a partir de la del rectangle format pels vèrtexs A, B, C, D.

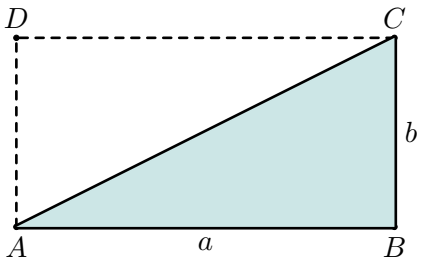


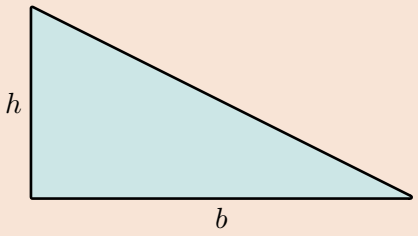
Figura 9.48. Triangle i rectangle

Solució en pàg. 453

Àrea del triangle

A conseqüència de l'Activitat 9.44 tindrem que l'**àrea A d'un triangle** de base b i altura h serà

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$



Activitat 9.45

La fórmula de l'àrea del triangle que acabem de deduir, serà vàlida per a tota classe de triangles? És a dir, és vàlida per al triangle de la Figura 9.49 de base b i altura h, per exemple? Raoneu i justifiqueu la resposta.

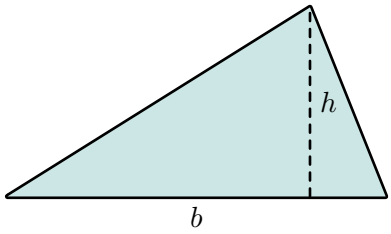


Figura 9.49. Quina és l'àrea d'aquest triangle?

Solució en pàg. 454

Àrea d'un paral · lelogram

Podem calcular l'**àrea A d'un paral · lelogram** a partir d'una de les seues diagonals, ja que queda dividit en dos triangles de la mateixa altura (h), com veiem en la Figura 9.51. Així, tindrem $A = b \cdot h$.

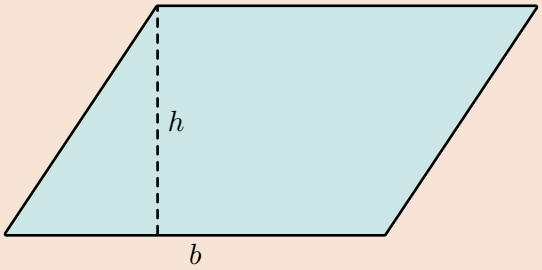


Figura 9.51. Paral · lelogram dividit en dos triangles

Activitat 9.46

Demostreu la fórmula de l'àrea d'un paral · lelogram a partir de la Figura 9.51 i de la fórmula de l'àrea dels triangles formats per una de les diagonals del paral · lelogram.

Solució en pàg. 454

Activitat 9.47

L'**àrea d'un rombe** es pot considerar també com el doble d'un triangle (Figura 9.54, perquè és un paral · lelogram), i per això la seua àrea és $b \cdot h$.

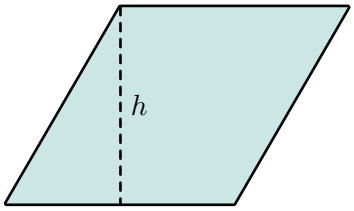


Figura 9.54. Rombe

No obstant això, sovint les mesures del rombe són determinades per les diagonals major (D) i menor (d). Amb l'ajuda de la Figura 9.55, demostreu que l'àrea del rombe també es pot expressar com a

$$A = \frac{D \cdot d}{2}$$

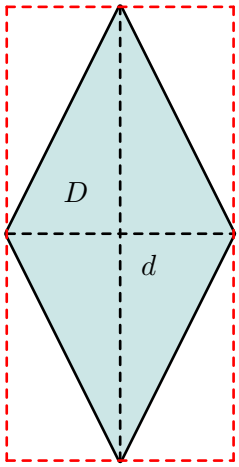


Figura 9.55. Rombe i diagonals

Solució en pàg. 455

Activitat 9.48

Demostreu que l'**àrea A d'un trapezoide** de costats paral · lels a i b i altura h és:

$$A = \frac{1}{2} \cdot (a + b) \cdot h$$

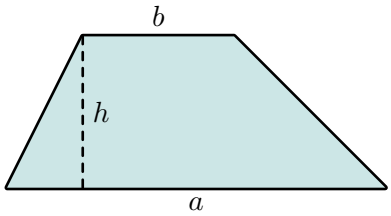


Figura 9.56. Trapezoide

Solució en pàg. 455

Àrea d'un cercle

L'**àrea** A **d'un cercle** tancat per una circumferència de radi r es defineix com a

$$A = \pi \cdot r^2$$

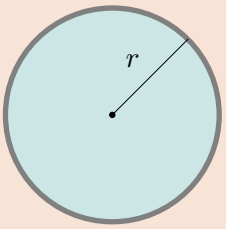


Figura 9.57. Cercle i circumferència de radi r

9.6. Teorema de Pitàgores

El *teorema de Pitàgores* relaciona les longituds dels costats d'un triangle rectangle (Figura 9.58). Si recordem, en un triangle rectangle anomenem:

- *Hipotenusa* (h) el costat major del triangle rectangle, el costat oposat a l'angle recte.
- *Catets* els dos costats menors (a, b) que conformen l'angle recte (α).

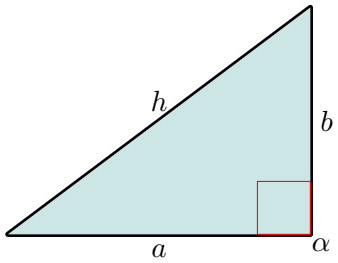


Figura 9.58. Triangle rectangle

Teorema de Pitàgores

Donat un triangle rectangle, de catets a, b i hipotenusa h, el **teorema de Pitàgores** afirma que:

$$h^2 = a^2 + b^2$$

Així, l'aplicació del teorema de Pitàgores ens pot servir per a:

a) Determinar la longitud de la hipotenusa (h) d'un triangle rectangle si en sabem la longitud dels catets (a, b), i a l'inrevés.

b) Descobrir la longitud d'un catet si sabem la longitud de l'altre catet i de la hipotenusa.

c) Aclarir si un triangle de costats donats és o no és rectangle.

Tot i que no farem una prova formal del teorema de Pitàgores, en l'Activitat 9.49 es donen algunes idees per a visualitzar-ne la demostració.

Activitat 9.49

Dibuixeu en un paper quadriculat dos quadrats iguals i descomponeu-los de la manera següent:

a) El primer en dos rectangles iguals i en dos quadrats, tal com s'indica en la Figura 9.59.

b) L'altre quadrat, descomponeu-lo en quatre triangles rectangles iguals (els catets de cada triangle han de tenir les longituds de les dimensions del rectangle de la figura precedent) i en un quadrat, com en la Figura 9.60.

Fixeu-vos bé en els dos rectangles blancs de la Figura 9.59 i en els quatre triangles blancs de la Figura 9.60. Què s'hi descobreix? (activitat basada en Castelnuovo, 1981).

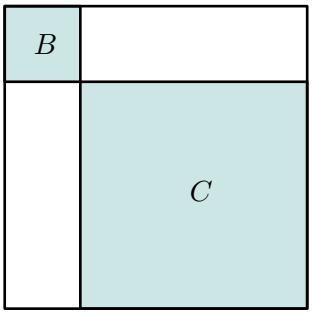


Figura 9.59. Primer quadrat

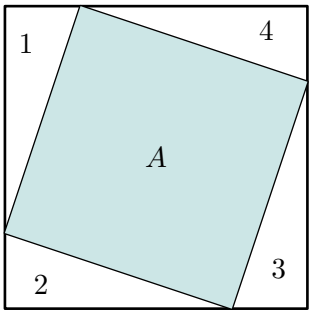


Figura 9.60. Segon quadrat

Solució en pàg. 455

Tal com es posa de manifest en l'Activitat 9.49, el teorema de Pitàgores estableix la següent relació entre les àrees dels quadrats construïts sobre un triangle rectangle (Figura 9.63):

En un triangle rectangle, l'àrea del quadrat construït sobre la hipotenusa és igual a la suma de les àrees dels quadrats construïts sobre els catets.

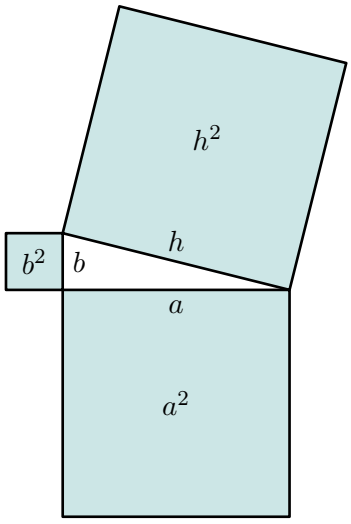


Figura 9.63. Demostració visual del teorema de Pitàgores

Activitat 9.50

Intenteu donar una demostració algebraica del teorema de Pitàgores. Partiu del quadrat que hi ha en la Figura 9.64 calculant l'àrea del quadrat de costat $a+b$ a partir de l'àrea dels triangles $1, 2, 3, 4$ i de l'àrea del quadrat central de costat h. Feu ús de la igualtat d'àrees que hem vist en l'Activitat 9.49.

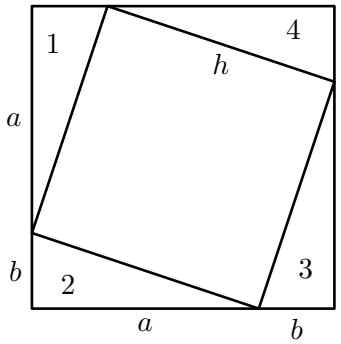


Figura 9.64. Quadrat de costat $a+b$ amb quadrat de costat h

Solució en pàg. 456

9.7. Semblança i Teorema de Tales

"Quan el sol apuntava per l'horitzó, Tales es va alçar i va observar la seua pròpia ombra projectar-se en direcció oest; va pensar que, siga quina siga la grandària d'un objecte, sempre existirà una il · luminació que el faça semblar gran. Durant una bona estona va romandre dret, immòbil, amb els ulls fixos en l'ombra que projectava el seu cos en terra. La va veure disminuir a mesura que el sol s'anava elevant en el cel.
Es va prometre a si mateix: «Ja que la meua mà no pot mesurar la piràmide, la mesuraré amb el pensament.» Tales va mirar la piràmide amb insistència durant molta estona; havia de trobar un aliat que fora de la talla del seu adversari. Diverses vegades la seua mirada es va desplaçar del seu cos a la seua ombra i viceversa, i després a la piràmide. Per fi va alçar els ulls, mentre el sol llançava els seus rajos terribles. Tales acabava de trobar al seu aliat!"

Extret d'*El teorema del lloro*, Guedj (2000).

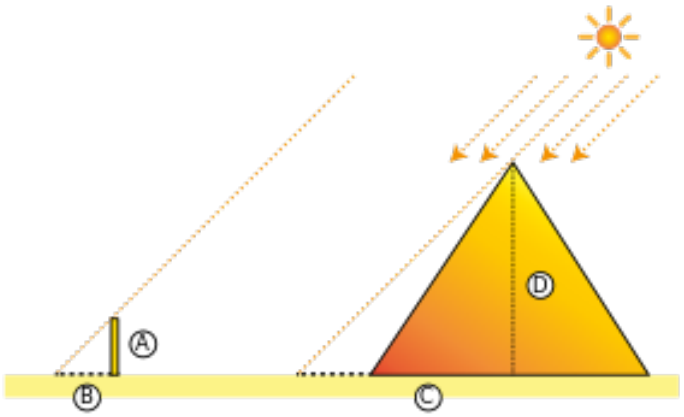


Figura 9.65. Representació de la situació que va permetre a Tales mesurar l'altura d'una piràmide

Tales de Milet (625-546 aC) és el pare de la geometria deductiva. Com acabem de llegir, explica la història que Tales va idear el que seria el seu famós teorema en un viatge a Egipte en el qual es va topar amb la incommensurabilitat de les piràmides. Semblava una empresa impossible, però veient les variacions de l'ombra al llarg del dia va pensar que hi hauria un moment en què la longitud de la seua ombra seria la mateixa que la seua pròpia alçada, i aquest raonament és el que va derivar en el seu conegut teorema.

Teorema de Tales

Si en un triangle $\triangle ABC$ tracem una paral · lela al costat $\overline{BC}$, tal com veiem en la Figura 9.66, trobant els punts B' i C', es compleix la relació:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AB'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AC'}}$$

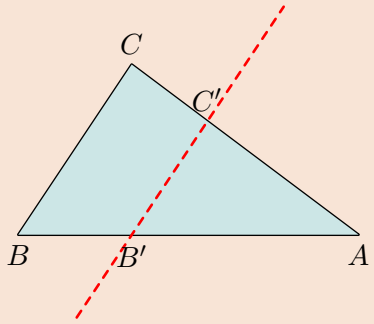


Figura 9.66. Triangle $\triangle ABC$ al qual li hem traçat una paral · lela al costat $\overline{BC}$

Activitat 9.51

Esbrineu com s'aplica la relació del teorema de Tales a la situació entre la piràmide i el mateix Tales, que el va portar a poder mesurar l'altura de la piràmide.

Solució en pàg. 457

Polígons semblants

Dos polígons són **semblants** si els angles corresponents són iguals i els costats corresponents són proporcionals.

Triangles semblants

Dos triangles en posició de Tales[a] són **triangles semblants**.

[a] Direm que dos triangles estan en posició de Tales si apareixen com en la Figura 9.66; és a dir: dos costats dels dos triangles són en les mateixes semirectes d'origen comú o prolongacions i el tercer costat d'un triangle és paral · lel al tercer costat de l'altre triangle.

> **!** La relació establida en el teorema de Tales no és única, i per això es poden establir diverses proporcions entre els costats dels triangles. A més, també són vàlides els seus equivalents, obtinguts en invertir els segments d'un dels extrems oposats.

Exemple 9.15

Resoldrem el problema següent fent ús del teorema de Tales i de la semblança de triangles: *Un mur projecta una ombra de* $2'51\,m$ *al mateix temps que una vara d'*$1'1\,m$ *projecta una ombra de* $0'92\,m$*. Calculeu l'altura del mur.*

En aquest cas, com en el càlcul de l'altura de la piràmide, els rajos de sol ens donen els costats paral · lels dels triangles. Podem fer un dibuix amb els triangles separats, tot i que són semblants, ja que tenen els mateixos angles i costat proporcionals:

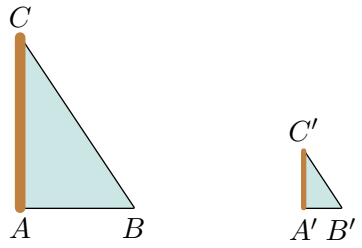


Figura 9.68. Triangles semblants

Fent ús del teorema de Tales tenim que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} \Longrightarrow \frac{2'51}{0'92} = \frac{\overline{AC}}{1'1} \Longrightarrow \overline{AC} = 3'00\,m$$

Per tant, el mur mesura vora $3\,m$ d'altura.

Exemple 9.16

Fem una altra activitat típica en la qual s'usa el teorema de Tales: *Un observador, el qual té una altura dels ulls a terra d'*$1'65\,m$*, veu reflectida en un espill la part més alta d'un edifici. L'espill es troba a* $2'06\,m$ *dels seus peus i a* $5\,m$ *de l'edifici. Calculeu l'altura de l'edifici.*

En aquest cas podem fer ús de les propietats de l'espill per a reflectir l'edifici, ja que l'angle d'incidència i el de reflexió són iguals (marcats en la Figura 9.69) i, per tant, tots dos triangles són semblants.

Fent ús del teorema de Tales tenim que:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} \Longrightarrow \frac{5}{2'06} = \frac{\overline{AB}}{1'65} \Longrightarrow \overline{AB} = 4'00\,m$$

Per tant, l'edifici mesura vora $4\,m$ d'altura.

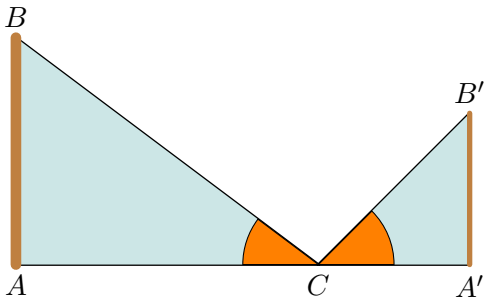


Figura 9.69. Triangles semblants per mitjà de les propietats de reflexió de l'espill

Activitat 9.52

El text d'un full ocupa $15\,cm \times 24\,cm$. Quant ocuparà si es fa una fotocòpia al 120%?

Solució en pàg. 457

Activitat 9.53

Marina fa $1'5\,m$ d'alçada i produeix una ombra d'$1'8\,m$ de longitud. Al mateix temps, la longitud de l'ombra produïda per un arbre és de $6\,m$, quina és l'altura de l'arbre?

Solució en pàg. 457

Activitat 9.54

Alex veu reflectida en un estany la imatge d'un colom que es troba a la cornisa d'un edifici. Segons les dades que s'indiquen en la Figura 9.70, quina és l'altura de l'edifici?

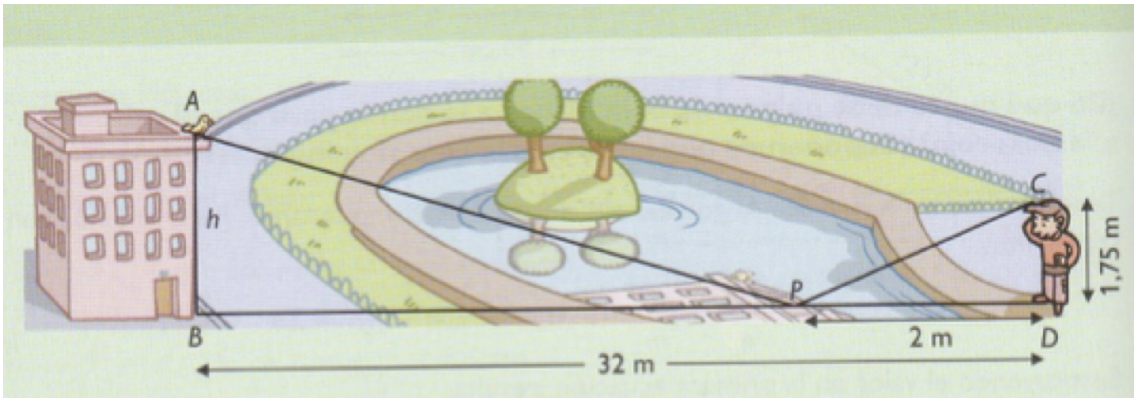


Figura 9.70. Un estany com a espill

Solució en pàg. 457

Activitat 9.55

Segons les mesures que s'indiquen en la Figura 9.71, quina és l'amplària del llac?

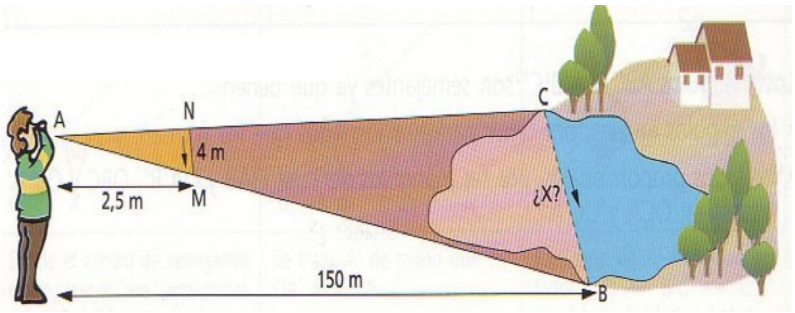


Figura 9.71. Determinem l'amplària per mitjà de triangles semblants

Solució en pàg. 457

Activitat 9.56

Segons les mesures que s'indiquen en la Figura 9.72, quina és la distància a l'arbre?

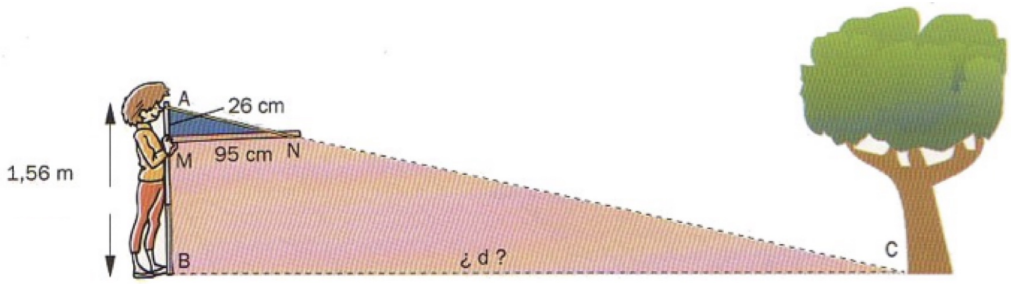


Figura 9.72. Determinem la distància amb instruments de mesura

Solució en pàg. 457

Activitat 9.57

Quins dels polígons de la Figura 9.73 són semblants?

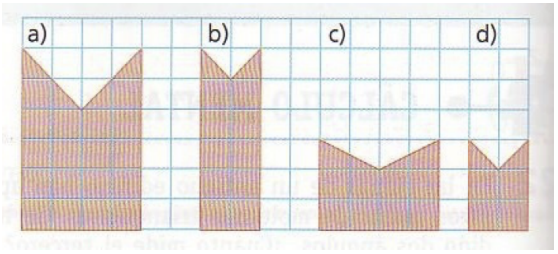


Figura 9.73. Quins són semblants?

Solució en pàg. 458

Activitat 9.58

Segons les mesures que s'indiquen en la Figura 9.74, quina és la distància al vaixell?

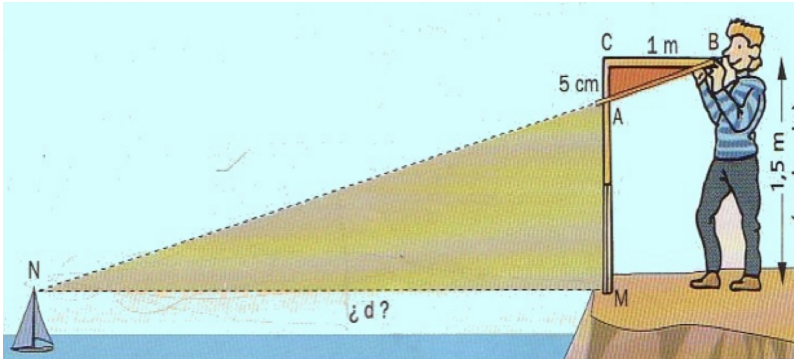


Figura 9.74. Determinem la distància amb instruments de mesura

Solució en pàg. 458

Activitat 9.59

Segons les mesures que s'indiquen en la Figura 9.75, i sabent que Mateu és a $3\,m$ de la vora del riu, quina és l'amplària del riu?

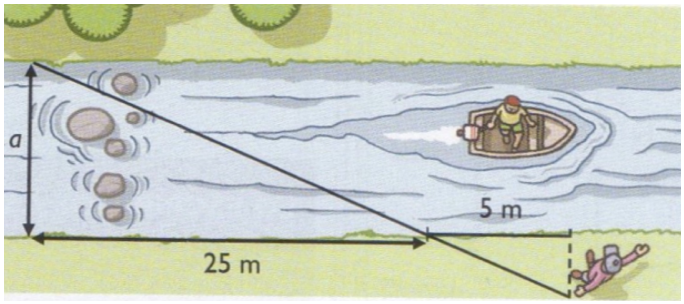


Figura 9.75. Determinem l'amplària del diu

Solució en pàg. 458

Activitat 9.60

Dos triangles rectangles tenen un angle agut que mesura 50°. Són semblants?

Solució en pàg. 458

Activitat 9.61

Dibuixeu dos triangles isòsceles en què l'angle diferent mesure en cada un 40°. Es pot afirmar que són triangles semblants?

Solució en pàg. 458

Exemple 9.17

El teorema de Tales també ens serveix per a dividir un segment AB en parts iguals:

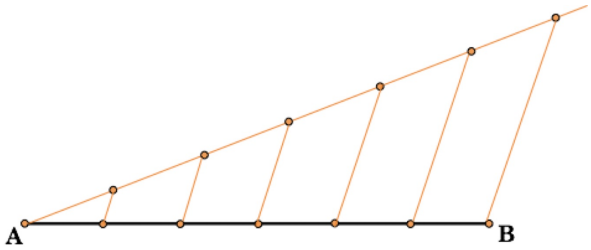


Figura 9.76. Dividim un segment en parts iguals

1. Es dibuixa una semirecta d'origen l'extrem A del segment, en taronja en la Figura 9.76.
2. Prenent com a unitat qualsevol mesura, s'assenyalen en la semirecta tantes unitats de mesura com vulguem a partir de A (6 en aquest cas).
3. Unim l'extrem B amb l'última divisió sobre la semirecta.
4. Per cada una de les divisions de la semirecta es tracen rectes paral · leles al segment anterior.
5. Els punts obtinguts en el segment AB determinen parts iguals.

9.8. Activitats complementàries del tema

Activitat 9.62

Relacioneu segons corresponga:

a) No té principi ni fi	i) Semirecta
b) Té origen però no té fi	ii) Segment
c) Té origen i fi	iii) Recta

Solució en pàg. 458

Activitat 9.63

Completeu:

a) Un punt situat sobre una recta la divideix en dues _____

b) La part d'una recta compresa entre dos punts es diu _____

c) Quan dues rectes no es creuen encara que es prolonguen són _____

d) Les semirectes que delimiten un angle es diuen _____

e) El punt origen de les semirectes que delimiten un angle es diu _____

Solució en pàg. 458

Activitat 9.64

Completeu amb les següents paraules: *origen - perpendiculars - major - punts - costats - dues - iguals - fi - tallen - vèrtex - principi - desiguals - direcció - menor - recta.*

a) La línia recta hi té tots els seus _____. No té _____ ni fi.

b) Una semirecta comença en un punt anomenat _____ i no té _____.

c) Un segment és un tros de _____ comprès entre _____ punts o extrems.

d) Rectes paral·leles són les que mai es _____ encara que es prolonguen.

e) Rectes perpendiculars són les que es tallen formant regions _____.

f) Rectes obliqües són les que es tallen formant regions _____.

g) Els elements d'un angle són el _____ i els _____.

h) L'angle recte és el que té els costats _____.

i) Un angle agut és _____ que un angle recte.

j) Un angle obtús és_____ que un angle recte

Solució en pàg. 459

Activitat 9.65

Indiqueu si són correctes o no les següents frases i per què:

a) Un angle pla té major amplitud que un angle obtús.

b) Les rectes perpendiculars són aquelles que en tallar-se formen quatre angles diferents.

c) Un angle i el seu oposat pel vèrtex són suplementaris.

d) Un angle recte té a vegades menor amplitud que un angle obtús.

e) Un segment és un tros de recta limitat per dos punts.

f) Dues rectes són paral·leles quan es tallen entre si.

g) Els costats d'un angle recte són perpendiculars.

h) Un angle obtús té major mesura que el seu suplementari.

i) La diferència entre les mesures del suplementari i el complementari d'un angle és igual a 90°.

j) Les bisectrius d'un parell d'angles oposats pel vèrtex formen un angle pla.

Solució en pàg. 459

Activitat 9.66

Dibuixeu amb regla i compàs:

a) Dues rectes que es tallen formant quatre angles iguals.

b) Una recta que no siga ni vertical ni horitzontal.

c) Un angle que no siga ni agut ni obtús.

d) Dues rectes que no tinguen cap punt en comú.

e) Dos segments tals que un siga la meitat que l'altre.

Activitat 9.67

Indiqueu si són correctes o no les següents frases i per què:

a) En un triangle rectangle l'ortocentre és el punt mitjà de la hipotenusa.

b) Tots els triangles són polígons convexos.

c) La suma dels angles d'un paral · lelogram és 360°.

d) Un rombe és un polígon regular.

e) Un hexàgon regular no és un paral · lelogram.

f) En qualsevol quadrilàter les diagonals són perpendiculars.

g) El baricentre és sempre un punt interior al triangle.

h) El punt que ÉS a la mateixa distància dels tres vèrtexs del triangle es diu incentre.

i) Si els angles d'un triangle són α, β i γ, podem construir un altre triangle els angles del qual siguen $\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}$ i $\frac{\gamma}{2}$.

Solució en pàg. 460

Activitat 9.68

Donat el punt $P = (3, 4)$, traslladeu-lo segons el vector $\vec{v}(-1, 0)$ amb regla i compàs.

Solució en pàg. 460

Activitat 9.69

Si traslladem el punt $P = (-2, 4)$ segons el vector $\vec{v}$, obtenim el punt $P' = (0, 0)$. Quin és el vector $\vec{v}$?

Solució en pàg. 460

Activitat 9.70

Si traslladem un punt Q segons el vector $\vec{v}(3,1)$, obtenim el punt $Q' = (-2,1)$. Quin és el punt Q?

Solució en pàg. 460

Activitat 9.71

Dibuixeu el polígon de vèrtexs $(-3,4)$, $(0,0)$ i $(-2,0)$.

a) De quin tipus és?

b) Apliqueu-li una translació de vector $\vec{v}(-1,3)$ i dibuixeu el polígon resultant.

c) Quines són les coordenades dels vèrtexs del nou polígon?

Solució en pàg. 460

Activitat 9.72

Dibuixeu el polígon de vèrtexs $(-3,0), (3,0), (1,2), (-1,2)$.

a) De quin tipus és?

b) Apliqueu-li una translació de vector $\vec{v}(2,-6)$ i dibuixeu el polígon resultant.

c) Quines són les coordenades dels vèrtexs del nou polígon?

Solució en pàg. 460

Activitat 9.73

Calculeu el perímetre i l'àrea d'un rectangle la diagonal del qual fa $2,5\,cm$ i l'altura $1,5\,cm$.

Solució en pàg. 461

Activitat 9.74

Quants taulells de forma quadrada són necessàries per a entaulellar una habitació de $16\,m$ de llarg per $12\,m$ d'ample, sabent que els taulells són de $0,40 \times 0,40\,m^2$?

Solució en pàg. 461

Activitat 9.75

Calculeu la superfície d'un quadrat inscrit en una circumferència de radi $6\,cm$.

Solució en pàg. 461

Activitat 9.76

Un terreny rectangular d'$1,23\,km$ de longitud té un perímetre de $2860\,m$. Calculeu en hectàrees la superfície d'aquest terreny.

Solució en pàg. 461

Activitat 9.77

Un jardí de forma triangular té 90 m de base i 40 m d'altura, però hi ha un estany circular que fa 20 m de diàmetre. Quina és l'àrea cultivable?

Solució en pàg. 461

Activitat 9.78

Tenim un terreny quadrat de 200 m de perímetre. Quant haurà de mesurar l'altura d'un triangle de 80 m de base, per a tenir la mateixa superfície que el nostre terreny?

Solució en pàg. 461

Activitat 9.79

Donada una circumferència de 3 m de radi i un triangle equilàter de 5 m de costat, un dels vèrtexs del qual coincideix amb el centre de la circumferència, trobeu l'àrea de la part del triangle que queda fora de la circumferència.

Solució en pàg. 461

Activitat 9.80

Un camp té forma quadrada i volem trobar-ne el perímetre sabent que sumant 2 Dam a un costat i restant 1 Hm a l'altre resulta un rectangle la superfície del qual és 88 hectàrees.

Solució en pàg. 461

Activitat 9.81

A un hexàgon regular de 10 cm de costat se li inscriu i circumscriu una circumferència. Calculeu l'àrea de la corona circular corresponent.

Solució en pàg. 461

Activitat 9.82

En un trapezi isòsceles de bases 10 m i 4 m i d'altura 4 m es prolonguen els costats no paral · lels formant amb la base major un triangle. Calculeu l'àrea d'aquest triangle.

Solució en pàg. 461

Activitat 9.83

Un terreny té forma de trapezi, i té una superfície de 25 hectàrees. La base menor fa 200 m i la base major 500 m. Quants metres tindrà l'altura?

Solució en pàg. 461

Activitat 9.84

Un paper quadrat de costat $12\,cm$ es doblega de manera que els quatre vèrtexs queden en el punt d'intersecció de les diagonals. Quina és l'àrea de la nova figura que resulta?

Solució en pàg. 462

Activitat 9.85

Un agricultor adquireix un camp rectangular de $100\,m$ de llarg per $60\,m$ d'ample, que inclou uns camins i una casa tal com es mostra en la Figura 9.77. Quina superfície li queda per a cultivar?

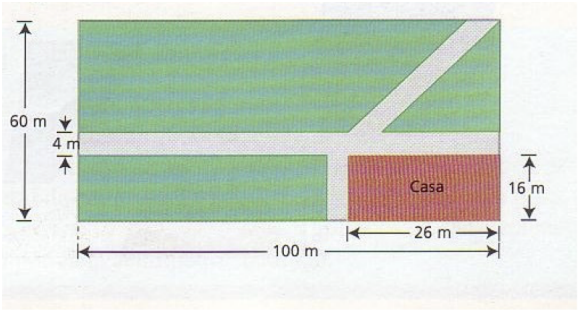


Figura 9.77. Terreny per a cultivar

Solució en pàg. 462

Activitat 9.86

Un estany circular té $15\,m$ de diàmetre i està envoltat per una senda de $0,75\,m$ d'ample, tal com es mostra en la Figura 9.78. Calculeu l'àrea de la senda.

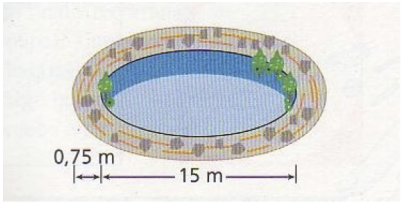


Figura 9.78. L'estany

Solució en pàg. 462

Activitat 9.87

Determineu el perímetre del rectangle sabent que la superfície és $24\,cm^2$ i que un dels seus costats fa $3\,cm$.

Solució en pàg. 462

Activitat 9.88

Quant és la diferència entre les àrees d'una circumferència de $12\,m$ de diàmetre i una altra de $8\,m$ de radi?

Solució en pàg. 462

Activitat 9.89

Si el costat d'un quadrat es duplica. Què ocorre amb la seua àrea i el seu perímetre? Es duplicaran també?

Solució en pàg. 462

Activitat 9.90

Quants cm^2 ocupa un rombe les diagonals del qual fan $5\,cm$ i $8\,cm$?

Solució en pàg. 462

Activitat 9.91

Determineu la mesura de la hipotenusa d'un triangle rectangle sabent que els catets fan $254\,cm$ i $156\,cm$ respectivament.

Solució en pàg. 462

Activitat 9.92

Si en un triangle rectangle la mesura de la hipotenusa és de $h = 32\,cm$ i la d'un dels catets és de $c_1 = 12\,cm$. Trobeu la longitud de l'altre catet.

Solució en pàg. 462

Activitat 9.93

Trobeu la longitud de la diagonal d'un rectangle els costats del qual fan $42\,m$ i $144\,m$.

Solució en pàg. 462

Activitat 9.94

Si cada un dels dos costats iguals d'un triangle isòsceles fa $5\,m$ quina longitud ha de tenir el tercer costat perquè la superfície siga màxima?

Solució en pàg. 462

Activitat 9.95

Quant fa la diagonal d'un rectangle si les longituds dels costats són $20\,cm$ i $10\,cm$, respectivament?

Solució en pàg. 463

Activitat 9.96

Quant fa la diagonal d'un quadrat si el costat fa $12\,cm$?

Solució en pàg. 463

Activitat 9.97

Els costats d'un triangle fan $11\,m, 6\,m$ i $9\,m$. És un triangle rectangle?

Solució en pàg. 463

Activitat 9.98

Determineu l'altura d'un triangle equilàter de costat $10\,cm$.

Solució en pàg. 463

Activitat 9.99

En un triangle isòsceles l'altura sobre el costat desigual fa $96\,cm$, el costat desigual fa $42\,cm$. Quina és la longitud dels costats congruents?

Solució en pàg. 463

Activitat 9.100

En un triangle isòsceles l'altura sobre el costat desigual fa $50\,cm$, els costats congruents fan $77\,cm$ cada un. Quina és la longitud del costat desigual?

Solució en pàg. 463

Activitat 9.101

En un triangle isòsceles els costats congruents fan $45\,cm$ cada un i el costat desigual fa $22\,cm$. Quin és el valor de l'altura sobre el costat desigual?

Solució en pàg. 463

Activitat 9.102

Una porta fa $210\,cm$ d'altura per $80\,cm$ d'ample. Quin és l'ample major que pot tenir un tauler perquè passe per la porta?

Solució en pàg. 463

Activitat 9.103

Una escala de $4'5\,m$ es col · loca contra una paret amb la base de l'escala a $2\,m$ de la paret. A quina altura de terra està la part més alta de l'escala?

Solució en pàg. 463

Activitat 9.104

Una escala de $6\,m$ es col · loca contra una paret, i la part superior d'aquesta queda a una altura de $5'4\,m$. A quina distància està el peu de l'escala de la base de la paret?

Solució en pàg. 463

Activitat 9.105

Les diagonals d'un rombe fan $16\,cm$ i $10\,cm$, respectivament. Quant fa cada un dels costats?

Solució en pàg. 463

Activitat 9.106

Un costat d'un rombe fa $45'62\,dm$ i una de les seues diagonals fa $52'48\,dm$. Quant fa l'altra diagonal? Quin és el perímetre del rombe?

Solució en pàg. 464

Activitat 9.107

Es desitja esbrinar el perímetre d'un rectangle, sabent que té un costat de $65\,cm$ i una diagonal de $169\,cm$.

Solució en pàg. 464

Activitat 9.108

En un triangle rectangle $\triangle ABC$, els catets fan $20\,cm$ i $15\,cm$. Quina mida tindran els segments rectilinis determinats en la hipotenusa per l'altura corresponent? Quant fa l'altura?

Solució en pàg. 464

Activitat 9.109

Pere ha agafat una escala per a pujar fins a la vora d'una tàpia, però no pot perquè l'escala té exactament la mateixa altura que la tàpia. Com que és molt enginyós ha agafat un calaix de $20\,cm$ d'altura i l'ha col · locat a un metre de distància del peu de la tàpia. D'aquesta manera en posar l'escala sobre el calaix aquesta arriba just a la vora de la tàpia. Quina altura té la tàpia?

Solució en pàg. 464

Activitat 9.110

Calculeu l'altura d'un arbre sabent que la seua ombra fa $30\,m$ i en el mateix moment un bastó de $80\,cm$ clavat en terra produeix una ombra de $60\,cm$.

Solució en pàg. 464

Activitat 9.111

Trobeu l'altura d'un arbre que projecta una ombra de $24\,m$ quan un arbust de $0'5\,m$ té una ombra de $3'5\,m$.

Solució en pàg. 464

Activitat 9.112

Si l'ombra d'una vara clavada en terra és igual a la seua longitud, quina és l'altura d'un edifici l'ombra del qual fa $15\,m$?

Solució en pàg. 464

Activitat 9.113

Quina és l'altura d'una estàtua el topall de la qual es veu reflectit en un espill que està a $6\,m$ de la base i és observat per una persona que fa $1'78\,m$ i està situada a $2\,m$ de l'espill?

Solució en pàg. 464

Activitat 9.114

Un home d'$1'8\,m$ d'alçada projecta una ombra d'$1'05\,m$ de llarg al mateix temps que un edifici projecta una ombra de $4'8\,m$ de llarg. Quina és l'altura aproximada de l'edifici?

Solució en pàg. 464

Activitat 9.115

Una torre de $86\,m$ d'alt projecta una ombra de $129\,m$ de longitud, llavors trobeu la mesura de l'ombra que en aquest mateix instant projecta una persona d'$1'86\,m$ d'alt.

Solució en pàg. 464

Activitat 9.116

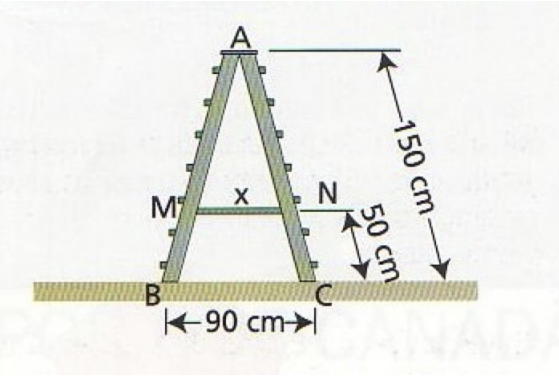


Figura 9.79. Una escaleta

Quant fa el travesser $\overline{MN}$ de l'escala de la Figura 9.79? Raoneu la resposta.

Solució en pàg. 464

Activitat 9.117

Siga el quadrat $ABCD$ de la Figura 9.81. Unint el vèrtex A amb el punt mitjà del costat $\overline{DC}$, i prolongant la línia fins a trobar la prolongació del costat $\overline{BC}$ obtindrem el triangle $\triangle ABE$. Calculeu la longitud del segment $\overline{CE}$ sabent que el costat del quadrat fa $5\,m$.

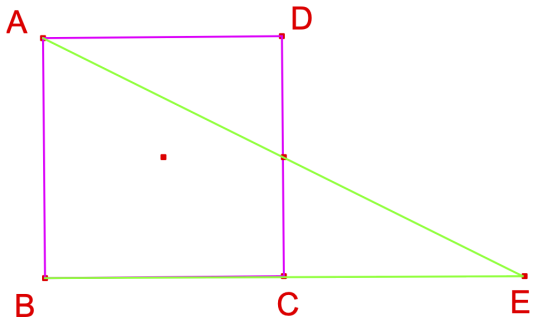


Figura 9.80. Quadrat i triangle

Solució en pàg. 465

Activitat 9.118

Siga el quadrat $ABCD$ de la Figura 9.81. Unint el vèrtex A amb el punt mitjà del costat $\overline{DC}$, i prolongant la línia fins a trobar la prolongació del costat $\overline{BC}$ obtindrem el triangle $\triangle ABE$. Calculeu la longitud del segment $\overline{CE}$ sabent que el costat del quadrat fa $5\,m$.

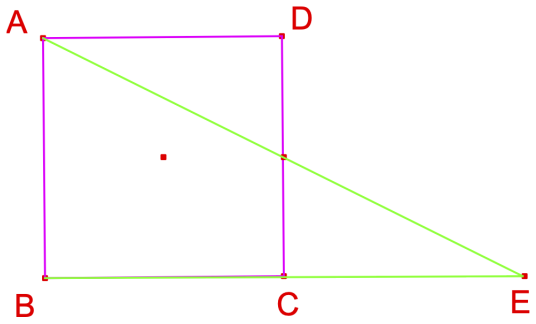


Figura 9.81. Quadrat i triangle

Solució en pàg. 465

Activitat 9.119

Els costats d'un triangle fan $6\,cm$, $8\,cm$ i $10\,cm$. Calculeu la longitud d'aquests costats en una fotocòpia feta al 70%.

Solució en pàg. 465

Activitat 9.120

Dibuixeu dos triangles equilàters de diferent grandària. Es pot afirmar que són triangles semblants?

Solució en pàg. 465

Activitat 9.121

Els triangles $\triangle TIP$ i $\triangle COL$ són semblants (Figura 9.82). Amb les dades donades en la figura adjunta, trobeu totes les dades possibles.

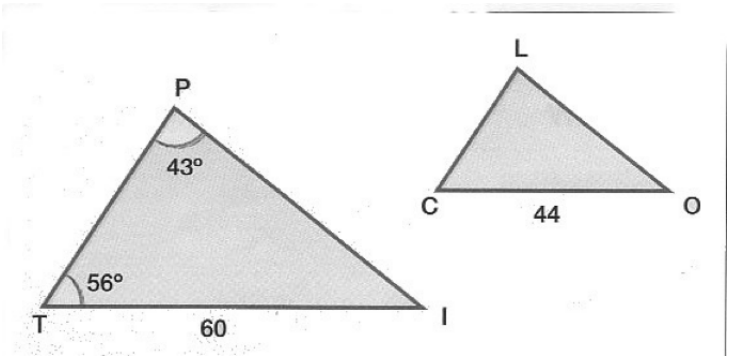


Figura 9.82. Els triangles semblants $\triangle TIP$ i $\triangle COL$

Solució en pàg. 465

Activitat 9.122

Dibuixeu dos triangles de bases $\overline{AB}$ i $\overline{A'B'}$ diferents, en què els angles de totes dues bases fan 60° i 50° respectivament. Són semblants els triangles?

Solució en pàg. 465

Activitat 9.123

El costat d'un hexàgon regular fa $5\,cm$ i el d'un altre $8\,cm$. Són semblants els hexàgons? Si la resposta és afirmativa, quina és la raó de semblança?

Solució en pàg. 465

Activitat 9.124

Els costats de dos quadrats fan $4\,cm$ i $6\,cm$ respectivament. Es pot afirmar que són semblants?

Solució en pàg. 465

Referències

Castelnuovo, E. (1981). *La Geometria* (Traduccióo ed.). Ketres Editora.

Guedj, D. (2000). *El teorema del lloro*. Barcelona: Anagrama.

Musser, G. L., Peterson, B. E., i Burger, W. F. (2013). *Mathematics for Elementary teachers: A Contemporary Approach* (10th ed.). Wiley.

10

Geometria espacial

Organització de continguts del Tema 10

1. Poliedres
   - Poliedres regulars
   - Prismes
   - Piràmides
2. Cossos de revolució
3. Superfície de poliedres i cossos de revolució: desenvolupament pla
4. Volum de poliedres i cossos de revolució

Acabarem els continguts d'aquest curs donant una descripció geomètrica d'alguns cossos sòlids (tridimensionals) propis de les etapes educatives d'infantil o primària: els poliedres i els cossos de revolució. Finalment, donarem algunes indicacions per a calcular superfícies i volums a partir del desenvolupament pla d'aquests cossos tridimensionals i de les àrees de les figures que els componen.

10.1. Poliedres

Angle diedre

Anomenem **angle diedre** la regió de l'espai compresa entre dos semiplans que tenen en comú la recta que els determina, Figura 10.1. La mesura de l'angle diedre és igual a la mesura de l'angle rectilini corresponent.

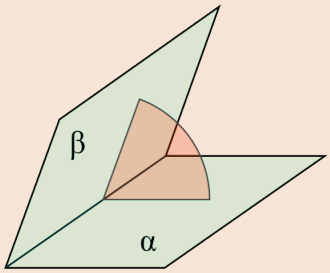


Figura 10.1. Angle diedre format entre els semiplans α i β

Exemple 10.1
L'angle que formen dues parets contigües és un angle diedre.

Exemple 10.2
Dos plans que es tallen, divideixen l'espai en quatre angles diedres

Existeixen també **angles trièdrics** (Figura 10.2) o **polièdrics** i són les regions de l'espai compreses entre tres o més semiplans que tenen un punt en comú. Per exemple, l'angle que formen dues parets contigües i el terra d'una habitació és un angle trièdric. Les paraules diedre, triedre i poliedre venen del grec, i són formades pel prefix *di-* (dos), *tri-* (tres) o *poli-* (molts) i el sufix *-edre* (cara).

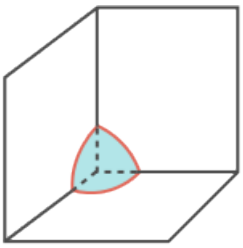


Figura 10.2. Angle triedre

Elements d'un angle poliedre

En un angle diedre, triedre o poliedre podem definir els següents elements:

- **Cares** són cadascun dels semiplans que formen l'angle.
- **Vèrtex** és el punt comú de totes les cares que formen l'angle. Per a formar un vèrtex calen com a mínim 3 plans que es tallen.
- **Arestes** són les semirectes comunes a dos semiplans. Cada aresta determina un angle diedre.

Poliedre

Els **poliedres** són sòlids limitats per cares en forma de polígons. En tot poliedre es distingeixen els següents elements:

- **Cares**: són polígons i separen l'interior de l'exterior del poliedre.

- **Aresta**: és la intersecció de dues cares consecutives, cada aresta és comuna a dues cares.
- **Vèrtex**: són els vèrtexs dels polígons que el limiten, cada vèrtex és comú a tres o més arestes.
- **Diagonal**: segment que uneix dos vèrtexs que no pertanyen a la mateixa cara.

Exemple 10.3

Els poliedres poden ser **convexos** o **còncaus**, com podem veure en la Figura 10.3. Els convexos són aquells en els quals, en prolongar qualsevol de les cares, mai tallen el poliedre. En canvi, en els poliedres còncaus hi ha alguna cara que, en prolongar-la, talla el poliedre.

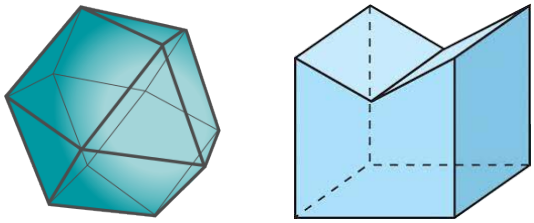


Figura 10.3. Poliedre convex (esquerra) i còncau (dreta)

Intuïtivament, un poliedre és convex si totes les cares es poden recolzar completament sobre un pla. I es diu que és còncau (o no convex), si té alguna cara sobre la qual no es pot recolzar.

Teorema d'Euler per a poliedres convexos

El teorema d'Euler indica la relació entre el nombre de cares, arestes i vèrtexs d'un poliedre convex sense orificis, ni entrants; i diu que **la suma del nombre de cares i el de vèrtexs és igual al nombre d'arestes més 2**. És a dir:

$$C + V = A + 2$$

Sent C el nombre de cares, V el nombre de vèrtexs i A el nombre d'arestes.

Activitat 10.1

Un poliedre té 7 cares i 10 vèrtexs. Quin és el nombre d'arestes?

Solució en pàg. 465

10.1.1 Poliedres regulars

Poliedres regulars

Direm **poliedre regular** a tot aquell poliedre convex les cares del qual són polígons regulars iguals entre si, i els vèrtexs del qual són iguals[a].

Existeixen **només cinc poliedres regulars**: el tetraedre, l'hexaedre, l'octaedre, el dodecaedre i l'icosaedre (s'anomenen **sòlids platònics** i els descrivim més avant, vegeu Figura 10.4).

[a] Dos vèrtexs són iguals quan hi concorren les mateixes cares, ordenades de la mateixa manera.



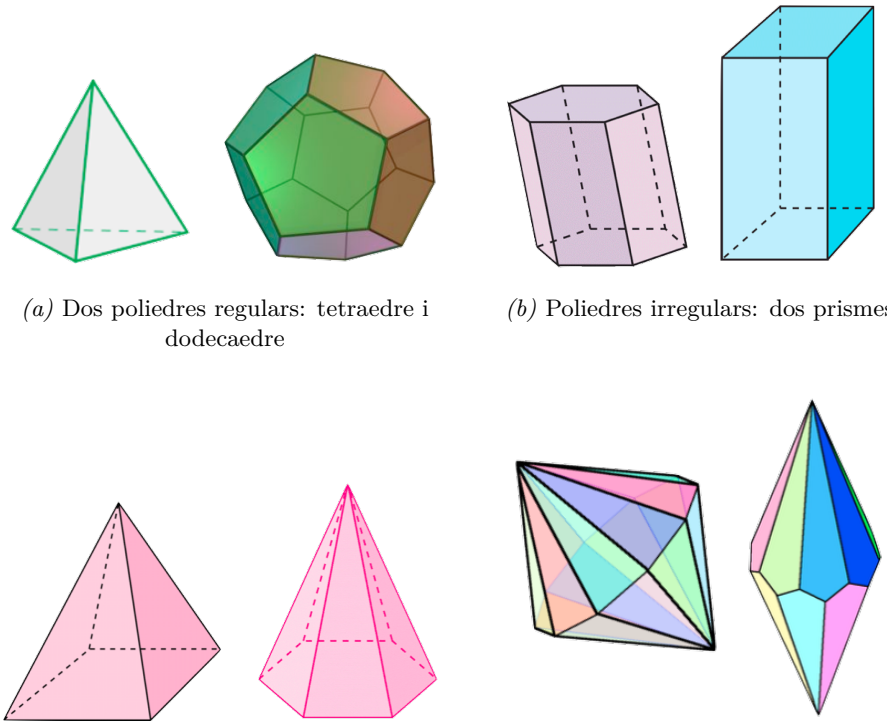
Figura 10.4. Sòlids platònics. D'esquerra a dreta: tetraedre, octaedre, icosaedre, hexaedre i dodecaedre

La primera notícia que es coneix sobre els cinc poliedres regulars procedeix d'un jaciment neolític a Escòcia, on es van trobar figures de fang d'aproximadament 2000 aC. Es creu que es tractava d'elements decoratius o, tal vegada, d'algun tipus de joc. Va ser en l'escola pitagòrica de l'antiga Grècia (530 aC) on es va considerar aquests cinc poliedres com a objectes dignes d'estudiar matemàticament i els van dir *sòlids pitagòrics*. Més avant van associar el cub, el tetraedre, l'icosaedre i l'octaedre a la terra, el foc, l'aigua i l'aire, respectivament. I sembla que va ser Plató (447-347 aC) qui va relacionar el dodecaedre amb la substància de la qual estaven compostes les estreles, ja que per aquells temps es pensava que aquesta hauria de ser diferent de qualsevol de les de la Terra. Així, el dodecaedre el van associar amb l'Univers. Des de llavors, els sòlids pitagòrics van passar a dir-se **sòlids platònics**, nom que conserven en l'actualitat.

Com podem observar en la Figura 10.4, el **tetraedre** és format per quatre triangles equilàters. És el que té menor volum dels cinc en comparació amb la seua superfície. En l'antiguitat s'associava amb el foc. És format per 4 cares, 6 arestes i 4 vèrtexs. L'**octaedre** és format per vuit triangles equilàters. Gira lliurement quan se subjecta per vèrtexs oposats, se suposa que és per això que es va associar amb l'aire en moviment. És format per 8 cares, 12 arestes i 6 vèrtexs. L'**icosaedre** és format per vint triangles equilàters. És el que té major volum en relació amb la superfície i es va associar amb l'aigua. Té 20 cares, 30 arestes i 12 vèrtexs. L'**hexaedre o cub** és format per sis quadrats. Roman estable sobre la base, per això representava la terra. És format per 6 cares, 12 arestes i 8 vèrtexs. Finalment, el **dodecaedre** és format per dotze pentàgons regulars. Es feia correspondre amb l'Univers, perquè les seues dotze cares poden albergar els dotze signes del Zodíac. Té 12 cares, 30 arestes i 20 vèrtexs.

Exemple 10.4

En la Figura 10.5a podem trobar alguns exemples de poliedres regulars. En canvi, en les Figures 10.5b, 10.5c i 10.5d podem trobar exemples de polígons irregulars.



(a) Dos poliedres regulars: tetraedre i dodecaedre

(b) Poliedres irregulars: dos prismes

(c) Poliedres irregulars: dues piràmides

(d) Altres poliedres irregulars

Figura 10.5. Alguns exemples de poliedres regulars i irregulars

Activitat 10.2

Comproveu que el teorema d'Euler és cert per als cinc polígons regulars.

Solució en pàg. 466

10.1.2 Prismes

Prisma

Un **prisma** és un poliedre limitat per dos polígons iguals i paral·lels anomenats *bases*, i per paral·lelograms que comparteixen un costat amb cada base, i que es diuen *cares laterals*.

Intuïtivament un prisma s'obté en traslladar un polígon, fora del pla i en una direcció fixa i paral·lela al pla. Típicament, els prismes s'anomenen segons el nombre de costats del polígon de la base. Per tant, en la Figura 10.6 tindríem un prisma hexagonal (esquerra) i un prisma quadrangular (dreta).

Si les cares laterals d'un prisma són rectangles o quadrats, es tracta d'un **prisma recte** (Figura 10.6, dreta). En canvi, si les cares laterals són rombes o romboides, és un **prisma oblic** (Figura 10.6, esquerra).

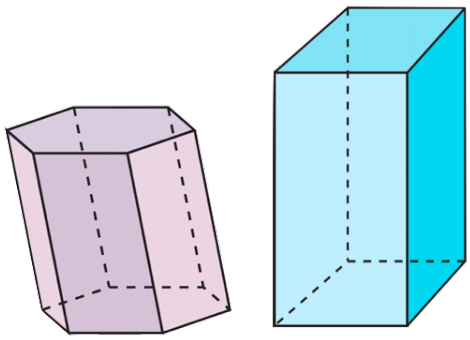


Figura 10.6. Exemples de prismes

Elements d'un prisma

En tot prisma podem identificar els següents elements:

- L'**altura del prisma** és la longitud de la perpendicular compresa entre les dues bases (h en la Figura 10.7).
- Els costats de les bases constitueixen les **arestes bàsiques** i els costats de les cares laterals les **arestes laterals**, que són iguals i paral · leles entre si.

Exemple 10.5

Com podem observar en la Figura 10.7, en un prisma recte l'altura mesura el mateix que una aresta lateral, i en un prisma oblic l'altura és menor que una aresta lateral.

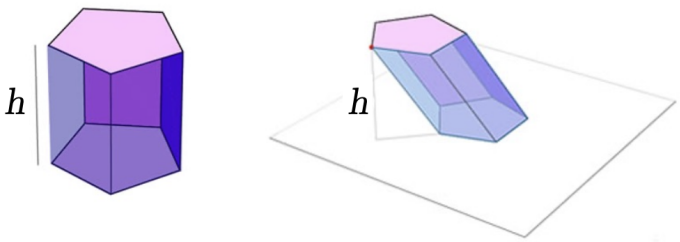


Figura 10.7. Prisma recte (esquerra) i oblic (dreta)

Activitat 10.3

Comproveu que per als prismes de la Figura 10.6 també es compleix el teorema d'Euler.

Activitat 10.4

Quin tipus de poliedre és el que heu esbrinat en l'Activitat 10.1? Recordeu que tenia 7 cares, 10 vèrtexs i 15 arestes.

Solució en pàg. 466

10.1.3 Piràmides

Piràmide

Una **piràmide** és un poliedre limitat per un polígon qualsevol anomenat *base*, i per triangles amb un vèrtex comú (*cúspide*), que es diuen cares laterals. Cada piràmide s'anomena segons el nombre de costats del polígon de la base.

Exemple 10.6

En la Figura 10.8 trobem una piràmide quadrangular (esquerra) i una piràmide hexagonal (dreta).

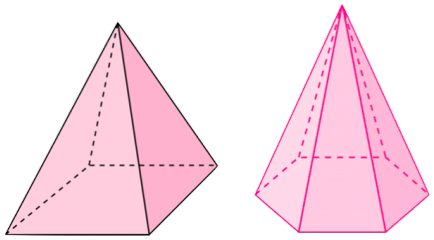


Figura 10.8. Exemples de piràmides

Igual que en els prismes, podem trobar **piràmides rectes**: aquelles en les quals totes les cares laterals són triangles isòsceles; i **piràmides obliqües**: quan alguna de les cares laterals no és un triangle isòsceles.

Elements d'una piràmide

En una piràmide podem trobar els següents elements:

- **Cúspide**: vèrtex comú als triangles que formen les cares laterals.
- **Altura de la piràmide**: la longitud de la perpendicular compresa entre la cúspide de la piràmide i la seua base.
- **Apotema de la piràmide**: l'altura de les cares laterals (només en el cas que les cares laterals siguen iguals).

Activitat 10.5

Comproveu que per a les piràmides de la Figura 10.8 també es compleix el teorema d'Euler.

10.2. Cossos de revolució

Cossos de revolució

Un **cos de revolució** és un espai tancat per superfícies corbes generades a partir de línies (rectes o corbes) que es fan girar respecte a un eix. Entre aquests cossos trobem:

Cilindre: aquell cos geomètric generat per un rectangle que gira al voltant d'un dels seus costats (Figura 10.9a).

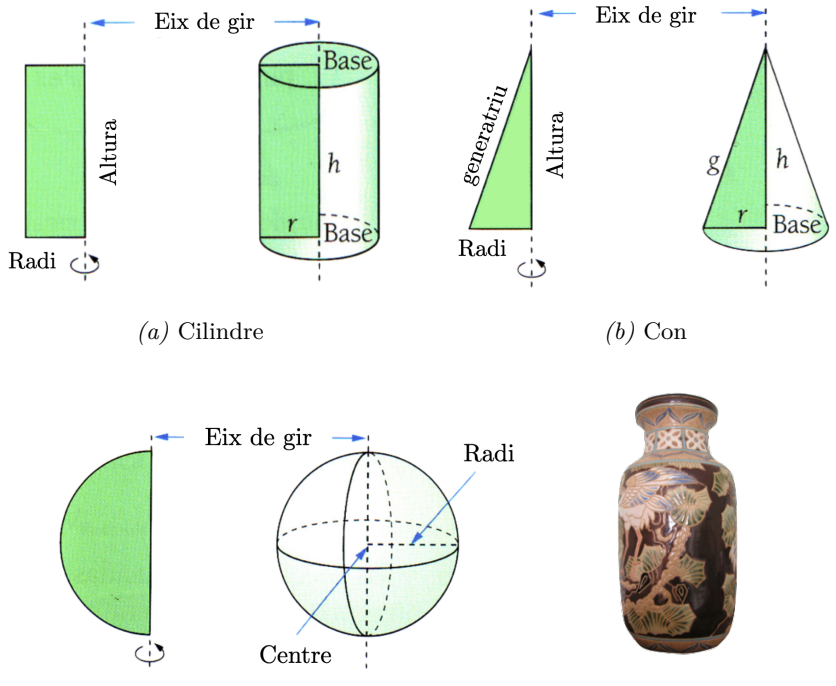
Con (recte): cos de revolució obtingut en fer girar un triangle rectangle al voltant d'un dels seus catets (Figura 10.9b).

Esfera: regió de l'espai que es troba a l'interior d'una superfície engendrada per una circumferència que gira sobre el seu diàmetre (Figura 10.9c).

Altres cossos de revolució: és important conèixer que existeixen en la vida real molts cossos de revolució, un exemple molt clar són els objectes de terrisseria, com per exemple el pitxer de la Figura 10.9d.

Exemple 10.7

A continuació donem alguns exemples de cossos de revolució, obtinguts en fer girar una figura plana al voltant d'un eix:



(a) Cilindre

(b) Con

(c) Esfera

(d) El pitxer, un cos de revolució

Figura 10.9. Alguns exemples de cossos de revolució

Elements del cilindre

En un cilindre (recte) podem trobar els següents elements:

- **Eix**: el costat del rectangle que gira sobre si mateix
- **Bases**: els dos cercles iguals i paral · lels
- **Superfície lateral**: la cara lateral corba, el desenvolupament de la qual és un rectangle
- **Generatriu**: el costat del rectangle, oposat a l'eix, que engendra el cilindre
- **Altura**: la distància entre les bases (en els cilindres rectes coincideix amb la generatriu)
- **Radi**: el radi de la base

Exemple 10.8

Un cilindre oblic (Figura 10.10) no és un cos de revolució. S'obté en tallar un cilindre recte per plans paral · lels no perpendiculars a l'eix. La base d'un cilindre oblic no és un cercle, és una el · lipse.

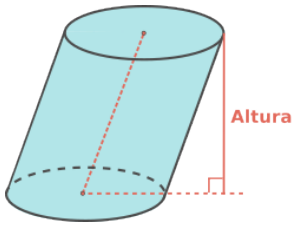


Figura 10.10. Cilindre oblic

Elements del con

En un con (recte) podem trobar els següents elements:

- **Eix**: el catet fix sobre el qual gira el triangle
- **Base**: és el cercle que es forma quan gira el catet
- **Superfície lateral**: la cara lateral corba, el desenvolupament de la qual és un sector circular
- **Generatriu**: la hipotenusa del triangle rectangle
- **Altura**: la distància des del vèrtex al pla de la base
- **Radi**: el radi de la base

Exemple 10.9

El con oblic (de base circular o el · líptica, Figura 10.11) no és un cos de revolució. El con oblic de base circular té com a base una circumferència i el seu vèrtex no es troba en la perpendicular traçada pel centre de la base. El con oblic de base el · líptica té com a base una el · lipse.

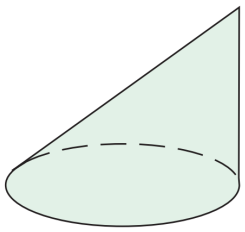


Figura 10.11. Con oblic

Elements de l'esfera

En una esfera podem trobar els següents elements:

- **Eix**: el diàmetre del semicercle que gira
- **Centre**: el centre del semicercle
- **Radi**: és el segment que uneix el centre amb qualsevol punt de la superfície esfèrica
- **Pols**: són els punts d'intersecció de l'eix de gir amb la superfície esfèrica
- **Semiesfera**: cada una de les parts en la qual queda tallada una esfera per un pla que passa pel seu centre

10.3. Superfície de poliedres i cossos de revolució: desenvolupament pla

Desenvolupament pla de poliedres

Si un poliedre el tallem per un nombre suficient d'arestes, podrem fer que quede una sola peça que puga ser estesa en el pla, d'aquesta manera obtindrem el **desenvolupament pla del poliedre**. Qualsevol poliedre té almenys un desenvolupament pla.

Exemple 10.10

En les Figures 10.12 i 10.13 es mostren els desenvolupaments plans d'un prisma i una piràmide, respectivament.

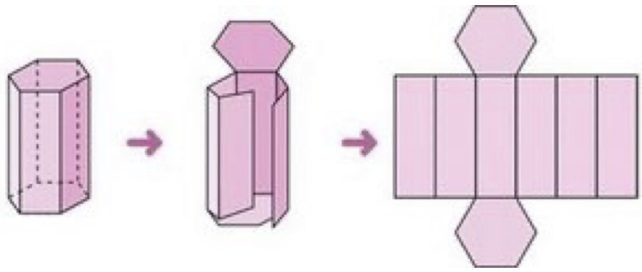


Figura 10.12. Desenvolupament pla d'un prisma hexagonal recte

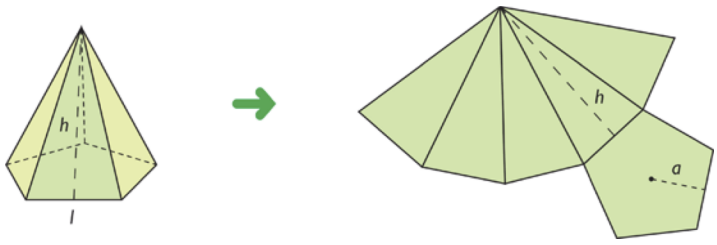


Figura 10.13. Desenvolupament pla d'una piràmide pentagonal recta

Activitat 10.6

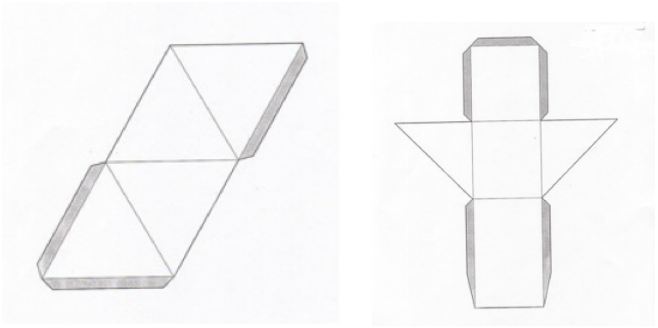
Obtingueu els desenvolupaments plans dels cinc poliedres regulars.

Solució en pàg. 466

Activitat 10.7

A partir dels desenvolupaments en el pla mostrats en les Figures 10.15a i 10.15b, completeu la taula següent:

Poliedre	**Regular** (si/no)	**Cares** (C)	**Vèrtexs** (V)	**Arestes** (A)	**Nre. angles dièdrics**	**Nre. angles trièdrics**



(a) Desenvolupament 1 *(b)* Desenvolupament 2

Figura 10.15. Analitzeu aquests desenvolupaments

Solució en pàg. 466

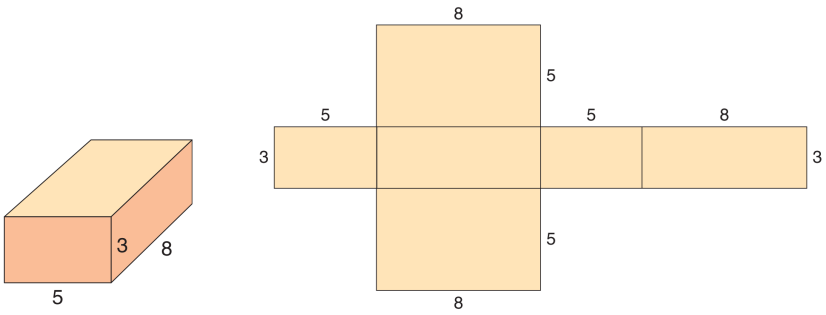
Tal com podem intuir, la superfície d'una figura tridimensional és, literalment, l'àrea total de totes les seues superfícies exteriors. D'aquesta manera, encara que existeixen fórmules per a calcular superfícies de prismes i piràmides rectes, podem calcular simplement la suma de les àrees de les seues cares i bases per a obtenir-ne la superfície total.

Superfície d'un poliedre

La **superfície d'un poliedre** és la suma de les àrees de les cares poligonals.

Exemple 10.11

Per a trobar la superfície de la caixa en forma de prisma recte que tenim en la Figura 10.16a només hem de raonar sobre el seu desenvolupament pla. Així, com que aquest prisma consta d'una base rectangular de costats $5\,u$ i $8\,u$, i l'altura és $3\,u$, podem descompondre'l en els rectangles que veiem en la Figura 10.16b.



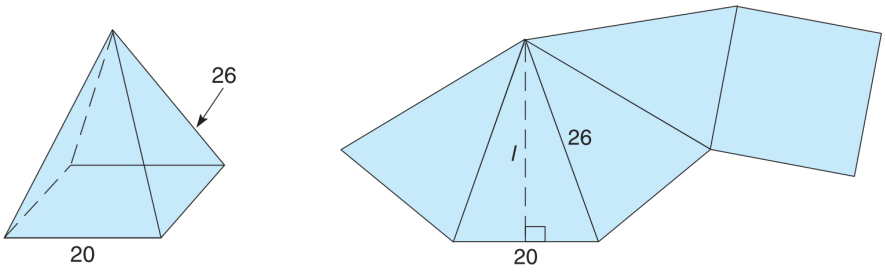
(a) Prisma *(b)* Desenvolupament pla

Figura 10.16. És una caixa! (imatges de Musser, Peterson, i Burger, 2013)

Així, sumant les àrees dels rectangles, obtindrem una superfície total de $158\,u^2$.

Exemple 10.12

Per a trobar la superfície de la piràmide de base quadrada de base $20\,u$ que tenim en la Figura 10.17a i d'aresta $26\,u$, la descompondrem en quatre triangles isòsceles i un quadrat, segons el desenvolupament pla de la Figura 10.17b.



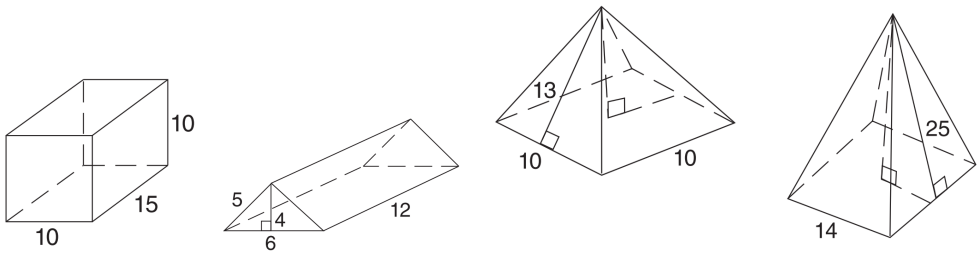
(a) Piràmide *(b)* Desenvolupament pla

Figura 10.17. És una piràmide! (imatges de Musser i cols., 2013)

En aquest cas, caldrà fer ús del teorema de Pitàgores per a obtenir l'altura dels triangles $l = 24\,u$. Una vegada la tenim, podem veure fàcilment que la suma de les àrees és $1360\,u^2$.

Activitat 10.8

Obtingueu les superfícies dels prismes i piràmides següents, a partir de les *unitats* que s'indiquen.



(a) Prisma 1 *(b)* Prisma 2 *(c)* Piràmide 1 *(d)* Piràmide 2

Figura 10.18. Poliedres extrets de Musser i cols. (2013)

Solució en pàg. 466

Activitat 10.9

Obtingueu la fórmula general per a calcular la superfície d'un prisma regular recte (com el mostrat en la Figura 10.19) a partir de l'altura h, i de les bases d'àrea A i perímetre P.

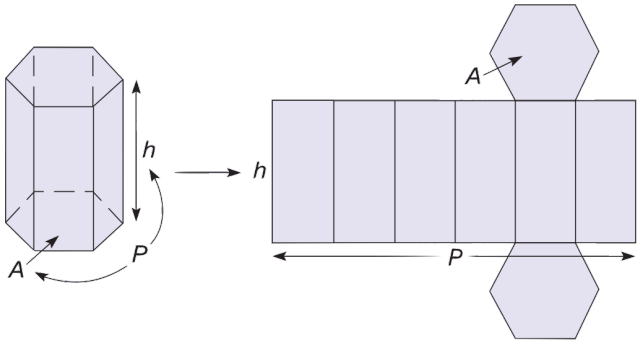


Figura 10.19. Prisma i desenvolupament (extreta de Musser i cols., 2013)

Solució en pàg. 467

Activitat 10.10

Obtingueu la fórmula general per a calcular la superfície d'una piràmide regular recta (com la mostrada en la Figura 10.20) a partir de l'altura d'una de les seues cares l, i de la seua base d'àrea A i perímetre P.

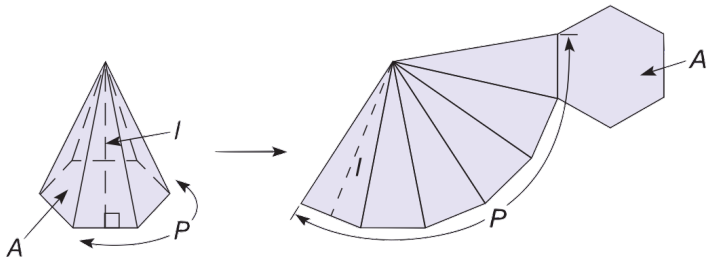


Figura 10.20. Piràmide i desenvolupament (extreta de Musser i cols., 2013)

Solució en pàg. 467

Desenvolupament pla d'un cilindre i d'un con rectes

En **desenvolupar un cilindre recte** s'obté un rectangle i dos cercles iguals, que constitueixen les bases:

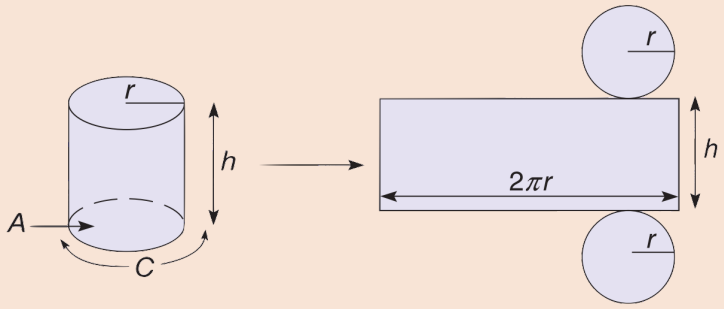


Figura 10.21. Desenvolupament d'un cilindre recte (extreta de Musser i cols., 2013)

En **desenvolupar un con recte** s'obté un sector circular i un cercle:

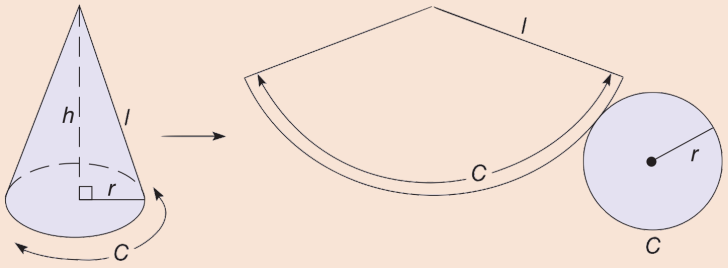


Figura 10.22. Desenvolupament d'un con recte (extreta de Musser i cols., 2013)

Superfície d'un cilindre i d'un con rectes

La **superfície d'un cilindre recte** és igual a la suma de les àrees del rectangle i dels dos cercles que obtenim del seu desenvolupament pla.
La **superfície d'un con recte** és igual a la suma del sector circular i del cercle que obtenim del seu desenvolupament pla.

Exemple 10.13

Calcularem la superfície del con recte de la Figura 10.23, que té com a base un cercle de radi $r = 3\,cm$ i una generatriu $g = 8\,cm$. Primer, calcularem l'àrea lateral, que no és més que l'àrea d'un sector circular A_{sector}, l'arc del qual és la circumferència de la base $(2 \cdot \pi \cdot r)$, i que té com a radi la generatriu (g), tal com mostrem en la Figura 10.24. Aquest càlcul podem fer-lo amb una simple proporció (*regla de tres*) entre l'àrea de tot el cercle i la del sector circular (la que ens interessa):

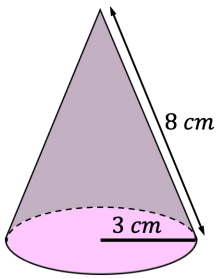


Figura 10.23. Con recte

$$\left.\begin{array}{lcl} \text{Àrea} & & \text{Long.d'arc} \\ \pi \cdot g^2 & \to & 2 \cdot \pi \cdot g \\ A_{\text{sector}} & \to & 2 \cdot \pi \cdot r \end{array}\right\} \Longrightarrow A_{\text{sector}} = \frac{\pi \cdot g^2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot r}{2 \cdot \pi \cdot g} = \pi \cdot r \cdot g$$

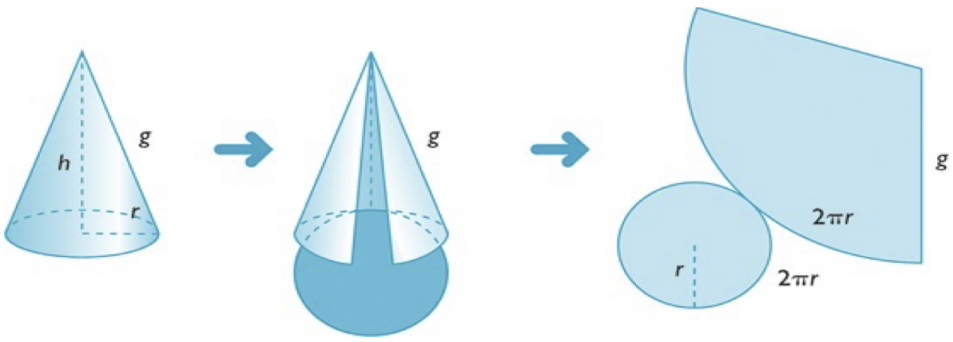


Figura 10.24. Desenvolupament del con recte

Substituint les dades que tenim, obtenim que $A_{\text{sector}} = \pi \cdot 3 \cdot 8 = 24\pi\,cm^2$.

A continuació, calcularem l'àrea de la base, que sabem que serà $A_{\text{base}} = \pi \cdot r^2 = 9\pi\,cm^2$. Per tant, tindrem que

$$S = A_{\text{sector}} + A_{\text{base}} = 24\pi + 9\pi = 33\pi\,cm^2$$

Activitat 10.11

Demostreu que la superfície d'un cilindre recte de radi r en la base i altura h és

$$S_{\text{cilindre}} = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot (h + r)$$

Activitat 10.12

Demostreu que la superfície d'un con recte de radi r en la base i generatriu l és

$$S_{\text{con}} = \pi \cdot r \cdot (g + r)$$

Finalment, estudiarem el cas de l'esfera. Com que l'esfera és un cos sense cares, format per una sola superfície corba, **no té un desenvolupament pla**. Per això, el càlcul de la seua superfície no és tan evident. És per això que partirem de les observacions d'Arquimedes.

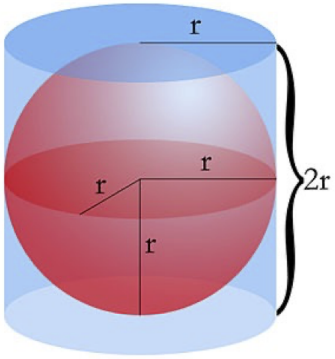


Figura 10.25. Esfera continguda en el menor cilindre recte

Arquimedes tenia fascinació per la superfície i el volum de l'esfera. En concret, va demostrar que tant el volum com la superfície d'una esfera estan a raó $^2/_3$ amb el volum o la superfície del cilindre més petit que la conté[1]. En la Figura 10.25 podem observar el menor cilindre recte que conté una esfera de radi r. És a dir, l'altura del cilindre serà $2 \cdot r$. Per tant, si calculem la superfície d'aquest cilindre obtindrem que és

$$\begin{aligned} S_{\text{cilindre}} &= 2 \cdot A_{\text{base}} + A_{\text{rectangle}} = \\ &= 2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot (2 \cdot r) = \\ &= 6 \cdot \pi \cdot r^2 \end{aligned}$$

Per tant, a partir de les observacions d'Arquimedes podem deduir que la fórmula de la superfície d'una esfera serà

$$S_{\text{esfera}} = \frac{2}{3} \cdot S_{\text{cilindre}} = \frac{2}{3} \cdot 6 \cdot \pi \cdot r^2 = 4 \cdot \pi \cdot r^2$$

[1] Arquimedes estava tan orgullós d'aquesta observació, que la va fer inscriure en la seua làpida

Superfície d'una esfera

La **superfície d'una esfera** (S_{esfera}) de radi r és igual a

$$S_{\text{esfera}} = 4 \cdot \pi \cdot r^2$$

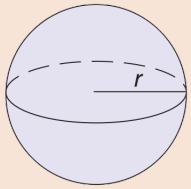
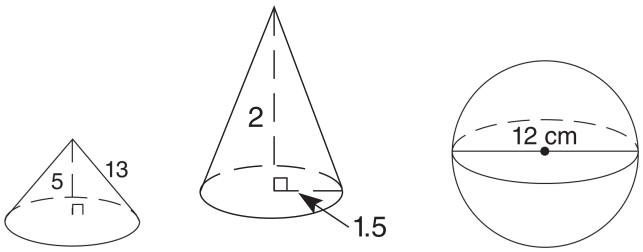


Figura 10.26. Esfera de radi r

Activitat 10.13

Obtingueu les superfícies dels següents cossos, a partir de les *unitats* que s'indiquen.



(a) Con 1 *(b)* Con 2 *(c)* Esfera

Figura 10.27. Cossos extrets de Musser i cols. (2013)

Solució en pàg. 467

10.4. Volum de poliedres i cossos de revolució

El volum d'un cos tridimensional és una mesura de la quantitat d'espai que ocupa. Per a mesurar el volum d'un cos cal comparar-lo amb el volum d'un altre cos triat com a *unitat*, i comptarem les unitats que conté. Així, per a determinar el volum d'un prisma tridimensional, com la que es mostra en la Figura 10.28, imaginarem el prisma ple de cubs unitaris.

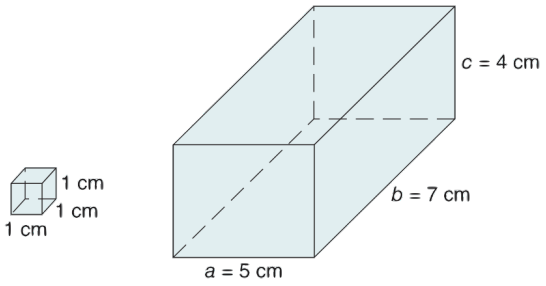


Figura 10.28. Mesura d'un prisma (imatge agafada de Musser i cols., 2013)

Per tant, si el prisma rectangular és format per costats de $5, 7$, i $4\,cm$, pot omplir-se amb $5 \cdot 7 \cdot 4 = 140$ cubs unitaris. El volum d'un cub que mesura 1 unitat en cada aresta és 1 *unitat cúbica*. Per tant, el volum del prisma rectangular de la Figura 10.28 és de 140 *centímetres cúbics* (cm^3). Tal com vam veure en el Tema 7, i igual que hem fet amb les unitats d'àrea, podem subdividir cada unitat cúbica en cubs més petits per a determinar volums de cossos amb dimensions que són inferiors a la unitat agafada.

Recordeu que ja vam estudiar també que hi ha una relació entre les unitats de *capacitat* i de volum. La capacitat es mesura en *litres* (L). Es defineix el litre (L) com el volum d'un líquid tancat en un cub de $1\,dm$ d'aresta, és a dir: $1\,\mathrm{L} = 1\,dm^3$.

Volum d'un prisma recte rectangular

El **volum d'un prisma recte rectangular** (V) de dimensions a, b, c és $V = a \cdot b \cdot c$.

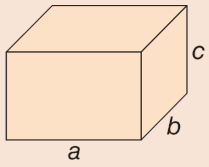


Figura 10.29. Prisma recte rectangular

Exemple 10.14

El volum d'un cub de costat s (Figura 10.30) serà $V = s \cdot s \cdot s = s^3$.

Així, un cub de d'aresta $3\,cm$ és format per $3^3 = 27$ cubs d'$1\,cm^3$ cada un, és a dir, per $27\,cm^3$.

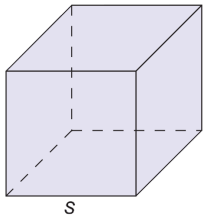


Figura 10.30. Cub

Una interpretació útil de la fórmula del volum d'un prisma rectangular recte és que el volum és el producte de l'àrea d'una base per l'altra corresponent. Per exemple, en la Figura 10.28 l'àrea de la base és $5 \cdot 7 = 35$ i l'altura corresponent és 4. Podríem triar qualsevol cara perquè servira de base i mesurar l'altura perpendicularment des d'aquesta base.

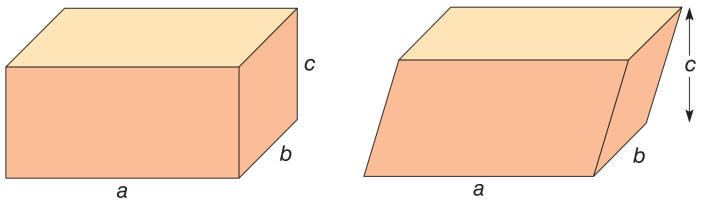


Figura 10.31. Prisma recte rectangular que es transforma en oblic (imatge agafada de Musser i cols., 2013)

Imaginem ara un prisma recte com una baralla de cartes molt fines que es transforma en un prisma oblic, com es mostra en la Figura 10.31. És raonable suposar que el prisma oblic té el mateix volum que el prisma original (pensant de nou en una baralla de cartes). Així, podem obtenir el volum del prisma oblic calculant el producte de l'àrea d'una base per la seua altura corresponent. L'altura és c, la distància entre els plans que contenen les seues bases. Aquest resultat general és **vàlid per a tots els prismes**, i dona lloc al *principi de Cavalieri*, que diu el següent:

Principi de Cavalieri

Si dos cossos tenen la mateixa altura i bases d'igual àrea, i en tallar-los per qualsevol pla paral · lel a les bases, l'àrea de les seccions és la mateixa, tots dos tenen igual volum.

Així, el principi de Cavalieri ens permet oblidar-nos de si un prisma és o no recte a l'hora de calcular el seu volum. El que afirma és que el volum d'un prisma oblic és igual al del seu prisma recte corresponent. Podem il · lustrar el *principi de Cavalieri* amb la Figura 10.32 següent: a l'esquerra tenim un munt de rajoles igualment apilades, i a la dreta estan les mateixes rajoles unes damunt d'altres desordenades. Si tallem amb un pla a qualsevol altura, la secció serà la mateixa. I és obvi, que els dos munts de rajoles ocupen el mateix volum.

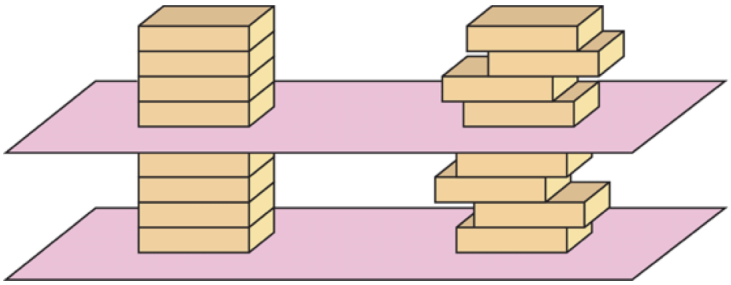


Figura 10.32. Il · lustració de l'aplicació del *principi de Cavalieri*

Volum d'un prisma (recte o oblic)

El **volum d'un prisma** (V) de base qualsevol amb àrea A i altura h és igual a $V = A \cdot h$.

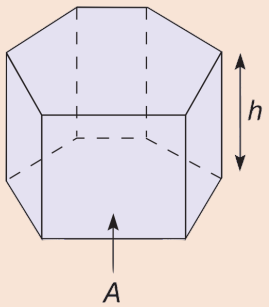


Figura 10.33. Prisma

Pel *principi de Cavalieri*, la mateixa fórmula s'aplica a prismes oblics i rectes.

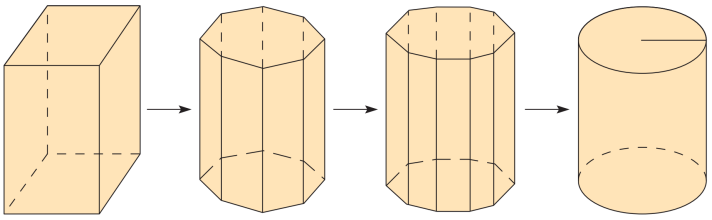


Figura 10.34. Aproximació al càlcul del volum d'un cilindre a partir d'un prisma

El volum d'un cilindre pot aproximar-se usant prismes amb un nombre creixent de costats en les seues bases, on el volum de cada prisma és el producte de l'àrea de la seua base per la seua altura (Figura 10.34). Per tant, és d'esperar que aquest resultat continue sent vàlid per al cilindre.

Volum d'un cilindre

El **volum d'un cilindre** (V) la base del qual té àrea A i altura h és igual a $V = A \cdot h$.

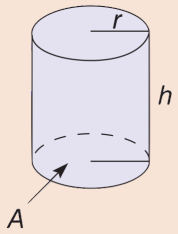


Figura 10.35. Cilindre

Pel *principi de Cavalieri*, la mateixa fórmula s'aplica a cilindres oblics i rectes.

Pel que fa a les piràmides, seguint el raonament que proposa Musser i cols. (2013), començarem determinant el volum d'una piràmide quadrada. Imaginem un cub, i considerem les quatre diagonals des d'un vèrtex particular fins als altres vèrtexs (Figura 10.36). Prenent les diagonals de tres en tres, podem identificar tres piràmides dins del cub.

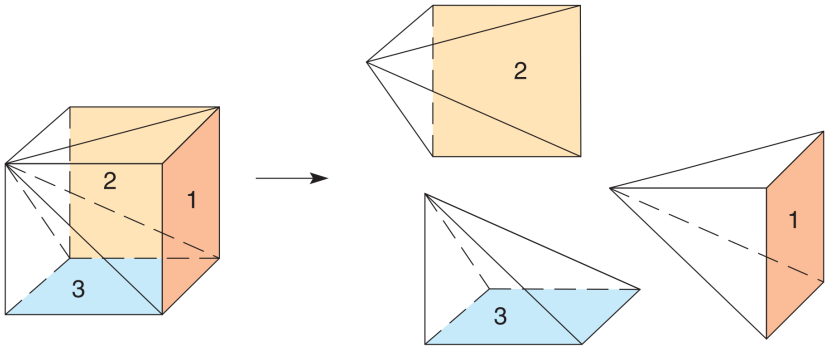


Figura 10.36. Cub dividit en piràmides de base quadrangular (imatge de Musser i cols., 2013)

Per construcció, les tres piràmides són idèntiques en grandària i forma i es creuen només en les cares o arestes, de manera que cada piràmide ompli un terç del cub. Així, el volum de cada piràmide és un terç del volum del cub (o prisma recte quadrangular). Aquest resultat és vàlid en general per a piràmides de qualsevol base, de forma que **volum d'una piràmide és un $1/3$ del volum del prisma recte més petit que la conté.**

Volum d'una piràmide

El **volum d'una piràmide** (V) la base de la qual té àrea A i altura h és igual a $V = \frac{1}{3} \cdot A \cdot h$.

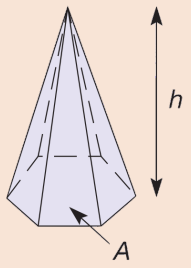


Figura 10.37. Piràmide

Pel *principi de Cavalieri*, la mateixa fórmula s'aplica a piràmides obliqües i rectes.

Activitat 10.14

Calculeu el volum de la piràmide de base hexagonal (regular) de la Figura 10.38. Recordeu que l'hexàgon regular és format per triangles equilàters.

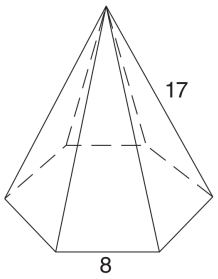


Figura 10.38. Piràmide de base hexagonal

Solució en pàg. 467

Igual que hem fet per al cilindre, podem aproximar el càlcul del volum d'un con a partir d'una seqüència de piràmides en les quals anem augmentant el nombre de costats en la base (Figura 10.39). Atès que el volum de cada piràmide és un $1/3$ del volum del prisma recte més petit que la conté, caldria esperar que el volum d'un con fora un $1/3$ del volum del cilindre més petit que el conté. I així és. És a dir, el volum d'un con és un $1/3$ del producte de l'àrea de la seua base per la seua altura. Aquesta propietat és **vàlida per als cons rectes i oblics**.

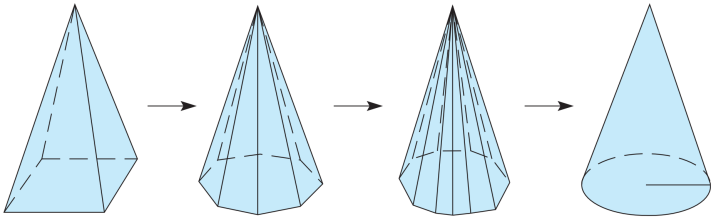


Figura 10.39. Aproximació al càlcul del volum d'un con a partir d'una piràmide

Volum d'un con

El **volum d'un con** (V) la base del qual té àrea A i altura h és igual a $V = \frac{1}{3} \cdot A \cdot h$.

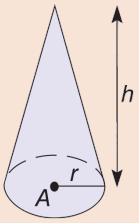


Figura 10.40. Con

! Pel *principi de Cavalieri*, la mateixa fórmula s'aplica a cons oblics i rectes.

En la pàgina 350 ja hem mencionat que Arquimedes va demostrar que tant el volum com la superfície de l'esfera eren ²⁄₃ de la del cilindre més menut que la conté (cilindre amb altura $h = 2 \cdot r$, com hem vist en la Figura 10.25). Ja sabem que el volum del cilindre és:

$$V_{\text{cilindre}} = A_{\text{cercle}} \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot 2 \cdot r = 2 \cdot \pi \cdot r^3$$

Per tant, el volum de l'esfera ha de ser

$$V_{\text{esfera}} = \frac{2}{3} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

Volum d'una esfera

El **volum d'una esfera** (V) de radi r és igual a $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$.

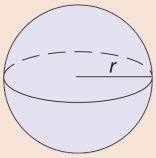


Figura 10.41. Esfera

Activitat 10.15

Calculeu els volums dels cossos que han aparegut en l'Activitat 10.8.

Solució en pàg. 467

Activitat 10.16

Calculeu els volums dels cossos que han aparegut en l'Activitat 10.13.

Solució en pàg. 467

10.5. Activitats complementàries del tema

Activitat 10.17

Un poliedre té 8 cares i 14 arestes. Quin és el nombre de vèrtexs? Quin tipus de poliedre és?

Solució en pàg. 468

Activitat 10.18

Indiqueu si és vertader o fals raonant la resposta:

a) No existeix una piràmide amb 15 arestes.

b) Tots els prismes són poliedres.

c) El cilindre és un poliedre.

d) Tots els paral · lelepípedes són prismes.

e) El desenvolupament pla d'un cos geomètric és únic.

f) Tots els paral · lelepípedes tenen el mateix nombre d'arestes.

g) Els cossos de revolució no tenen arestes.

h) El menor nombre de cares que pot tenir un poliedre és quatre.

i) En un vèrtex d'un poliedre concorren com a mínim tres cares.

j) L'únic poliedre regular les cares del qual són quadrats és l'hexaedre.

Solució en pàg. 468

Activitat 10.19

Completeu:

a) Un cub té _____ angles diedres i _____ angles triedres.

b) Una piràmide octogonal té _____ cares, _____ vèrtexs i _____ arestes.

c) L'icosaedre té _____ cares de forma _____ .

d) En un vèrtex d'un poliedre concorren com a mínim _____ cares.

e) El cos que es genera en girar un semicercle sobre el seu diàmetre es diu _____ .

Solució en pàg. 468

Activitat 10.20

Dibuixeu els desenvolupaments en el pla dels cossos mostrats en la Figura 10.42:

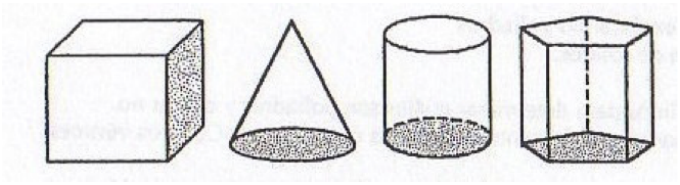


Figura 10.42. Trobeu el seu desenvolupament pla

Activitat 10.21

Es vol posar una etiqueta a un pot de manera que cobrisca la superfície lateral. Si el radi de la base és $5\,cm$ i l'altura del pot és de $20\,cm$, quina forma i quines dimensions haurà de tenir l'etiqueta?

Solució en pàg. 468

Activitat 10.22

Una piconadora arrossega un cilindre de $2'5\,m$ de llarg i el seu radi mesura $80\,cm$.

a) Quin recorregut fa en una volta?

b) Quantes voltes ha de fer per a repassar un tram de carretera de $200\,m$ de llarg per $10\,m$ d'ample?

Solució en pàg. 468

Activitat 10.23

Per a unir totes les arestes d'un cub de cartolina han calgut $216\,cm$ de cinta adhesiva. Quina és la capacitat en litres d'aquest cub?

Solució en pàg. 469

Activitat 10.24

Es té un pot cilíndric de $5\,cm$ de ràdio interior. Si es tapa per un extrem i es tira $1\,L$ d'aigua, quina altura aconseguirà?

Solució en pàg. 469

Activitat 10.25

Calculeu el volum d'una piràmide de $9\,cm$ d'altura, la base de la qual és un rectangle de $4\,cm$ de llarg per $2'5\,cm$ d'ample.

Solució en pàg. 469

Activitat 10.26

El radi de la base d'un cilindre fa $1'5\,cm$ i la seua altura és el doble del seu diàmetre. Calculeu el volum.

Solució en pàg. 469

Activitat 10.27

Una escultura de ferro té la forma d'un prisma quadrat recte coronat per una esfera (Figura 10.43). El metall de cada part de l'escultura té un gruix de $2\,mm$. Si les dimensions són les indicades i la densitat del ferro és de $7'87\,g/cm^3$, calculeu el pes aproximat de l'escultura en quilograms.

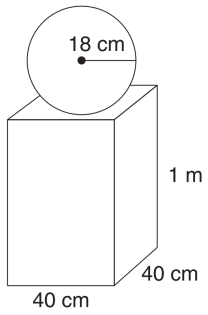


Figura 10.43. Escultura

Solució en pàg. 469

Activitat 10.28

Quants litres caben en un depòsit cilíndric de $15\,m$ de diàmetre i $7\,m$ d'altura?

Solució en pàg. 469

Activitat 10.29

Una esfera ha sigut embalada en una caixa cúbica, l'aresta de la qual fa $20\,cm$, i tal que totes les cares toquen a l'esfera en un sol punt. Calculeu, en cm^3, l'espai buit que s'ha omplit amb embalatge.

Solució en pàg. 469

Activitat 10.30

Trobeu el volum engendrat per un trapezi isòsceles que gira sobre la seua base major de $12\,m$. A més, sabem que l'altra base mesura $7\,m$ i que el costat no paral · lel mesura $9\,m$.

Solució en pàg. 469

Activitat 10.31

Un estany rectangular mesura $20\,m$ de llarg i $12\,m$ d'ample. Una font llança a aquest estany 20 L d'aigua per minut. Quant de temps tarda a elevar-se $80\,cm$ sobre el nivell de l'aigua?

Solució en pàg. 469

Activitat 10.32

Calculeu la màxima quantitat de líquid que pot admetre un embut (de forma cònica) el diàmetre de la qual fa $15\,cm$ i la seua generatriu $20\,cm$.

Solució en pàg. 469

Activitat 10.33

Un depòsit té forma de prisma hexagonal. L'altura del depòsit mesura $2'5\,m$, el costat de la base $1\,m$ i l'apotema $86\,cm$. Quants litres d'aigua pot admetre aquest depòsit?

Solució en pàg. 469

Activitat 10.34

Un vaixell transporta $275\,000\,m^3$ de petroli. A quants camions cisterna pot proveir si cada un té una capacitat per a 150 HL?

Solució en pàg. 470

Activitat 10.35

El diàmetre i la generatriu d'un recipient cònic mesuren cada un $30\,cm$. Trobeu la seua capacitat en litres.

Solució en pàg. 470

Activitat 10.36

El diàmetre d'un depòsit esfèric fa $12\,m$. Quants bidons cilíndrics d'$1\,m$ d'altura i $60\,cm$ de diàmetre podran omplir-se amb el líquid emmagatzemat en el depòsit?

Solució en pàg. 470

Activitat 10.37

Quantes vegades és major el volum d'un cub que té triple aresta que un altre?

Solució en pàg. 470

Referències

Musser, G. L., Peterson, B. E., i Burger, W. F. (2013). *Mathematics for Elementary teachers: A Contemporary Approach* (10th ed.). Wiley.

A

Solucions a les activitats

Solució a l'Activitat 1.1 de la pàg. 2

Totes dues agrupacions són conjunts. Com es posa de manifest en la pàgina 2, no cal que hi haja una propietat característica comuna en els elements d'un conjunt per a considerar-lo com a tals.

Solució a l'Activitat 1.3 de la pàg. 4

Blocs lògics de Dienes				
Descriptors	Forma	Color	Mida	Gruix
Atributs	Quadrat Rectangle Triangle Cercle	Roig Blau Groc	Gran Xicotet	Gruixut Prim
	$4 \times 3 \times 2 \times 2 = 48$ peces			

Figura A.1. Combinació d'atributs dels blocs lògics de Dienes presa de Alsina (2011, p. 40)

Solució a l'Activitat 1.4 de la pàg. 4

1. De llenguatge algebraic a extensió:
   a) A és el conjunt de nombres del 2 al 9. Definit per extensió: $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
   a) B és el conjunt dels múltiples de 2 (o els parells), $B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, \dots\} = \{\text{nombres parells}\}$
2. De llenguatge natural a algebraic:
   a) $C = \{x \in \mathbb{N} : x = 3 \cdot k, k \in \mathbb{N}\}$

a) $D = \{x \in \mathbb{N} : x = 2 \cdot k + 1, k \in \mathbb{N} \text{ i } 0 < x < 20\}$

Solució a l'Activitat 1.5 de la pàg. 5

a) Definits per comprensió utilitzant llenguatge natural:

$$\begin{aligned} A &= \{\text{nombres naturals menors o iguals que } 100\} \\ B &= \{\text{nombres naturals múltiples de 3 menors que } 20\} \\ C &= \{\text{nombres naturals compresos entre 1 i } 4\} \\ D &= \{\text{nombres naturals divisors de } 12\} \end{aligned}$$

b) Definits per extensió:

$$\begin{aligned} A &= \{1, 2, 3, 4, \ldots, 100\} \\ B &= \{3, 6, 9, 12, 15, 18\} \\ C &= \{1, 2, 3, 4\} \\ D &= \{12, 6, 4, 3, 2, 1\} \end{aligned}$$

Solució a l'Activitat 1.6 de la pàg. 7

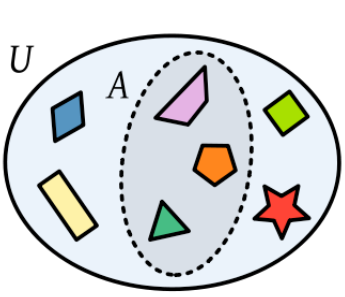
a) Estudiants amb ulls blaus i cabells castanys.

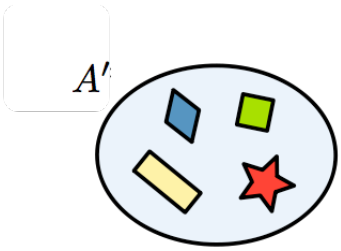
b) Estudiants que no tenen ni ulls blaus, ni cabells castanys ni cabells rulls.

c) Estudiants que tenen cabells rulls, però no tenen ulls blaus o cabells castanys.

Solució a l'Activitat 1.7 de la pàg. 8

$\overline{A} = \{\text{rombe, rectangle, quadrat i estrela}\}$, és a dir:





Solució a l'Activitat 1.8 de la pàg. 9

Aquests conjunts són diferents tots tres entre ells. Ja que el conjunt $\varnothing$ és el conjunt buit, que no conté cap element. En canvi, el conjunt $\{\varnothing\}$ és un conjunt format per un element (el buit), però $\{\varnothing\} \neq \varnothing$, ja que el primer conté un element i el segon cap element. Finalment, el conjunt $\{0\}$ és el conjunt format pel nombre zero, que no és buit. A més, cal tenir clar que $\{\varnothing\} \neq \{0\}$, ja que els elements que componen els dos conjunts són diferents.

Solució a l'Activitat 1.9 de la pàg. 11

Efectivament, els conjunts A i B són disjunts perquè representen els conjunts de nombres parells i imparells, que no tenen cap element en comú (no hi ha cap nombre que siga parell i imparell a la vegada).

Solució a l'Activitat 1.10 de la pàg. 12

a) i) $15 \in A$
   ii) $D \subseteq A$
   iii) $\{a, e, o\} \subseteq B$
   iv) $E \nsubseteq B$
   v) $z \notin B$
   vi) maig $\notin C$

b) Per exemple, podríem inventar les següents relacions:

- Si $F = \text{vocals} \Longrightarrow F = B$
- Si $G = \{13, 15\} \Longrightarrow G \subseteq D, G \subseteq A$
- $a \in F$, $15 \in G$
- $t \notin F$, $12 \notin A$

c) A continuació mostrem els universos i els complementaris:

- Per a A:
  $U = \{\text{nombres imparells}\}$ i per tant, $\overline{A} = \{\text{nombres imparells menors que } 10\}$
- Per a B:
  $U = \{\text{lletres de l'abecedari}\}$ i per tant, $\overline{B} = \{\text{consonants}\}$
- Per a C:
  $U = \{\text{mesos de l'any}\}$ i per tant, $\overline{C} = \{\text{maig, juny, juliol, agost}\}$

Solució a l'Activitat 1.11 de la pàg. 12

a) $A \subseteq U$: **V**, ja que per definició U és el conjunt universal on es troba A.

b) Si $k \in A \Longrightarrow k \in B$: **V**, ja que per definició $A \subseteq B$, i, per tant, tot element de A és necessàriament en B.

c) $\varnothing \subseteq A$: **V**, el vuit forma part de tot conjunt

d) $A \subseteq C$: **V**, ja que per a qualsevol element $a \in A \Longrightarrow a \in B$ (per tant $A \subseteq B$). A més, si $a \in B \Longrightarrow a \in C$ (per tant $B \subseteq C$). Així, raonant igual per a tots els elements de A, tindríem que tots els elements de A són en C, és a dir, $A \subseteq C$.

Solució a l'Activitat 1.12 de la pàg. 14

a) $\{a, b\} \cup \{c, d, e\} = \{a, b, c, d, e\}$

b) $\{1, 2, 3, 4, 5\} \cup \varnothing = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

c) $\{m, n, q\} \cup \{m, n, p\} = \{m, n, p, q\}$

Solució a l'Activitat 1.13 de la pàg. 15

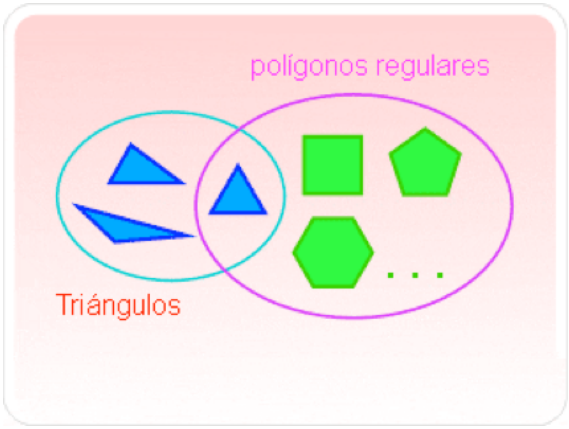


Figura A.2. Resultat de la intersecció del conjunt de les figures poligonals regulars amb el conjunt de triangles

Solució a l'Activitat 1.14 de la pàg. 15

a) $\{a, b, c\} \cap \{b, d, f\} = \{b\}$

b) $\{a, b, c\} \cap \{a, b, c\} = \{a, b, c\}$

c) $\{a, b\} \cap \{c, d\} = \varnothing$

Solució a l'Activitat 1.15 de la pàg. 16

a) $\{a, b, c\} \backslash \{b, d\} = \{a, c\}$

b) $\{a, b, c\} \backslash \{e\} = \{a, b, c\}$

c) $\{a, b, c, d\} \backslash \{b, c, d\} = \{a\}$

Solució a l'Activitat 1.16 de la pàg. 17

$A \times B = \{(samarreta, roig), (samarreta, blau), (samarreta, groc),$
$(pantalons, roig), (pantalons, blau), (pantalons, groc)\}$

Solució a l'Activitat 1.17 de la pàg. 17

a) $\{x, y, z\} \times \{m, n\} = \{(x, m), (x, n), (y, m), (y, n), (z, m), (z, n)\}$

b) $\{7\} \times \{a, b, c\} = (7, a), (7, b), (7, c)$

Solució a l'Activitat 1.18 de la pàg. 18

a) Per exemple: $A = \{1\}$ i $B = \{2, 3, 4, \dots\}$. També $A = \{\text{nombres primers}\}$ i $B = \{\text{nombres compostos}\}$. També $A = \{\text{nombres parells}\}$ i $B = \{\text{nombres imparells}\}$

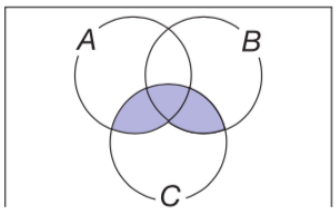
b) Només quan els dos conjunts són el mateix conjunt.

c) Dos conjunts amb el mateix nombre d'elements són iguals: FALS

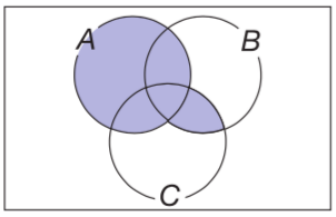
d) Dos conjunts només poden ser iguals o disjunts: FALS, poden compartir només alguns elements o ser un subconjunt de l'altre.

e) Si A i B són disjunts llavors $A \backslash B = A$: VERTADER.

Solució a l'Activitat 1.19 de la pàg. 18



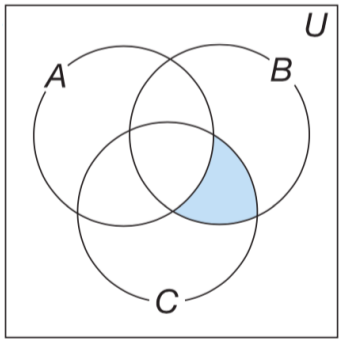
a) $(A \cup B) \cap C$



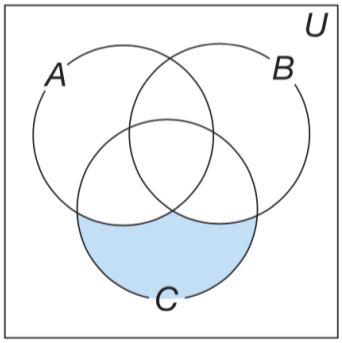
b) $A \cup (B \cap C)$

L'ordre dels parèntesis no és irrellevant.

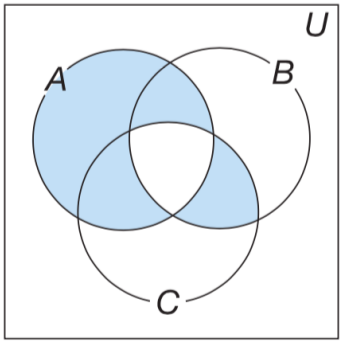
Solució a l'Activitat 1.20 de la pàg. 18



a) $(B \cap C) \backslash A$



b) $C \backslash (A \cup B)$



c) $[A \cup (B \cap C)] \backslash (A \cap B \cap C)$

Solució a l'Activitat 1.21 de la pàg. 20

Si A i B són disjunts, $A \cap B = \varnothing \Longrightarrow |A \cap B| = 0$. Per tant, la fórmula quedaria

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = |A| + |B| - 0 = |A| + |B|$$

Solució a l'Activitat 1.22 de la pàg. 22

a) 7

b) 19

c) 49

Solució a l'Activitat 1.23 de la pàg. 23

Són correspondències totes aquelles fletxes que facen referència a una "regla" que faça correspondre a elements del primer conjunt un altre element del segon conjunt. És a dir, la direccionalitat importa. Per tant, són correspondències: "a", "b", "c" i "e".

Solució a l'Activitat 1.24 de la pàg. 24

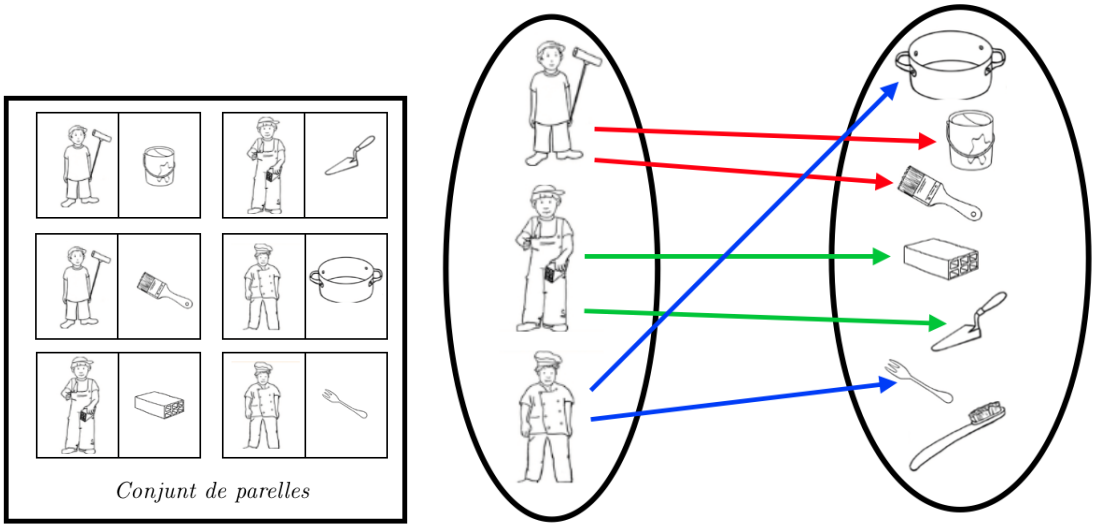


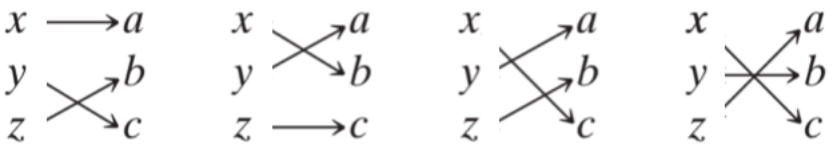
Figura A.3. Esquerra: Conjunt de parelles que conforma la correspondència. *Dreta:* la mateixa correspondència indicada amb fletxes sobre els conjunts originals

Solució a l'Activitat 1.25 de la pàg. 25

Només és bijectiva la correspondència b).

Solució a l'Activitat 1.28 de la pàg. 26

a) Quatre correspondències un a un:



b) Amb llenguatge algebraic:

(a) $C_1 = \{(x,a),(y,c),(z,b)\}$
(b) $C_2 = \{(x,b),(y,a),(z,c)\}$
(c) $C_3 = \{(x,c),(y,a),(z,b)\}$
(d) $C_1 = \{(x,c),(y,b),(z,a)\}$

c) Hi ha 6 correspondències un a un de A en B i altres 6 de B en A diferents.

Solució a l'Activitat 1.29 de la pàg. 27

a) $n \longrightarrow n+1$. És una correspondència un a un entre els hostes de l'hotel i les habitacions (començant en la segona).

b) $n \longrightarrow n+40$

c) Si fem aquest moviment amb els hostes, $n \longrightarrow 2n$, quedarien infinites habitacions lliures. També podríem fer ús del conjunt d'imparells o de nombres primers.

Solució a l'Activitat 1.30 de la pàg. 28

a) v pertany al conjunt M: $v \in M$

b) El conjunt T conté com a subconjunt al conjunt H: $H \subset T$

c) Entre els elements del conjunt G no hi ha el nombre 2: $2 \notin G$

d) El conjunt Z no és un subconjunt del conjunt A: $Z \not\subset A$

e) El conjunt X no conté el conjunt K: $K \notin X$

f) El conjunt H és un subconjunt del conjunt K: $H \subset K$

Solució a l'Activitat 1.31 de la pàg. 28

Aquestes són algunes possibles solucions:

a) $\{\text{juny, juliol, agost}\} \subseteq \{\text{mesos de l'any}\}$

b) $\{6, 12, 18, 30\} \subseteq \{\text{nombres parells}\}$

c) $\{1, 7\} \subseteq \{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$

d) $\{a, b, c, d, f\} \subseteq \{a, b, c, d, e, f, g\}$

Solució a l'Activitat 1.32 de la pàg. 28

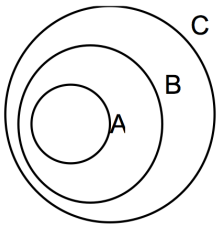
Aquestes són algunes possibles solucions:

a) $\{\text{nombres naturals d'una xifra}\} \subseteq \{\text{nombres naturals menors que 100}\}$

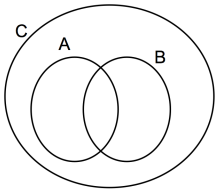
b) $\{a, b, c, d, e, f, g\} \subseteq \{\text{lletres de l'abecedari valencià}\}$

Solució a l'Activitat 1.33 de la pàg. 29

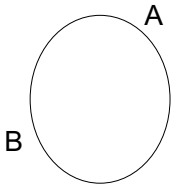
a) $A \subset B$; $B \subset C$



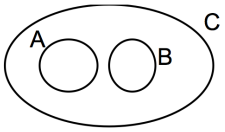
b) $A \subset C$; $B \subset C$



c) $A \subset B$; $B \subset A$



d) $A \subset C$; $B \subset C$; $A \cap B = \varnothing$



Solució a l'Activitat 1.34 de la pàg. 29

a) $X = E$

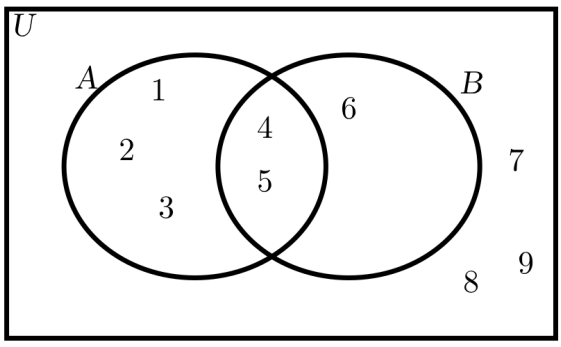
b) $X = D$

c) $X = E$ o $X = C$

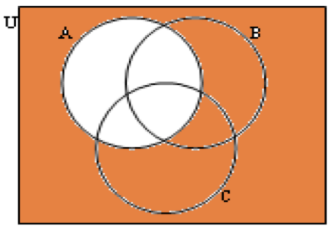
d) $X = D$

Solució a l'Activitat 1.35 de la pàg. 29

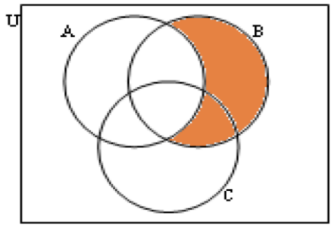
- $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
- $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $B = \{4, 5, 6\}$



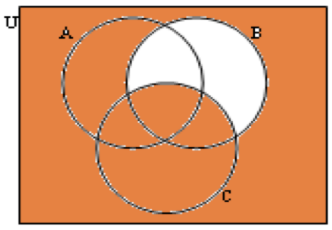
Solució a l'Activitat 1.36 de la pàg. 29



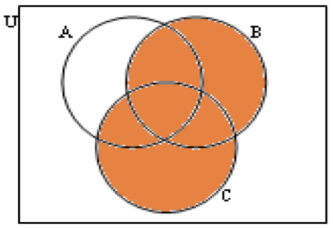
a) $\overline{A}$



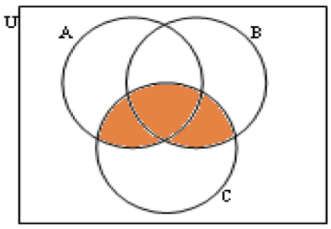
b) $\overline{A} \cap B$



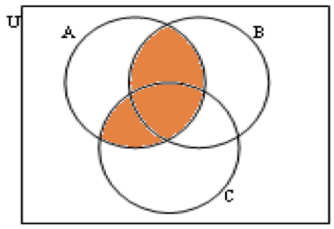
c) $C \cup \overline{B}$



d) $\overline{(\overline{B} \cap \overline{C})}$



e) $(A \cup B) \cap C$



f) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

Solució a l'Activitat 1.37 de la pàg. 30

a) $\overline{A} = \{7, 8, 9\}$

b) $\overline{B} = \{1, 2, 6, 7, 8, 9\}$

c) $\overline{C} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

d) $\overline{E} = \varnothing$

e) $\overline{A} \cap B = \varnothing$

f) $\overline{A} \cup B = \{3, 4, 5, 7, 8, 9\}$

g) $A \cap \overline{B} = \{1, 2, 6\}$

h) $A \cup \overline{B} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

i) $C \cup \overline{D} = \{1, 2, 3, 6, 7, 8, 9\}$

j) $C \cap \overline{D} = \{8, 9\}$

k) $\overline{C} \cap D = \{4, 5\}$

l) $\overline{B} \cup \overline{D} = \{1, 2, 3, 6, 7, 8, 9\}$

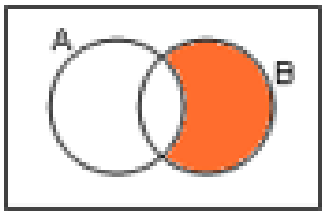
m) $\overline{B} \cap \overline{D} = \{1, 2, 8, 9\}$

n) $\overline{(\overline{B} \cap \overline{D})} = \{3, 4, 5, 6, 7\}$

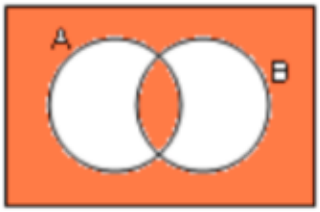
o) $\overline{(\overline{B} \cup \overline{D})} = \{4, 5\}$

p) $A \triangle B =$

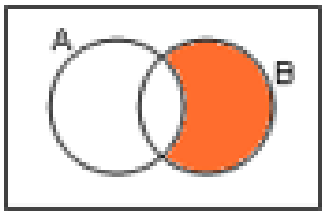
Solució a l'Activitat 1.38 de la pàg. 30



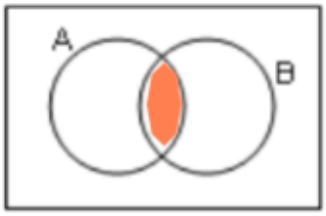
a) $B \setminus (A \cap B)$



b) $\left(A \cup \overline{B}\right) \setminus (A \setminus B)$



c) $\overline{A} \setminus \overline{B}$



d) $(A \cup B) \cap \left(A \cup \overline{B}\right) \cap \left(\overline{A} \cup B\right)$

Solució a l'Activitat 1.39 de la pàg. 31

- Per extensió:

$$A \times B = \{(m,a),(m,e),(m,i),(m,o),(m,u),$$
$$(s,a),(s,e),(s,i),(s,o),(s,u),(t,a),(t,e),(t,i),(t,o),(t,u)\}$$

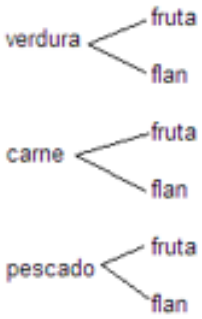
- Per comprensió:

$$A \times B =$$
$$= \{\text{síl} \cdot \text{labes que es poden formar començant per } m,\ s \text{ o } t \text{ i acabant en vocal}\}$$

Solució a l'Activitat 1.40 de la pàg. 31

	Camisa blanca	**Camisa groga**	**Camisa roja**
Pantalons blaus	P. blaus i c. blanca	P. blaus i c. groga	P. blaus i c. roja
Pantalons negres	P. negres i c. blanca	P. negres i c. groga	P. negres i c. roja

Solució a l'Activitat 1.41 de la pàg. 31



Solució a l'Activitat 1.42 de la pàg. 31

$A = \{33, 36, 39, 42, 45, 48\}$ i $B = \{3, 4\}$. $A \times B = \{(33, 3), (33, 4), (36, 3), (36, 4), \dots\}$ i $B \times A = \{(3, 33), (4, 33), (3, 36), (4, 36), \dots\}$. $A \times B$ és diferent de $B \times A$. Perquè $A \times B = B \times A$ els conjunts A i B han de ser iguals.

Solució a l'Activitat 1.43 de la pàg. 31

i. Quants xiquets van ser enquestats?
Resposta: $7 + 5 + 10 + 3 = 25$ xiquets $\Longrightarrow |U| = 25$

ii. Quants xiquets no van menjar postres?
Resposta: 3 xiquets $\Longrightarrow |(\overline{F \cup G})| = 3$

iii. Quants xiquets van menjar dues postres: fruita i gelat?
Resposta: 5 xiquets $\Longrightarrow |F \cap G| = 5$

iv. Quants xiquets van menjar gelat?
Resposta: $10 + 5$ xiquets $\Longrightarrow |G| = 15$

v. Quants xiquets van menjar solament gelat?
Resposta: 10 xiquets $\Longrightarrow |G \backslash (F \cap G)| = 10$

vi. Quants xiquets no van menjar fruita?
Resposta: $10 + 3 = 13$ xiquets $\Longrightarrow |(G \backslash F) \cup (\overline{F \cup G})| = 13$

vii. Quants xiquets van menjar solament un dels dos plats?
Resposta: $7 + 10 = 17$ xiquets $\Longrightarrow |(F \backslash G) \cup (G \backslash F)| = 17$

viii. Quants xiquets van menjar fruita?
Resposta: $7 + 5 = 12$ xiquets $\Longrightarrow |F| = 12$

ix. Quants xiquets van menjar algun plat: o fruita o gelat o tots dos? Coincideix amb la suma dels cardinals dels conjunts de xiquets que van menjar fruita més el dels que van menjar gelat? Per què?
Resposta:

- El conjunt de xiquets que han menjat algunes postres és representat per $F \cup G$. No obstant això, si calculem directament la suma dels cardinals dels conjunts de xiquets que van menjar fruita (F) més el dels que van menjar gelat (G), tenim:
  $|F| + |G| = 27$
- Aquest resultat, tanmateix, no coincideix amb el resultat que extraiem del gràfic, ja que els xiquets que han menjat algun plat l'obtenim com la suma de $7 + 5 + 10 = 22$ xiquets, $\Longrightarrow |(F \backslash G) \cup (F \cap G) \cup (G \backslash F)| = 22$

Aquests dos càlculs no coincideixen perquè en el conjunt $A \cup B$ comptem **dues vegades** els xiquets que van prendre dues postres ($A \cap B$).

x. Escriu una fórmula general per a calcular el cardinal de la unió de dos conjunts:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Solució a l'Activitat 1.44 de la pàg. 32

- $|N| = 20$
- $|N \backslash F| = 8$
- $|N \cup F| = 40$

Solució a l'Activitat 2.1 de la pàg. 38

La coordinació de conjunts. En particular, la correspondència un a un entre el conjunt d'ovelles i les mosses fetes en el bastó garanteixen que la quantitat d'ovelles no canvie.

Solució a l'Activitat 2.5 de la pàg. 39

La base de l'agrupament és 5. L'avantatge que fa que aquests mètodes de representació continuen usant-se en els nostres dies és la utilitat a l'hora de mantenir un comptatge no finalitzat.

Solució a l'Activitat 2.7 de la pàg. 42

La quantitat *tretze* la representem com a
I I I I I I I I I I I I I
Podem inventar, per exemple:

I I I = ○

D'aquesta forma: ~~**III**~~ ~~**III**~~ ~~**III**~~ ~~**III**~~**I** ho escriuríem com a ○ ○ ○ ○ **I**
Com que el sistema volem que siga d'agrupament múltiple, faríem un altre canvi com aquest:

○○○ = □

Així, ○ ○ ○ ○ **I** seria igual a escriure:

□ ○ **I**

En aquest cas, fem ús d'aquests canvis:

- **I** $= 1 = 3^0$
- **I I I** $=$ ○ $= 3^1$
- ○○○ $=$ □ $= 9 = 3^2$

Solució a l'Activitat 2.10 de la pàg. 42

1. A quin tipus de sistema de numeració es correspon? Agrupació múltiple
2. Quina és la base de l'agrupament? Base deu
3.  = 143 022.

Solució a l'Activitat 2.11 de la pàg. 43

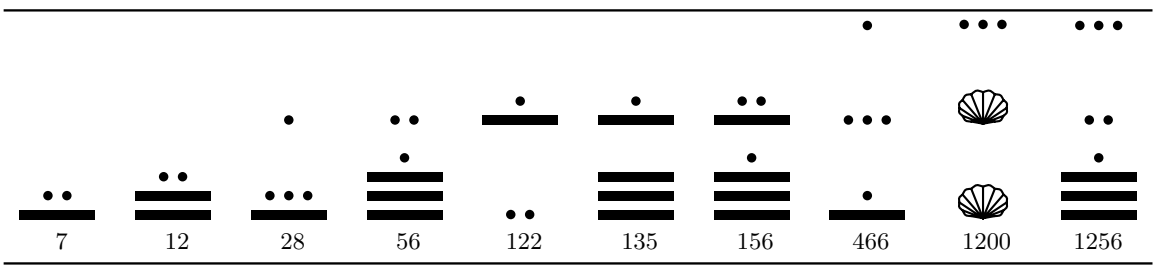
En el sistema decimal oral, el 102 s'enuncia com a *cent dos*, ometent el multiplicador de les desenes. Des del punt de vista didàctic, aquest fet generarà problemes en passar al sistema de numeració escrit, perquè no hi ha cap indicatiu d'aquest *zero*. És per això que, com veurem, l'ús de materials com l'àbac ajuda a sistematitzar l'escriptura de quantitats.

Solució a l'Activitat 2.14 de la pàg. 45

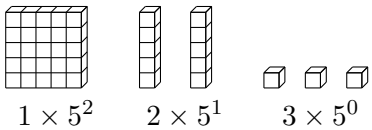
La quantitat *tretze* la representem com a

Grups de grups de 3 (□)	**Grups de 3** (○)	**I**
1	1	1

Solució a l'Activitat 2.15 de la pàg. 50



Solució a l'Activitat 2.17 de la pàg. 51



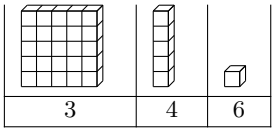
1×5^2 $\quad$ 2×5^1 $\quad$ 3×5^0

25 $\quad$ 10 $\quad$ 3

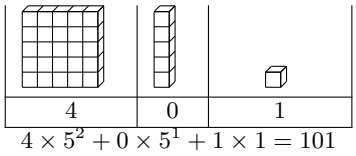
$$25 + 10 + 3 = 38$$

Solució a l'Activitat 2.18 de la pàg. 51

Inicialment podríem agrupar i obtenir



Però hem d'adonar-nos que som en base 5 i, per tant, les agrupacions s'han de fer de 5 en 5. Per tant, fent les corresponents agrupacions obtindríem:

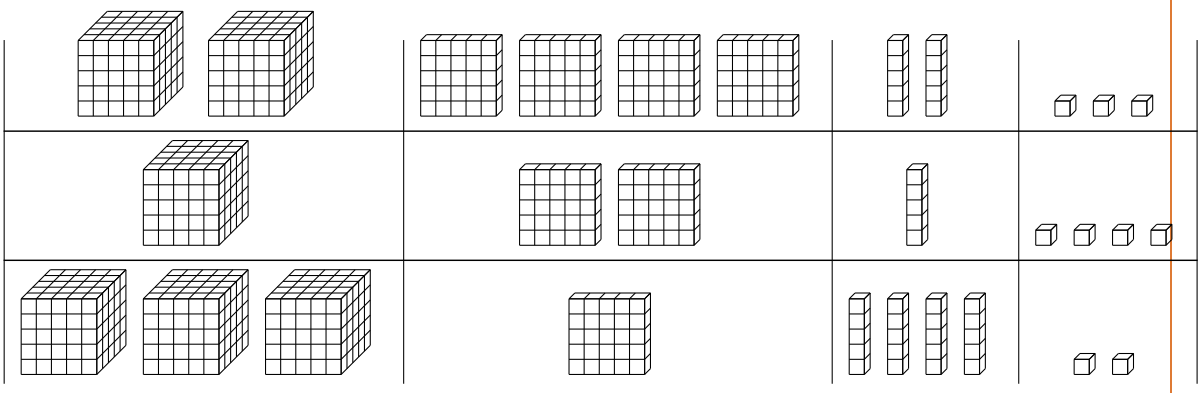


$$4 \times 5^2 + 0 \times 5^1 + 1 \times 1 = 101$$

És a dir, el nombre l'escriuríem com a $401_{(5}$ i correspondria a la quantitat 101 en base 10.

Solució a l'Activitat 2.19 de la pàg. 52

Fent els canvis corresponents tindríem com a resultat el que apareix en la tercera fila d'aquesta graella:



Si ho férem amb el sistema xifrat en base 5, tindríem els següents passos:

$$\begin{array}{rrrrr} & 2 & 4 & 2 & 3 \\ + & 1 & 2 & 1 & 4 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{rrrrr} & 2 & 4 & 2 & 3 \\ + & 1 & 2 & 1 & 4 \\ \hline & & & & 7 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrrr} & & & 1 & \\ & 2 & 4 & 2 & 3 \\ + & 1 & 2 & 1 & 4 \\ \hline & & & & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrrr} & & & \not{1} & \\ & 2 & 4 & 2 & 3 \\ + & 1 & 2 & 1 & 4 \\ \hline & & & 4 & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} & & \not{1} & \\ & 2 & 4 & 2 & 3 \\ + & 1 & 2 & 1 & 4 \\ \hline & & 6 & 4 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} & 1 & & \not{1} & \\ & 2 & 4 & 2 & 3 \\ + & 1 & 2 & 1 & 4 \\ \hline & & 1 & 4 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} & \not{1} & & \not{1} & \\ & 2 & 4 & 2 & 3 \\ + & 1 & 2 & 1 & 4 \\ \hline & 4 & 1 & 4 & 2 \end{array}$$

Així, $2423_{(5} + 1214_{(5} = 3142_{(5}$

Solució a l'Activitat 2.22 de la pàg. 54

Van de Walle, Karp, i Bay-William (2016) indiquen que les subtraccions amb zeros en el minuend són una font d'errors en usar l'algoritme *amprar*. Referent a això, aconsellen abordar explícitament aquesta classe d'operacions en la fase de modelització amb manipulatius. En aquest cas la dificultat sorgeix quan trobem un zero en l'ordre de magnitud superior del minuend.

Solució a l'Activitat 2.24 de la pàg. 54

$$\begin{array}{r} 29\text{A}\,6\,2_{(12} \\ +72\,4\,3\text{B}_{(12} \\ \hline 130\,4\text{A}\,1_{(12} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 23451_{(7} \\ +15642_{(7} \\ \hline 42423_{(7} \end{array}$$

(a) *(b)*

Solució a l'Activitat 2.25 de la pàg. 58

a) $53_{(10} = 110101_{(2}$

$$\begin{array}{r|l} 53 & 2 \\ \hline 4 & 26 \\ \hline 13 & \\ 12 & \\ \hline 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 26 & 2 \\ \hline 2 & 13 \\ \hline 06 & \\ 6 & \\ \hline 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 13 & 2 \\ \hline 12 & 6 \\ \hline 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 6 & 2 \\ \hline 6 & 3 \\ \hline 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 3 & 2 \\ \hline 2 & 1 \\ \hline 1 & \end{array}$$

2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
1	1	0	1	0	1

En forma de divisió repetida:

$$\begin{array}{r|l} 53 & 2 \\ \hline 40 & 26 \\ \hline 13 & 20 \\ 12 & 6 \\ \hline 1 & 6 \\ 0 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 26 & 2 \\ \hline 13 & 13 \\ 12 & 6 \\ \hline 1 & 6 \\ 0 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 13 & 2 \\ \hline 12 & 6 \\ \hline 1 & 6 \\ 0 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 6 & 2 \\ \hline 6 & 3 \\ \hline 0 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 3 & 2 \\ \hline 2 & 1 \\ \hline 1 & \end{array} \quad \longleftarrow$$

$53 = 110101_{(2}$

b) $6635_{(10} = 3A0B_{(12}$

$$\begin{array}{r|l} 6635 & 12 \\ \hline -60 & 552 \\ \hline 63 & \\ -60 & \\ \hline 35 & \\ -24 & \\ \hline 11 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 552 & 12 \\ \hline -48 & 46 \\ \hline 72 & \\ -72 & \\ \hline 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 46 & 12 \\ \hline -36 & 3 \\ \hline 10 & \end{array}$$

12^3	12^2	12^1	12^0
3	A	0	B

En forma de divisió repetida:

$$\begin{array}{r|l} 6635 & 12 \\ \hline 6000 & 552 \\ \hline 635 & 480 \\ \hline 600 & 72 \\ \hline 35 & 72 \\ \hline 24 & 0 \\ \hline 11 & \\ \downarrow & \\ B & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 552 & 12 \\ \hline 480 & 46 \\ \hline 72 & 36 \\ \hline 72 & \\ \hline 0 & \\ \downarrow & \\ A & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 46 & 12 \\ \hline 36 & 3 \\ \hline 10 & \end{array}$$

$6635 = 3\text{A0B}_{(12}$ $\longleftarrow$

c) $97_{(10} = 342_{(5}$

$$\begin{array}{r|l} 97 & 5 \\ \hline -5 & 19 \\ \hline 47 & \\ -45 & \\ \hline 2 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 19 & 5 \\ \hline -15 & 3 \\ \hline 4 & \end{array}$$

5^2	5^1	5^0
3	4	2

En forma de divisió repetida:

$$\begin{array}{r|l} 97 & 5 \\ \hline 50 & 19 \\ \hline 47 & 15 \\ \hline 45 & 4 \\ \hline 2 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 19 & 5 \\ \hline 15 & 3 \\ \hline 4 & \end{array}$$

$97 = 342_{(5}$ $\longleftarrow$

Solució a l'Activitat 2.26 de la pàg. 59

a) $11011_{(2} = 27_{(10}$

$$\begin{array}{r} 11011_{(2} \\ 1\cdot 2^0 = 1 \\ 1\cdot 2^1 = 2 \\ 0\cdot 2^2 = 0 \\ 1\cdot 2^3 = 8 \\ 1\cdot 2^4 = 16 \\ \hline 27 \end{array}$$

b) $1234_{(8} = 668_{(10}$

$$\begin{array}{r} 1234_{(8} \\ 4\cdot 8^0 = 4 \\ 3\cdot 8^1 = 24 \\ 2\cdot 8^2 = 128 \\ 1\cdot 8^3 = 512 \\ \hline 668 \end{array}$$

c) $1AB_{(12} = 275_{(10}$

$$\begin{array}{r} 1AB_{(12} \\ B\cdot 12^0 = 11 \\ A\cdot 12^1 = 120 \\ 1\cdot 12^2 = 144 \\ \hline 275 \end{array}$$

Solució a l'Activitat 2.27 de la pàg. 59

No, ja que en la base 8 fem servir 8 xifres com a màxim. És a dir, no podem escriure 8 grups de vuits, l'escriptura correcta seria: $105_{(8}$.

Solució a l'Activitat 2.28 de la pàg. 59

El nombre en base 3 s'escriuria com a $1010111_{(3}$, que equival a $823_{(10}$; per tant,

$$\begin{array}{rl} 1010111_{(3} & \\ 1\cdot 3^0 = & 1 \\ 1\cdot 3^1 = & 3 \\ 1\cdot 3^2 = & 9 \\ 0\cdot 3^3 = & 0 \\ 1\cdot 3^4 = & 81 \\ 0\cdot 3^5 = & 0 \\ 1\cdot 3^6 = & 729 \\ & \overline{823} \end{array}$$

I en passar $823_{(10}$ a base 9 obtenim $1114_{(9}$, ja que

$$\begin{array}{rrrr|l} 823 & & & & 9 \\ \hline 810 & 91 & & & 9 \\ \hline 13 & 90 & 10 & & 9 \\ \hline 9 & 1 & 9 & 1 & \\ \hline 4 & & 1 & & \end{array} \quad \longleftarrow$$

$823 = 1114_{(9}$

Solució a l'Activitat 2.29 de la pàg. 59

a) $B6_{(16} = 182_{(10}$, ja que

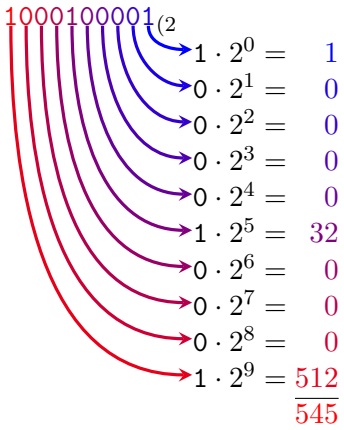
$$\begin{array}{rl} B6_{(16} & \\ 6\cdot 16^0 = & 6 \\ B\cdot 16^1 = & 176 \\ & \overline{182} \end{array}$$

b) $34ABC_{(13} = 478A4_{(12}$, ja que

$$\begin{array}{rl} 34ABC_{(13} & \\ C\cdot 13^0 = & 12 \\ B\cdot 13^1 = & 143 \\ A\cdot 13^2 = & 1690 \\ 4\cdot 13^3 = & 8788 \\ 3\cdot 13^4 = & 85683 \\ & \overline{96316} \end{array}$$

En passar a base 12 obtenim que $96316 = 478A4_{(12}$

c) $1000100001_{(2} = 1041_{(8}$, ja que



En passar a base 8 obtenim que

$$\begin{array}{r|l} 545 & 8 \\ \cline{2-2} 480 & 68 \\ \cline{1-1} 65 & 64 \\ \cline{1-1} 64 & 4 \\ \cline{1-1} 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 8 & \\ \cline{2-2} 8 & \\ \cline{2-2} 8 & 8 \\ \cline{2-2} 8 & 1 \\ \cline{2-2} 0 & \end{array} \quad \longleftarrow$$

$545 = 1041_{(8}$

Solució a l'Activitat 2.32 de la pàg. 61

a) Incorrectes: $143_{(4}$ i $205_{(3}$ perquè contenen xifres iguals o superiors a la base

b) $28_{(9} < 131 < 607_{(8}$

c) $131 = JQ_{(12}$, amb $J = 10$ i $Q = 11$; $607_{(8} = 295_{(12}$.

Solució a l'Activitat 2.33 de la pàg. 61

Anterior	Nombre	Següent
$11_{(2}$	$100_{(2}$	$101_{(2}$
$\beta\beta\alpha_{(13}$, sent $\alpha = 10$ i $\beta = 11$	$\beta\beta\beta_{(13}$, sent $\beta = 11$	$\beta\beta\gamma_{(13}$, sent $\beta = 11$ i $\gamma = 12$
$66_{(7}$	$100_{(7}$	$101_{(7}$
$9_{(11}$	$J_{(11}$, sent $J = 10$	$10_{(11}$
9908	9909	9910

Solució a l'Activitat 2.34 de la pàg. 62

a) Trie el nombre més petit de 6 xifres en base 5 perquè crec que és el més senzill: $100000_{(5} = 5^5 = 3125$

b) $100000_{(5}, 100001_{(5}, 100002_{(5}, 100003_{(5}, 100004_{(5}, 100010_{(5}, 100011_{(5}$

Solució a l'Activitat 2.35 de la pàg. 62

a) $\alpha 3_{(12} == 1111011_{(2}$, sent $\alpha = 10$

b) $47_{(9} = 1121_{(3}$

c) $324 = 1\beta\gamma_{(13}$, sent $\beta = 11$ i $\gamma = 12$

Solució a l'Activitat 2.36 de la pàg. 62

a) Nombre més gran de quatre xifres en base $5 = 4444_{(5}$ perquè 4 és la xifra de major valor en base 5.

b) Nombre més petit de quatre xifres en base $5 = 1000_{(5}$ perquè en la primera posició hi ha l'1 que és la menor xifra significativa i la resta zeros perquè siga el menor possible.

Solució a l'Activitat 2.37 de la pàg. 62

Des del $100_{(3}$ fins al $222_{(3}$ tots dos inclusivament. Per a saber quants n'hi ha, calculem la diferència (passant a base 10) i ixen 18 números.

Solució a l'Activitat 2.38 de la pàg. 62

$45_{(6}, 50_{(6}, 51_{(6}, 52_{(6}, 53_{(6}, 54_{(6}, 55_{(6}, 100_{(6}, 101_{(6}102_{(6}, 103_{(6}$

Solució a l'Activitat 2.39 de la pàg. 62

a) Sistema de numeració de base 5 ($n = 5$).

b) Sistema de numeració de base 8 ($n = 8$).

c) Sistema de numeració de base 8 ($n = 8$).

Solució a l'Activitat 3.1 de la pàg. 72

a) Quines diferències trobeu en la forma en què cada estudiant respon a la pregunta? En la primera resposta la estudiant d'infantil utilitza un esquema del tipus *comptar-ho tot*. Crea una col · lecció de 7 elements, després una altra de 4, i finalment, torna a efectuar un comptatge sobre tot el conjunt resultant. En canvi, la segona de les estratègies és més operativa, en el sentit que l'estudiant només *compta cap avant* seguint la seqüència numèrica des del nombre en què ha acabat el primer comptatge *8, 9, 10 i 11*.

b) Amb quina concepció dels nombres naturals relacioneu cada una de les respostes donades pels estudiants? La primera estratègia estaria lligada amb una concepció cantoriana dels nombres, en què, per exemple, el 7 és representat per un conjunt de 7 elements. La segona estratègia està relacionada amb la concepció de Peano, en

què els nombres formen una seqüència estructurada i ordenada.

Solució a l'Activitat 3.2 de la pàg. 73

La suma no pot ser definida amb conjunts no disjunts, ja que $card(A \cup B) \neq card(A) + card(B)$, perquè tenen elements comuns. A continuació un exemple:

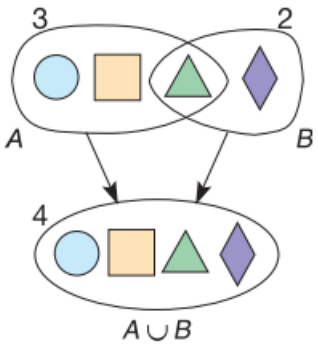


Figura A.4. Exemple amb conjunts no disjunts del fet que $card(A \cup B) \neq card(A) + card(B)$ (figura extreta de Musser, Peterson, i Burger, 2013)

Solució a l'Activitat 3.3 de la pàg. 74

	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1
Base 10	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Base 5	0	1	2	3	4	10	11	12	13	14	20	21	22	23
Base 6	0	1	2	3	4	5	10	11	12	13	14	15	20	21

Solució a l'Activitat 3.6 de la pàg. 75

Un possible enunciat seria: "*Si Larry té 7 euros i Judy té 3 euros, quants euros té més Larry que Judy?*". La manera de resoldre el problema correspon amb una coordinació de conjunts, on el nombre d'elements que sobra és el nombre que busquem: $7 - 3 = 4$ més. La diferència amb la definició de resta amb el model de Cantor és que en aquest cas un conjunt no està contingut dins de l'altre, com en la definició estàndard.

Solució a l'Activitat 3.7 de la pàg. 77

Aquests diagrames serveixen per a modelitzar també la multiplicació de nombres naturals. El diagrama representa la multiplicació 2×3. Obtenim les parelles, com en l'Exemple 3.6. Aquests diagrames són molt usats en el càlcul de probabilitats.

Solució a l'Activitat 3.8 de la pàg. 79

a) Base 10

×	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27

b) Base 6

×	0	1	2	3	4	5
3	0	3	10	13	20	23

Solució a l'Activitat 3.9 de la pàg. 79

a) 241×3 en base 10.

$$\begin{array}{rrrr} & 2 & 4 & 1 \\ \times & & & 3 \\ \hline & & & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrr} & 2 & 4 & 1 \\ \times & & & 3 \\ \hline & & 2 & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrr} & 1 & & \\ & 2 & 4 & 1 \\ \times & & & 3 \\ \hline & 7 & 2 & 3 \end{array}$$

b) $241_{(6} \times 3_{(6}$ en base 6.

$$\begin{array}{rrrr} & 2 & 4 & 1_{(6} \\ \times & & & 3_{(6} \\ \hline & & & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrr} & 2 & & \\ & 2 & 4 & 1_{(6} \\ \times & & & 3_{(6} \\ \hline & & 0 & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrr} & 2 & & \\ & 2 & 4 & 1_{(6} \\ \times & & & 3_{(6} \\ \hline 1 & 2 & 0 & 3_{(6} \end{array}$$

c) Tenim que $241_{(6} \times 3_{(6} = 1203_{(6}$, passem cada part de la igualtat a base 10 i mirem si coincideix. Passem a base 10 les quantitats inicials:

$$\begin{aligned} 241_{(6} \\ 1 \cdot 6^0 &= 1 \\ 4 \cdot 6^1 &= 24 \\ 2 \cdot 6^2 &= 72 \\ \hline & 97 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3_{(6} \\ 3 \cdot 6^0 &= 3 \\ \hline & 3 \end{aligned}$$

Per tant, $241_{(6} \times 3_{(6} = 97 \times 3 = 291$, en base 10.

Passem ara el resultat obtingut en la base 6, a base 10, per a veure si ho hem fet correctament:

$$\begin{aligned} 1203_{(6} \\ 3 \cdot 6^0 &= 3 \\ 0 \cdot 6^1 &= 0 \\ 2 \cdot 6^2 &= 72 \\ 1 \cdot 6^3 &= 216 \\ \hline & 291 \end{aligned}$$

El resultat és correcte.

Solució a l'Activitat 3.11 de la pàg. 82

a) $53 = 8 \times 6 + 5$, ja que:

$$\begin{array}{r|l} 5\,3 & 8 \\ \cline{2-2} -\,4\,8 & 6 \\ \cline{1-1} 5 & \end{array}$$

b) $72 = 15 \times 4 + 12$, ja que:

$$\begin{array}{r|l} 7\,2 & 1\,5 \\ \cline{2-2} -\,6\,0 & 4 \\ \cline{1-1} 1\,2 & \end{array}$$

c) $137 = 6 \times 22 + 5$, ja que:

$$\begin{array}{r|l} 1\,3\,7 & 6 \\ \cline{2-2} -\,1\,2 & 2\,2 \\ \cline{1-1} \quad 1\,7 & \\ -\,1\,2 & \\ \cline{1-1} 5 & \end{array}$$

Solució a l'Activitat 3.12 de la pàg. 83

La resta que busquem és 0.

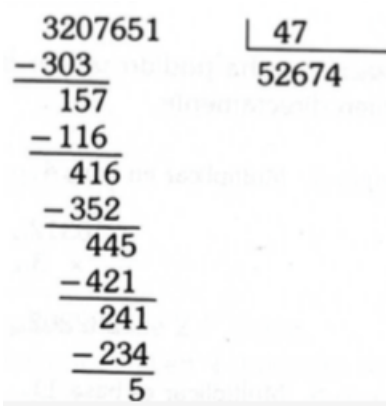
Solució a l'Activitat 3.13 de la pàg. 83

Per a poder fer la divisió, com que no sabem el quocient, a diferència de l'Activitat 3.12, ens construïm la taula de multiplicar del dividend $(47_{(8})$ en base 8. Açò implica fer totes les multiplicacions i posar-les en una taula com aquesta:

$\times$	0	1	2	3	4	5	6	7
47	0	47	116	165	234	303	352	421

Els números estan tots en base 8.

La divisió així quedarà $3207651_{(8} \div 47_{(8} = 52674_{(8}$, sent la resta $5_{(8}$:



Per a comprovar el resultat obtingut multiplicarem el divisor ($52674_{(8)}$) pel quocient ($47_{(8)}$) i després sumarem el residu ($5_{(8)}$). El resultat ha de ser el dividend.

Solució a l'Activitat 3.14 de la pàg. 84

La resta de nombres naturals és una operació binària que no verifica cap de les propietats de la suma, ja que

- No és llei de composició interna. La resta de dos nombres naturals no sempre és un altre nombre natural, $3-5 \notin \mathbb{N}$
- No és commutativa: $3-5 \neq 5-3$
- No és associativa: $3-(5-2) \neq (3-5)-2$
- No té element neutre: $3-0 \neq 0-3 \neq 3$

Solució a l'Activitat 3.15 de la pàg. 84

La divisió de nombres naturals és una operació binària que no verifica cap de les propietats de la divisió, ja que:

- No és llei de composició interna. La divisió de dos nombres naturals no sempre és un nombre natural: $5 \div 3 = c \notin \mathbb{N}$
- No és commutativa: $6 \div 3 = 2$, però $3 \div 6 \neq 2$
- No és associativa, perquè $(12 \div 6) \div 2 = 2 \div 2 = 1$, però $12 \div (6 \div 2) = 12 \div 3 = 4$
- L'element neutre és l'1 però solament es compleix que $a \div 1 = a$, no és veritat que $1 \div a = a$, per a tot a natural.
- Tampoc compleix la propietat distributiva respecte a l'addició i la subtracció en els nombres naturals[a].

[a] no ocorre igual amb els nombres fraccionaris, com ja veurem, perquè:

$$\frac{(a+b)}{n} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n}$$

.

Solució a l'Activitat 4.3 de la pàg. 92

El ramat podria tenir 6, 21 o 36 ovelles.

a) Busquem nombres que siguen múltiples de 3, però que en ser dividits per 5 ens en sobre 1.

b) 3 seria divisor de la solució, però no 5. 5 serà divisor de la solució menys 1.

Solució a l'Activitat 4.4 de la pàg. 94

- xifres en lloc parell: $8 + 8 = 16$
- xifres en lloc imparell: $5 + 0 + 1 = 6$

Així, $16 - 6 = 10$, per tant, 58 081 no és divisible per 11.

Solució a l'Activitat 4.5 de la pàg. 94

La solució és 7524 o 7596, perquè ha d'acabar en xifra parella i les xifres han de sumar un múltiple de 9.

Solució a l'Activitat 4.6 de la pàg. 94

$a = 2$ i $b = 2$, 5 o 8.

Solució a l'Activitat 4.7 de la pàg. 95

Aplicant la propietat de divisibilitat 5, com que $12 = 3 \cdot 4$, un nombre $n \in \mathbb{N}$ serà divisible per $12 = 3 \cdot 4$ si i sols si es compleixen a la vegada:

- n és divisible per 3 i per 4 a la vegada
- 3 i 4 només tenen l'1 com a factor comú en la seua factorització (la qual cosa és certa sempre)

Solució a l'Activitat 4.8 de la pàg. 99

$$\begin{array}{l|l} 7\ 6\ 4\ 4 & 2 \\ 3\ 8\ 2\ 2 & 2 \\ 1\ 9\ 1\ 1 & 3 \\ 6\ 3\ 7 & 7 \\ 9\ 1 & 7 \\ 1\ 3 & 1\ 3 \\ 1 & \end{array}$$

$7644 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7^2 \cdot 13$

Solució a l'Activitat 4.9 de la pàg. 101

a) Factorització de 36: $36 = 2^2 \cdot 3^2$

3 6	2
1 8	2
9	3
3	3
1	

b) Divisors de 36: $\mathcal{D}(36) = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$:

$\times$	1	3^1	3^2
1	1	3	9
2^1	2	6	18
2^2	4	12	36

c) Factorització en primers de cada divisor de 36:

- $1 = 1$
- $2 = 2$
- $3 = 3$
- $4 = 2^2$
- $6 = 2 \cdot 3$
- $9 = 3^2$
- $12 = 2^2 \cdot 3$
- $18 = 2 \cdot 3^2$
- $36 = 2^2 \cdot 3^2$

d) Com podem veure, en l'apartat c tenim totes les possibles combinacions que apareixen en l'apartat a.

e) Donat $n = 13^2 \cdot 29^5$. Si $m \mid n$, sabrem que m tindrà com a factors primers els que té n (13 i 29), com a màxim amb els exponents que apareixen en n. També sabem que no pot aparèixer cap altre factor en la descomposició de m, ja que, si no, no es compliria que $m \mid n$.

Solució a l'Activitat 4.11 de la pàg. 102

2 equips de 14 alumnes, 4 equips de 7 alumnes, 7 equips de 4 alumnes, 14 equips de 2 alumnes

Solució a l'Activitat 4.12 de la pàg. 102

- Els nombres que tenen 3 divisors són els quadrats perfectes (nombres naturals que resulten d'elevar al quadrat un altre nombre natural; dit d'una altra manera, nombres l'arrel quadrada dels quals és un nombre natural).

- Els nombres que tenen 4 divisors són els productes de dos nombres primers i els nombres primers elevats al cub.

Solució a l'Activitat 4.13 de la pàg. 102

Només hi ha un divisor primer. Els nombres amb 7 divisors són de la forma a^6 sent a un nombre primer. Els divisors de a^6 són: $1, a, a^2, a^3, a^4, a^5$ i a^6, i d'aquests l'únic primer és a, els altres són divisibles per a a més de per 1 i per ells mateixos.

Solució a l'Activitat 4.14 de la pàg. 102

El 60

Solució a l'Activitat 4.15 de la pàg. 105

Aquesta activitat la podem resoldre per tanteig... és a dir, no hi ha una forma única... cal provar (i pensar)...
Busquem un nombre entre 200 i 250 que en dividir-lo entre 4 en sobren 2 sempre... Provant, trobem que el primer és el 202, i si raonem un poc, veureu que si anem sumant 4, tots tenen resta 2. És a dir: $\{202, 206, 210, 214, 218, \dots\}$.
Com que també volem que en dividir-lo per 5 done resta 2, fem el mateix raonament i arribem al fet que el primer és 202 i després caldrà sumar 5. Així els nombres són: $\{202, 207, 212, 217, \dots\}$.
Finalment, fem igual per al 6, el primer és el 202, i ara anem sumant de 6 en 6 (hauríeu d'arribar fins a 250, jo ací no ho he fet): $\{202, 208, 214, 220, 226, \dots\}$.
Al final hauríeu de mirar quins nombres apareixen en els tres conjunts. A simple vista veig el 202, però caldria mirar bé perquè jo no he arribat a 250.

Solució a l'Activitat 4.16 de la pàg. 105

1 caixa de 40 llandes, 2 caixes de 20 llandes, 4 caixes de 10 llandes, 5 caixes de 8 llandes, 8 caixes de 5 llandes, 10 caixes de 4 llandes, 20 caixes de 2 llandes i 40 caixes d'1 llanda.

Solució a l'Activitat 4.18 de la pàg. 107

Tenim que $728 \cdot 304 = \text{mcd}(728, 304) \cdot \text{mcm}(728, 304)$.
Càlcul del mcd amb l'algorisme d'Euclides:

$$
\begin{aligned}
728 &= 304 \times 2 + 120 \\
304 &= 120 \times 2 + 64 \\
120 &= 64 \times 1 + 56 \\
64 &= 56 \times 1 + 8 \\
56 &= 8 \times 7 + 0 \text{ (divisió exacta)}
\end{aligned}
$$

	2	2	1	1	7
728	304	120	64	56	8
120	64	56	8	0	

$= \text{mcd}(728, 304)$

Per tant, $\text{mcd}(728, 304) = 8$. Així $\text{mcm}(728, 304) = 221312/8 = 27664$.

Solució a l'Activitat 4.19 de la pàg. 107

Han coincidit una vegada (l'any 2000). Tornaran a coincidir l'any 2080.

Solució a l'Activitat 4.20 de la pàg. 107

120 litres

Solució a l'Activitat 4.21 de la pàg. 107

- $\mathcal{D}(25) = \{1, 5, 25\}$
- $\mathcal{D}(32) = \{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$
- $\mathcal{D}(54) = \{1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, 54\}$
- $\mathcal{D}(130) = \{1, 2, 5, 10, 13, 26, 65, 130\}$
- $\mathcal{D}(68) = \{1, 2, 4, 17, 34, 68\}$

Solució a l'Activitat 4.22 de la pàg. 107

84, 126 i 294

Solució a l'Activitat 4.23 de la pàg. 107

800

Solució a l'Activitat 4.24 de la pàg. 108

1, 4, 25, 100, 625 i 2500

Solució a l'Activitat 4.25 de la pàg. 108

a) 61245 b) 97137 c) 88416

Solució a l'Activitat 4.26 de la pàg. 108

El 585. El raonament ha de començar pensant que busquem un nombre del tipus aba, on a, b són xifres entre 0 i 9. Llavors, perquè siga divisible per 5, les possibilitats són $a = 0$

o $a = 5$. Vegem cada un dels casos:

a) Si $a = 0$, no podem construir un nombre de tres xifres, perquè la xifra corresponent a les centenes seria 0, i per tant tindríem un nombre de dues xifres. Això fa que automàticament només siga possible el cas $a = 5$.

b) Si $a = 5$, necessitem que la suma $5 + b + 5$ siga múltiple de 9. Així, $10 + b = 18$ donaria $b = 8$. Podríem pensar que $10 + b = 27$, però això faria que $b = 17$, la qual cosa és impossible perquè hem dit que b és una xifra entre 0 i 9. Per tant, l'única solució és $b = 8$.

Solució a l'Activitat 4.27 de la pàg. 108

a) 1008

b) 9996

c) No n'hi ha cap

d) $1116, 2220, 3336, 4440, 4404, \ldots$

e) $1044, 2088, 3616, \ldots$

f) $2016, 1260, 9540, \ldots$

Solució a l'Activitat 4.28 de la pàg. 108

La solució és el 432 o el 936. La demostració seguiria els passos de la demostració de l'Activitat 4.26, partint de d'un nombre com $a3b$, on a i b són xifres entre 0 i 9.

Solució a l'Activitat 4.29 de la pàg. 108

No pot ser-ho, perquè si és múltiple de 8 seria automàticament múltiple de 4.

Solució a l'Activitat 4.30 de la pàg. 109

a) No, perquè els nombres acabats en zero són parells, i els parells no són primers perquè són múltiples de 2.

b) Sí, el 2 és l'únic, els altres nombres acabats en xifra parell són divisibles entre 2, per tant no són primers.

c) Dos nombres parells no poden ser primers entre si perquè tenen el 2 com a divisor comú.

d) No. Per exemple 25 i 16 no són primers, però són primers entre si, ja que $\text{mcd}(25, 16) = 1$.

Solució a l'Activitat 4.31 de la pàg. 109

No, perquè els nombres acabats en zero són parells, i els parells no són primers perquè són múltiples de 2.

Solució a l'Activitat 4.32 de la pàg. 109

a) 12 i 25 són primers entre si

b) 15 i 25 no són primers entre si

c) 13 i 26 no són primers entre si

Solució a l'Activitat 4.33 de la pàg. 109

Són compostos el $27, 57, 77$ i 87.

Solució a l'Activitat 4.34 de la pàg. 109

Primers: $283, 157, 857, 269, 197$.
Compostos: $289, 1353, 963, 391$.

Solució a l'Activitat 4.35 de la pàg. 109

En general, no perquè els primers són imparells i la suma de dos imparells és parell. Per exemple $7 + 11 = 18$. En alguns casos és cert, per exemple $2 + 5 = 7$ o $2 + 11 = 13$.

Solució a l'Activitat 4.36 de la pàg. 110

6 jugadors per equip, es poden fer 9 equips: 4 en una classe i 5 en una altra.

Solució a l'Activitat 4.37 de la pàg. 110

a) $\text{mcd}(16, 24, 32) = 8$

b) $\text{mcd}(27, 36) = 9$

c) $\text{mcd}(20, 30) = 10$

d) $\text{mcd}(20, 32, 48) = 4$

Solució a l'Activitat 4.38 de la pàg. 110

6 metros

Solució a l'Activitat 4.39 de la pàg. 110

a) Dimensió del taulell $40 \times 40\,\text{cm}^2$

b) Són necessaris 72 taulells

Solució a l'Activitat 4.40 de la pàg. 110

$60, 30, 20, 15, 12$ i 10.

Solució a l'Activitat 4.41 de la pàg. 110

Hi ha 12 m entre dos arbres, 35 arbres en total.

Solució a l'Activitat 4.42 de la pàg. 111

L'exponent del 2 serà un 2, el del 3 i el del 5 serà 1, tant en m com en n. I l'exponent de 7 i del 13 pot ser qualsevol nombre natural.

Solució a l'Activitat 4.43 de la pàg. 111

117

Solució a l'Activitat 4.44 de la pàg. 111

a) $\text{mcm}(6, 9, 12) = 36$

b) $\text{mcm}(14, 36) = 252$

c) $\text{mcm}(20, 24, 36) = 360$

Solució a l'Activitat 4.45 de la pàg. 111

El 27 de març

Solució a l'Activitat 4.46 de la pàg. 111

Els nombres $1575, 3150, 4725, 6300, 7875$ i 9450.

Solució a l'Activitat 4.47 de la pàg. 111

421

Solució a l'Activitat 4.48 de la pàg. 111

30 i es diu mínim comú múltiple.

Solució a l'Activitat 4.49 de la pàg. 112

63 taronges

Solució a l'Activitat 4.50 de la pàg. 112

Poden ser 36 i 28 o també 4 i 252.

Solució a l'Activitat 4.51 de la pàg. 112

Els nombres són 140 i 315.

Solució a l'Activitat 4.52 de la pàg. 112

Els nombres són 96 i 54 o bé 6 i 864.

Solució a l'Activitat 5.1 de la pàg. 119

a) $|5| = 5$

b) $|-17| = 17$

c) $|5-7| = |-2| = 2$

d) $|5| - |7| = 5 - 7 = -2$

e) $-|7-5| = -|2| = -2$

f) $-|-(7-5)| = -|-(2)| = -|-2| = -2$

Solució a l'Activitat 5.2 de la pàg. 119

a) $|x|$

$$\text{El signe d'}|x| \text{ serà } \begin{cases} \text{si } x > 0, & \text{positiu} \\ \text{si } x < 0, & \text{positiu} \end{cases}$$

b) $-|x|$

$$\text{El signe de } -|x| \text{ serà } \begin{cases} \text{si } x > 0, & \text{negatiu} \\ \text{si } x < 0, & \text{negatiu} \end{cases}$$

c) $|-x|$

$$\text{El signe de } |-x| \text{ serà } \begin{cases} \text{si } x > 0, & \text{positiu} \\ \text{si } x < 0, & \text{positiu} \end{cases}$$

d) $-|-x|$

$$\text{El signe de } -|-x| \text{ serà } \begin{cases} \text{si } x > 0, & \text{negatiu} \\ \text{si } x < 0, & \text{negatiu} \end{cases}$$

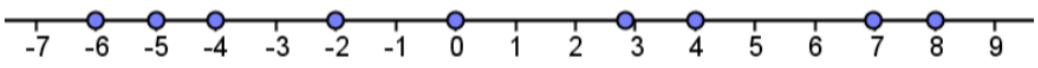
Solució a l'Activitat 5.3 de la pàg. 119

El nombre és el 13.

Solució a l'Activitat 5.4 de la pàg. 120

a) Ordenació: $-6 < -5 < -4 < -2 < 0 < 3 < 4 < 7 < 8$

b) Representació gràfica:



c) Valors absoluts: $|-6| = 6; |-5| = 5; |-4| = 4; |-2| = 2; |0| = 0; |3| = 3; |4| = 4; |7| = 7; |8| = 8$

d) Oposats: $op(-6) = 6; op(-5) = 5; op(-4) = 4; op(-2) = 2; op(3) = -3; op(4) = -4; op(7) = -7; op(8) = -8$. El zero no té oposat.

Solució a l'Activitat 5.5 de la pàg. 120

a. *Com més gran és el valor absolut d'un nombre enter, major és el nombre.*
Fals, ja que per exemple $|-100| > |10|$, però $-100 < 10$.

b. *L'oposat d'un nombre enter és sempre menor que aquest nombre.*
Fals, ja que, per exemple, l'oposat de -59 és 59, i és major que -59, $-59 < 59$.

c. *El valor absolut de l'oposat d'un nombre és igual al valor absolut del nombre.*
Vertader, ja que per definició el valor absolut correspon al valor numèric prescindint del signe, i un nombre i el seu oposat només diferien en el signe.

d. *L'oposat de l'oposat d'un nombre enter és zero*
Fals, ja que si agafem, per exemple, 3, el seu oposat és -3, i l'oposat de l'oposat (l'oposat de -3) torna a ser $3 \neq 0$.

Solució a l'Activitat 5.6 de la pàg. 123

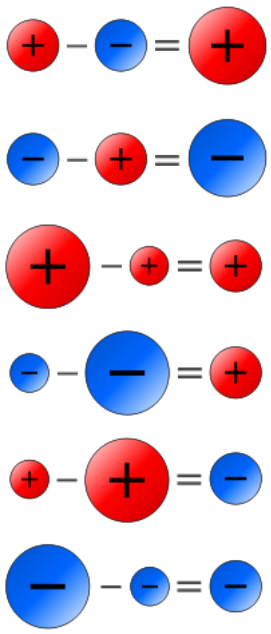


Figura A.5. Representació de les regles de la resta d'enters

Solució a l'Activitat 5.7 de la pàg. 123

a) (-20) com a suma de dos enters del mateix signe: $(-20) = -10 + (-10)$

b) $(+20)$ com a suma de dos enters de diferent signe: $(-20) = -40 + (+20)$

c) $(+15)$ com a diferència de dos enters del mateix signe: $(+15) = +20 - (+5)$

d) $(+15)$ com a diferència de dos enters de diferent signe: $(+15) = -10 - (+5)$

e) $(+53)$ com a suma de dos nombres enters consecutius: $(+53) = 26 + (27)$

f) $(+54)$ com a suma de dos nombres enters consecutius: no es pot

g) (-32) com a suma de dos nombres enters consecutius: no es pot

h) (-33) com a suma de dos nombres enters consecutius: $(-33) = (-16) + (-17)$

Solució a l'Activitat 5.9 de la pàg. 127

a) x

El signe de$x$ serà $\begin{cases} \text{si } x > 0, & \text{positiu} \\ \text{si } x < 0, & \text{negatiu} \end{cases}$

b) $-x$

El signe de $-x$ serà $\begin{cases} \text{si } x > 0, & \text{negatiu} \\ \text{si } x < 0, & \text{positiu} \end{cases}$

c) x^2

El signe dex^2 serà $\begin{cases} \text{si } x > 0, & \text{positiu} \\ \text{si } x < 0, & \text{positiu, ja que per exemple,} (-3) \cdot (-3) = 9 \end{cases}$

d) x^3

El signe dex^3 serà $\begin{cases} \text{si } x > 0, & \text{positiu} \\ \text{si } x < 0, & \text{negatiu, ja que } (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -27 \end{cases}$

Solució a l'Activitat 5.10 de la pàg. 129

Pitàgores va nàixer 280 anys abans que Euclides.

Solució a l'Activitat 5.11 de la pàg. 129

a) Pis 4t

b) 1r soterrani

Solució a l'Activitat 5.12 de la pàg. 129

La temperatura inicial era de 9°C.

Solució a l'Activitat 5.13 de la pàg. 129

30 000 €

Solució a l'Activitat 5.14 de la pàg. 129

La diferència de temperatura de la cambra de les verdures a la del peix és de $-22°C$ i de la cambra del peix a la de la verdura de $+22°C$. No són iguals, tenen diferent signe.

Solució a l'Activitat 5.15 de la pàg. 129

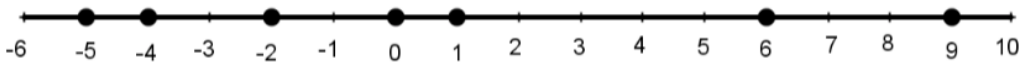
L'avió vola a 3900 metres. Per a resoldre-ho, cal determinar el canvi total de la temperatura, és a dir, sumar els $-105°C$ als $12°C$ positius, d'aquesta manera tenim que el canvi total de la temperatura és de $105 + 12 = 117°C$.
Ara, com que el canvi és a raó de $9°C$ per 300 metres, cal dividir els $117/9 = 13$, és a dir, hi ha 13 salts de 300 metres. Això són $13 \cdot 300 = 3900$ metres.

Solució a l'Activitat 5.16 de la pàg. 130

Hi ha 620 litres.

Solució a l'Activitat 5.17 de la pàg. 130

a) Representació gràfica:



b) Valors absoluts: $|-4| = 4; |6| = 6; |-2| = 2; |1| = 1; |-5| = 5; |0| = 0; |9| = 9$

c) Oposats: $op(-4) = 4; op(6) = -6; op(-2) = 2; op(1) = -1; op(-5) = 5; op(9) = -9$.
El zero no té oposat.

Solució a l'Activitat 5.18 de la pàg. 130

$\{3, -3, 4, -4, 5, -5\}$

Solució a l'Activitat 5.19 de la pàg. 130

El nombre és el -10.

Solució a l'Activitat 5.20 de la pàg. 130

El nombre és el -65.

Solució a l'Activitat 5.21 de la pàg. 130

- $13 = (-6) + (-7)$
- $31 = 15 + 16$

- $-19 = (-9) + (-10)$
- $-25 = (-12) + (-13)$
- $67 = 33 + 34$

Solució a l'Activitat 5.22 de la pàg. 130

Els nombres parells no es poden escriure com a suma de dos enters consecutius:

- $5 = 2 + 3$
- $7 = 3 + 4$
- 6 no es pot escriure com a suma de 2 enters consecutius
- $-9 = (-5) + (-4)$
- $-7 = (-4) + (-3)$
- -8 no es pot escriure com a suma de 2 enters consecutius

Solució a l'Activitat 5.23 de la pàg. 130

- $-6 = (-1) + (-2) + (-3)$
- $12 = 3 + 4 + 5$
- $-18 = (-5) + (-6) + (-7)$
- $-15 = (-4) + (-5) + (-6)$
- $30 = 9 + 10 + 11$

Solució a l'Activitat 5.24 de la pàg. 131

Tots els enters que poden escriure's com a suma de tres consecutius són múltiples de 3. Per exemple:

- $1 + 2 + 3 = 6$
- $2 + 3 + 4 = 9$
- 7 i 8 no es poden escriure com a suma de 3 enters consecutius

Solució a l'Activitat 5.25 de la pàg. 131

a) $(-5)^3 = -125$

b) $(+3)^3 = 27$

c) $(-2)^4 = 16$

d) $(-3)^4 = -9$

e) $(+2)^4 = 16$

f) $-(5^3) = -125$

Solució a l'Activitat 5.26 de la pàg. 131

a) $-x$

$$\text{El signe de } -x \text{ serà } \begin{cases} \text{si } x > 0, & \text{negatiu} \\ \text{si } x < 0, & \text{positiu} \end{cases}$$

b) $(-x)^3$

$$\text{El signe de } (-x)^3 \text{ serà } \begin{cases} \text{si } x > 0, & \text{negatiu} \\ \text{si } x < 0, & \text{positiu} \end{cases}$$

c) $-(x^2)$

$$\text{El signe de } -(x^2) \text{ serà } \begin{cases} \text{si } x > 0, & \text{negatiu} \\ \text{si } x < 0, & \text{negatiu} \end{cases}$$

d) x^3

$$\text{El signe de } x^3 \text{ serà } \begin{cases} \text{si } x > 0, & \text{positiu} \\ \text{si } x < 0, & \text{negatiu} \end{cases}$$

Solució a l'Activitat 5.28 de la pàg. 131

a) Dues divisions d'enters el quocient dels quals siga enter: $10 \div 5$ i $(-10) \div 5$.

b) Dues divisions d'enters el quocient dels quals no siga enter: $12 \div 5$ i $(-10) \div 3$.

c) Una arrel quadrada exacta: $\sqrt{81} = 9$.

d) Una arrel quadrada entera de resta 3: $\sqrt{84} = 9$, resta 3.

Solució a l'Activitat 5.29 de la pàg. 132

a) $3 \cdot 2 + 3 \cdot (-5) = 3 \cdot (2 + (-5)) = 3 \cdot (-3) = -9$

b) $(-2) \cdot 12 + (-2) \cdot (-6) = (-2) \cdot (12 + (-6)) = (-2) \cdot 6 = -12$

c) $8 \cdot 5 + 8 = 8 \cdot (5 + 1) = 8 \cdot 6 = 48$

d) $(-3) \cdot (-2) + (-3) \cdot (-5) = (-3) \cdot ((-2) + (-5)) = (-3) \cdot (-7) = 21$

Solució a l'Activitat 5.30 de la pàg. 132

a) $(3 - 8) + [5 - (-2)] = -35$

b) $5 - [6 - 2 - (1 - 8) - 3 + 6] + 5 = -4$

c) $9 \div [6 \div (-2)] = -3$

d) $\left[(-2)^5 - (-3)^3\right]^2 = 295$

Solució a l'Activitat 5.31 de la pàg. 132

a) $(-2)^2 \cdot (-2)^3 \cdot (-2)^4 = (-2)^9 = -512$

b) $(-8) \cdot (-2)^3 \cdot (-2)^0 \cdot (-2) = (-2)^3 \cdot (-2)^3 \cdot (-2)^0 \cdot (-2)^1 = (-2)^6 = 6$

c) $2^{-2} \cdot 2^{-3} \cdot 2^4 = 2^{-1} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$

d) $2^2 \div 2^3 = 2^{-1} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$

e) $2^{-2} \div 2^{-3} = 2^{((-2)-(-3))} = 2^{(-2)+3} = 2^1 = 2$

f) $\left[(-2)^{-2}\right]^3 \cdot (-2)^3 \cdot (-2)^4 = (-2)^{-6} \cdot (-2)^3 \cdot (-2)^4 = (-2)^{((-6)+3+4)} = (-2)^1 = -2$

Solució a l'Activitat 6.2 de la pàg. 137

a) La relació és de 2 aprovats per cada suspès, és a dir 2 :: 1 (el doble d'aprovats que de suspesos).

b) Van aprovar 2/3 del total d'alumnes.

c) Els 39 alumnes que van aprovar l'assignatura en segona convocatòria, representen 1/3 d'1/3 dels que van suspendre la primera convocatòria, és a dir, 1/9 del total. Així, si 39 alumnes són 1/9, multiplicant-los per 9 obtindrem el total: 351 alumnes. La Figura A.6 representa aquest raonament.

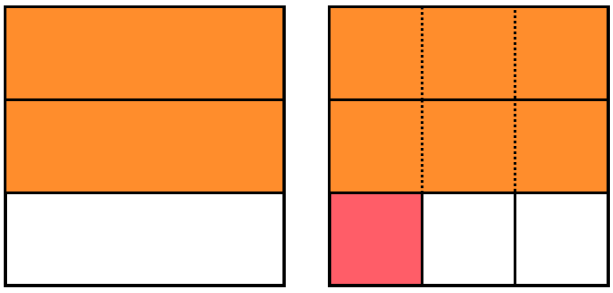


Figura A.6. A l'esquerra es representen els estudiants que aproven en primera convocatòria. A la dreta tenim els que aproven en segona convocatòria. La zona rosada és equivalent a 39 alumnes

d) En aquest cas el total no correspon als 351 alumnes, ja que n'hi ha més (i cal afegir-hi els que deixen l'assignatura). Per tant, podem pensar que els 351 alumnes calculats abans representen els 13/14 dels matriculats inicialment. Per tant, si $\frac{13}{14}$ del total és 351, el total ha de ser 378 alumnes.

e) Les Figures A.6 i A.7 representen gràficament les situacions descrites en l'activitat.

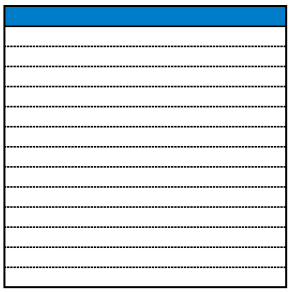


Figura A.7. La zona blava representa 1/14 del total d'alumnes, aquells que abandonen l'assignatura. La resta, 13/14 són els 351 alumnes que l'han cursada

Solució a l'Activitat 6.3 de la pàg. 138

1. Fracció com a quocient, nombre no enter.
2. Fracció com a operador.
3. Fracció com a raó.
4. Fracció com a part-tot.

Solució a l'Activitat 6.5 de la pàg. 141

Per a fer-ho, n'hi ha prou de comprovar dues a dues que les fraccions $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ compleixen que $a \cdot d = b \cdot c$. Així:

- $\frac{2}{8} \cong \frac{3}{12}$ ja que $2 \cdot 12 = 8 \cdot 3$.
- $\frac{2}{8} \cong \frac{4}{16}$ ja que $2 \cdot 16 = 8 \cdot 4$.
- $\frac{2}{8} \cong \frac{1}{4}$ ja que $2 \cdot 4 = 8 \cdot 1$.

No cal fer més comprovacions perquè, com que és una relació d'equivalència, es compleix la propietat reflexiva.

Solució a l'Activitat 6.6 de la pàg. 142

La Figura 6.12 mostra l'equivalència de fraccions:

$$\frac{4}{8} \cong \frac{2}{4} \cong \frac{1}{2}$$

Solució a l'Activitat 6.7 de la pàg. 142

En efecte, aplicant la propietat per a obtenir fraccions equivalents, tenim que

a) $\frac{5}{6} = \frac{5 \cdot 5}{6 \cdot 5} = \frac{25}{30}$

b) $\frac{27}{36} = \frac{27 \cdot 2}{36 \cdot 2} = \frac{54}{72}$

c) $\frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 16}{3 \cdot 16} \frac{16}{48}$

Solució a l'Activitat 6.8 de la pàg. 143

a) $\frac{5}{6}$ b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{1}{3}$

Solució a l'Activitat 6.9 de la pàg. 143

- $\frac{18}{27} = \frac{2 \cdot 3^2}{3^3} = \frac{2}{3}$
- $\frac{70}{168} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 7}{2^3 \cdot 3 \cdot 7} = \frac{5}{12}$
- $\frac{75}{90} = \frac{3 \cdot 5^2}{2 \cdot 3^2 \cdot 5} = \frac{5}{6}$

Solució a l'Activitat 6.10 de la pàg. 145

a) $\begin{array}{r|l} 37 & 8 \\ 5 & 4 \end{array}$ és a dir $37 = 8 \cdot 4 + 5$, per tant $\frac{37}{8} = 4 + \frac{5}{8}$. Amb 37 formatges podem omplir 4 caixes senceres i 5/8 parts d'una cinquena caixa.

b) $\begin{array}{r|l} 45 & 8 \\ 5 & 5 \end{array}$ és a dir $45 = 8 \cdot 5 + 5$, per tant $\frac{45}{8} = 5 + \frac{5}{8}$. Amb 45 formatges podem omplir 5 caixes senceres i 5/8 parts d'una sisena caixa.

Solució a l'Activitat 6.11 de la pàg. 145

No adjuntem la representació gràfica, que es pot derivar a partir de l'obtenció del nombre mixt:

- $\begin{array}{r|l} 16 & 9 \\ 7 & 1 \end{array}$ és a dir $16 = 9 \cdot 1 + 7$, per tant $\frac{16}{9} = 1 + \frac{7}{9} = 1\frac{7}{9}$.
- $\begin{array}{r|l} 35 & 20 \\ 15 & 1 \end{array}$ és a dir $35 = 20 \cdot 1 + 15$, per tant $\frac{35}{20} = 1 + \frac{15}{20} = 1\frac{15}{20}$.
- $\begin{array}{r|l} 23 & 7 \\ 2 & 3 \end{array}$ és a dir $23 = 7 \cdot 3 + 2$, per tant $\frac{23}{7} = 3 + \frac{2}{7} = 3\frac{2}{7}$.
- $\begin{array}{r|l} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{array}$ és a dir $5 = 3 \cdot 1 + 2$, per tant $\frac{5}{3} = 1 + \frac{2}{3} = 1\frac{2}{3}$.

Solució a l'Activitat 6.14 de la pàg. 149

No, el que passa ací és que no podem comparar les fraccions 1/2 i 1/4 perquè no fan referència al mateix "total".

Solució a l'Activitat 6.15 de la pàg. 150

Sí, el que ocorre és que la "unitat" no s'ha dividit en 4 parts iguals i ens crea confusió. És a dir, encara que l'àrea marcada representa els 3/4 de la figura, el procediment de divisió no és el que hem associat amb la idea de "fraccions iguals de la unitat".

Solució a l'Activitat 6.16 de la pàg. 154

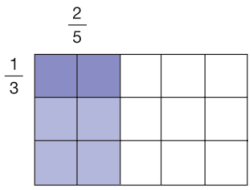


Figura A.8. $\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5}$

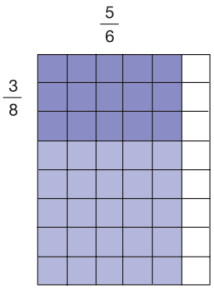


Figura A.9. $\frac{3}{8} \cdot \frac{5}{6}$

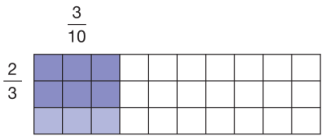


Figura A.10. $\frac{2}{3} \cdot \frac{7}{10}$

Solució a l'Activitat 6.17 de la pàg. 155

a) $\frac{12}{13} \div \frac{4}{13} = 3$, perquè hi ha *tres* $\frac{4}{13}$ en $\frac{12}{13}$.

b) $\frac{6}{17} \div \frac{3}{17} = 2$, perquè hi ha *dos* $\frac{3}{17}$ en $\frac{6}{17}$.

c) $\frac{16}{19} \div \frac{2}{19} = 8$, perquè hi ha *uit* $\frac{2}{19}$ en $\frac{16}{13}$.

Solució a l'Activitat 6.18 de la pàg. 156

a) $4 \div \frac{1}{3} = 12$

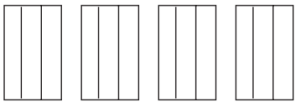


Figura A.11. $4 \div \frac{1}{3} = 12$

b) $2\frac{1}{2} \div \frac{1}{4} = 10$

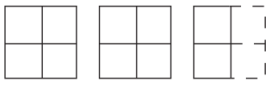


Figura A.12. $2\frac{1}{2} \div \frac{1}{4} = 10$

c) $3 \div \frac{3}{4} = 4$

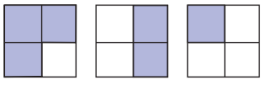


Figura A.13. $3 \div \frac{3}{4} = 4$

Solució a l'Activitat 6.19 de la pàg. 158

a) $\frac{14}{130}$ no és nombre decimal

b) $\frac{27}{28}$ no és nombre decimal

c) $\frac{49}{80} = \frac{6125}{10000}$

d) $\frac{105}{700} = \frac{15}{100}$

e) $\frac{63}{110}$ no és nombre decimal

f) $\frac{145}{600}$ no és nombre decimal

g) $-\frac{2}{3}$ no és nombre decimal

h) $1 = \frac{10}{10}$

i) $\frac{2}{7}$ no és nombre decimal

j) $-\frac{1}{4} = \frac{25}{100}$

k) $\frac{3}{8} = \frac{375}{1000}$

l) $\frac{5}{6} =$

m) $2 = \frac{20}{10}$

n) $\frac{23}{460} = \frac{5}{100}$

o) $\frac{2}{17}$ no és nombre decimal

p) $\frac{210}{1680} = \frac{125}{1000}$

q) $\frac{117}{375} = \frac{312}{1000}$

r) $\frac{117}{2625}$ no és nombre decimal

Solució a l'Activitat 6.20 de la pàg. 162

a) $0'8\widehat{3}$

b) $8'\widehat{15}$

c) $6'53\widehat{2}$

d) $1'3332323\widehat{23}$

e) $24'9\widehat{31}$

f) $5'673\widehat{67}$

Solució a l'Activitat 6.21 de la pàg. 162

Les fraccions amb denominador de la forma $2^a \times 5^a$ $(a \geq 0)$ tenen una expressió decimal finita i les fraccions amb denominador diferent de $2^a \times 5^a$ tenen una expressió decimal periòdica.

Són fraccions decimals:

- $\frac{37}{5} = \frac{37 \cdot 2}{5 \cdot 2}$
- $\frac{21}{60} = \frac{7 \cdot 5}{2^2 \cdot 5^2}$
- $\frac{12}{10} = \frac{12}{2 \cdot 5}$
- $\frac{7}{50} = \frac{7 \cdot 2}{2^2 \cdot 5^2}$
- $\frac{63}{140} = \frac{3^2 \cdot 5}{2^2 \cdot 5^2}$

Solució a l'Activitat 6.23 de la pàg. 165

a) $0'\widehat{34} = \frac{34}{99}$

b) $9'501 = \frac{9501}{1000}$

c) $12'6\widehat{1} = \frac{1135}{90} = \frac{227}{18}$

d) $556'6123\widehat{134} = \frac{5560557011}{9990000}$

e) $4'17691830034 = \frac{417691830034}{100000000000} = \frac{208845915017}{50000000000}$

f) $0'\widehat{16} = \frac{16}{99}$

g) $0'\widehat{387} = \frac{387}{999} = \frac{43}{111}$

h) $7'\widehat{25} = \frac{718}{99}$

i) $2'2 = \frac{22}{100} = \frac{11}{5}$

Solució a l'Activitat 6.24 de la pàg. 165

a) Siga $x = 0'\widehat{9}$, tindrem que:

$$\begin{array}{rrcr} & 10\,x & = & 9'\widehat{9} \\ - & x & = & 0'\widehat{9} \\ \hline & 9\,x & = & 9 \\ & x & = & \frac{9}{9} \end{array}$$

Per tant, $0'\widehat{9} = \frac{9}{9} = 1$.

b) Siga $x = 1'2\widehat{9}$, tindrem que:

$$\begin{array}{rrcr} & 100\,x & = & 129'\widehat{9} \\ - & 10\,x & = & 12'\widehat{9} \\ \hline & 90\,x & = & 117 \\ & x & = & \frac{117}{90} \end{array}$$

Per tant, $1'2\widehat{9} = \frac{117}{90} = \frac{13}{10} = 1'3$.

c) Siga $x = 9'\widehat{9}$, tindrem que

$$\begin{array}{rrcr} & 10\,x & = & 99'\widehat{9} \\ - & x & = & 9'\widehat{9} \\ \hline & 9\,x & = & 90 \\ & x & = & \frac{90}{9} \end{array}$$

Per tant, $9'\widehat{9} = \frac{90}{9} = 10$.

Solució a l'Activitat 6.27 de la pàg. 168

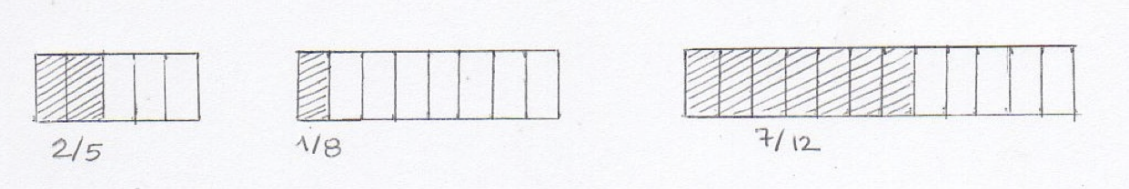


Figura A.14. Models d'àrea per a les fraccions $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{8}$ i $\frac{7}{12}$

Solució a l'Activitat 6.28 de la pàg. 169

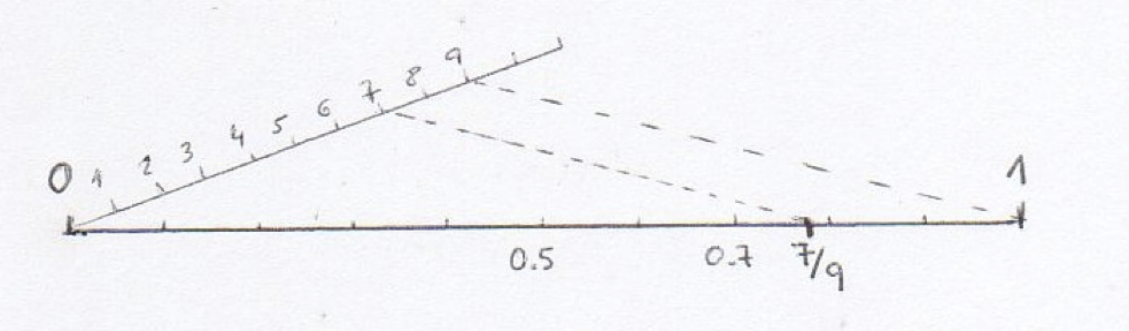


Figura A.15. Model lineal per a representar la fracció $\frac{7}{9}$

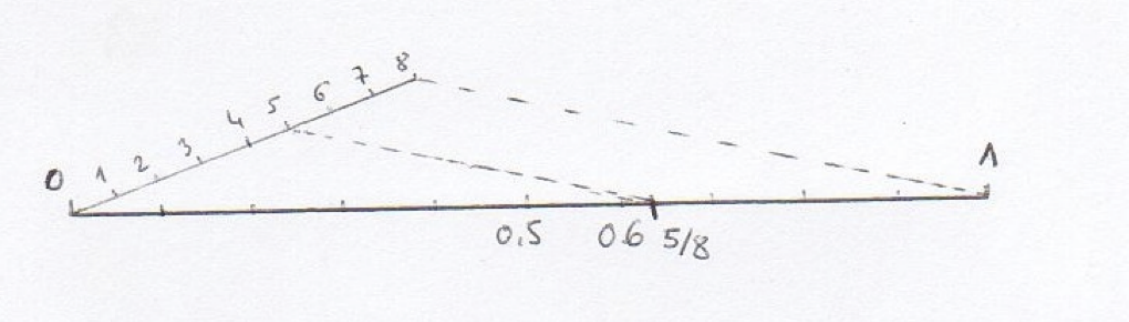


Figura A.16. Model lineal per a representar la fracció $\frac{5}{8}$

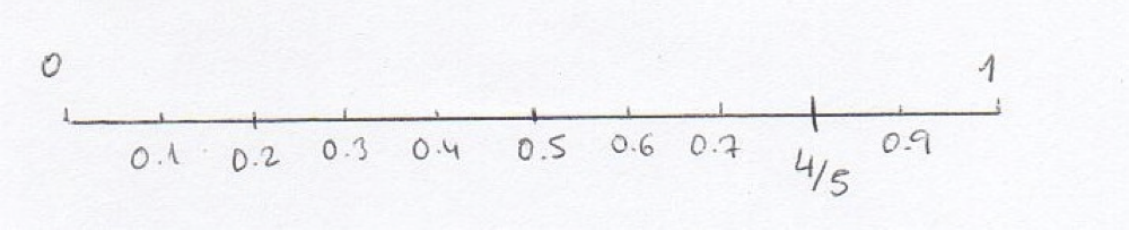


Figura A.17. Model lineal per a representar la fracció $\frac{4}{5}$

Solució a l'Activitat 6.29 de la pàg. 169

1 mes és $1/12$ d'any. 1 dia és $1/365$ d'any. 1 dia és $1/7$ de setmana.

Solució a l'Activitat 6.30 de la pàg. 169

$$\frac{5}{6} \geq \frac{3}{4} \geq \frac{7}{10} \geq \frac{3}{5} \geq \frac{1}{2}$$

Solució a l'Activitat 6.31 de la pàg. 169

$$\frac{6}{10} \leq \frac{66}{10} \leq \frac{2}{3}$$

Solució a l'Activitat 6.32 de la pàg. 169

a) $$-\frac{2}{5} \leq -\frac{1}{4} \leq 0 \leq \frac{4}{5} \leq \frac{7}{3}$$

b) $$-\frac{7}{3} \leq -\frac{4}{5} \leq 0 \leq \frac{1}{4} \leq \frac{2}{5}$$

c) $$-4 \leq -\frac{5}{2} \leq 0 \leq \frac{3}{7} \leq \frac{5}{4}$$

d) $$-\frac{5}{4} \leq -\frac{3}{7} \leq 0 \leq \frac{5}{2} \leq 4$$

Solució a l'Activitat 6.33 de la pàg. 169

- $\frac{18}{27} = \frac{2}{3}$
- $\frac{70}{168} = \frac{5}{12}$
- $\frac{75}{90} = \frac{5}{6}$

Solució a l'Activitat 6.34 de la pàg. 169

a) Part entera: 1, part decimal $\frac{7}{8} = \frac{875}{1000} = 0'875$

b) Entre 1 i 2

c) $1'875$

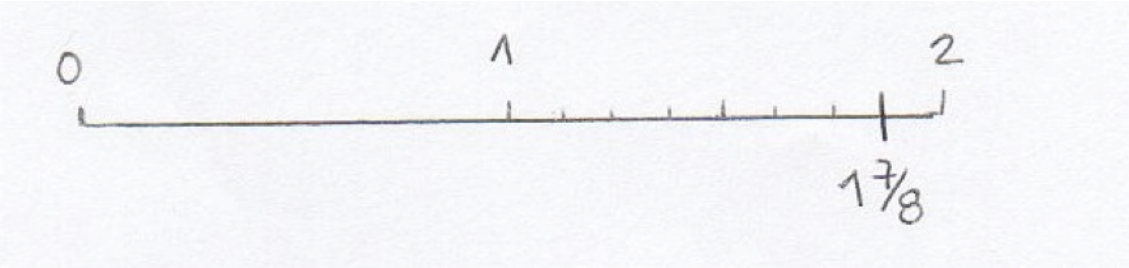


Figura A.18. Model lineal per a representar el nombre $1\frac{7}{8}$

d)

Solució a l'Activitat 6.35 de la pàg. 170

a) $\frac{16}{9} = 1\frac{7}{16} = 1'\widehat{7}$

b) $\frac{35}{20} = 1\frac{3}{4} = 1'75$

c) $\frac{23}{7} = 3\frac{2}{7} = 3'\overbrace{285714}$

d) $\frac{5}{3} = 1\frac{2}{3} = 1'\widehat{6}$

Solució a l'Activitat 6.36 de la pàg. 170

- $4\frac{5}{8}$
- $5\frac{5}{8}$

Solució a l'Activitat 6.37 de la pàg. 170

a) Augmenta

b) Augmenta

c) Si el numerador és major que el denominador, llavors disminueix; si el numerador és menor que el denominador, llavors augmenta.

d) No modifica el seu valor

Solució a l'Activitat 6.38 de la pàg. 170

$$\frac{2}{3} = \frac{32}{48} < \frac{33}{48} < \frac{34}{48} < \frac{35}{48} < \frac{36}{48} < \frac{37}{48} < \frac{38}{48} < \frac{42}{48} = \frac{7}{8}$$

Solució a l'Activitat 6.39 de la pàg. 170

7

Solució a l'Activitat 6.40 de la pàg. 170

a) Els venuts a la vesprada representen $\frac{1}{6}$ del total de periòdics.

b) En començar la venda hi havien 120 periòdics.

Solució a l'Activitat 6.41 de la pàg. 171

Al pitxer caben 2 litres, al poal 6 litres i al llibrell 14 litres.

Solució a l'Activitat 6.42 de la pàg. 171

$\frac{68}{100}$

Solució a l'Activitat 6.43 de la pàg. 171

En autobús van $\frac{2}{5}$ dels alumnes, en metro $\frac{1}{3}$ i a peu $\frac{4}{15}$.

Solució a l'Activitat 6.44 de la pàg. 171

Arribarà a 27 metres.

Solució a l'Activitat 6.45 de la pàg. 171

$\frac{27}{40}$

Solució a l'Activitat 6.46 de la pàg. 171

a) En 1 hora el pintor pinta $\frac{1}{8}$ del garatge i el seu fill $\frac{1}{12}$.

b) 4'8 hores.

Solució a l'Activitat 6.47 de la pàg. 171

a) 6 voltes, és a dir, 30 km.

b) El primer pilot 18 voltes, és a dir 90 km. L'últim pilot 16 voltes, és a dir 80 km.

Solució a l'Activitat 6.48 de la pàg. 172

El gat caçarà al ratolí abans de 3 segons, però no abans de 2 segons.

Solució a l'Activitat 6.49 de la pàg. 172

La temporada té 48 partits; la 1a part té 24 partits, la 2a part 12 partits i la 3a part consta de 6 partits.

Solució a l'Activitat 6.50 de la pàg. 172

a) $0'3 \times 0'2 = 0'06$
b) $0'004 \times 1000 = 4$
c) $0'3 \times 0'31 = 0'093$
d) $0'8 \times 0'5 = 0'40$
e) $987'34 \times 100 = 98734$
f) $0'981 \times 10 = 9'81$
g) $1200 \div 40 = 30$
h) $7 \div 10 = 0'7$
i) $2098 \div 1000 = 2'098$

Solució a l'Activitat 6.51 de la pàg. 172

a) $\dfrac{9}{12} = 0'75$
b) $\dfrac{1}{6} = 0'1\widehat{6}$
c) $\dfrac{30}{24} = 1'25$
d) $\dfrac{6}{15} = 0'4$
e) $\dfrac{3}{4} = 0'75$
f) $\dfrac{315}{21} = 15$

Solució a l'Activitat 6.52 de la pàg. 173

a) $4'2\widehat{8} + 3'1\widehat{27} = \dfrac{3671}{495}$
b) $51'4\widehat{28} - 42'3\widehat{7} = \dfrac{896}{99}$
c) $\left(13'68 - 12'\widehat{5}\right) + 4'2\widehat{8} = \dfrac{406}{75}$
d) $61'\widehat{51} \div 4'\widehat{6} = \dfrac{145}{11}$
e) $5'8 \times 3'\widehat{69} = \dfrac{3538}{165}$
f) $453'1\widehat{6} \div 25 = \dfrac{2719}{150}$

Solució a l'Activitat 6.53 de la pàg. 173

Es lleven del total de l'aigua els $^{79}/_{80}$ de fosfats.

Solució a l'Activitat 6.54 de la pàg. 173

Li han tocat 900 €.

Solució a l'Activitat 6.55 de la pàg. 173

a) La tercera parcel · la és $^{1}/_{7}$ de la finca.
b) La primera parcel · la té 8000 m^2, la segona 4000 m^2 i la tercera 2000 m^2.

Solució a l'Activitat 6.56 de la pàg. 173

L'equip ha marcat 180 gols en tota la temporada.

Solució a l'Activitat 6.57 de la pàg. 174

a) S'ha tret $^2/_5$ del total.

b) Queden 48 litres.

Solució a l'Activitat 6.58 de la pàg. 174

$28\,800\,\mathrm{m}^2$

Solució a l'Activitat 7.1 de la pàg. 179

i. Les relacions són:

   a) La relació entre boles blanques i negres a la bossa és $2:7$. Això vol dir que per cada 2 boles blanques que hi ha en la bossa, tenim 7 boles negres

   b) La relació entre boles blanques i boles totals de la bossa és $2:9$

   c) La relació entre boles negres i boles totals de la bossa és $7:9$

   d) La relació entre boles negres i blanques a la bossa és $7:2$

ii. No sabem les boles que hi ha en total, només les relacions entre les quantitats.

Solució a l'Activitat 7.2 de la pàg. 179

Han aprovat $\frac{4}{7}$ del total dels alumnes, és a dir, la raó entre aprovats i el total és de $4:7$. Han suspès $\frac{3}{7}$ del total, és a dir, la raó entre suspesos i el total és de $3:7$.

Solució a l'Activitat 7.3 de la pàg. 180

a) Si a la bossa hi ha 21 boles negres, com que la relació és de 2 boles blanques per cada 7 negres, tenim que s'ha de complir la següent igualtat de raons:

$$\frac{2}{7} = \frac{blanques}{21} \iff 2 \cdot 21 = 7 \cdot blanques$$

   Per tant, hi ha d'haver 6 boles blanques perquè es complisca la proporció.

b) En total tindrem $21 + 6 = 27$ boles a la bossa.

Solució a l'Activitat 7.4 de la pàg. 180

Siga x el nombre desconegut de botelles, usarem una proporció per a trobar el resultat. Siga la raó $3(botelles) : 7(hostes)$ i la raó $x(botelles) : 581(hostes)$. Si fem servir els productes creuats per a posar-les en proporció tindrem que:

$$3 \cdot 581 = 7 \cdot x \Longrightarrow x = \frac{3 \cdot 581}{7} = 249$$

Per tant, l'hotel necessita 249 botelles de llet.

Solució a l'Activitat 7.5 de la pàg. 180

La raó indicada en l'escala $1 : 25000000$ significa que 1 cm del mapa equival a 25 000 000 cm en la realitat. Podem expressar-la com $1\text{cm} : 250\text{km}$. Per tant, si tenim que al mapa hi ha 2'5 cm, sent x la distància real en km, la proporció que hem d'establir és:

$$\frac{1\text{cm}}{250\text{km}} = \frac{2'5\text{cm}}{x\text{km}}$$

Per tant, $x = 625\text{km}$.

Solució a l'Activitat 7.6 de la pàg. 181

La raó entre aprovats i el total és $18 : 30$, ara la posem en proporció amb una altra raó en què considerem un total de 100 estudiants, i per tant ens preguntem quants han aprovat (x) $18 : 30 :: x : 100$:

$$\frac{18}{30} = \frac{x}{100}$$

Si fem servir els productes creuats, tindrem que:

$$18 \cdot 100 = 30 \cdot x \Longrightarrow x = \frac{18 \cdot 100}{30} = 60$$

Per tant, han aprovat el 60%.

Solució a l'Activitat 7.7 de la pàg. 182

a) La proporció que busquem és $40 : 100 :: x : 70$. Per tant,

$$\frac{40}{100} = \frac{x}{70} \Longrightarrow x = \frac{40 \cdot 70}{100} = 28$$

Així, 28 € és el preu rebaixat.

b) Per resoldre aquest exercici amb proporcions hem de parar atenció a qui és cada un dels actors de l'enunciat. Així, si anomenem x el preu abans de la rebaixa la proporció no pot establir-se amb el 30%, perquè aquesta raó fa referència al preu ja rebaixat. Cal pensar que el 56 € són el 70% del preu original. Llavors, la proporció

que busquem és $70 : 100 :: 56 : x$. Per tant,

$$\frac{70}{100} = \frac{56}{x} \Longrightarrow x = \frac{56 \cdot 100}{70} = 80$$

Així, 80 € era el preu inicial.

Una altra manera de procedir, considerant x el preu abans de la rebaixa, és la següent:

$$x - 30\% \text{ d'}x = 56 \Longrightarrow x - \frac{30 \cdot x}{100} = 56 \Longrightarrow x = 80$$

c) La proporció que busquem és $8 : 100 :: x : 1200$. Per tant,

$$\frac{8}{100} = \frac{x}{1200} \Longrightarrow x = \frac{1200 \cdot 8}{100} = 96$$

El nou sou és de 1296 €.

Tot i que també podem establir un raonament basat en el nou sou (y):

$$1200 + 8\% \text{ de } 1200 = y \Longrightarrow 1200 + \frac{8 \cdot 1200}{100} = y$$

El que hem fet és dir que el nou sou (y) representa el 108% del sou anterior (1200 €). Fixeu-vos que l'equació anterior queda com:

$$1200 + \frac{8 \cdot 1200}{100} = y \Longrightarrow \frac{100 \cdot 1200}{100} + \frac{8 \cdot 1200}{100} = y \Longrightarrow \frac{108 \cdot 1200}{100} = y$$

És a dir, tenim que: 108% de $1200 = y$.

d) Per a aquest cas, cal pensar de la mateixa manera, perquè els 1400 € representen el 106% del sou anterior (x); per tant, la proporció és $106 : 100 :: 1400 : x$, llavors:

$$\frac{1060}{100} = \frac{1400}{x} \Longrightarrow x = \frac{1400 \cdot 100}{106} = 1320'75\ldots$$

El sou anterior era d'uns 1320'75 €.

Solució a l'Activitat 7.8 de la pàg. 185

Taula A.1
Relació entre el preu i les còpies

Còpies	1	2	3	4	5	6	18	36	50	...
Preu	0'05	0'1	0'15	0'20	0'25	0'3	0'9	1'8	2'5	...

La constant de proporcionalitat és:

$$\frac{1}{0'05} = \frac{2}{0'1} = \ldots \frac{6}{0'3} = \cdots = 20$$

Solució a l'Activitat 7.9 de la pàg. 185

a) El costat d'un quadrat i la seua àrea: NO

b) La massa d'una substància i el seu volum: SÍ

c) El temps que tarda a caure un objecte i l'altura de la torre des d'on es llança: NO

d) El costat d'un quadrat i el seu perímetre: SÍ

Solució a l'Activitat 7.10 de la pàg. 187

Per a calcular-la, escriuríem la proporció

$$1 : 240 :: x : 18 \Longrightarrow \frac{1}{240} = \frac{x}{18} \Longrightarrow x = \frac{240 \cdot 1}{18} = 13'\widehat{3}$$

Taula A.2
Relació entre treballadors i el temps

Treballadors	1	2	3	4	...	18	30	...
Temps	240	120	80	60	...	13h i 20m	8	...

Atenció perquè per a resoldre el problema caldria donar-ho en hores i minuts: $13'\widehat{3} = 13$ h i 20 m.
La constant de proporcionalitat és:

$$1 \cdot 240 = 2 \cdot 120 = \cdots = 30 \cdot 8 = 240$$

Solució a l'Activitat 7.11 de la pàg. 187

a) El volum d'un objecte en cm^3 i la seua densitat en gr/cm^3: SÍ

b) L'acceleració d'un mòbil en m/seg^2 i el temps d'acceleració en seg: NO

c) La base en metres d'un triangle i la seua altura en metres: SÍ (la constant de proporcionalitat inversa és determinada per la fórmula de l'àrea)

d) La base en metres d'un rectangle i la seua altura en metres: SÍ (la constant de proporcionalitat inversa és determinada per la fórmula de l'àrea)

Solució a l'Activitat 7.12 de la pàg. 188

a) Hi ha proporcionalitat directa (es parla d'una taxa de bons per dies de compra).

b) Hi ha proporcionalitat directa (es parla d'una velocitat pintant).

c) Hi ha proporcionalitat directa (es parla d'una velocitat disparant).

d) Hi ha proporcionalitat directa (es parla d'una velocitat).

e) En aquest problema no hi ha proporcionalitat, perquè les taxes (velocitats en aquest cas) són iguals.

f) En aquest problema tampoc hi ha proporcionalitat, perquè la duració de l'obra és independent dels assistents.

g) En aquest problema no hi ha proporcionalitat, perquè la velocitat d'embalament de paquets és igual.

h) Igual que en el problema anterior, no hi ha proporcionalitat, perquè la duració del disc és la mateixa (la velocitat a què es reprodueix la música també).

i) Si fem ús de les magnituds del problema: litres de pintura i costat del terreny quadrat, trobarem que no hi ha proporcionalitat entres aquestes dues magnituds (ja ho vam veure en una activitat dels apunts). Sí que hi hauria proporcionalitat directa si obtenim la taxa de pintura per m^2, és a dir, Ricard pintaria una superfície de $100\,m^2$ (10×10) i Pere una superfície de $225\,m^2$ (15×15).

j) Igual que en el problema anterior, si fem ús de les magnituds facilitades en el problema no trobarem proporcionalitat: capacitat i costat del recipient (cilindre). Per a poder raonar que hi ha proporcionalitat, la base del poal (cilindre) hauria de ser igual en tots dos recipients. En aquest cas sí que hi hauria proporcionalitat (podeu fer la prova creant una taula i observant que apareix una constant de proporcionalitat).

k) En aquest cas, hi ha proporcionalitat inversa (es parla de velocitat d'acabament d'aliments).

l) En aquest cas som davant d'un problema amb dues relacions de proporcionalitat. La relació entre botelles i litres és de proporcionalitat directa, igual que la relació entre litres i quilos o la relació entre botelles i quilos.

m) La relació entre dies i impressores és de proporcionalitat inversa, perquè a menys impressores ens faran falta més dies. La relació entre dies i llibres també és directa, perquè a més dies obtindrem més llibres (independentment del nombre d'impressores). Finalment, la relació entre impressores i llibres és directament proporcional, ja que a més impressores més llibres.

Solució a l'Activitat 7.19 de la pàg. 191

En la resolució d'aquests problemes farem ús d'un esquema de la regla de tres, però altres esquemes podrien ser també correctes, com hem vist en els apunts de l'assignatura:

a) Hi ha proporcionalitat directa (es parla d'una taxa de bons per dies de compra), per tant:

$$\left.\begin{array}{lcl} \text{Dies} & & \text{Bons} - \text{regal} \\ 56\,\text{dies} & \to & 140\,\text{bons} \\ x\,\text{dies} & \to & 175\,\text{bons} \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{56}{x} = \frac{140}{175} \Longrightarrow x = \frac{56 \cdot 175}{140} = 70\,\text{dies}$$

b) Hi ha proporcionalitat directa (es parla d'una velocitat pintant), per tant:

$$\left.\begin{array}{lcl} \text{Pedro} & & \text{Raquel} \\ 57\,\text{m} & \to & 19\,\text{m} \\ x\,\text{m} & \to & 63\,\text{m} \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{57}{x} = \frac{19}{63} \Longrightarrow x = \frac{57 \cdot 63}{19} = 189\,\text{m}$$

c) Hi ha proporcionalitat directa (es parla d'una velocitat disparant), per tant:

$$\left.\begin{array}{lcl} \text{Juan} & & \text{Ana} \\ 15\,\text{plats} & \to & 60\,\text{plats} \\ 27\,\text{plats} & \to & x\,\text{plats} \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{15}{27} = \frac{60}{x} \Longrightarrow x = \frac{27 \cdot 60}{15} = 108\,\text{plats}$$

d) Hi ha proporcionalitat directa (es parla d'una velocitat), per tant:

$$\left.\begin{array}{lcl} \text{Sara} & & \text{Laura} \\ 26\,\text{m} & \to & 78\,\text{m} \\ 54\,\text{m} & \to & x\,\text{m} \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{26}{54} = \frac{78}{x} \Longrightarrow x = \frac{78 \cdot 54}{26} = 162\,\text{m}$$

e) En aquest problema no hi ha proporcionalitat, perquè les taxes (velocitats en aquest cas), són iguals. Com que els grups d'ocells volen a la mateixa velocitat, tardaran exactament el mateix a recórrer la mateixa distància: 12 dies.

f) En aquest problema tampoc hi ha proporcionalitat, perquè la duració de l'obra és independent de les persones assistents. Per tant, la duració continua sent de 90 minuts.

g) En aquest problema no hi ha proporcionalitat, perquè la velocitat d'embalament de paquets és igual. Sí que hi ha un avantatge inicial, que es mantindrà, de $51 - 24 = 27$ paquets. Per tant, quan Jonatan porte 68 paquets, Daniel en portarà $68 - 27 = 41$ paquets.

h) Igual que en el problema anterior, no hi ha proporcionalitat, perquè la duració del disc és la mateixa (la velocitat a què es reprodueix la música també). Per tant, hi ha un avantatge inicial de Joan, com en el cas anterior, de $48 - 18 = 30$ minuts. Per tant, quan Sara porte 45 minuts, Joan portarà $45 + 30 = 75$ minuts.

i) Si fem ús de les magnituds del problema: litres de pintura i costat del terreny quadrat, trobarem que no hi ha proporcionalitat entres aquestes dues magnituds (ja ho vam veure en una activitat dels apunts). Sí que hi hauria proporcionalitat directa si obtenim la taxa de pintura per m^2, és a dir, Ricardo pintaria una superfície de $100\,\text{m}^2$ (10×10) i Pere una superfície de $225\,\text{m}^2$ (15×15).

$$\left.\begin{array}{lcl} \text{Ricardo} & & \text{Pedro} \\ 24\,\text{l} & \to & x\,\text{m} \\ 100\,\text{m}^2 & \to & 225\,\text{m}^2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{24}{100} = \frac{x}{225} \Longrightarrow x = \frac{225 \cdot 24}{100} = 54\,\text{l}$$

j) Igual que en el problema anterior (i com hem vist en els apunts de l'assignatura), si fem ús de les magnituds facilitades en el problema no trobarem proporcionalitat:

capacitat i costat del recipient (cilindre). Per a poder raonar que hi ha proporcionalitat, la base del poal (cilindre) hauria de ser igual en tots dos recipients. En aquest cas, sí que hi hauria proporcionalitat (podeu fer la prova creant una taula i observant que apareix constant de proporcionalitat).

En aquest cas, com que no tenim les dades de les bases del poal, no podríem resoldre el problema amb les dades que tenim.

k) En aquest cas hi ha proporcionalitat inversa (es parla de velocitat d'acabament d'aliments), per tant:

$$\left.\begin{array}{lcl} \text{Quantitat} & & \text{Dies} \\ 20\,\text{àn ecs} & \to & 10\,\text{dies} \\ 40\,\text{àn ecs} & \to & x\,\text{dies} \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{20}{40} = \frac{x}{10} \Longrightarrow x = \frac{20 \cdot 10}{40} = 5\,\text{dies}$$

l) En aquest cas som davant d'un problema amb dues relacions de proporcionalitat, que escriurem així:

$$\left.\begin{array}{lcll} \text{Botelles} & & \text{litres/botella} & & \text{Quilos} \\ 5\,\text{botelles} & \to & 2\,\text{l} & \to & 10\,\text{kg} \\ 2\,\text{botelles} & \to & 3\,\text{l} & \to & x\,\text{kg} \end{array}\right\}$$

La relació entre botelles i litres és de proporcionalitat directa, igual que la relació entre litres i quilos o la relació entre botelles i quilos. Per a poder resoldre (tot i que podem aplicar alguna tècnica memorística), caldria obtenir el *total de litres* i reduir a dues les magnituds (mantenint els quilos), així:

$$\left.\begin{array}{lcl} \text{Totaldelitres} & & \text{Quilos} \\ 10\,\text{l} & \to & 10\,\text{kg} \\ 6\,\text{l} & \to & x\,\text{kg} \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{10}{6} = \frac{10}{x} \Longrightarrow x = \frac{10 \cdot 6}{10} = 6\,\text{l}$$

m)

$$\left.\begin{array}{lcll} \text{Dies} & & \text{Impressores} & & \text{Llibres} \\ 4\,\text{dies} & \to & 6\,\text{impr.} & \to & 100\,\text{llibres} \\ x\,\text{dies} & \to & 4\,\text{impr.} & \to & 50\,\text{llibres} \end{array}\right\}$$

La relació entre dies i impressores és de proporcionalitat inversa, perquè a menys impressores ens faran falta més dies. La relació entre dies i llibres també és directa, perquè a més dies obtindrem més llibres (independentment del nombre d'impressores). Finalment, la relació entre impressores i llibres és directament proporcional, ja que a més impressores més llibres. Per a resoldre el problema, haurem de mantenir la magnitud dies, i obtenir la taxa de *llibres/impressora*. Tindríem llavors una proporció directa com tenim a continuació:

$$\left.\begin{array}{lcl} \text{Dies} & & \text{Llibres/impressora} \\ 4\,\text{dies} & \to & 100/6\,\text{llibres} \\ x\,\text{dies} & \to & 50/4\,\text{llibres} \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{4}{x} = \frac{100/6}{50/4} \Longrightarrow x = \frac{300 \cdot 4}{400} = 3\,\text{dies}$$

Solució a l'Activitat 7.20 de la pàg. 193

a) i) Proporcionalitat directa
   ii) Dies i bons regals
   iii) 0′8

b) i) Proporcionalitat directa
   ii) Metres de Pere i metres de Raquel
   iii) 19/63

c) i) Proporcionalitat directa
   ii) Plats de Joan i plats d'Anna
   iii) 15/27

d) i) Proporcionalitat directa
   ii) Metres de Sara i metres de Laura
   iii) 26/54

e) No hi ha proporcionalitat

f) No hi ha proporcionalitat

g) No hi ha proporcionalitat

h) No hi ha proporcionalitat, però si fem ús de les magnituds litres de pintura i m^2:
   i) Proporcionalitat directa
   ii) Litres de pintura i metres quadrats dels terrenys
   iii) 24/100

i) No hi ha proporcionalitat

j) i) Proporcionalitat inversa
   ii) Quantitat d'ànecs i dies
   iii) 20×10

k) Hi ha tres relacions de proporcionalitat, totes directes (caldria calcular les constants per a cada una).

l) Hi ha tres relacions de proporcionalitat, dues directes i una inversa (caldria calcular les constants per a cada una).

Solució a l'Activitat 7.21 de la pàg. 193

a) Passar 2 dies i mig a hores:

$$2'5\,\cancel{\text{dies}}\cdot\frac{24\,\text{h}}{1\,\cancel{\text{dia}}}=60\,\text{h}$$

b) Passar 30 cm/s a km/h:

$$\frac{30\,\cancel{\text{cm}}}{\cancel{\text{seg}}}\cdot\frac{1\,\cancel{\text{m}}}{100\,\cancel{\text{cm}}}\cdot\frac{1\,\text{km}}{1000\,\cancel{\text{m}}}\cdot\frac{60\,\cancel{\text{seg}}}{1\,\cancel{\text{min}}}\cdot\frac{60\,\cancel{\text{min}}}{1\,\text{h}}=1'08\,\text{km/h}$$

Solució a l'Activitat 7.22 de la pàg. 196

125 passos per minut.

Solució a l'Activitat 7.23 de la pàg. 196

S'han mort 36 porcs.

Solució a l'Activitat 7.24 de la pàg. 196

Es carrega el 16% d'IVA.

Solució a l'Activitat 7.25 de la pàg. 196

30 dies

Solució a l'Activitat 7.26 de la pàg. 196

48 €.

Solució a l'Activitat 7.27 de la pàg. 197

a) directament proporcional

b) no és proporcional

c) inversament proporcional

d) inversament proporcional

e) directament proporcional

f) inversament proporcional

Solució a l'Activitat 7.28 de la pàg. 197

Faran falta 4 ous, $133'\widehat{3}$ g de mantega, 160 g de xocolate i 80 g de llevat.

Solució a l'Activitat 7.29 de la pàg. 197

Acabaran la faena en 28 dies.

Solució a l'Activitat 7.30 de la pàg. 197

Cabran 972 sacs de 5 kg.

Solució a l'Activitat 7.31 de la pàg. 197

Haurà de pagar 1200 € el ramader de vaques i 900 € el d'ovelles.

Solució a l'Activitat 7.32 de la pàg. 197

Ocuparia 64 pàgines.

Solució a l'Activitat 7.33 de la pàg. 198

L'augment de sou no és proporcional.

Solució a l'Activitat 7.34 de la pàg. 198

Estaran a $7'\widehat{6}\,cm$.

Solució a l'Activitat 7.35 de la pàg. 198

L'escala del plànol és 1:100.

Solució a l'Activitat 7.36 de la pàg. 198

Es troben a 800 000 cm, és a dir, a 8 km.

Solució a l'Activitat 7.37 de la pàg. 198

El preu de venda ha sigut de 120 €.

Solució a l'Activitat 7.38 de la pàg. 198

El percentatge d'augment és d'un 5%.

Solució a l'Activitat 7.39 de la pàg. 198

a) $5\,\text{km}\ 6\,\text{hm}\ 7\,\text{dam}\ 8\,\text{m} = 5678\,\text{m}$

b) $0'3\,\text{dam}\ 15\,\text{m}\ 3\,\text{cm}\ 456\,\text{mm} = 184'86\,\text{dm}$

c) $4\,\text{kg}\ 12\,\text{dag}\ 15\,\text{cg}\ 80\,\text{mg} = 412'023\,\text{dag}$

d) $1'2\,\text{t}\ 6\,\text{q}\ 8\,\text{mag}\ 5\,\text{kg} = 1885\,\text{kg}$

e) $7\,\text{kl}\ 2\,\text{dal}\ 41\ 6\,\text{dl} = 70'246\,\text{hl}$

f) $0'005\,\text{hl}\ 15\,\text{l}\ 4\,\text{dl}\ 6\,\text{cl} = 15\,960\,\text{ml}$

g) $12\,\text{hm}^2\ 5\,\text{dam}^2\ 2\,\text{cm}^2\ 15\,\text{mm}^2 = 120\,500'000215\,\text{m}^2$

h) $65\,\text{ha}\ 32\,\text{a}\ 150\,\text{ca} = 0'65335\,\text{km}^2$

i) $0'0213\,\text{km}^3\ 0'45\ \text{dam}^3\ 30.000\,\text{cm}^3 = 21\,300\,450'03\,\text{m}^3$

j) $25\,\text{m}^3\ 50\,\text{dm}^3\ 675\,\text{cm}^3 = 25\,050'675$ litres

Solució a l'Activitat 7.40 de la pàg. 199

a) $4879'32\,\text{dm} = 4\,\text{hm}\ 8\,\text{dam}\ 7\,\text{m}\ 9\,\text{dm}\ 3\,\text{cm}\ 2\,\text{mm}$

b) $5'0267\,\text{hg} = 5\,\text{hg}\ 2\,\text{g}\ 6\,\text{dg}\ 7\,\text{cg}$

c) $45\,608\,\text{ml} = 4\,\text{dal}\ 5\,\text{l}\ 6\,\text{dl}\ 8\,\text{ml}$

d) $35\,489'4\,\text{cm}^2 = 3\,\text{m}^2\ 54\,\text{dm}^2\ 89\,\text{cm}^2\ 40\,\text{mm}^2$

e) $0'0548678\,\text{km}^3 = 54\,\text{hm}^3\ 867\,\text{dam}^3\ 800\,\text{m}^3$

Solució a l'Activitat 7.41 de la pàg. 199

a) $(5\,\text{hm}\ 6\,\text{m}\ 8\,\text{dm}) + (\ 0'3\,\text{km}\ 9\,\text{dam}\ 4\,\text{cm}) = 896'84\,\text{m}$

b) $5864'3\,\text{dam}^2 - (37\,\text{hm}^2\ 500\,\text{m}^2\ 6000\,\text{dm}^2) = 2158'7\,\text{dam}^2$

c) $(0'03\,\text{hm}^3\ 5\,\text{dam}^3\ 6354\,\text{cm}^3) \div 8 = 4\,375\,000'7945\,\text{dm}^3$

d) $(2\,\text{hm}^2\ 72\,\text{dam}^2\ 40\,\text{m}^2) + 43\,570\,\text{a} = 438'424\,\text{ha}$

e) $(4\,\text{m}^3\ 15\,\text{dm}^3\ 600\,\text{cm}^3) - 0'0003586\,\text{dam}^3 = 3\,657\,000\,\text{ml}$

Solució a l'Activitat 8.1 de la pàg. 206

a) *Temps per a recórrer 100 metres llisos*: quantitativa contínua

b) *El nombre de germans que teniu*: quantitativa discreta

c) *La vostra assignatura favorita*: qualitativa

d) *La producció de ferro d'una mina*: quantitativa contínua

Solució a l'Activitat 8.2 de la pàg. 207

a) *La quantitat de llibres que cada estudiant ha llegit en un any*: quantitativa discreta

b) *Color dels cabells dels estudiants d'una escola*: qualitativa

c) *Temps requerit per a ser atès en un servei d'atenció telefònica*: quantitativa contínua

d) *Nombre de dispositius electrònics en una casa*: quantitativa discreta

e) *El candidat polític preferit per uns votants*: qualitativa

f) *El grau de satisfacció amb els professors de la facultat*: quantitativa contínua

g) *El pes d'una persona*: quantitativa contínua

Solució a l'Activitat 8.3 de la pàg. 209

- En el cas de $N = 50$, la freqüència absoluta per al valor *4 membres actius* de la família era $n_4 = 5$; per tant, $f_4 = 5/50 = 0'1$, que representa un percentatge $p_4 = 10\%$.
- En el cas de $N = 1000$, la freqüència absoluta per al valor *4 membres actius* de la família era $n_4 = 5$; per tant, $f_4 = 5/1000 = 0'005$, que representa un percentatge molt inferior, $p_4 = 0'5\%$.

Solució a l'Activitat 8.4 de la pàg. 210

Taula A.3
Taula de freqüències de l'Activitat 8.4

Nombre de fills	n_i	f_i	p_i	N_i	F_i	P_i
0	5	0'2	20%	5	0'20	20%
1	6	0'24	24%	11	0'44	44%
2	8	0'32	32%	19	0'76	76%
3	4	0'16	16%	23	0'92	92%
4	2	0'08	8%	25	1	100%

Solució a l'Activitat 8.5 de la pàg. 211

Taula A.4
Taula de freqüències de l'Activitat 8.5

Talla	n_i	f_i	p_i	N_i	F_i	P_i
35	4	0′0667	6′67%	4	0′0667	6′67%
36	8	0′1333	13′33%	12	0′200	20%
37	14	0′2333	23′33%	26	0′4333	43′33%
38	10	0′1667	16′67%	36	0′600	60%
39	2	0′0333	3′33%	38	0′6333	63′33%
40	4	0′0667	6′67%	42	0′7000	70%
41	5	0′0833	8′33%	47	0′7833	78′33%
42	6	0′1000	10%	53	0′8833	88′33%
43	4	0′0667	6′67%	57	0′9500	95%
44	1	0′0167	1′67%	58	0′9667	96′67%
45	1	0′0167	1′67%	59	0′9833	98′33%
46	1	0′0167	1′67%	60	1′0000	100%

a) Van ser enquestats $N = 60$ alumnes (podem calcular-ho sumant els n_i).

b) A partir de les freqüències absolutes, relatives o el percentatge, podem veure que la talla que més es repeteix és la 37, amb un 23′33% d'ocurrència.

c) El 63′33% dels alumnes calcen menys d'un 40 (39 o menys); per tant, el 36′67% dels estudiants enquestats calcen un 40 o més.

Solució a l'Activitat 8.6 de la pàg. 213

Taula A.5
Taula de freqüències de l'Activitat 8.6

Diners	n_i	f_i	$p_i(\%)$	N_i	F_i	$P_i(\%)$
0'55	1	0'0333	3'33	1	0'0333	3'33
1'5	1	0'0333	3'33	2	0'0667	6'67
1'85	1	0'0333	3'33	3	0'1	10
1'9	1	0'0333	3'33	4	0'133	13'3
2'1	1	0'0333	3'33	5	0'167	16'7
2'18	1	0'0333	3'33	6	0'2	20
2'37	1	0'0333	3'33	7	0'233	23'3
3	1	0'0333	3'33	8	0'267	26'7
3'2	1	0'0333	3'33	9	0'3	30
3'35	1	0'0333	3'33	10	0'333	33'3
4'05	1	0'0333	3'33	11	0'367	36'7
4'25	1	0'0333	3'33	12	0'4	40
5'75	1	0'0333	3'33	13	0'433	43'3
6'2	1	0'0333	3'33	14	0'467	46'7
6'9	1	0'0333	3'33	15	0'5	50
7'1	1	0'0333	3'33	16	0'533	53'3
7'48	1	0'0333	3'33	17	0'567	56'7
8'12	1	0'0333	3'33	18	0'6	60
9'5	1	0'0333	3'33	19	0'633	63'3
10'6	1	0'0333	3'33	20	0'667	66'7
12'6	1	0'0333	3'33	21	0'7	70
13'2	1	0'0333	3'33	22	0'733	73'3
13'7	1	0'0333	3'33	23	0'767	76'7
15	1	0'0333	3'33	24	0'8	80
16'4	1	0'0333	3'33	25	0'833	83'3
18'5	1	0'0333	3'33	26	0'867	86'7
21'6	1	0'0333	3'33	27	0'9	90
25	1	0'0333	3'33	28	0'933	93'3
30	1	0'0333	3'33	29	0'967	96'7
31	1	0'0333	3'33	30	1	100

Solució a l'Activitat 8.7 de la pàg. 214

Farem primer el càlcul dels intervals. Primerament necessitem saber quantes dades (N) hi ha en la mostra. Si mirem les dades de l'Activitat 8.5 veurem que no ens diuen directament quants estudiants tenim en total, però ho podem calcular a partir de les freqüències absolutes, ja que la suma ha de ser el total d'estudiants. Per tant,

$$n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_{12} = 60$$

Així, agafarem $N = 60$ per a fer el càlcul dels intervals:

$$\text{Núm. intervals} = \sqrt{60} \sim 7'75 \sim 8$$

Ara, agafant el valor més gran (46) i més petit (35), calculem l'amplitud dels intervals:

$$\text{Amplitud} = \frac{46 - 35}{8} \sim 1'37 \sim 2$$

Per tant, podem agafar intervals amb una amplitud de 2 talles (perquè no tenim números de talla intermedis). Fixeu-vos que hauríem d'arribar fins a 47, si no ens deixarem fora les mesures 46 que tenim. Les noves dades per a començar a fer els càlculs seran:

Taula A.6
Dades obtingudes per a la variable talla *organitzada en intervals*

Talla	n_i
$[35, 37[$	12
$[37, 39[$	24
$[39, 41[$	6
$[41, 43[$	11
$[43, 45[$	5
$[45, 47[$	2

I la taula definitiva de freqüències seria la següent:

Taula A.7
Taula de freqüències definitiva organitzada en intervals de l'Activitat 8.7

Talla	n_i	f_i	$p_i(\%)$	N_i	F_i	$P_i(\%)$
$[35, 37[$	12	0'2	20	12	0'2	20
$[37, 39[$	24	0'4	40	36	0'6	60
$[39, 41[$	6	0'1	10	42	0'7	70
$[41, 43[$	11	0'183	18'3	53	0'883	88'3
$[43, 45[$	5	0'0833	8'33	58	0'967	96'7
$[45, 47[$	2	0'0333	3'33	60	1	100

Solució a l'Activitat 8.8 de la pàg. 214

a) Puntuacions en ordre creixent: 58, 63, 65, 67, 67, 69, 70, 72, 72, 72, 74, 74, 76, 76, 76, 78, 78, 80, 80, 80, 80, 82, 85, 85, 86, 92, 92, 93, 95, 98.

b) Puntuació més baixa: 58. Puntuació més alta: 98

c) Taula de freqüències agrupada en intervals de 10. En aquest cas, tot i que podríem calcular intervals diferents, l'enunciat ens els dona fets:

Taula A.8
Taula de freqüències de l'Activitat 8.8

Interval	n_i	f_i	p_i	N_i	F_i	P_i
$[50, 60[$	1	0'0333	3'33%	1	0'0333	3'33%
$[60, 70[$	5	0'1667	16'67%	6	0'2	20%
$[70, 80[$	11	0'367	36'67%	17	0'5666	56'66%
$[80, 90[$	8	0'2667	26'67%	25	0'8333	83'33%
$[90, 100[$	5	0'1667	16'67%	30	1	100%

d) L'interval que té més puntuacions és el 70 – 80 ($[70, 80[$)

e) La puntuació que ocorre més sovint és 74

f) Les marques de classe estan situades en $55, 65, 75, 85$ i 95

Solució a l'Activitat 8.9 de la pàg. 215

Primerament, calculem el nombre d'intervals:

$$\text{Núm. intervals} = \sqrt{80} \sim 8'94 \sim 9$$

Ara, agafant el valor més gran (83) i més petit (52), calculem l'amplitud dels intervals:

$$\text{Amplitud} = \frac{83 - 52}{9} = \frac{31}{9} \sim 3'44 \sim 4$$

Per tant, agafarem intervals amb una amplitud de 4 kg.

Taula A.9
Taula de freqüències de l'Activitat 8.9

Interval	Marca de classe	n_i	f_i	p_i	N_i	F_i	P_i
$[50, 54[$	52	1	0'0125	1'25%	1	0'0125	1'25%
$[54, 58[$	56	4	0'05	5%	5	0'0625	6'25%
$[58, 62[$	60	9	0'1125	11'25%	14	0'175	17'5%
$[62, 66[$	64	16	0'02	20%	30	0'375	37'5%
$[66, 70[$	68	26	0'325	32'5%	56	0'7	70%
$[70, 74[$	72	12	0'15	15%	68	0'85	85%
$[74, 78[$	76	7	0'0875	8'75%	75	0'9375	93'75%
$[78, 82[$	80	4	0'05	5%	79	0'9875	98'75%
$[82, 86[$	84	1	0'0125	1'25%	80	1	100%

Solució a l'Activitat 8.10 de la pàg. 217

Les dades de l'Activitat 8.8 organitzades en intervals en un histograma quedarien així:

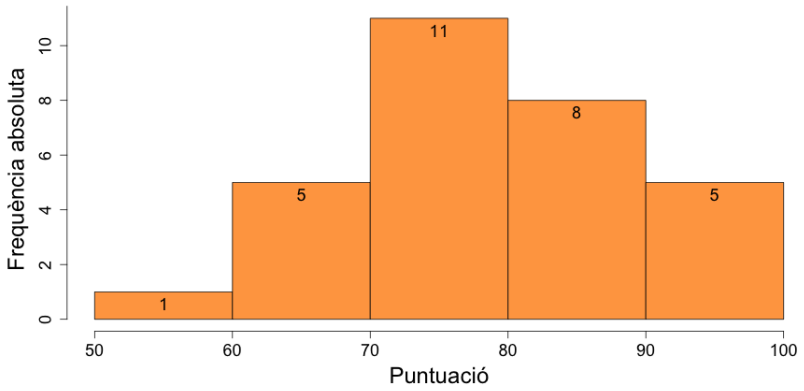


Figura A.19. Histograma de les dades de l'Activitat 8.8

Solució a l'Activitat 8.11 de la pàg. 218

a) $5 + 10 + 10 + 5 = 30$

b) 50%

c) No cal calcular tota la taula de freqüències, podem veure que representen $5/30 = 0'1667$ (arredonint), és a dir, un $16'67\%$.

Solució a l'Activitat 8.12 de la pàg. 218

- Ajudes als governs locals: 1269 milions de dòlars
- Salaris i beneficis marginals 1161 milions de dòlars
- Ajudes a organitzacions i persones: 873 milions de dòlars
- Operacions: 621 milions de dòlars
- Altres: 576 milions de dòlars

Solució a l'Activitat 8.13 de la pàg. 222

Com que tenim $N = 60$ alumnes enquestats, cal que ens fixem en la Taula A.4 de freqüències. Així, els valors centrals una vegada ordenades les dades seran ocupats per $x_{30} = 38$ i $x_{31} = 38$, de manera que la mediana és 38.

Solució a l'Activitat 8.14 de la pàg. 222

Per al càlcul de la mediana, la Taula A.8 de freqüències calculada en l'Activitat 8.8 no ens serveix, perquè està construïda per intervals, i dins de cada interval hi ha diferents valors. Així, recuperant l'ordenació de les puntuacions, tenim:

$$58, 63, 65, 67, 69, 70, 72, 72, 72, 74, 74, 76, 76, 76, 76,$$
$$78, 78, 80, 80, 80, 82, 85, 85, 86, 88, 92, 92, 93, 95, 98$$

Com que tenim $N = 30$, els valors centrals seran ocupats per $x_{15} = 76$ i $x_{16} = 78$, de manera que la mediana és $\frac{76+78}{2} = 77$.
Per al càlcul de la moda, la Taula A.8 ens diu que l'interval $[70, 80[$ és el que més ocurrències té (és l'interval modal). Així, n'hi haurà prou de fixar-nos en els valors que cauen dins d'aquest interval per a veure que la moda és 76. També podríem indicar que la classe modal és 75 (classe de l'interval $[70, 80[$).

Solució a l'Activitat 8.15 de la pàg. 222

En aquest cas, la Taula A.9 de freqüències calculada en l'Activitat 8.9 no ens serveix, perquè està construïda per intervals, i dins de cada interval hi ha diferents valors. No obstant això, intentarem resoldre-ho sense fer una ordenació de totes les puntuacions, calculant a partir de la taula que tenim.

Com que tenim $N = 80$, les posicions centrals estan ocupades pels valors x_{40} i x_{41}. Intentem esbrinar-los:

- Si ens fixem en la Taula A.9, a partir de les freqüències acumulades absolutes (N_i) podem saber que els valors corresponents a aquestes posicions estan en l'interval $[62, 66[$. Per tant, el següent interval, $[66, 70[$ comença amb el valor que fa 56 (x_{56}).
- A més, com que la freqüència de l'interval $[62, 66[$ és $n_4 = 16$, sabem que hi ha 16 valors que ordenats que ocupen les posicions x_{30} a x_{46}. Aquests valors resulten ser:

$$\underbrace{62, 62, \ldots 62}_{5 \text{ vegades}}, \underbrace{63, 63, \ldots 63}_{5 \text{ vegades}}, \underbrace{64, 64, \ldots 64}_{5 \text{ vegades}}, \underbrace{65, 65, \ldots 65}_{5 \text{ vegades}}$$

  Com hem dit, el primer dels valors d'aquest interval és $x_{30} = 62$; per tant, els que ocupen les posicions centrals són $s_{40} = 64$ i $x_{41} = 64$, de manera que la mediana és $\frac{64+64}{2} = 64$.

Com que l'interval modal és el $[66, 70[$, cal que busquem dins d'aquests valors el que més es repeteix. Així, la moda és 67.

Solució a l'Activitat 8.16 de la pàg. 224

A partir de les dades de la Taula A.4 calcularem:

$$\overline{x} = \frac{35{\cdot}4+36{\cdot}8+37{\cdot}14+38{\cdot}10+39{\cdot}2+40{\cdot}4+41{\cdot}5+42{\cdot}6+43{\cdot}4+44{\cdot}1+45{\cdot}1+46{\cdot}1}{60} =$$

$$= \frac{2328}{60} = 38'3$$

Solució a l'Activitat 8.17 de la pàg. 224

En aquest cas, a partir de la Taula A.8 de freqüències calculada en l'Activitat 8.8, farem servir les marques de classe per a calcular la mitjana. Així:

$$\overline{x} = \frac{55 \cdot 1 + 65 \cdot 4 + 75 \cdot 11 + 85 \cdot 8 + 95 \cdot 5}{30} =$$

$$= \frac{2366}{30} = 78'67$$

Solució a l'Activitat 8.18 de la pàg. 224

En aquest cas, tornem a fer ús de les marques de classe de la Taula A.9 calculada en

l'Activitat 8.9:

$$\begin{aligned}\overline{x} &= \frac{52\cdot 1+56\cdot 4+60\cdot 9+64\cdot 16+68\cdot 26+72\cdot 12+76\cdot 7+80\cdot 4+84\cdot 1}{80} = \\ &= \frac{52+224+540+1024+1768+864+532+320+84}{80} = \\ &= \frac{5408}{80} = 67'6\end{aligned}$$

Solució a l'Activitat 8.20 de la pàg. 228

Ampliarem la Taula A.9 de freqüències calculada en l'Activitat 8.9 per a fer els càlculs corresponents, sabent que $\overline{x} = 67'6\,\text{kg}$.

Per al càlcul del rang, simplement calculem la diferència entre el valor màxim i mínim a les nostres dades. Així, simplement faríem el càlcul següent: $R = 83 - 52 = 31$.

Per al càlcul de la variància i de la desviació típica ampliarem la taula de freqüències obtinguda en l'Activitat 8.9.

Taula A.10
Taula de freqüències ampliada de l'Activitat 8.20

Interval	m_i	n_i	f_i	p_i	N_i	F_i	P_i	$m_i-\overline{x}$	$(m_i-\overline{x})^2$	$(m_i-\overline{x})^2\cdot n_i$
$[50,54[$	52	1	0'0125	1'25%	1	0'0125	1'25%	−15'6	243'36	243'36
$[54,58[$	56	4	0'05	5%	5	0'0625	6'25%	−13'6	184'96	739'84
$[58,62[$	60	9	0'1125	11'25%	14	0'175	17'5%	−7'6	57'76	519'84
$[62,66[$	64	16	0'02	20%	30	0'375	37'5%	−3'6	12'96	207'36
$[66,70[$	68	26	0'325	32'5%	56	0'7	70%	0'4	0'16	4'16
$[70,74[$	72	12	0'15	15%	68	0'85	85%	4'4	19'36	232'32
$[74,78[$	76	7	0'0875	8'75%	75	0'9375	93'75%	8'4	70'56	493'92
$[78,82[$	80	4	0'05	5%	79	0'9875	98'75%	12'4	153'76	615'04
$[82,86[$	84	1	0'0125	1'25%	80	1	100%	16'4	268'96	268'96
										3324'8

Fent ús de l'Equació 8.2 i de la suma final de la Taula A.10, tenim que:

$$\sigma^2 = \frac{(m_1-\overline{x})^2\cdot n_1+(m_2-\overline{x})^2\cdot n_2+\cdots+(m_i-\overline{x})^2\cdot n_i}{80} = \frac{3324'8}{80} = 41'56$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{41'56} = 6'4467$$

Solució a l'Activitat 8.21 de la pàg. 230

Sí que és possible, però els 6 estudiants restants han de tenir la màxima puntuació (75 punts) i els 18 de l'enunciat han de puntuar exactament 59.

Solució a l'Activitat 8.22 de la pàg. 230

Desglossem el càlcul dels valors necessaris per a fer el diagrama de caixa i bigots:

a) Valors ordenats (14 valors): 120, 121, 121, 124, 126, 128, 132, 134, 140, 142, 147, 150, 152, 160.

b) Calculem la mediana (Q_2) a partir dels valors que ocupen les posicions 7 i 8. $Q_2 = \frac{132+134}{2} = 133$

c) Puntuació més baixa = 3′6. Puntuació més alta = 8′4

d) Quartils inferior i superior:

- Per al càlcul del quartil inferior (Q_1) agafem les 7 primeres dades: $120, 121, 121, 124, 126, 128, 132$. Calculem la mediana d'aquestes (valor que ocupa la posició 4, obtenint: $Q_1 = 124$.
- Per al càlcul del quartil superior (Q_3) agafem les 7 darreres dades: $134, 140, 142, 147, 150, 152, 160$. Calculem la mediana d'aquestes (valor que ocupa novament la posició 4), obtenint: $Q_3 = 147$

e) Calculem el rang interquartil: $RIQ = Q_3 - Q_1 = 147 - 124 = 23$.

f) Calculem els valors atípics, que seran els més allunyats de $1'5 \times RIQ$ de Q_1 o Q_3. Així:

$$1'5 \times RIQ = 1'5 \times 23 = 34'5$$

Per tant, tot valor per davall de $Q_1 - 34'5 = 124 - 34'5 = 89'5$ o per damunt de $Q_3 + 34'5 = 147 + 34'5 = 181'5$ serà considerat un valor atípic en el diagrama de caixa i bigots. En aquest cas, no tenim cap valor atípic.

En la Taula A.11 mostrem els valors obtinguts per a la correcta representació del diagrama de caixa i bigots de les alçades dels estudiants (en cm).

Taula A.11
Estadístics calculats a partir de les dades de l'alçada en cm

	Altura
Valor més baix	120
Quartil inferior (Q_1)	124
Mitjana (Q_2)	133
Quartil superior (Q_3)	147
Valor més alt	160
RIQ	23
$1'5 \times RIQ$	34′5
Valors atípics	$< 89'5$
	$> 181'5$

Finalment, el dibuix del diagrama de caixa i bigots quedaria com el que mostrem en la Figura A.20.

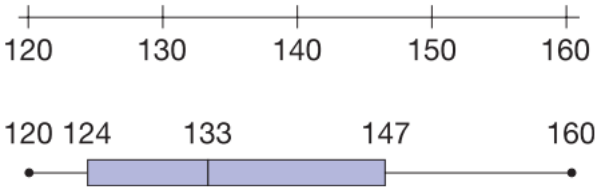


Figura A.20. Diagrama de caixa i bigots per a les dades de l'Activitat 8.22 (extret de Musser i cols., 2013)

Solució a l'Activitat 8.23 de la pàg. 230

En la Taula A.12 mostrem els valor obtinguts per a la correcta representació del diagrama de caixa i bigots de les alçades dels estudiants (en cm).

Taula A.12
Estadístics calculats a partir de les dades del pre-test i post-test dels estudiants de Pascual

	Pre-test	**Post-test**
Valor més baix	57	66
Quartil inferior (Q_1)	67	77
Mediana (Q_2)	79'5	84'5
Quartil superior (Q_3)	86	90
Valor més alt	93	95
RIQ	19	13
$1'5 \times RIQ$	28'5	19'5
Valors atípics	$< 38'5$	$< 57'5$
	$> 114'5$	$> 109'5$

Finalment, el dibuix del diagrama de caixa i bigots quedaria com el que mostrem en la Figura A.21.

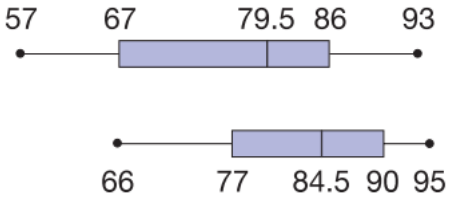


Figura A.21. Diagrama de caixa i bigots per a les dades de l'Activitat 8.23 (extret de Musser i cols., 2013)

Podem concloure que els estudiants han millorat els coneixements dels que han sigut avaluats després de les classes, perquè tots els estadístics milloren en el post-test, en relació amb el pre-test.
Finalment, responem a les preguntes:

a) En el pre-test, quines són les notes que superen el 75% de les puntuacions de la classe? En el pre-test, les notes que queden per damunt del quartil superior superaran el 75%. Aquestes són les que són iguals o superiors a 86.

b) En el post-test, quines són les notes inferiors al 25% de les puntuacions de la classe?

En el post-test, les notes que queden per davall del quartil inferior seran menors al 25%. Aquestes són les que són iguals o inferiors a 77.

Solució a l'Activitat 8.24 de la pàg. 231

En la Taula A.13 mostrem els valor obtinguts per a la correcta representació del diagrama de caixa i bigots per a cada categoria dels professors dels EUA.

Taula A.13
Estadístics calculats a partir de les dades de la Taula 8.27

	Primària	**Secundària**
Valor més baix	33'9	37'7
Quartil inferior (Q_1)	45'5	45'9
Mediana (Q_2)	48'6	48'9
Quartil superior (Q_3)	56'6	56'7
Valor més alt	69'5	68'8
RIQ	16'1	10'8
$1'5 \times RIQ$	16'65	16'2
Valors atípics	$< 28'85$	$< 29'7$
	$> 73'35$	$> 72'9$

En la Figura A.22 mostrem la comparació dels diagrames de caixa i bigots per als dos conjunts de dades.

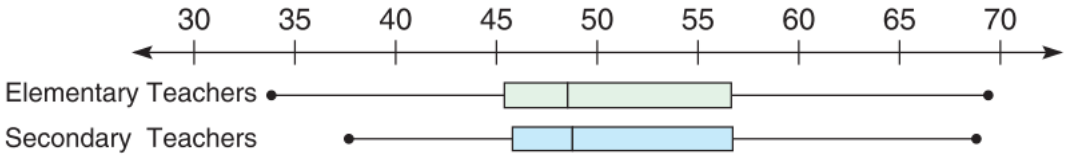


Figura A.22. Diagrames de caixa i bigots per als professors de Primària i Secundària dels EUA (extrets de Musser i cols., 2013)

Atès que els bigots del diagrama dels professors de Primària s'estenen més tant a la dreta com a l'esquerra que els dels professors de Secundària, sabem que el salari del professorat de Secundària està menys distribuït que el salari del professorat de Primària (és més uniforme). Observeu com els diagrames de caixa i bigots ens donen una comparació visual directa de les estadístiques de la Taula A.13.

Solució a l'Activitat 8.25 de la pàg. 234

a) L'espai mostral serà:

$$E = \{C, +\} = \{\text{cara}, \text{creu}\} = \{\text{traure una cara}, \text{traure una creu}\}$$

b) Els successos associats (*espai de successos* a aquest experiment serien $(2^2 = 4)$:

i) $A =$ Traure una cara en el llançament $= \{C\}$.
ii) $B =$ Traure una creu en el llançament $= \{+\}$.

iii) C = Traure una cara o una creu en el llançament = $\{C, +\}$.

iv) D = No traure ni cara ni creu en el llançament = $\{\} = \varnothing$.

c) Un succés segur serà C, traure una cara o una creu en el llançament. I un succés impossible podria ser D, no traure ni cara ni creu.

Solució a l'Activitat 8.26 de la pàg. 235

Una bona manera d'estudiar els successos compostos és amb els *diagrames d'arbre*:

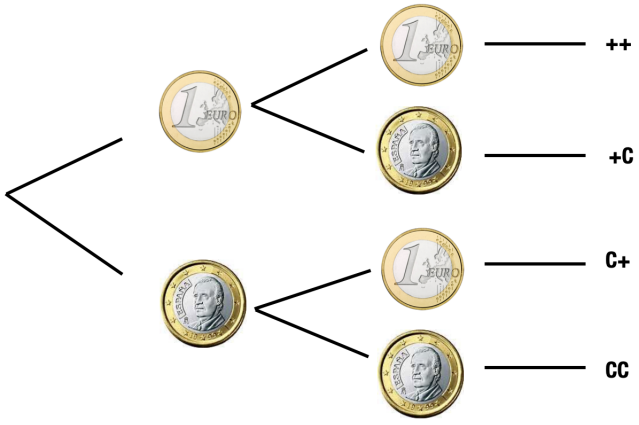


Figura A.23. Successos possibles per a l'experiment *tirar dues monedes no simultàniament*

a) L'espai mostral serà: $E = \{++, +C, C+, CC\}$

b) Obtenir els successos associats (*espai de successos* en aquest experiment ja es complica, perquè tenim $2^4 = 16$ possibilitats. A continuació teniu alguns exemples de successos:

i) Fixem el primer i el segon llançaments:

- A = Traure una creu en el primer llançament i una creu en el segon = $\{++\}$.
- B = Traure una creu en el primer llançament i una cara en el segon = $\{+C\}$.
- C = Traure una cara en el primer llançament i una creu en el segon = $\{C+\}$.
- D = Traure una cara en el primer llançament i una cara en el segon = $\{CC\}$.

ii) Fixem només el primer llançament:

- E = Traure una cara en el primer llançament = $\{C+, CC\}$.
- F = Traure una creu en el primer llançament = $\{++, +C\}$.

iii) Fixem només el segon llançament:

- G = Traure una cara en el segon llançament = $\{+C, CC\}$.
- H = Traure una creu en el segon llançament = $\{++, C+\}$.

iv) No fixem cap llançament:

- I = Traure una cara i una creu (no importa l'ordre) = $\{C+, +C\}$.
- J = Traure dos creus = $\{++\}$.
- K = Traure dues cares = $\{CC\}$.
- L = Traure almenys una creu = $\{++, +C, C+\}$.
- M = Traure almenys una cara = $\{+C, C+, CC\}$.
- N = No traure cap cara = $\{++\}$.
- O = No traure cap creu = $\{CC\}$.
- P = Traure alguna cara o creu en els dos llançaments = $\{++, +C, C+, CC\}$.
- Q = No traure cap cara ni cap creu= $\varnothing$.

c) Un succés segur serà P. I un succés impossible podria ser Q.

Solució a l'Activitat 8.27 de la pàg. 237

Inicialment, com que l'experiment vol recollir les dades de la suma de dos daus, podríem pensar que l'espai mostral és compost per $E = \{2, 3, 4, \ldots, 12\}$. Però hem de fixar-nos que aquests resultats no són *equiprobables*, perquè si bé l'única manera d'obtenir un 2 és a amb $1 + 1$, per al cas del 10, per exemple, tenim que pot obtenir-se de tres maneres diferents $4 + 6$, $5 + 5$ o $6 + 4$. Així, per a construir un espai mostral equiprobable podem ajudar-nos de la Figura A.24.

	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Figura A.24. Resultats possibles per a l'experiment *llançar dos daus*

a) L'espai mostral equiprobable serà $E = \{(1, 1), \ldots, (2, 1) \ldots, (6, 1), \ldots, (6, 6)\}$. $|E| = 36$

b) Algun possible succés:

- P = que la suma siga 5 = $\{(2, 3), (3, 2)\}$.
- Q = que la suma siga 10 = $\{(4, 6), (5, 5), (6, 4)\}$.

c) Un succés segur serà que la suma estiga entre 2 i 36. I un succés impossible podria ser obtenir un 1.

d) Càlcul de probabilitats. A partir dels casos possibles mostrats en la Figura A.24 tenim que:

- Probabilitat del succés A (*obtenir un 5*):

$$P(A) = \frac{|A|}{|E|} = \frac{2}{36}$$

- Probabilitat del succés B (*obtenir un 8*):

$$P(B) = \frac{|B|}{|E|} = \frac{5}{36}$$

- Probabilitat del succés C (*obtenir almenys un 4*):

$$P(C) = \frac{|C|}{|E|} = \frac{33}{36} = \frac{11}{12}$$

Solució a l'Activitat 8.28 de la pàg. 238

Com que les tres regions de colors no són de la mateixa mida, no podem garantir que siguen equiprobables. Així, primerament hem d'obtenir regions iguals per a construir l'espai mostral equiprobable.

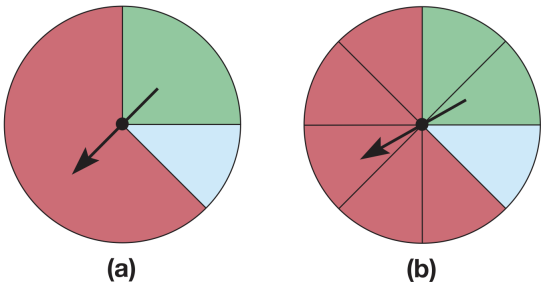


Figura A.25. Ruleta de colors original i transformada en regions equiprobables

Si observem la Figura A.25 ens adonarem que la ruleta original pot dividir-se en vuit regions d'igual forma i grandària. Atès que cinc de les vuit regions d'igual grandària són roges, sabem que la probabilitat d'assenyalar-ne una de roja és el quocient entre les regions roges i el total de regions, és a dir $^5/_8$.

Solució a l'Activitat 8.29 de la pàg. 238

a) $P(\text{cau en 0 o 00}) = \frac{2}{38} = \frac{1}{19}$

b) $P(\text{cau en el 23}) = \frac{1}{38}$

c) $P(\text{cau en una casella roja}) = \frac{18}{38} = \frac{9}{19}$

d) $P(\text{no cau en una casella entre 20 i 36}) = \frac{21}{38}$

Solució a l'Activitat 8.30 de la pàg. 240

a) Calculem primerament les probabilitats dels successos Q, R i S mitjançant el procediment estàndard:

- Q = una de les bales extretes és roja = $\{RV, RG, RB, VR, GR, BR\} \Longrightarrow P(Q) = \frac{6}{12}$
- R = una de les bales extretes és groga = $\{GR, GV, GB, RG, VG, BG\} \Longrightarrow P(R) = \frac{6}{12}$
- S = una de les bales extretes és roja o groga = $\{RV, RG, RB, VR, GR, BR, GV, GB, VG, BG\} \Longrightarrow P(S) = \frac{10}{12}$

Com podem comprovar, en aquest cas:

$$\frac{10}{12} \neq \frac{6}{12} + \frac{6}{12}$$

És a dir:

$$P(S) = P(Q \cup R) = \frac{10}{12} \neq \frac{6}{12} + \frac{6}{12} = P(Q) + P(R)$$

Per tant, obtenim que no es compleix l'Equació 8.3:

$$P(Q \cup R) \neq P(Q) + P(R)$$

b) Per a saber per què no ha funcionat l'Equació 8.3, cal que ens fixem que hi ha dos resultats del conjunt S que apareixen tant en el succés Q com en el R. Aquests resultats són RG i GR. És a dir: $Q \cap R = \{RG, GR\}$.

D'aquesta manera, quan calculem $P(Q) + P(R)$, comptem dues vegades aquests resultats. És a dir, per a fer un càlcul correcte hauríem de tenir en compte aquests resultats repetits (intersecció), tal com segueix:

$$P(Q) + P(R) = P(Q) + P(R) - P(Q \cap R) = \frac{6}{12} + \frac{6}{12} - \frac{2}{12} = \frac{10}{12}$$

Per tant, en l'Equació 8.3 cal tenir en compte la intersecció dels dos conjunts per a no afegir de manera repetida possibles resultats.

Solució a l'Activitat 8.31 de la pàg. 242

La dificultat d'aquesta activitat radica a trobar un espai mostral equiprobable, ja que si intentem construir-lo com a $E = \{F, D, P\}$, no ho és.
El més senzill és seleccionar com a espai mostral que conste de **totes les llepolies**:

$$E = \{F1, F2, F3, F4, F5, F6, D1, D2, D3, P1, P2\}$$

Ara, l'esdeveniment F, *traure una maduixa*, és $F = \{F1, F2, F3, F4, F5, F6\}$ i, per tant, la probabilitat és $P(F) = \frac{6}{11}$.

Solució a l'Activitat 8.32 de la pàg. 242

Com en l'Activitat 8.31, la dificultat principal radica a trobar un espai equiprobable. En aquest cas, el construïm a partir del total d'alumnes, representant-los a tots. Per tant, en un primer moment hem d'esbrinar quants estudiants hi ha. Açò ho podem obtenir a partir del coneixement de teoria de conjunts vist en el Tema 1.

A continuació farem un diagrama de Venn representant la situació, considerant els següents esdeveniments:

- $M =$ *que un alumne de la classe seleccionat a l'atzar tinga preferència per Matemàtiques per a Mestres*
- $C =$ *que un alumne de la classe seleccionat a l'atzar tinga preferència per Ciències Naturals per a Mestres*

Cal parar atenció perquè aquests successos no són exclusius, és a dir, en M podem tenir estudiants que també prefereixen *Ciències Naturals per a Mestres*.

Representant la situació en un diagrama de Venn, Figura A.26, tindrem que la regió central correspon a l'esdeveniment $M \cap C$. En aquest cas cada nombre representa la quantitat de resultat de la regió disjunta corresponent (10 són els estudiants que només prefereixen les *Matemàtiques*, $|M \backslash C|$).

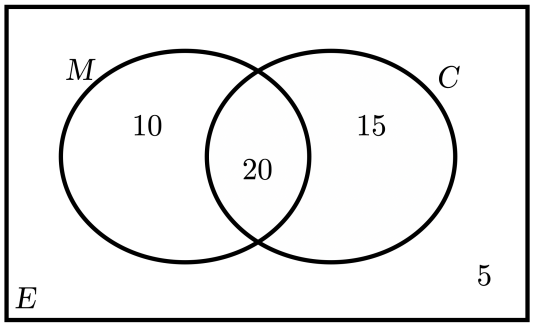


Figura A.26. Diagrama de Venn per a l'Activitat 8.32

Així, en un primer moment, a partir dels nombres que tenim, és senzill trobar que hi ha 50 alumnes en total en la classe. Ara bé, per a poder fer ús de les fórmules de la unió i del complementari, prèviament hem de calcular a quants estudiants els agrada *Matemàtiques per a Mestres* (no exclusivament) i *Ciències Naturals per a Mestres* (no exclusivament). Així:

- $|M| = 10 + 20 = 30$
- $|C| = 15 + 20 = 35$

Ara ja estem en situació de poder resoldre les preguntes:

a) Per a determinar la probabilitat de $A =$ *que un alumne de la classe seleccionat a l'atzar tinga preferència per alguna de les dues assignatures*, consisteix a trobar la probabilitat de l'esdeveniment $M \cup C$, per tant:

$$P(A) = P(M \cup C) = P(M) + P(C) - P(M \cap C) = \frac{30}{50} + \frac{35}{50} - \frac{20}{50} = \frac{45}{50}$$

Fixeu-vos que en aquest cas, com que en la Figura A.26 ja teníem els resultats de les regions disjuntes, n'hi hauria hagut prou a sumar-los, 45 de 50.

b) Per a calcular la probabilitat de $B =$ *que un alumne de la classe seleccionat a l'atzar no tinga preferència per* Matemàtiques per a Mestres, farem:

$$P(B) = P(\overline{M}) = 1 - P(M) = 1 - \frac{30}{50} = \frac{20}{50}$$

Solució a l'Activitat 8.33 de la pàg. 242

Per a trobar l'espai mostral equiprobable podem organitzar-lo segons el resultat, en què l'ordre importa. Així podrem obtenir 3 cares (CCC), 2 cares ($CC+, C+C, +CC$), 1 cara ($C++, +C+, ++C$) o cap cara ($+++$). Per tant:

$$E = \{CCC, CC+, C+C, +CC, C++, +C+, ++C, +++\}$$

Calculem primerament les probabilitats dels successos que ens dona l'enunciat:

- $A = \{CCC\} \Longrightarrow P(A) = \frac{1}{8}$
- $B = \{CC+, C+C, +CC\} \Longrightarrow P(B) = \frac{3}{8}$
- $C = \{CCC, CC+, +CC, +C+\} \Longrightarrow P(C) = \frac{4}{8}$

a) $A \cup B =$ *el nombre de cares és dos o tres*

Per a fer ús de la fórmula de la unió, cal que trobem l'esdeveniment $A \cap B =$ *ixen dues i tres cares a l'hora.* Però aquest és un esdeveniment impossible, perquè $A \cap B = \varnothing$. Per tant, fent ús de la fórmula de la unió tindrem:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{4}{8}$$

b) $\overline{B} =$ *no ixen dues cares*

Directament, fent ús de la fórmula de la probabilitat del complementari podem veure que

$$P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$$

c) $\overline{C} =$ *la segona moneda no ix cara.* Així:

$$P(\overline{C}) = 1 - P(C) = 1 - \frac{4}{8} = \frac{4}{8}$$

d) $B \cap C =$ *el nombre de cares és exactament dos i la segona moneda ix cara.* En aquest cas, cal que ho calculem a partir de la fórmula de la probabilitat clàssica (tot i que en la Secció 8.2.4 donarem un altre mètode per a calcular la probabilitat d'aquests esdeveniments). Com que $B \cap C = \{CC+, +CC\}$, llavors:

$$P(B \cap C) = \frac{2}{8}$$

Solució a l'Activitat 8.34 de la pàg. 245

$P(\text{dues boles negres amb reemplaçament}) = \frac{1}{9}$.

Solució a l'Activitat 8.35 de la pàg. 245

$P(\text{una bola negra i després una roja}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{16}$.

Solució a l'Activitat 8.36 de la pàg. 248

a $1/6$

b $1/3$

c 0

Solució a l'Activitat 8.37 de la pàg. 248

a) La probabilitat que la segona bola extreta siga roja si la primera vegada es va extraure una bola roja és $2/7$.

b) La probabilitat que la segona bola extreta siga blava si la primera bola era roja és $5/7$.

c) La probabilitat de traure una segona bola blava si la primera bola era blava és $4/7$.

Solució a l'Activitat 8.38 de la pàg. 250

a) $P(\overline{A}|B) = \frac{300}{500}$

b) $P(\overline{A}|\overline{B}) = \frac{400}{1000}$

c) $P(A|\overline{B}) = \frac{600}{1000}$

Solució a l'Activitat 8.39 de la pàg. 251

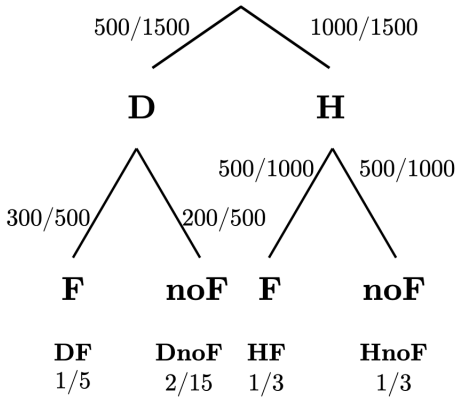


Figura A.27. Diagrama d'arbre de la taula de contingència de l'Exemple 8.35

Solució a l'Activitat 8.40 de la pàg. 251

Inicialment, tenim les dades següents en la taula de contingència:

Taula A.14
Taula de contingència inicial de l'Activitat 8.40

	B	$\overline{B}$	
F	56% ($\star$)		60%
$\overline{F}$			
	70%		100%

($\star$) Aquest càlcul podem fer-lo directament, calculant un 80% dels que practiquen bàsquet (70% del total), i obtenim un $0'8 \cdot 0'7 = 0'56$. És a dir, un 56% del total.

O bé, com que la informació que ens dona l'enunciat és $P(F|B) = 80\%$; per tant, podem obtenir el quadrant que conté la informació $F \cap B$ directament de la fórmula de la probabilitat condicional com a

$$P(F|B) = \frac{P(F \cap B)}{P(B)} \Longrightarrow 0'8 = \frac{P(F \cap B)}{0'7} \Longrightarrow P(F \cap B) = 0'8 \cdot 0'7 = 0'56$$

Per tant, completaríem la taula de contingència com mostrem ací:

Taula A.15
Taula de contingència de l'Activitat 8.40

	B	$\overline{B}$	
F	56%	4%	60%
$\overline{F}$	14%	26%	40%
	70%	30%	100%

Donat que ens pregunten per $P(B|F)$, podríem fer ús de la fórmula de la probabilitat condicionada i obtindríem:

$$P(B|F) = \frac{P(B \cap F)}{P(F)} \Longrightarrow P(B|F) = \frac{0'56}{0'6} = 0'94$$

Solució a l'Activitat 8.41 de la pàg. 251

Inicialment, tenim les dades esegüents n la taula de contingència:

Taula A.16
Taula de contingència inicial de l'Activitat 8.41

	H	$\overline{H}$	
C	20% del 55% del total	11'25%	
$\overline{C}$			
	55%		100%

Completant la Taula A.16, obtenim:

Taula A.17
Taula de contingència de l'Activitat 8.41

	H	$\overline{H}$	
C	11%	11'25%	22'25%
$\overline{C}$	44%	33'75%	77'75%
	55%	45%	100%

Directament, podem veure en la Taula A.17 que la probabilitat que ens demanen és $P(C) = 22'25\%$.

Solució a l'Activitat 8.42 de la pàg. 253

a) Si el joc costa 1 €, 2.5 e.

b) Si el joc costa 2 €, 1.5 e

c) 3.5 e és el màxim que el jugador hauria d'estar disposat a pagar per a jugar i no perdre diners a llarg termini

Solució a l'Activitat 8.43 de la pàg. 254

a) El pronòstic a favor d'obtenir un 41 : 5.

b) El pronòstic a favor d'obtenir un nombre primer és 3 : 3 = 1 : 1.

c) El pronòstic a favor d'obtenir un nombre major que 0 és 6 : 0.

d) El pronòstic a favor d'obtenir un nombre major que 6 és 0 : 6.

Solució a l'Activitat 8.44 de la pàg. 254

a) El pronòstic a favor d'obtenir un 41 : 5. Llavors la probabilitat associada és $\frac{1}{6}$.

b) El pronòstic a favor d'obtenir un nombre primer és 3 : 3 = 1 : 1. Llavors la probabilitat associada és $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

c) El pronòstic a favor d'obtenir un nombre major que 0 és 6 : 0. Llavors la probabilitat associada és $\frac{6}{6}$.

d) El pronòstic a favor d'obtenir un nombre major que 6 és 0 : 6. Llavors la probabilitat associada és $\frac{0}{6}$.

Solució a l'Activitat 8.45 de la pàg. 255

a) A favor d'obtenir un color primari (roig, groc o blau): 7 : 1

b) En contra d'obtenir verd o roig: 3 : 5

Solució a l'Activitat 8.46 de la pàg. 255

a) La freqüència absoluta corresponent a la cara 3 és 12.

b) Indiqueu el percentatge corresponent a la cara 6 és 10%.

Solució a l'Activitat 8.47 de la pàg. 256

Taula A.18
Taula de freqüències de l'Activitat 8.47

Tipus de refresc	n_i	f_i	p_i	N_i	F_i	P_i
Taronja	150	0′1875	18′75	150	0′1875	18′75
Llima	200	0′2500	25	350	0′4375	43′75
Cola	400	0′5000	50	750	0′9375	93′75
Altres	50	0′0625	6′25	800	1	100

Solució a l'Activitat 8.48 de la pàg. 256

Ana fa 179 cm.

Solució a l'Activitat 8.49 de la pàg. 256

La mitjana és 41′96, la mediana és 40 i la moda és 38.

Solució a l'Activitat 8.50 de la pàg. 256

$x = 3$.

Solució a l'Activitat 8.51 de la pàg. 257

a) Que coincidisca la mitjana i la moda: 6-7-8-8-8-8-9-10

b) que coincidisca la mediana i la moda: 1-2-5-5-5-5-7-8

c) que la seua mitjana siga 3: 3-3-3-3-3-3-3-3

d) que tinga 6 de mediana: 3-4-5-6-6-7-8-9

Solució a l'Activitat 8.52 de la pàg. 257

La dispersió no varia. La mitjana augmentarà en 50 unitats

Solució a l'Activitat 8.53 de la pàg. 257

283 alumnes pesen menys de 70 kg. Un 20% dels alumnes pesa entre 65 i 70 kg.

Solució a l'Activitat 8.54 de la pàg. 257

Les puntuacions d'Anna van ser: $8'7, 8'8$ i $9'5$.

Solució a l'Activitat 8.55 de la pàg. 258

La mitja és de $10'05$ anys.

Solució a l'Activitat 8.56 de la pàg. 258

Els nombres són 4, 5, 7, 9 i 10.

Solució a l'Activitat 8.57 de la pàg. 258

a) La mediana és 2

b) La mediana és 7

c) La mediana és 20

Solució a l'Activitat 8.58 de la pàg. 258

$a = 30$ i $b = 58$.

Solució a l'Activitat 8.59 de la pàg. 258

La dada que falta és 7. La moda és 5, 7 i 8; i la mitjana és 6′7.

Solució a l'Activitat 8.60 de la pàg. 258

a) Han sigut tractats 28 malalts en el grup A i 32 en el B.

b) Es perd més pes amb el tractament en què la mitjana siga major; i és una mica major en l'histograma del tractament A (esquerra). No obstant això, és més fiable aquell en què la dispersió siga menor, fet que correspon a l'histograma del tractament B (dreta).

c) El percentatge d'èxit per al tractament A és d'un 60′7% i d'un 56′25% en el tractament B.

Solució a l'Activitat 8.61 de la pàg. 259

El conjunt de dades d) (Taula 8.44).

Solució a l'Activitat 8.62 de la pàg. 260

i) El nombre d'alumnes de la classe és: b) 28

ii) La nota mitjana és: c) No es pot calcular

iii) La moda és: a) APROVAT

iv) La mediana és: c) No es pot calcular

Solució a l'Activitat 8.63 de la pàg. 260

a) Per al càlcul de la mitjana no cal tenir en compte els valors nuls de la variable: **FALS**

b) Si canviem una de les dades d'una distribució, el valor de la moda també variarà: **FALS**

c) Com més gran siga la dispersió menys representativa serà la mitjana: **VERTADER**

d) Per al càlcul del rang intervenen tots els valors: **FALS**: **FALS**

e) Per a les variables qualitatives no es pot calcular cap mesura estadística: **FALS**

f) La suma de totes les freqüències relatives en qualsevol taula de freqüències és el nombre total d'observacions: **FALS**

g) La suma de tots els percentatges en qualsevol taula de freqüències és 100%: **VERTADER**

h) L'any de naixement dels jugadors de futbol professionals és una variable quantitativa contínua: **FALS**

i) Prendre com a mostra a tots els alumnes de 2n de Magisteri per a fer un estudi sobre els alumnes de la Universitat de València no proporcionarà resultats fiables: **VERTADER**

j) En una distribució de dades la mitjana i la moda coincideixen sempre: **FALS**

Solució a l'Activitat 8.64 de la pàg. 261

a) $P(X=3) = {}^{10}/_{100}$

b) $P(Y \neq 4) = 1 - P(Y=4) = {}^{90}/_{100}$

c) $P(X \neq Y) = {}^{90}/_{100}$

d) $P(X > Y) = {}^{45}/_{100}$

e) $P(X \leq Y) = {}^{55}/_{100}$

f) $P(X+Y=9) = {}^{10}/_{100}$

g) $P(X < 4 \text{ i } Y < 3) = {}^{12}/_{100}$

h) $P(X > 4 \text{ i } Y < 4 = {}^{20}/_{100}$

i) $P(X+Y \neq 8) = 1 - P(X+Y=8) = 1 - {}^{9}/_{100} = {}^{91}/_{100}$

j) $P(X \neq 5 \text{ i } Y \neq 4) = {}^{81}/_{100}$

k) $P(XY > 49) = {}^{50}/_{100}$

Solució a l'Activitat 8.65 de la pàg. 261

a) $P(A) = 200/1000$

b) $P(F) = 100/1000$

c) $P(A \cap F) = 100/1000$

d) $P(D) = 167/1000$

e) $P(E) = 100/1000$

f) $P(D \cap E) = 34/1000$

g) $P(\overline{A} \cap \overline{F}) = 400/1000$

h) $P(A \cap \overline{B}) = 100/1000$

i) $P(\overline{A} \cap B) = 0/1000$

j) $P(A \cup \overline{B}) = 1000/1000$

k) $P(A \cap E) = 100/1000$

Solució a l'Activitat 8.66 de la pàg. 261

a) $P(Home) = 64/100$; $P(Dona) = 36/100$; $P(Esport) = 60/100$; $P(\overline{E}) = 40/100$; $P(Home \cap Esport) = 48/100$.

b) $P(Esport|Home) = 48/64$; $P(\overline{E}|H) = 16/64$.

c) $P(E|D) = 12/36$; $P(\overline{E}|D) = 24/36$.

Solució a l'Activitat 8.67 de la pàg. 262

a) $B = A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 = A_4$

b) $C = A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6 \cap A_7 = A_3$

c) $B \cap C = A_4 \cap A_3 = A_3$

d) $B \cup C = A_4 \cup A_3 = A_4$

Solució a l'Activitat 8.69 de la pàg. 262

a) Probabilitat que cada esdeveniment elemental és $1/36$.

b) $P(suma7) = 6/36$; $P(suma9) = 4/36$; $P(suma11) = 2/36$.

c) $P(\text{suma múltiple de 3}) = P(suma3) + P(suma6) + P(suma9) + P(suma12) = (2 + 5 + 4 + 1)/36 = 12/36$.

d) $P(\text{mateixa cara en els dos daus}) = 6/36$.

e) $P(A) = 27/36$.

Solució a l'Activitat 8.70 de la pàg. 263

Tenim que:

- $P(M \cap \overline{E}) = 10/50$
- $P(E \cap \overline{M}) = 15/50$
- $P(E \cap M) = 20/50$

Ens demanen $P(E \cup M) = P(M \cap \overline{E}) + P(E \cap \overline{M}) + P(E \cap M) = 45/50$.

Una altra manera de fer-ho és trobar:

$$P(E) = P(E \cap \overline{M}) + P(E \cap M) = 30/50$$

$$P(M) = P(M \cap \overline{E}) + P(M \cap E) = 35/50$$

Llavors, $P(E \cup M) = P(E) + P(M) - P(M \cap E) = 45/50$.

Solució a l'Activitat 8.71 de la pàg. 263

Hi ha 150 possibilitats de vestir-se ($6 \times 5 \times 5$).

Si Madame Mayer no vol portar dues peces de roba negres, pot portar blanca, blanca i blanca, que són $3 \times 2 \times 3 = 18$ possibilitats. Hem de sumar les possibilitats de blanca, negra, blanca ($3 \times 3 \times 3 = 27$) i negra, blanca, blanca ($3 \times 3 \times 2 = 18$) i blanca, blanca, negra ($3 \times 2 \times 2 = 12$). Sumant-ho tot dona $18 + 27 + 18 + 12 = 75$ possibilitats.

Solució a l'Activitat 8.72 de la pàg. 263

a) $P(EE) = 12/48 \cdot 12/48 = 1/16$

b) $P(EE) = 12/48 \cdot 11/47 = 11/188$

c) $P(\text{almenys una espasa}) = P(\overline{E}E) + P(E\overline{E}) + P(EE) = 1 - P(\overline{E}\overline{E}) = 1 - 36/48 \cdot 36/48 = 1 - 9/16 = 7/16$. Sent $\overline{E} = \{\text{traure una carta de coll diferent que espasa}\}$.

d) $P(E\overline{E}) + P(\overline{E}E) = 12/48 \cdot 36/48 + 36/48 \cdot 12/48 = 6/16$

Solució a l'Activitat 8.73 de la pàg. 264

Taula A.19
Taula de contingència de l'Activitat 8.73

a)

	Caputxa (C)	No caputxa ($\overline{C}$)	
Mànegues del mateix color que el cos (M)	2	28	30
Mànegues de diferent color que el cos ($\overline{M}$)	8	12	20
	10	40	50

b) $P(C \cap M) = 2/50$.

c) $P(C|\overline{M}) = P(C \cap \overline{M})/P(\overline{M}) = 8/20$.

d) $P(\overline{M}|C) = P(C \cap \overline{M})/P(C) = 8/10$.

Solució a l'Activitat 8.74 de la pàg. 264

a) Si $B = \{\text{obtenir bola blanca}\}$ i $N = \{\text{obtenir bola negra}\}$, $P(N) = P(U1 \cap N) + P(U2 \cap N) + P(U3 \cap N) = 1/3 \cdot 7/10 + 1/3 \cdot 4/8 + 1/3 \cdot 1/5 = 7/15$.

b) $P(U1|N) = \dfrac{P(U1 \cap N)}{P(N)} = \dfrac{1/3 \cdot 7/10}{7/15} = \dfrac{7/30}{7/15} = 1/2$.

Solució a l'Activitat 8.75 de la pàg. 264

a) $P(+) = P(K \cap +) + P(\overline{K} \cap +) = 1/145 \cdot 0'96 + 144/145 \cdot 0'06 = 0'066$

$$P(K|+) = \frac{P(K \cap +)}{P(+)} = \frac{1/145 \cdot 0'96}{0'066} = 0'1$$

b) $P(-) = 1 - P(+) = 1 - 0'066 = 0'934$

$$P(K|-) = \frac{P(K \cap -)}{P(-)} = \frac{1/145 \cdot 0'04}{0'934} = 0'000295$$

Solució a l'Activitat 9.1 de la pàg. 272

a) En forma decimal $45°6'2''$ equival a $45.100556°$

La forma de calcular-ho pot ser diversa. A continuació fem ús del factor de conversió vist en el Tema 7 (7.3.5).

$$6' \cdot \frac{1°}{60'} = 0.1°$$

$$2'' \cdot \frac{1'}{60''} \cdot \frac{1^\circ}{60'} = 0.000556^\circ$$

Sumant-ho tot: $45^\circ + 0.1^\circ + 0.000556^\circ = 45.100556$.

b) L'expressió decimal 32.4525° passada a forma complexa és $32^\circ 27' 9''$. Per a obtenir-la, anem quedant-nos amb les parts enteres i aplicant el factor de conversió quan cal:

- Els graus: 32°
- Els minuts: ens queden 0.4525°

  $$0.4525^\circ \cdot \frac{60'}{1^\circ} = 27.15'$$

  Ens quedem amb la part entera $27'$.
- Els segons: $0.15'$

  $$0.15' \cdot \frac{60''}{1'} = 9''$$

  Ens quedem amb la part entera $9''$.

La solució és $32^\circ 27' 9''$.

Solució a l'Activitat 9.2 de la pàg. 273

a) $36^\circ 15' 14'' + 25^\circ 58' 18'' = 62^\circ 13' 32''$

b) $143^\circ 12' 14'' - 75^\circ 43' 55'' = 67^\circ 28' 19''$

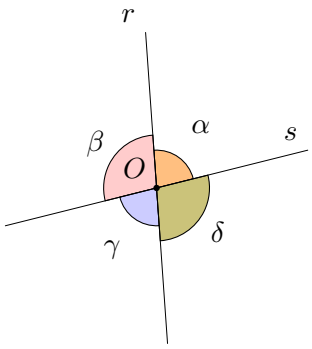
Solució a l'Activitat 9.3 de la pàg. 274

a) $90^\circ - 25^\circ 37' 48'' = 64^\circ 22' 12''$

b) $180^\circ - 105^\circ 42' 37'' = 74^\circ 17' 23''$

Solució a l'Activitat 9.4 de la pàg. 275

Siguen r i s dues rectes que es tallen en un punt O, formant quatre angles oposats pel vèrtex (α, β, γ i δ), de la següent manera:



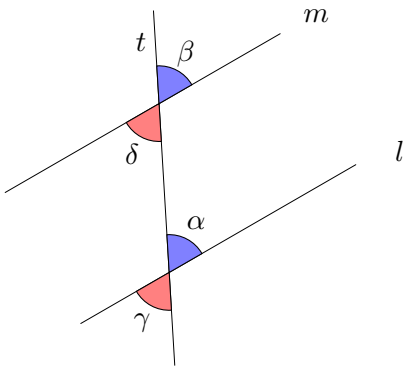
Demostrarem que $\alpha = \gamma$. Primerament, podem deduir les següents relacions: $\alpha+\delta = 180°$ i $\delta + \gamma = 180°$. Per tant,

$$\alpha + \delta = \delta + \gamma \Longrightarrow \alpha = \gamma$$

De la mateixa manera, podríem deduir que $\beta = \delta$.

Solució a l'Activitat 9.5 de la pàg. 276

Dibuixem els angles següents:



Com que $l \parallel m$, llavors gràcies a la caracterització anterior sabem que $\alpha = \beta$. Però donat que β i δ són angles oposats pel vèrtex compleixen la propietat de ser congruents (pàg. 275), és a dir: $\beta = \delta$. Finalment, tenim que $\alpha = \delta$.

Solució a l'Activitat 9.6 de la pàg. 278

Examinant les relacions entre els angles del dibuix podem veure que:

$$\begin{aligned} \angle AOC + \angle COD &= \angle AOD \\ 90° + \angle COD &= 165° \\ \angle COD &= 165° - 90° \\ \angle COD &= 75° \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \angle BOD - \angle BOC &= \angle COD \\ 82° - \angle BOC &= 75° \\ \angle BOC &= 82° - 75° \\ \angle BOC &= 7° \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \angle AOB + \angle BOC &= \angle AOC \\ \angle AOB + 7° &= 90° \\ \angle AOB &= 90° - 7° \\ \angle AOB &= 83° \end{aligned}$$

Solució a l'Activitat 9.11 de la pàg. 284

El procediment és el següent: es construeixen dos perpendiculars, la primera a la recta donada passant per P i la segona perpendicular a l'anterior, a aquesta l'anomenarem s. Per construcció, la segona perpendicular (s) és la paral · lela a la recta donada (r) i passa per P.

Solució a l'Activitat 9.12 de la pàg. 288

a) 12-àgon: 150°, 30°

b) 16-àgon: 157.5°, 22.5°

c) decàgon (10-àgon): 144°, 36°

d) icoàgon (20-àgon): 162°,18°

Solució a l'Activitat 9.13 de la pàg. 288

a) 140°: 9 costats

b) 162°: 20 costats

c) 178º: 180 costats

Solució a l'Activitat 9.14 de la pàg. 289

a) 30°: 12 costats

b) 72°: 5 costats

c) 5º: 72 costats

Solució a l'Activitat 9.15 de la pàg. 289

a) 90°: angle central 90°

b) 176°: angle central 4°

c) 150º: angle central 30°

Solució a l'Activitat 9.16 de la pàg. 289

No és possible, ja que agafant un costat no podem fer que els altres dos arriben a tocar-se. Així, la mesura de la longitud de cada costat d'un triangle sempre ha de ser menor que la suma de les mesures de les longituds dels altres dos costats. A aquesta propietat se la coneix com a **desigualtat triangular**.

Solució a l'Activitat 9.17 de la pàg. 289

Per una banda, com que $r \parallel s$, sabem que els angles alterns interiors α i δ són congruents. De la mateixa manera que $\beta = \varepsilon$.
Per altra, donat que s és una recta, queda clar que $\varepsilon + \gamma + \delta = 180°$. Per tant, substituint en aquesta igualtat:

$$180° = \varepsilon + \gamma + \delta = \beta + \gamma + \alpha,$$

com volíem demostrar.

Solució a l'Activitat 9.24 de la pàg. 296

	Diag. $\perp$	**Diag. $=$ long.**	**Es tallen en punt mitjà**
Quadrat	S	S	S
Rectangle	N	S	S
Rombe	S	N	S
Romboide	N	N	S

Solució a l'Activitat 9.25 de la pàg. 299

$P' = (0, 6)$.

Solució a l'Activitat 9.26 de la pàg. 299

$\vec{v} = (6, -3)$.

Solució a l'Activitat 9.27 de la pàg. 299

$P = (-3, -1)$.

Solució a l'Activitat 9.28 de la pàg. 299

La composició de translacions torna a ser una altra translació, el vector de la nova translació es pot obtenir a partir de la representació dels vectors de les dues translacions aplicades a una figura plana.

Solució a l'Activitat 9.29 de la pàg. 299

a) $B = (2, 0), C = (0, -4), D = (-2, 0)$.

b) $\vec{y}(2, 4)$.

c) Rombe.

Solució a l'Activitat 9.32 de la pàg. 302

La composició de girs no sempre és un nou gir, ja que si apliquem un gir en sentit horari i un altre en sentit antihorari, el resultat no es pot expressar com un únic gir. Així mateix, si canviem el centre de gir, el resultat tampoc és un nou gir. Dos girs només resulten un altre gir quan són aplicats sobre el mateix centre (en aquest cas el resultat és un nou gir amb la suma d'angles).

Solució a l'Activitat 9.38 de la pàg. 307

a) $A' = (2, 2)$
b) $B' = (-2, -4)$
c) $C' = (-1, 0)$
d) $D' = (0, 1)$
e) $E' = (1, -3)$
f) $F' = (0, -5)$

Solució a l'Activitat 9.39 de la pàg. 307

a) $(-1, 3), (-3, 1), (-4, 2), (-5, 2)$
b) $(1, 3), (3, 1), (4, 2), (5, 2)$
c) $(1, -3), (3, -1), (4, -2), (5, -2)$

Solució a l'Activitat 9.40 de la pàg. 307

$(2, 4), (3, -1), (5, 0)$

Solució a l'Activitat 9.41 de la pàg. 308

Sí, perquè la longitud de cada un dels costats no canvia d'una figura a l'altra.

Solució a l'Activitat 9.42 de la pàg. 310

L'àrea no es conserva en passar d'un quadrat a un rombe, encara que intuïtivament, com es veu en la imatge, creguem que sí.

Solució a l'Activitat 9.43 de la pàg. 310

Com que volem que tinguen la mateixa àrea, caldrà que ocupen exactament la mateixa superfície, per exemple 16 unitats quadrades. Per tant, el problema es redueix a obtenir tres rectangles (un pot ser un quadrat) formats per 16 quadrats d'1 u^2 però amb diferents perímetres.

Solució a l'Activitat 9.44 de la pàg. 310

L'àrea del rectangle és $a \cdot b$, llavors com que el $\triangle ABC$ ocupa la meitat d'aquesta àrea, tindrem que:

$$A = \frac{a \cdot b}{2}$$

Per a fer la demostració que la nostra conjectura és certa, podem agafar en el dibuix de la Figura 9.48 dos triangles, el format pels vèrtexs A, B, C i el format pels vèrtexs C, D, A. Així, esperaríem que la suma de les dues àrees siga igual a l'àrea del rectangle inicial. Vegem-ho:

$$A_{ABCD} = A_{\triangle ABC} + A_{\triangle CDA} = \frac{a \cdot b}{2} + \frac{a \cdot b}{2} = \frac{2 \cdot a \cdot b}{2} = a \cdot b$$

Per tant, la fórmula per a l'àrea del triangle és certa.

Solució a l'Activitat 9.45 de la pàg. 311

Si ens hi fixem, podem construir el rectangle format pels punts A, B, C, D, com veiem en la Figura A.28. Trobem també els punts E i F sobre el rectangle.

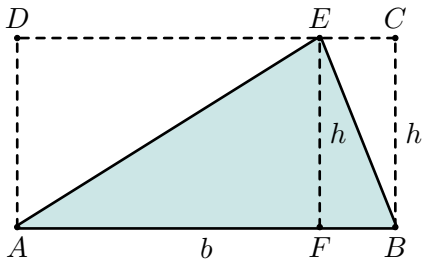


Figura A.28. Triangle i rectangle

Ens podem adonar que els segments $\overline{FE}$ i $\overline{BC}$ són iguals i, per tant, mesuraran el mateix (h). Ara ja tenim totes les mesures del rectangle i, per tant, l'àrea és $b \cdot h$.
Clarament, en la Figura A.28 podem determinar que l'àrea del rectangle és exactament el doble que la del triangle i que, per tant, la fórmula continua sent vàlida:

$$A_{\triangle ABC} = \frac{A_{ABCD}}{2} = \frac{b \cdot h}{2}$$

Podem veure, a més, que el rectangle $AFED$ es descompon en dos triangles ($\triangle AFE$ i $\triangle ADE$) i el mateix ocorre amb el rectangle $FBEC$ (que es divideix en $\triangle EFB$ i $\triangle ECB$).

Solució a l'Activitat 9.46 de la pàg. 312

Creem el paral · lelogram format pels vèrtexs A, B, C, D de base b i altura h. El dividim en dos triangles iguals amb la diagonal que va del punt A al C (Figura A.29).

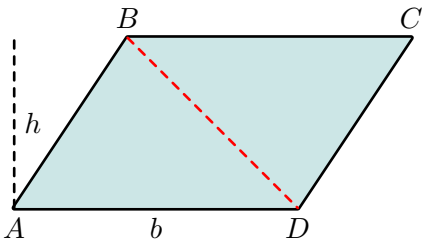


Figura A.29. Pas 1

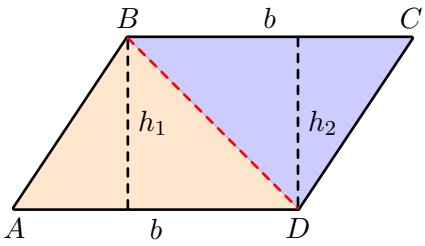


Figura A.30. Pas 2

Així, els dos triangles que obtenim ($\triangle ABD$ i $\triangle BCD$) tenen exactament la mateixa base i tenen la mateixa altura (coincident amb l'altura h del paral · lelogram (és a dir $h_1 = h_2 = h$, com es veu en la Figura A.30). Per tant, l'area A del paral · lelogram serà:

$$A = A_{\triangle ABD} + A_{\triangle BCD} = \frac{b \cdot h_1}{2} + \frac{b \cdot h_2}{2} = \frac{b \cdot h}{2} + \frac{b \cdot h}{2} = b \cdot h$$

Solució a l'Activitat 9.47 de la pàg. 312

Només cal adonar-se que la mesura de l'àrea del rombe és la meitat de l'àrea del rectangle en el qual està inscrit (que té com a base d i altura D).

Solució a l'Activitat 9.48 de la pàg. 312

Només cal descompondre la figura com hem fet fins ara i s'obté la fórmula.

Solució a l'Activitat 9.49 de la pàg. 314

És evident que els triangles $1, 2, 3, 4$ de la Figura 9.60 equivalen als dos rectangles de la Figura 9.59. Per a veure-ho, només cal traçar les diagonals dels rectangles en la Figura 9.59, com mostrem en la Figura A.31:

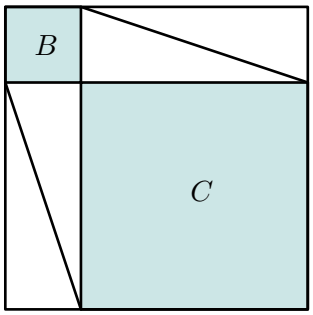


Figura A.31. Primer quadrat amb diagonals

Com que els quadrats de paper inicials eren exactament iguals, les àrees dels quadrats B i C de la Figura 9.59 han de ser iguals a l'àrea restant en el quadrat A de la Figura 9.60, és a dir: $B + C = A$.

Si ara pensem en quins són els quadrats A, B, C, podem raonar que A és el quadrat construït sobre la hipotenusa d'un dels triangles que apareixia en la Figura 9.60; mentre que B i C són també els quadrats construïts sobre els catets. Ho dibuixem en la Figura A.32.

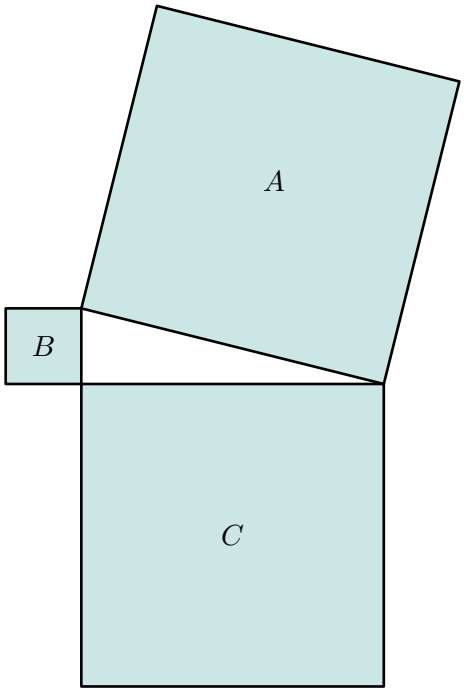


Figura A.32. Demostració visual del teorema de Pitàgores

Solució a l'Activitat 9.50 de la pàg. 315

L'àrea del quadrat de costat $a + b$ serà:

$$A = (a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b$$

Per altra banda, també veiem que A serà la suma de les àrees dels triangles $1, 2, 3, 4$ i la del quadrat central de costat h. Per tant:

$$A = 4\left(\frac{a \cdot b}{2}\right) + h^2 = 2 \cdot a \cdot b + h^2$$

Si ara igualem, tindrem que:

$$a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b = 2 \cdot a \cdot b + h^2$$

I, per tant:

$$a^2 + b^2 = h^2$$

Solució a l'Activitat 9.51 de la pàg. 316

El triangle (rectangle) és definit per la punta de la piràmide (punt C de la Figura A.33), el centre de la base de la piràmide (B) i el punt més llunyà de l'ombra de la piràmide (A). La recta paral · lela la defineixen els rajos del sol, que fan que els costats $\overline{AC}$ i $\overline{A'C'}$ siguen paral · lels.

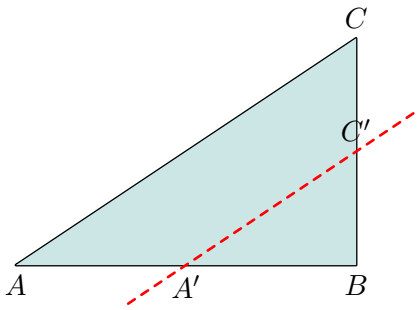


Figura A.33. Triangle emprat per a determinar l'altura de la piràmide

Així, $\overline{BC}$ és l'altura de la piràmide (incògnita), $\overline{BC'}$ l'altura del mateix Tales (valor conegut), $\overline{A'B}$ la mesura de l'ombra de Tales (valor conegut) i $\overline{AB}$ la mesura de l'ombra de la piràmide (valor conegut).

Solució a l'Activitat 9.52 de la pàg. 318

$18\,cm \times 28'8\,cm$.

Solució a l'Activitat 9.53 de la pàg. 318

L'arbre mesura 5 metres.

Solució a l'Activitat 9.54 de la pàg. 318

Com que els triangles $\triangle ABP$ i $\triangle PCD$ són semblants,

$$\frac{1'75}{2} = \frac{h}{30} \Longrightarrow h = 26'25\,m$$

Solució a l'Activitat 9.55 de la pàg. 319

L'amplària del llac són $240\,m$.

Solució a l'Activitat 9.56 de la pàg. 319

La distància és de $5'70\,m$.

Solució a l'Activitat 9.57 de la pàg. 319

Els polígons a) i d), perquè tenen costats proporcionals i angles iguals.

Solució a l'Activitat 9.58 de la pàg. 320

La distància és de $29\,m$.

Solució a l'Activitat 9.59 de la pàg. 320

L'amplària del riu és de $15\,m$.

Solució a l'Activitat 9.60 de la pàg. 320

Són semblants, pel criteri de semblança: "Dos triangles són semblants si tenen dos angles iguals". Tenen iguals l'angle recte (per ser rectangles) i un angle agut.

Solució a l'Activitat 9.61 de la pàg. 320

Són triangles semblants, ja que la suma dels dos angles que no coneixem ha de ser $140°(180° - 40°)$ i per ser isòsceles han de ser iguals. Per tant, cada un mesurarà $70°$, en tots dos triangles. Cosa que significa que tenen els tres angles iguals.

Solució a l'Activitat 9.62 de la pàg. 321

a) No té principi ni fi: recta

b) Té origen però no té fi: semirecta

c) Té origen i fi: segment

Solució a l'Activitat 9.63 de la pàg. 321

a) Un punt situat sobre una recta la divideix en dues SEMIRECTES

b) La part d'una recta compresa entre dos punts es diu SEGMENT

c) Quan dues rectes no es creuen encara que es prolonguen són PARAL · LELES

d) Les semirectes que delimiten un angle es diuen COSTATS DE L'ANGLE

e) El punt origen de les semirectes que delimiten un angle es diu VÈRTEX DE L'ANGLE

Solució a l'Activitat 9.64 de la pàg. 322

a) La línia recta té tots els seus punts en la mateixa direcció. No té principi ni fi.

b) Una semirecta comença en un punt anomenat origen i no té fi.

c) Un segment és un tros de recta comprès entre dos punts o extrems.

d) Rectes paral · leles són les que mai es tallen encara que es prolonguen.

e) Rectes perpendiculars són les que es tallen formant regions iguals.

f) Rectes obliqües són les que es tallen formant regions desiguals.

g) Els elements d'un angle són el vèrtex i els costats.

h) L'angle recte és el que té els costats perpendiculars.

i) Un angle agut és menor que un angle recte.

j) Un angle obtús és major que un angle recte.

Solució a l'Activitat 9.65 de la pàg. 322

a) Un angle pla té major amplitud que un angle obtús CORRECTE, ELS ANGLES OBTUSOS MESUREN MÉS DE 90° I MENYS DE 180° I L'ANGLE PLA MESURA 180°

b) Les rectes perpendiculars són aquelles que en tallar-se formen quatre angles diferents. NO ÉS CORRECTE, FORMEN ANGLES IGUALS.

c) Un angle i el seu oposat pel vèrtex són suplementaris. NO ÉS CORRECTE, SÓN IGUALS.

d) Un angle recte té a vegades menor amplitud que un angle obtús. NO ÉS CORRECTE, SEMPRE TÉ MENOR AMPLITUD, L'ANGLE RECTE MESURA 90° I L'OBTÚS MESURA MÉS DE 90° I MENYS DE 180°

e) Un segment és un tros de recta limitat per dos punts CORRECTE.

f) Dues rectes són paral · leles quan es tallen entre si. NO ÉS CORRECTE, SÓN PARAL · LELES QUAN NO ES TALLEN.

g) Els costats d'un angle recte són perpendiculars. CORRECTE.

h) Un angle obtús té major mesura que el seu suplementari. CORRECTE, ELS ANGLES SUPLEMENTARIS SUMEN 180°, SI UN ÉS OBTÚS (MÉS DE 90°) L'ALTRE MESURARÀ MENYS DE 90°)

i) La diferència entre les mesures del suplementari i el complementari d'un angle és igual a 90°. CORRECTE.

j) Les bisectrius d'un parell d'angles oposats pel vèrtex formen un angle pla. CORRECTE.

Solució a l'Activitat 9.67 de la pàg. 323

a) FALS, en un triangle rectangle les tres altures es tallen en el vèrtex de l'angle recte.

b) VERTADER, un triangle no pot tenir un angle còncau (>180°), ja que la suma dels tres és 180°.

c) VERTADER, perquè tots els paral · lelograms són quadrilàters.

d) FALS, té els 4 costats iguals, però els 4 angles no són iguals.

e) VERTADER, perquè no és un quadrilàter.

f) FALS, en el rectangle i en el romboide les diagonals no són perpendiculars.

g) VERTADER, el baricentre és el centre de gravetat i ha de ser interior al triangle.

h) FALS, es diu circumcentre i és el centre de la circumferència circumscrita (passa per tots els vèrtexs del polígon),

i) FALS, si $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ llavors $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = 90°$i la suma dels tres angles d'un triangle no pot ser 90°, és sempre 180°

Solució a l'Activitat 9.68 de la pàg. 323

$P' = (2, 4)$.

Solució a l'Activitat 9.69 de la pàg. 323

$\vec{v} = (-2, 4)$.

Solució a l'Activitat 9.70 de la pàg. 324

$P = (-5, 0)$.

Solució a l'Activitat 9.71 de la pàg. 324

a) Triangle obtusangle i escalè.

b) Apliqueu-li una translació de vector $\vec{v}(-1, 3)$ i dibuixeu el polígon resultant.

c) Coordenades dels vèrtexs del nou polígon: $(-4, 7), (-1, 3), (-3, 3)$.

Solució a l'Activitat 9.72 de la pàg. 324

a) Trapezi isòsceles.

b) Apliqueu-li una translació de vector $\vec{v}(2, -6)$ i dibuixeu el polígon resultant.

c) Coordenades dels vèrtexs del nou polígon: $(-1, -6), (5, -6), (3, -4), (1, -4)$.

Solució a l'Activitat 9.73 de la pàg. 324

$P = 7\,cm$ i $A = 3\,cm^2$.

Solució a l'Activitat 9.74 de la pàg. 324

Fan falta 1200 taulells.

Solució a l'Activitat 9.75 de la pàg. 324

$A = 72\,cm^2$

Solució a l'Activitat 9.76 de la pàg. 324

$24,6$ hectàrees.

Solució a l'Activitat 9.77 de la pàg. 325

L'àrea cultivable és de $1485,8\,m^2$.

Solució a l'Activitat 9.78 de la pàg. 325

$62,5\,m$

Solució a l'Activitat 9.79 de la pàg. 325

$6,115\,m^2$

Solució a l'Activitat 9.80 de la pàg. 325

$P = 3920\,m$

Solució a l'Activitat 9.81 de la pàg. 325

$A = 78,54\,m^2$

Solució a l'Activitat 9.82 de la pàg. 325

$A = 33,3\,m^2$

Solució a l'Activitat 9.83 de la pàg. 325

$h = 714,28\,m$

Solució a l'Activitat 9.84 de la pàg. 326

$A = 72\,cm^2$

Solució a l'Activitat 9.85 de la pàg. 326

$A = 5400\,m^2$

Solució a l'Activitat 9.86 de la pàg. 326

$A = 37,11\,m^2$

Solució a l'Activitat 9.87 de la pàg. 326

$P = 22\,cm$

Solució a l'Activitat 9.88 de la pàg. 326

La diferència és de $28 \cdot \pi\,m^2$.

Solució a l'Activitat 9.89 de la pàg. 327

L'àrea es quadruplica i el perímetre es duplica.

Solució a l'Activitat 9.90 de la pàg. 327

$20\,cm^2$

Solució a l'Activitat 9.91 de la pàg. 327

$h = 298'08\,cm$

Solució a l'Activitat 9.92 de la pàg. 327

$c_2 = 29'66\,cm$

Solució a l'Activitat 9.93 de la pàg. 327

$d = 150\,m$

Solució a l'Activitat 9.94 de la pàg. 327

Considerant un dels costats de $5\,m$ com a base, perquè la superfície siga màxima, l'altre costat de $5\,m$ ha de formar un angle recte amb la base formant-se un triangle rectangle. Per Pitàgores, la longitud tercer costat serà de $7'075\,m$.

Solució a l'Activitat 9.95 de la pàg. 327

$d = 22'36\,cm$

Solució a l'Activitat 9.96 de la pàg. 327

$d = 16'97\,cm$

Solució a l'Activitat 9.97 de la pàg. 328

No, perquè no es compleix el teorema de Pitàgores.

Solució a l'Activitat 9.98 de la pàg. 328

$h = 8'66\,cm$

Solució a l'Activitat 9.99 de la pàg. 328

$98'27\,cm$

Solució a l'Activitat 9.100 de la pàg. 328

$117'11\,cm$

Solució a l'Activitat 9.101 de la pàg. 328

$43'6\,cm$

Solució a l'Activitat 9.102 de la pàg. 328

$224'72\,cm$

Solució a l'Activitat 9.103 de la pàg. 328

$4'03\,m$

Solució a l'Activitat 9.104 de la pàg. 328

$2'62\,m$

Solució a l'Activitat 9.105 de la pàg. 329

$9'43\,cm$

Solució a l'Activitat 9.106 de la pàg. 329

$D = 74'64\,dm$ i $P = 182'48\,dm$

Solució a l'Activitat 9.107 de la pàg. 329

$P = 442\,cm$

Solució a l'Activitat 9.108 de la pàg. 329

Els segments fan $9\,cm$ i $16\,cm$. L'altura serà de $12\,cm$.

Solució a l'Activitat 9.109 de la pàg. 329

L'altura de la tàpia és de $2'6\,m$.

Solució a l'Activitat 9.110 de la pàg. 329

L'altura de l'arbre és de $40\,m$.

Solució a l'Activitat 9.111 de la pàg. 329

L'altura de l'arbre és de $3'428\,m$.

Solució a l'Activitat 9.112 de la pàg. 330

L'altura de l'edifici és de $15\,m$.

Solució a l'Activitat 9.113 de la pàg. 330

L'altura de l'estàtua és de $5'34\,m$.

Solució a l'Activitat 9.114 de la pàg. 330

L'altura de l'edifici és de $8'23\,m$.

Solució a l'Activitat 9.115 de la pàg. 330

L'altura de l'ombra és de $2'79\,m$.

Solució a l'Activitat 9.116 de la pàg. 330

$\overline{MN} = 60\,cm$

Solució a l'Activitat 9.117 de la pàg. 330

$\overline{CE} = 5\,m$

Solució a l'Activitat 9.118 de la pàg. 331

$\overline{CE} = 5\,m$

Solució a l'Activitat 9.119 de la pàg. 331

$4'2\,cm$, $5'6\,cm$ i $7\,cm$.

Solució a l'Activitat 9.120 de la pàg. 331

Es pot afirmar que són triangles semblants perquè tenen els tres angles iguals (tots els angles d'un triangle equilàter mesuren 60°). Tenen la mateixa forma i diferent grandària.

Solució a l'Activitat 9.121 de la pàg. 332

$\hat{I} = \hat{O} = 81°$, $\hat{L} = 43°$ i $\hat{C} = 56°$.

Solució a l'Activitat 9.122 de la pàg. 332

Són semblants, pel criteri de semblança: "Dos triangles són semblants si tenen dos angles iguals".

Solució a l'Activitat 9.123 de la pàg. 332

Són semblants perquè tenen els angles iguals perquè són regulars. La raó de semblança és 5/8.

Solució a l'Activitat 9.124 de la pàg. 332

Es pot afirmar que són semblants perquè tenen els quatre angles iguals (tenen la mateixa forma però diferent grandària).

Solució a l'Activitat 10.1 de la pàg. 337

Té 15 arestes.

Solució a l'Activitat 10.2 de la pàg. 339

Poliedre	**Forma de les cares**	**Cares** (C)	**Vèrtexs** (V)	**Arestes** (A)
Tetraedre	Triangles equilàters	4	4	6
Hexaedre	Quadrats	6	8	12
Octaedre	Triangles equilàters	8	6	12
Dodecaedre	Pentàgons regulars	12	20	30
Icosaedre	Triangles equilàters	20	12	30

Solució a l'Activitat 10.4 de la pàg. 340

És un prisma pentagonal.

Solució a l'Activitat 10.6 de la pàg. 345

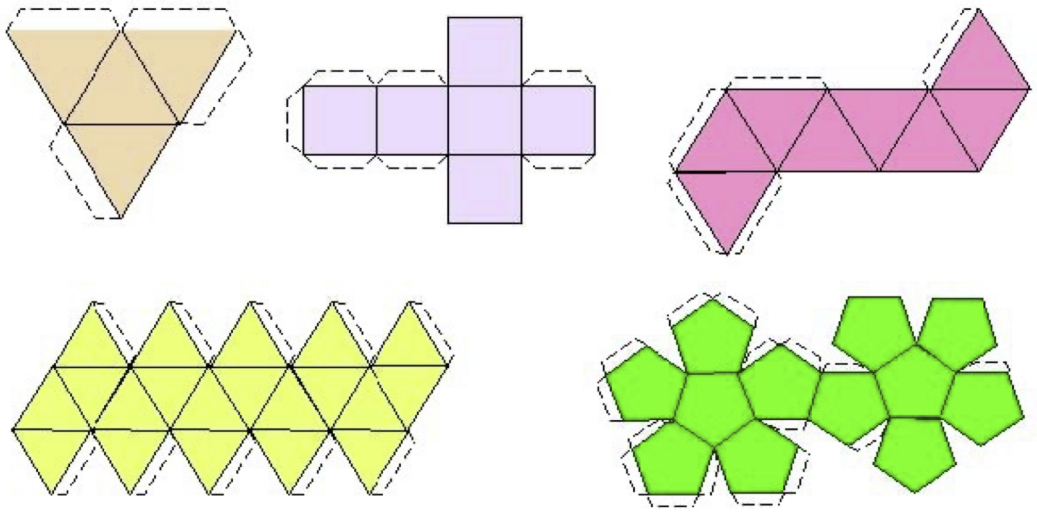


Figura A.34. Desenvolupament pla dels cinc sòlids platònics

Solució a l'Activitat 10.7 de la pàg. 345

Poliedre	**Regular** (si/no)	**Cares** (C)	**Vèrtexs** (V)	**Arestes** (A)	**Nre. angles dièdrics**	**Nre. angles trièdrics**
Tetraedre	Si	4	4	6	6	4
Prisma triangular	No	5	6	9	9	6

Solució a l'Activitat 10.8 de la pàg. 346

a) Prisma 1: $800\,u^2$

b) Prisma 2: $216\,u^2$

c) Piràmide 1: $360\,u^2$

d) Piràmide 2: $896\,u^2$

Solució a l'Activitat 10.9 de la pàg. 347

La fórmula general per a la superfície d'un prisma (S) regular recte d'altura h i de bases d'àrea A i perímetre P és:

$$S = 2 \cdot A + P \cdot h$$

Solució a l'Activitat 10.10 de la pàg. 347

La fórmula general per a la superfície d'una piràmide regular recta (S) amb l'altura d'una de les cares l i de base d'àrea A i perímetre P és:

$$S = A + \frac{1}{2} \cdot P \cdot l$$

Solució a l'Activitat 10.13 de la pàg. 351

a) Con 1: $300\pi\,u^2$

b) Con 2: $6\pi\,u^2$

c) Esfera: $144\pi\,cm^2$

Solució a l'Activitat 10.14 de la pàg. 355

$V = 480 \cdot \sqrt{3}\,u^3$

Solució a l'Activitat 10.15 de la pàg. 357

a) Prisma 1: $1500\,u^3$

b) Prisma 2: $144\,u^3$

c) Piràmide 1: $400\,u^3$

d) Piràmide 2: $1568\,u^3$

Solució a l'Activitat 10.16 de la pàg. 357

a) Con 1: $240\pi\,u^3$

b) Con 2: $1'5\pi\,u^3$

c) Esfera: $288\pi\,cm^3$

Solució a l'Activitat 10.17 de la pàg. 357

Té 8 vèrtexs. És una piràmide heptagonal.

Solució a l'Activitat 10.18 de la pàg. 357

a) No existeix una piràmide amb 15 arestes. VERTADER

b) Tots els prismes són poliedres. VERTADER

c) El cilindre és un poliedre. FALS

d) Tots els paral · lelepípedes són prismes. VERTADER

e) El desenvolupament pla d'un cos geomètric és únic. FALS

f) Tots els paral · lelepípedes tenen el mateix nombre d'arestes. VERTADER

g) Els cossos de revolució no tenen arestes. VERTADER

h) El menor nombre de cares que pot tindre un poliedre és quatre. VERTADER

i) En un vèrtex d'un poliedre concorren com a mínim tres cares. VERTADER

j) L'únic poliedre regular les cares del qual són quadrats és l'hexaedre. VERTADER

Solució a l'Activitat 10.19 de la pàg. 357

a) Un cub té 12 angles diedres i 8 angles triedres.

b) Una piràmide octogonal té 9 cares, 9 vèrtexs i 16 arestes.

c) L'icosaedre té 20 cares de forma de triangle equilàter.

d) En un vèrtex d'un poliedre concorren com a mínim 3 cares.

e) El cos que es genera en girar un semicercle sobre el seu diàmetre es diu esfera.

Solució a l'Activitat 10.21 de la pàg. 358

L'etiqueta tindrà forma rectangular i dimensions $31'416\,cm \times 20\,cm$.

Solució a l'Activitat 10.22 de la pàg. 358

a) En una volta recorre $5'026\,m$

b) Aproximadament 40 voltes

Solució a l'Activitat 10.23 de la pàg. 358

5′832 L

Solució a l'Activitat 10.24 de la pàg. 358

12′73 cm d'altura

Solució a l'Activitat 10.25 de la pàg. 359

30 m^3

Solució a l'Activitat 10.26 de la pàg. 359

42′41 cm^3

Solució a l'Activitat 10.27 de la pàg. 359

36′3 kg

Solució a l'Activitat 10.28 de la pàg. 359

1 237 005 L

Solució a l'Activitat 10.29 de la pàg. 359

3813′3 cm^3

Solució a l'Activitat 10.30 de la pàg. 360

2035′22 m^3

Solució a l'Activitat 10.31 de la pàg. 360

160 hores

Solució a l'Activitat 10.32 de la pàg. 360

1089′73 cm^3

Solució a l'Activitat 10.33 de la pàg. 360

6450 L d'aigua

Solució a l'Activitat 10.34 de la pàg. 360

18 333 camions

Solució a l'Activitat 10.35 de la pàg. 360

6′12 L

Solució a l'Activitat 10.36 de la pàg. 360

3200 bidons

Solució a l'Activitat 10.37 de la pàg. 360

És 27 vegades major.

Referències

Alsina, À. (2011). *Com desenvolupar el pensament matemàtic. Els continguts matemàtics: propostes didàctiques per a l'Educació Infantil* (Tercera ed.). Vic: Eumo Editorial.

Musser, G. L., Peterson, B. E., i Burger, W. F. (2013). *Mathematics for Elementary teachers: A Contemporary Approach* (10th ed.). Wiley.

Van de Walle, J. A., Karp, K. S., i Bay-William, J. M. (2016). *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally* (9th ed.). Essex, UK: Pearson Education.