

TEMA 1: ARITMÈTICA: NOMBRES ENTERS I RACIONALS

En aquest primer tema del curs, explicarem les eines bàsiques del món de les matemàtiques. Recordarem quins són els diferents conjunts de nombres que hi ha i la manera com s'opera amb els nombres. És el tema més dens del curs, però també el més bàsic; per tant, no hauria de ser molt complicat recordar tots aquells coneixements que ja tenim, però que fa temps que no hem utilitzat.

Aquest tema consta dels continguts següents:

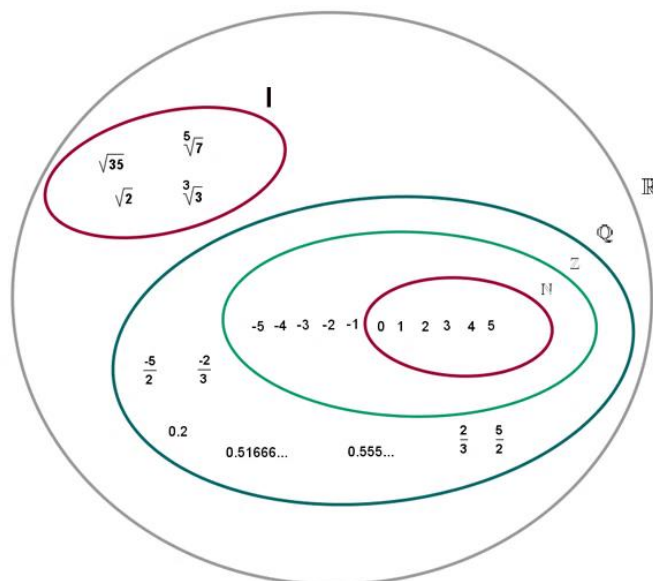
1. Conjunts de nombres: classificació
2. Sistemes de numeració. Nombres romans
3. Nombres enters:
 1. Operacions combinades. Propietats
 2. Potències. Arrel quadrada. Operacions amb potències
 3. La divisió. Criteris. Múltiples i divisors. Nombres primers i compostos. MCM i MCD
4. Nombres racionals:
 1. Fraccions: tipus, comparació i operacions. Fracció d'un nombre
 2. Decimals: tipus, comparació i operacions. Aproximació de decimals
 3. Potències de base 10. Percentatges. Canvi i relació entre fracció – decimal – percentatge
5. Raó i proporció

Comencem!

1. Conjunts de nombres: classificació

Els nombres es classifiquen de la manera següent:

- **Naturals** ($\mathbb{N}$): 0, 1, 2, 3...
- **Enters** ($\mathbb{Z}$): Naturals i negatius.
- **Racionals** ($\mathbb{Q}$): Enters i decimals exactes o diaris.
- **Irracionals** ($\mathbb{R} - \mathbb{Q}$): decimals infinits no periòdics (2,9352846287666390...).
- **Reals** ($\mathbb{R}$): tots.



2. Sistemes de numeració

Un **sistema de numeració** és un conjunt de símbols i normes que s'utilitzen per a comptar i mesurar. N'hi ha molts de diferents: el decimal (que és el que més fem servir i té base 10), el sexagesimal (amb base 60, s'usa per a mesurar el temps i els angles), el binari (format només per uns i zeros, s'usa en informàtica), el babilònic, l'egipci, el romà etc.

Ja coneixem el sistema decimal. Ara recordarem el romà i veurem el sexagesimal en

El sistema de numeració romà

Sistema decimal	1	5	10	50	100	500	1000
Sistema romà	I	V	X	L	C	D	M

Una lletra “més menuda”, col·locada a l'esquerra d'una altra de més gran, resta, i si està a la dreta, suma. Ens hem de fixar primer en les lletres “més grans”, d'esquerra a dreta. Per exemple:

$$CMXCVI = 1.000 - 100 + 100 - 10 + 5 + 1 = 996$$

$$MCMLXXXVI = 1.000 + 1.000 - 100 + 50 + 30 + 5 + 1 = 1986$$

Una barra sobre una lletra o més significa que es multiplica per mil. Per exemple:

$$VMMDXXIII = 5.000 + 1.000 + 1.000 + 500 + 20 + 3 = 7523$$

3. Nombres enters

Els nombres naturals són el conjunt format pels nombres que utilitzem per a comptar. Es representen amb la lletra $\mathbb{N}$.

És a dir, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$.

Els nombres enters són el conjunt format pels nombres naturals i els nombres negatius. Es representen amb la lletra $\mathbb{Z}$.

És a dir, $\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$.

Operacions combinades amb nombres enters

$$+ \times + = +$$

$$+ \times - = -$$

$$- \times + = -$$

$$- \times - = +$$

L'ordre de prioritats per a fer operacions combinades és el següent:

1. Parèntesis, claudàtors i claus, en aquest ordre.
2. Multiplicacions i divisions d'esquerra a dreta.
3. Sumes i restes d'esquerra a dreta.

Per exemple:

$$\begin{aligned} & \{-3 \times [4 - (-6)] + 5 + (-7)\} : 2 \\ & (-3 \times 10 + 5 - 7) : 2 \\ & (-30 + 5 - 7) : 2 \\ & (-25 - 7) : 2 \\ & -32 : 2 \\ & -16 \end{aligned}$$

Propietats de les operacions amb enters

- **Commutativa:** $a + b = b + a$ $a \times b = b \times a$
- **Associativa:** $a + (b + c) = (a + b) + c$ $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$
- **Distributiva:** $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$

Potències i arrels

Una **potència** és una expressió de la forma a^n , en què a i n són nombres enters.

$$a^n = a \times a \times a \times \dots \times a$$

$$\overbrace{\hspace{1.5cm}} \\ n \text{ vegades}$$

Una **arrel quadrada** és una expressió de la forma $\sqrt{a}$, en què a és un nombre natural.

$$\sqrt{a} = b \leftrightarrow b^2 = a$$

Operacions amb potències

Recordem les principals propietats de les potències i de les seues operacions:

$$a^0 = 1$$

$$a^1 = a$$

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

$$a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$a^n \times b^n = (a \times b)^n$$

$$a^n : b^n = \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n = (a : b)^n$$

$$(a^m)^n = a^{m \times n}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

Múltiples i divisors

Recordem que la divisió té quatre elements bàsics:

$$\begin{array}{r|l} D & d \\ \hline r & q \end{array}$$

On D és el **dividend**, d el **divisor**, q el **quocient** i r el **residu**. Diem que la divisió és exacta si el residu és igual a 0. La prova de la divisió és que $D = d \times q + r$.

Es diu que el nombre a és **divisor** de b o que el nombre b és **múltiple** de a , o que el nombre b és **divisible** entre a si la divisió de b entre a és exacta.

Clarament, tots els nombres de la taula de multiplicar d'un nombre determinat són múltiples d'aquest nombre. Per exemple, 14, 28, 35, 42, 56... són tots múltiples de 7. Per tant, és el mateix que dir que 7 és divisor de tots aquests nombres o que tots ells són divisibles entre 7.

Criteris de divisibilitat

- Un nombre és divisible entre 2 si és parell.
- Un nombre és divisible entre 3 si la suma de les xifres ho és.
- Un nombre és divisible entre 4 si les dues últimes xifres ho són.
- Un nombre és divisible entre 5 si acaba en 0 o en 5.
- Un nombre és divisible entre 6 si ho és entre 2 i entre 3.
- Un nombre és divisible entre 7 si la resta del nombre sense les unitats menys el doble de les unitats ho és.
- Un nombre és divisible entre 9 si la suma de les xifres ho és.
- Un nombre és divisible entre 10 si acaba en 0.
- Un nombre és divisible entre 11 si ho és la resta de la suma de les xifres que ocupen un lloc parell menys la de les que ocupen un lloc imparell.
- Un nombre és divisible entre 13 si la resta del nombre sense les unitats menys nou vegades el de les unitats ho és.
- Un nombre és divisible entre 100 si acaba en 00.
- Cap nombre no és divisible entre 0.
- El 0 és divisible entre tots els nombres excepte ell mateix; és a dir, és múltiple de tots els nombres excepte d'ell mateix i tots els nombres excepte el 0 són divisors de 0.

El procés per a dividir nombres enters

Recordem ací l'algoritme per a dividir nombres enters, amb una atenció especial als casos més problemàtics:

$\begin{array}{r} 3947 \overline{) 281} \\ 1137 \quad 14 \\ \hline 013 \end{array}$	$\begin{array}{r} 3947 \overline{) 281} \\ 281 \quad 14 \\ \hline 1137 \\ 1124 \\ \hline 013 \end{array}$	$\begin{array}{r} 407 \overline{) 2} \\ 007 \quad 203 \\ \hline 1 \end{array}$	$\begin{array}{r} 470 \overline{) 281} \\ 1890 \quad 0,167... \\ \hline 2040 \\ 0730 \\ \dots \end{array}$	$\begin{array}{r} 47 \overline{) 28} \\ 190 \quad 1,677... \\ \hline 220 \\ 240 \\ \hline 440 \\ \dots \end{array}$
Divisió “sense complicacions”	Quan el nou dividend és menor que el divisor	Quan el dividend inicial és menor que el divisor	Quan vols intentar que el residu siga zero i que siga més exacta	

Nombres primers i compostos

Nombres primers i compostos

Un nombre **compost** és el que té més de dos divisors.

Llista de nombres compostos: 0, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 27, 28, 30...

Un nombre **primer** és el que té exactament dos divisors: el 1 i ell mateix.

Llista de nombres primers: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47...

El nombre 1 no és ni primer ni compost.

Mínim comú múltiple (MCM) i màxim comú divisor (MCD)

El **mínim comú múltiple** de dos nombres o més és el menor dels múltiples que tenen en comú aquests nombres.

El **màxim comú divisor** de dos nombres és el major dels divisors que tenen en comú aquests nombres.

Càlcul del MCM i del MCD

Per a calcular el **MCM** de diversos nombres, descomponem aquests nombres en factors primers i, després, traiem el producte de **tots els factors** elevats al **major exponent** amb què apareguen.

Per a calcular el **MCD** de diversos nombres, descomponem aquests nombres en factors primers i, després, traiem el producte dels **factores comuns** elevats al **menor exponent** amb què apareguen.

Exemple: càlcul del MCM (20,36,42) i del MCD (20,36,42)

$$\begin{array}{r|l}
 20 & 2 \\
 10 & 2 \\
 5 & 5 \\
 1 & \\
 \hline
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r|l}
 36 & 2 \\
 18 & 2 \\
 9 & 3 \\
 3 & 3 \\
 1 & \\
 \hline
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r|l}
 42 & 2 \\
 21 & 3 \\
 7 & 7 \\
 1 & \\
 \hline
 \end{array}$$

$$20 = 2^2 \times 5 \qquad 36 = 2^2 \times 3^2 \qquad 42 = 2 \times 3 \times 7$$

$$\begin{aligned}
 MCM(20, 36, 42) &= 2^2 \times 3^2 \times 7 \times 5 = 1.260 \\
 MCD(20, 36, 42) &= 2
 \end{aligned}$$

4. Nombres racionals

Els **nombres racionals** són el conjunt format pels nombres enters i els decimals exactes i periòdics. Són tots aquells nombres que es poden representar com una fracció. Es representen amb la lletra $\mathbb{Q}$. D'aquesta manera,

$$\mathbb{Q} = \left\{ \dots, -\frac{6}{3}, -0'26, -2\hat{3}, -1, 0, \frac{2}{7}, \sqrt{16}, 3'64, 1.500 \dots \right\}$$

$$-0'26 = -\frac{26}{100} = -\frac{13}{50}; \quad -2,\hat{3} = -\frac{210}{90} = -\frac{7}{3}; \quad -1 = -\frac{1}{1};$$

$$0 = \frac{0}{1}; \quad \sqrt{16} = 4 = \frac{4}{1}$$

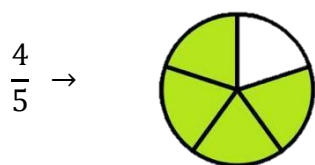
Fraccions

Les fraccions són la forma de representar els nombres racionals amb la forma $\frac{a}{b}$, on a i b són nombres enters, i b és diferent de 0. Qualsevol nombre racional es pot representar com una fracció. El nombre a es diu numerador, i el nombre b , denominador. Les fraccions es poden considerar com a repartiments, com a raons o com a simples divisions. No són un tipus de nombre, sinó una manera de representar els nombres racionals. La fracció que representa un nombre racional determinat s'anomena **fracció generatriu** d'aquest nombre.

Tipus de fraccions

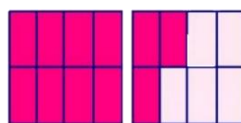
Les fraccions poden ser de dos tipus:

- **Pròpies:** si el numerador és menor que el denominador. Per exemple:



- **Impròpies:** si el numerador és més gran que el denominador. Qualsevol fracció impròpia es pot expressar com un nombre enter més una fracció pròpia. Per exemple:

$$\frac{11}{8} = \frac{8+3}{8} = \frac{8}{8} + \frac{3}{8} = 1 + \frac{3}{8} \rightarrow$$



$$\frac{9}{4} = \frac{8+1}{4} = \frac{8}{4} + \frac{1}{4} = 2 + \frac{1}{4} \rightarrow$$



Comparació de fraccions

Tenim tres casos possibles:

- Si les fraccions tenen el **mateix denominador**, és més gran la que té el numerador major.
- Si les fraccions tenen el **mateix numerador**, és més gran la que té el denominador menor.
- En qualsevol altre cas, primer cal **reduir la fracció a comú denominador**:

$$\frac{3}{7} < \frac{5}{7} \quad \frac{4}{3} > \frac{4}{5} \quad \frac{9}{2} ? \frac{7}{8} \quad \rightarrow \quad \frac{9}{2} = \frac{9 \times 4}{2 \times 4} = \frac{36}{8} \quad \rightarrow \quad \frac{9}{2} > \frac{7}{8}$$

Fraccions equivalents i fracció irreductible

Dues fraccions són **equivalents** si representen el mateix valor numèric. Les fraccions equivalents s'obtenen multiplicant o dividint el numerador i el denominador pel mateix nombre enter. La **fracció irreductible** d'una altra fracció és una altra fracció equivalent, però el numerador i el denominador de la qual no tenen divisors en comú. S'obté dividint el numerador i el denominador entre el MCD.

$$\frac{40}{24} = \frac{40 : 8}{24 : 8} = \frac{5}{3} = \frac{10}{6} = \frac{15}{12} = \dots = 1,6$$

Suma i resta de fraccions

Per a sumar o restar fraccions, primer cal **reduir a comú denominador** i, després, sumar els numeradors o restar-los. El denominador comú és el MCM dels denominadors:

$$\begin{aligned} \frac{3}{7} + \frac{5}{8} &= \frac{(56 : 7) \times 3 + (56 : 8) \times 5}{56} = \frac{24 + 35}{56} = \frac{59}{56} \\ \frac{4}{6} - \frac{7}{12} &= \frac{(12 : 6) \times 4 - (12 : 12) \times 7}{12} = \frac{8 - 7}{12} = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

Multiplicació de fraccions

Per a multiplicar fraccions, cal multiplicar els numeradors amb els numeradors i els denominadors amb els denominadors:

$$\frac{4}{6} \times \frac{7}{12} = \frac{4 \times 7}{6 \times 12} = \frac{28}{72} = \frac{7}{18}$$

Divisió de fraccions

Per a dividir fraccions, cal multiplicar els numeradors amb els denominadors i els denominadors amb els numeradors (productes creuats):

$$\frac{4}{6} : \frac{7}{12} = \frac{4 \times 12}{6 \times 7} = \frac{48}{42} = \frac{8}{7}$$

Operacions entre fraccions i nombres enters

Per a operar amb una fracció amb un nombre enter, hem d'expressar aquest nombre com una fracció amb denominador igual a 1:

$$\frac{3}{7} + 6 = \frac{3}{7} + \frac{6}{1} = \frac{(7 : 7) \times 3 + (7 : 1) \times 6}{7} = \frac{3 + 42}{7} = \frac{45}{7}$$

$$\frac{4}{6} : 7 = \frac{4}{6} : \frac{7}{1} = \frac{4 \times 1}{6 \times 7} = \frac{4}{42} = \frac{2}{21}$$

Fracció d'un nombre

Trobar la fracció d'un nombre consisteix a calcular el nombre que resulta en dividir-lo entre el denominador i multiplicar-lo pel numerador:

$$\frac{2}{3} \text{ de } 48 = 48 : 3 \times 2 = 16 \times 2 = 32$$

$$\frac{5}{7} \text{ de } 24 = 24 : 7 \times 5 = \frac{24}{7} \times 5 = \frac{120}{7}$$

Recordem que calcular $\frac{1}{2}$ d'un nombre és trobar-ne la meitat, calcular $\frac{1}{3}$ és trobar-ne la tercera part i calcular $\frac{1}{4}$ és trobar-ne la quarta part, etc.

Nombres mixtos

Els nombres mixtos són una forma de representar les fraccions impròpies com ara el nombre enter i la fracció pròpia en què es poden descompondre. Per exemple:

$$\frac{9}{4} = \frac{8+1}{4} = \frac{8}{4} + \frac{1}{4} = 2 + \frac{1}{4} \rightarrow \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4} \rightarrow \text{Nombre mixt}$$

Nombres decimals

Els **nombres decimals** són aquells nombres reals que tenen una part decimal diferent de zero.

Ordres de magnitud d'un nombre decimal:



Tipus de nombres decimals

Els nombres decimals es classifiquen en:

- **Exactes:** tenen un nombre finit de xifres decimals: 0,28; -2,005; 123,832827294721; -489,00003.
- **Infinites:** tenen un nombre infinit de xifres decimals. Poden ser:
 - **Periòdics:** acaben en un grup de xifres decimals (anomenades període) que es repeteixen infinitament. Poden ser:
 - **Purs:** tota la part decimal (període) es repeteix: 1,6666...; -0,2323232323...; 23,41; -573,46282.
 - **Mixtos:** algunes xifres de la part decimal es repeteixen (període) i unes altres no (anteperíode): 12,94444444...; -5,11256256256256...; 0,01235; -9928,161687.
 - **No periòdics:** les xifres decimals no segueixen cap patró de repetició: 91,87236492629436...; -1,123456789101112...; 23,01001000100001...; el nombre e , el nombre π , $\sqrt{5}$, $\sqrt{21}$, $-\sqrt{122}$.

Els **nombres irracionals** són els decimals infinits no periòdics. Són aquells que no es poden expressar com una fracció i, per tant, no són racionals. Es representen per $\mathbb{R}$ – $\mathbb{Q}$, ja que són aquells nombres reals que no són racionals.

Suma i resta de nombres decimals

Per a sumar nombres decimals i restar-los, cal operar amb els mateixos ordres de magnitud (desenes amb desenes, centèsimes amb centèsimes etc.) i col·locar la coma al seu lloc.

Per exemple: $24.563 + 18,9471$

$$\begin{array}{r} 24.563 \\ + 18,9471 \\ \hline 24.581,9471 \end{array}$$

Multiplicació de nombres decimals

Per a multiplicar nombres decimals, es multiplica tot amb tot; i per a posar la coma, se segueix el criteri següent: la part decimal del resultat ha de tenir tantes xifres decimals com les dels dos factors junts.

Per exemple: $0,354 \times 1,9$

$$\begin{array}{r} 0,354 \\ \times 1,9 \\ \hline 3186 \\ + 354 \\ \hline 0,6726 \end{array}$$

El procés per a dividir nombres decimals

Recordem ara també l'algoritme per a fer divisions amb nombres decimals, tenint en compte diferents casos i les dificultats que poden presentar:

$\begin{array}{r} 394,7 \overline{) 281} \\ 1137 \\ \underline{01300} \\ 176 \\ \dots \end{array}$	$\begin{array}{r} 394,7 \overline{) 281} \\ 281 \\ \underline{1137} \\ 1124 \\ \underline{01300} \\ 1124 \\ \underline{176} \\ \dots \end{array}$	$\begin{array}{r} 0,407 \overline{) 2} 47 \\ 007 0,2035 \\ \underline{10} \\ 0 \end{array}$	$\begin{array}{r} 2,81 \overline{) 281} \\ 1890 \\ \underline{2040} \\ 730 \\ \underline{1680} \\ 275 \\ \dots \end{array}$
---	---	---	--

A la part decimal, es pot posar un zero al nou dividend sense necessitat de posar-lo al quocient. Per baixar la segona xifra següent sí que cal posar el zero al quocient.

Comparar nombres decimals

Recordem que, a l'hora de comparar nombres decimals, és més gran el que tinga xifres més altes en els ordres de magnitud més alts:

$$0,967 < 4,3 < 65,823601273 < 100$$

Aproximar nombres decimals

En matemàtiques, **aproximar** un nombre és donar-ne un altre de molt semblant però menys precís, amb l'objectiu de simplificar l'escriptura i les operacions posteriors. Sempre s'aproxima a un ordre de magnitud donat (a les dècimes, a les unitats, a les centenes, etc.), i s'eliminen les xifres que tenen un ordre de magnitud inferior a l'ordre donat.

Es pot aproximar **per excés**, si quan aproximem augmentem en un la xifra corresponent a l'ordre de magnitud al qual aproximem, o **per defecte o truncament**, si deixem la xifra com està.

A més, la tècnica més freqüent d'aproximació és l'**arredoniment**; és a dir, s'aproxima per excés si la xifra següent a l'ordre de magnitud és igual a 5 o més gran, o per defecte, en cas contrari.

Per exemple:

- Si aproximem el nombre 237,865 a les centèsimes, tenim dues possibilitats: 237,86 (per defecte) o 237,87 (per excés). Però si l'arredonim a les centèsimes, en queda 237,87.

- Si aproximem el nombre 237,865 a les centenes, tenim dues possibilitats: 200 (per defecte) o 300 (per excés). Però si l'arredonim a les centenes, en queda 200.

Potències de base 10

Una **potència de base 10** és una expressió de la forma 10^n , en què n és un nombre enter.

El sistema de numeració que fem servir s'anomena decimal perquè podem expressar qualsevol nombre enter com la suma de potències de base 10. Per exemple:

$$\begin{aligned} 248.913 &= 200.000 + 40.000 + 8.000 + 900 + 10 + 3 \\ &= 2 \times 100.000 + 4 \times 10.000 + 8 \times 1.000 + 9 \times 100 + 1 \times 10 + 3 \times 1 \\ &= 2 \times 10^5 + 4 \times 10^4 + 8 \times 10^3 + 9 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 3 \times 10^0 \end{aligned}$$

Però també serveix per als racionals:

$$\begin{aligned} 621,123 &= 600 + 20 + 1 + 0,1 + 0,02 + 0,003 \\ &= 6 \times 100 + 2 \times 10 + 1 \times 1 + 1 \times 0,1 + 2 \times 0,01 + 3 \times 0,001 \\ &= 6 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 1 \times 10^0 + 1 \times 10^{-1} + 2 \times 10^{-2} + 3 \times 10^{-3} \end{aligned}$$

Multiplicar o dividir per potències de base 10

Per a multiplicar un nombre racional per una potència de base 10, només cal moure la coma del nombre tantes posicions a la dreta com siga l'exponent de la potència.

Per a dividir un nombre racional per una potència de base 10, només cal moure la coma del nombre tantes posicions a l'esquerra com siga l'exponent de la potència.

$$4 \times 1.000 = 4 \times 10^3 = 4.000 \quad 26 : 100 = 26 : 10^2 = 0,26$$

$$4,75 : 10.000 = 4,75 : 10^5 = 0,0000475$$

Percentatges. Tant per cent d'una quantitat

Un percentatge és una manera de representar un nombre racional com una fracció amb denominador igual a 100. Per exemple:

$$26 \% = \frac{26}{100} = 2,6; \quad 4,75 \% = \frac{4,75}{100} = 0,0475; \quad 0,113 \% = \frac{0,113}{100} = 0,00113$$

Per tant, per a calcular el tant per cent d'una quantitat, només s'ha de calcular la fracció corresponent d'aquesta quantitat. Per exemple:

$$26 \% \text{ de } 76 = \frac{26}{100} \text{ de } 76 = \frac{13}{50} \text{ de } 76 = 76 : 50 \times 13$$

Decimal	Fracció	Percentatge
- 2,66	$-\frac{266}{100} = \frac{133}{50}$	$-\frac{266}{100} = -266 \%$
0,034	$\frac{34}{1.000} = \frac{17}{500}$	$\frac{3,4}{100} = 3,4 \%$
314,06	$\frac{31.092}{99} = \frac{10.364}{33}$	$\frac{3.1406,06}{100} = 3.1406,06 \%$
1,341	$\frac{1.207}{900}$	$\frac{134,1}{100} = 134,1 \%$
50	$\frac{50}{1}$	$\frac{5.000}{100} = 5.000 \%$
- 312	$-\frac{312}{1}$	$\frac{31.200}{100} = 31.200 \%$

$$= \frac{76}{50} \times 13 = \frac{38}{25} \times 13 = \frac{494}{25} = 19,76$$

Recordem que $\frac{1}{2}$ representa la meitat d'un nombre. Per tant, com que el $50 \% = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$, el 50% també representa la meitat. De la mateixa manera, el 25% n'és la quarta part, el 20% la cinquena part o el 10% la desena part, per exemple.

Relació entre decimal, fracció i percentatge

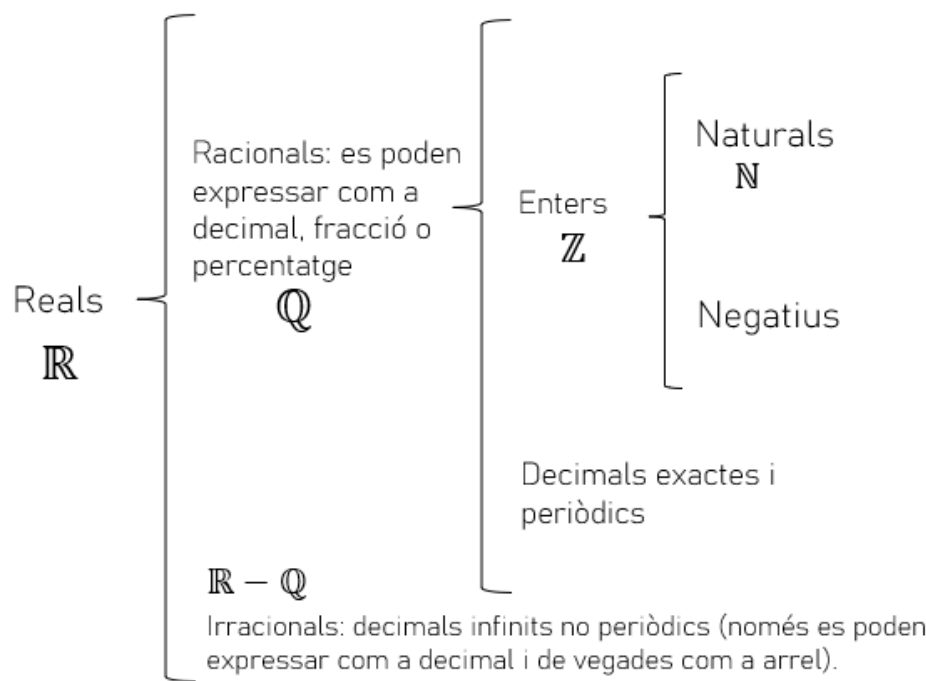
Ací presentem una graella pràctica, on es poden comparar les diferents representacions dels nombres racionals que hem vist:

Pas de decimal a fracció

D'altra banda, en la taula següent es recorda el procés que s'ha de seguir per tal d'obtindre la fracció generatriu d'un nombre decimal. No hem d'oblidar que el procés canvia segons quin tipus de nombre decimal siga:

Tipus de decimal	Al numerador	Al denominador	Exemple
Exacte	Totes les xifres sense la coma.	Un 1 i tants 0 com xifres tinga la part decimal.	$-2,66 = -\frac{266}{100} = -\frac{133}{50}$
Periòdic pur	Totes les xifres menys la part entera.	Tants 9 com xifres tinga el període.	$314,06 = \frac{31406 - 314}{99} = \frac{31092}{99} = \frac{10364}{33}$
Periòdic mixt	Totes les xifres menys les xifres sense el període.	Tants 9 com xifres tinga el període i tants 0 com xifres tinga l'anteperíode.	$1,341 = \frac{1341 - 134}{900} = \frac{1207}{900}$

Resum: classificació general de nombres



5. Raó i proporció

Raó

Una **raó** és una relació numèrica que hi ha entre dos valors d'una magnitud. Per exemple:

- Si diem que dos de cada cinc alumnes aproven matemàtiques, és el mateix que dir que la raó d'alumnes que aproven amb la dels alumnes totals és de dos a cinc.
- Si diem que hi ha dos alumnes que aproven matemàtiques per cada tres que suspenen, és el mateix que dir que la raó d'alumnes que aproven amb la dels que suspenen és de dos a tres.

Les raons se solen expressar també en forma de fraccions. Per exemple:

- Dos cinquens, $\frac{2}{5}$ dels alumnes aproven.
- La raó entre els que aproven i els que suspenen és de dos terços, $\frac{2}{3}$.

No obstant això, hi ha vegades en què no podem expressar les raons amb fraccions. Per exemple:

- La raó entre el perímetre d'una circumferència i el diàmetre és igual a π , que sabem que és irracional i, per tant, no es pot expressar amb una fracció.

Proporció

Una **proporció** és una igualtat entre dues raons de dues magnituds diferents. Per exemple:

- La raó entre el que costen 2 kg de maduixes (4 €) i el que costa 1 kg de maduixes (2 €) és de 4 a 2. És a dir, $\frac{4}{2}$.
- La raó entre 2 kg de maduixes i 1 kg de maduixes és de 2 a 1. És a dir, $\frac{2}{1}$.

Però com que $\frac{4}{2}$ i $\frac{2}{1}$ són equivalents, sabem que representen el mateix valor numèric i, per tant, la mateixa raó. Aleshores, direm que el pes de les taronges i el preu estan en proporció o que són directament proporcionals.

- Direm que dues magnituds són **directament proporcionals** si les raons entre els diferents valors ordenats coincideixen. És a dir, si

$$\frac{\text{valor 1 magnitud 1}}{\text{valor 2 magnitud 1}} = \frac{\text{valor 1 magnitud 2}}{\text{valor 2 magnitud 2}}$$

- Direm que dues magnituds són **inversament proporcionals** si les raons entre els diferents valors ordenats coincideixen quan se n'inverteix una. És a dir, si

$$\frac{\text{valor 1 magnitud 1}}{\text{valor 2 magnitud 1}} = \frac{\text{valor 2 magnitud 2}}{\text{valor 1 magnitud 2}}$$

Per exemple:

- 3 parets necessiten 9 l de pintura i 4 parets necessiten 12 l de pintura:

$$\frac{3 \text{ parets}}{4 \text{ parets}} = \frac{9 \text{ l}}{12 \text{ l}} = \frac{3}{4} \longrightarrow \text{Directament proporcionals}$$

- 4 pintors tarden 2 hores a pintar-les i 8 pintors tarden 1 hora:

$$\frac{4 \text{ pintors}}{8 \text{ pintors}} = \frac{1 \text{ hora}}{2 \text{ hores}} = \frac{1}{2} \longrightarrow \text{Inversament proporcionals}$$

Aquesta igualtat també es compleix per a les magnituds directament proporcionals:

$$\frac{\text{valor 1 magnitud 1}}{\text{valor 1 magnitud 2}} = \frac{\text{valor 2 magnitud 1}}{\text{valor 2 magnitud 2}}$$

I per a les magnituds inversament proporcionals:

$$\frac{\text{valor 1 magnitud 1}}{\text{valor 1 magnitud 2}} = \frac{\text{valor 2 magnitud 2}}{\text{valor 2 magnitud 1}}$$

En els exemples anteriors:

$$\frac{3 \text{ parets}}{9 \text{ l}} = \frac{4 \text{ parets}}{12 \text{ l}} = \frac{1}{3} \longrightarrow \text{Directament proporcionals}$$

$$\frac{4 \text{ pintors}}{1 \text{ hora}} = \frac{8 \text{ pintors}}{2 \text{ hores}} = 4 \longrightarrow \text{Inversament proporcionals}$$

La “fantabulosa” regla de tres

Per a magnituds directament proporcionals:

V1M1 $\longrightarrow$ V1M2

V2M1 $\longrightarrow$ V2M2

Per a magnituds inversament proporcionals:

V1M1 $\longrightarrow$ V1M2

V2M1 $\longrightarrow$ V2M2

Els perills de la “fantabulosa” regla de tres

- Sabem que cinc aspirants de Masterchef tarden dues hores a cuinar el pollastre al forn de Pepe Rodríguez. Quant tardaran a cuinar-lo deu aspirants?
- Al quart curs de primària de l’Escola Primària de Springfield, on estudia Lisa, hi ha un total de 75 alumnes. Quants n’hi ha al curs de Bart, que és sisè?
- L’entrada al cinema per a veure *La societat de la neu* i el pot de roses de dacsà em costen 15 € en total. Quant em costaran amb dos pots de roses de dacsà?
- A Lefties hi ha una dessuadora amb un 30% de descompte que costa 21 €. Però la setmana passada estava al 10% de descompte. Quant costava?
- En el món màgic de Harry Potter, la maledicció *geminio* fa que tot el que toques es multiplique infinitament. Si al principi només hi ha una copa, Ron la toca i tarda 2 segons a multiplicar-se. Quantes copes hi haurà d’ací a 1 minut?
- En 100 dies des que es va propagar la COVID ja hi havia 5 milions d’infectats. Quants n’hi havia als 300 dies?

“Oooh! Mira’m! Faig la gent feliç. Que bé, soc una regla màgica, del país feliç, de la casa de la llepolia, del carrer de la piruletaaaaaa.

Ah, per cert. pretenia ser sarcàstica.”

Signat, La Regla de Tres

EXERCICIS I PROBLEMES DE D'ARITMÈTICA

Nota: Tots els exercicis entren per a l'examen

1. Indica tots els conjunts als quals pertanyen els nombres següents:

a) 3

g) $\sqrt{5}$

b) 1,4

h) $\sqrt[3]{8}$

c) $-1,34545454545 \dots$

i) $\sqrt[3]{-8}$

d) $1,427422742227422227 \dots$

j) π

e) $\frac{2}{3}$

k) e

f) $-\frac{6}{3}$

l) $-\sqrt{-2}$

2. Escriu en notació decimal o romana segons corresponga:

a) *XLIX*

e) 38

b) *CDXXXIX*

f) 764

c) *VIIICDLXIII*

g) 2869

d) *DCCXXVIII CMLI*

h) 68476

2.

3. Resol les operacions combinades següents:

a) $1 + 5 \cdot [4 \cdot 7 + 5 \cdot (15 - 4 \cdot 5)] - 3 \cdot (7 - 4)$

b) $4 - 2 \cdot (5 - 8) + 2 \cdot [5 \cdot (2 - 7 + 3) - 7]$

c) $3 \cdot \{2 \cdot [4 - 2 \cdot (5 - 7)] + 3 \cdot (1 - 2 \cdot 5)\}$

d) $12 : (-3) - 4 + 3 \cdot [5 - 3 \cdot 2 - 2 \cdot (4 + 12 \cdot 5 - 25)]$

e) $1 + 2 \cdot [(3 + 4) - 5 \cdot (6 - 7) \cdot 2] - \{1 - [2 \cdot (3 - 4) + 5 - 6]\}$

f) $7 \cdot (5 - 4) + 2 \cdot \{8 + 6 \cdot [12 - 4 \cdot 5 + 2 \cdot (10 - 3 \cdot 3)]\}$

g) $3 \cdot (12 - 4 \cdot 8) + 4 \cdot [5 : 1 - 4 + 3 \cdot (2 - 1)]$

h) $11 - 7 \cdot [9 - 2 \cdot (5 - 3)] + 2 \cdot \{1 + 3 \cdot [8 - 2 \cdot (3 - 1)]\}$

- i) $\{11 + [- (4 - (3 + 2 - (1 - 3)))]\}$
- j) $-2 \cdot \{[(-3 - 1) \cdot (-2)] : (-2 + 1)\}$
- k) $[-3 - 4 - (-1)] \cdot (-3 : -1) \cdot \{[(-2 + 1) \cdot (2 - 1)] : [-7 - 6 + 4 \cdot 3]\}$
- l) $(-2 + 1) \cdot \{ \{ [(4 - 3) \cdot 2] : (-2) \} + 2 \}$
- m) $(-3 + 2 - 1 + (-1 - 2)) \cdot [(-3) : (7 - 4)] + \{-3 \cdot [-2 + 1] - 4\}$
- n) $[3 \cdot (4 - 1) - 2] : \{[3 + (-2 - 3) \cdot 2]\}$
- o) $\{4 - [3 \cdot (-1)] - 5\} \cdot \{4 : [4 - (4 - 1)]\}$
- p) $5 \cdot \{3 \cdot [20 - 4 \cdot (8 - 2 \cdot (6 : 3))]\}$
- q) $2 \cdot \{-1 \cdot [2 + 4 \cdot (3 - 2)]\} \cdot \{2 \cdot (4 - 3) - 2 \cdot 3 - 4 \cdot 5\}$
- r) $-1 \cdot \{[2 + 4 : (3 - 2)]\} \cdot [2 \cdot (4 - 3) - 2 \cdot (3 - 4 \cdot 5)]$
- s) $-2 \cdot 4 + \{[2 \cdot (3 - 2 + 5 - 7)] : 2\} \cdot \{4 - [8 + 4] : 3 + 2 \cdot [5 - 3 - (2 - 3)]\}$
- t) $1 + \{3 \cdot [5 - (7 + 3)]\} - \{8 + [4 - (2 : 2)]\}$
- u) $\{(-3) \cdot [(-9) + (4 \cdot 3)]\} : [4 - 2 + 5 \cdot 2 - 7 - 2]$
- v) $\{[(-3) + 12] + (15 - 18)\} \cdot 3 - 2$
- w) $\{-[(-3) + (-2)] + (-3) \cdot [2 - (-7)]\} \cdot (-2 \cdot 2)$
- x) $\{2 - 3 \cdot [4 : (7 - 5)] + 4\} \cdot \{3 - [4 \cdot 2 - (5 + 3 - (3 - 2))]\}$
- y) $-3 \cdot \{4 - 2 + [5 \cdot 2 - 3 \cdot (4 - 2)]\}$
- z) $2 \cdot \{4 + [3 \cdot 2 + (4 - 8 : 4 + 2)]\}$

4. Sense calcular les potències, indica el signe del resultat:

- a) $(-3)^4$
- b) $(-2)^{10}$
- c) $(-1)^7$
- d) $(-5)^9$

5. Calcula:

- a) $(-2)^2 \cdot 3$
- b) $(-4)^3 : 2^3$
- c) $(-2)^5 : (-4)$

6. Estudia si són certes o falses les igualtats:

a) $(-6)^4 = -6^4$

e) $(8 - 3)^3 = 8^3 - 3^3$

b) $(-3)^5 = -3^5$

f) $(5 \cdot 4)^2 = 5^4 \cdot 4^4$

c) $8^2 = (-8)^2$

g) $(8 : 3)^3 = 8^3 : 3^3$

d) $(5 + 4)^2 = 5^4 + 4^4$

7. Escriu el producte $100 \cdot 1000$ com una única potència.

8. Calcula:

a) $[(-1) \cdot (-2) \cdot (-3)]^3$

n) $(-2)^2 \cdot (-2)^3 \cdot (-2)^2$

b) $[(-2)^3]^2$

o) $(-9)^7 : (-9)^3 : (-9)^2$

c) $(-3 \cdot 2)^3$

p) $-27 \cdot (-3)^5 \cdot (-3)^3$

d) $[-4 : (-2)]^3$

q) $-32 : (-2)^3$

e) $[(-2)^3]^2$

r) $81 : (-3)^2$

f) $4^3 \cdot (-3)^3 : 2^3$

s) $125 \cdot 5^4 : 25$

g) $(6^2)^4 : 6^5 \cdot 6$

t) $243 : (81 : 3)$

h) $(-3)^3 \cdot (-3)^2$

u) $-243 : (-27 : 3)$

i) $5^4 : 5^2$

v) $216 \cdot (-8) : (-36)$

j) $24^3 : (-2)^3 : 3^3$

w) $16^2 \cdot (-4)^2 : 512$

k) $\{[(-2)^2]^2\}^2$

x) $1000 : (-125 \cdot 8)$

l) $(-36)^4 : (-6)^4 : 3^4$

y) $(3^4)^2 : (3^3 \cdot 9)$

m) $\{[(-1)^3]^5\}^4$

z) $(-2)^6 \cdot 2^2 : [(-2)^3]^2$

9. Troba l'arrel quadrada i el residu. Són exactes? Dels que no ho siguen, indica entre quins dos nombres naturals es troben:

a) 245

d) 316

g) 450

b) 121

e) 169

h) 196

c) 255

f) 53

i) 230

j) 400

l) 500

n) 150

k) 420

m) 225

10. Fes les divisions següents:

a) $9,87 : 4$

i) $408,5 : 16$

q) $98,19 : 7,2$

b) $368 : 6$

j) $252 : 3,5$

r) $37,5 : 6,08$

c) $129 : 5$

k) $558 : 1,24$

s) $48,5 : 1,3$

d) $749 : 4$

l) $432 : 0,5$

t) $147,32 = 1,8$

e) $15 : 18$

m) $63 : 0,025$

u) $7,8 : 1,25$

f) $10,96 : 7$

n) $450,01 : 100$

v) $24,67 : 0,36$

g) $3,087 : 2$

o) $85,9 : 1000$

w) $13,44 : 2,4$

h) $2,743 : 8$

p) $59,6 : 4,1$

x) $0,75 : 0,005$

11. Completa les frases següents:

a) 400 és de 80

b) 500 és de 25

c) 60 és de 1200

d) Tots els nombres parells són entre 2.

e) Com que 20 és de 4, de fet $20 = 4 \times 5$, també diem que és entre 5.

12. El 119 és un nombre primer? I el 883 és un nombre primer?

13. Justifica si els nombres següents són primers o compostos: 317, 387, 433, 563, 583, 719, 997 o 1001.

14. Escriu tots els múltiples d'11 menors que 100.

15. En una macrofesta hi ha entre 780 i 788 assistents. Els organitzadors voldrien fer equips (tots de la mateixa mida), però s'adonen que no és possible (llevat que només hi haja un equip, o que hi haja tants equips com participants). Quants assistents hi ha?

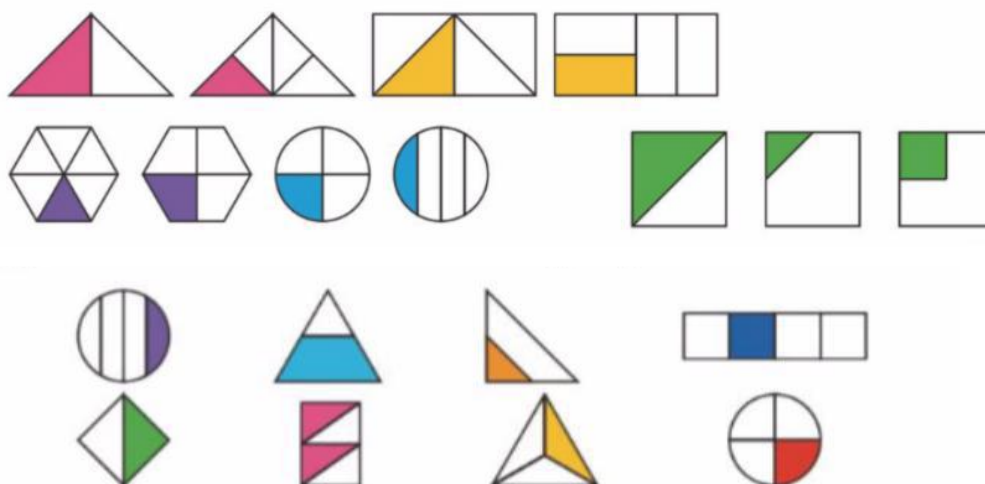
16. Troba el menor nombre de tres dígitos que siga múltiple de 7.
17. Troba el múltiple de 3 que siga més gran però inferior a 2.000.
18. Tenim 72 llepolies i volem repartir-les en bosses d'aniversari de manera que totes les bosses en tinguin la mateixa quantitat. De quantes maneres diferents podem distribuir-les?
19. Si dividim un nombre a entre d el residu és 3, què passa si dividim $a - 3$ entre d ?
20. Tinc un paquet que conté entre 30 i 40 caramels. Si els agrupe en parells, me'n sobra 1; si en faig paquets de 3, també en sobra 1; si en faig paquets de 5, passa el mateix. Quants caramels hi ha al paquet?
21. En la vacunació contra la COVID, cada flascó de vacuna conté 7 dosis, però una vegada obert, les que no es consumisquen el mateix dia no es poden guardar. Si al lloc A de vacunació han acudit 410 persones i al lloc B n'han acudit 550, i no es poden transportar vacunes entre els dos llocs, quantes dosis s'han malgastat?
22. A partir dels nombres 405, 316, 814, 1.085 i 340, esbrina, sense calcular el quocient:
 - a) Si n'hi ha algun que siga divisible entre 3.
 - b) Si n'hi ha algun que siga múltiple de 4.
 - c) Si 5 és divisor d'algun d'ells.
23. Sense fer divisions, justifica si el nombre 30.360 és divisible entre 2, 3, 5, 9 o 10.
24. Calcula quin valor(s) pot tenir x perquè el nombre $114x$ siga múltiple de 6.
25. Substitueix x per un dígit de manera que el nombre $7x3$ siga un múltiple de 3.
26. Troba, de manera justificada, 3 nombres de 4 dígitos que siguin divisibles, simultàniament, entre 9 i entre 2.
27. Troba x perquè $5x6$ siga un múltiple de 4.
28. Determina, en cada cas, el valor de x i y de manera que...
 - a) $2xy31$ siga divisible entre 9.
 - b) $5x6x$ siga múltiple de 4.

29. Si hui és dilluns i són les 9 del matí, quin dia de la setmana serà d'ací a 1.000 hores?
30. Troba tots els nombres majors que 100 i menors que 200 que siguin divisibles entre 2, entre 7 i entre 3 alhora.
31. El meu amic té una certa quantitat de diners. Em diu que si els repartira entre 12, entre 20 o entre 28 amics, sempre li sobraria el mateix: 5 euros. Em diu, a més, que té més de 4.500 euros, però menys de 5.000. Quants diners té el meu amic?
32. Del nombre $86a54b$ sabem que:
- a) És parell.
 - b) Si el dividim entre 5, el residu és 2.
 - c) Si el dividim entre 3, el residu és 1.
 - d) Si el dividim entre 7, el residu és 2.

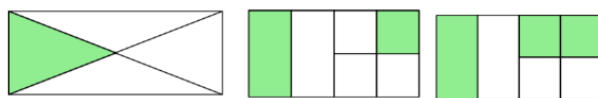
Quin nombre és?

34. Tenim una habitació rectangular de 6,3 m de llarg i 4,5 m d'ample. Volem posar un terra de rajoles quadrades, totes iguals, sense haver de partir-ne cap.
- a) De quina mida poden ser les rajoles, tenint en compte que les més menudes fan 10 cm?
 - b) Quantes en necessitem en cada cas?
35. Sabent que $17640 = 23 \times 32 \times 5 \times 72$, $12474 = 2 \times 34 \times 7 \times 11$, $3591 = 33 \times 7 \times 19$ i $4998 = 2 \times 3 \times 72 \times 17$, calcula el MCD (17640, 12474, 3591, 4998) i escriu tots els divisors comuns d'aquests nombres.
36. Tenim 40 litres de suc de pinya i 24 litres de suc de taronja. Volem envasar-los en recipients (tots iguals) amb la màxima capacitat possible. Quants recipients necessitem?
37. Una ONG té 48 caixes d'un medicament contra la malària, 96 caixes de medicament contra la febre tifoide i 72 caixes d'un medicament per als símptomes gripals. Volen empaquetar els medicaments en contenidors de manera que cadascun continga la mateixa quantitat de cada medicament i, atès que hi ha limitacions pressupostàries, volen que el nombre de contenidors siga el més petit possible. Com es pot fer? Quants contenidors necessiten?

38. Maria i Pau se'n van a viure junts. Al seu pis d'estudiants Maria té 120 llibres, mentre que Pau en té 160. Per facilitar el transport dels llibres a la furgoneta, han de fer paquets que continguen el mateix nombre de llibres. No volen mesclar els seus llibres i volen minimitzar el nombre de paquets. Quants paquets han de fer entre els dos?
39. En una fàbrica d'aliments lactis hi ha 350 litres de llet desnatada, 300 litres de llet semidesnatada i 450 litres de llet sencera en envasos iguals que tenen la màxima capacitat possible. Quina és la capacitat dels envasos?
40. Les finestres de l'institut es netegen cada 9 setmanes; els sostres, cada 12, i les prestatgeries, cada 6. Al llarg del curs (entre l'1 de setembre i el 30 de juny), quantes setmanes coincidiran les tres tasques de neteja? Si quan va començar el curs es va fer una neteja general, quantes vegades es netejaran els vidres?
41. Quines figures estan dividides en quarts? I en meitats?



42. Quina fracció es representa en cada imatge?



43. Volem repartir una herència de manera que el més gran dels fills n'obtinga un terç del total; el mitjà, un quart, i el xicotet, un cinquè. En quantes parts hem de partir l'herència? Quantes d'aquestes parts hem de donar a cada germà? I quantes en sobren?

44. Dels 24 alumnes d'una classe, 8 són xics, 12 tenen els cabells negres i a 6 els agrada el futbol.
- a) Quina fracció representa les xiques de la classe?
 - b) Quina fracció representa els alumnes amb els cabells negres?
 - c) Si només $\frac{1}{3}$ dels estudiants als quals els agrada el futbol són xiques, a quantes xiques els agrada el futbol?
45. Per a cadascun dels parells de fraccions següents, raona quin és el més gran.
- a) $\frac{3}{13}$ i $\frac{8}{13}$
 - b) $\frac{157}{17}$ i $\frac{157}{18}$
 - c) $\frac{19}{17}$ i $\frac{23}{21}$
 - d) $\frac{15}{34}$ i $\frac{19}{42}$
 - e) $\frac{13}{38}$ i $\frac{14}{43}$
46. Jaume i Lúdia fan una competició de menjar. Jaume sap que guanyarà segur, perquè s'ha menjat $\frac{15}{8}$ de pizza, però Lúdia diu que ha guanyat ella, perquè se n'ha menjat $\frac{23}{12}$. Qui dels dos ha guanyat?
47. He obert l'aixeta i he comprovat que, al cap d'una hora, s'han omplert $\frac{5}{8}$ del dipòsit. Quant tardarà a omplir-se completament?
48. Marta va llegir la meitat del llibre dilluns, dimarts va llegir $\frac{1}{3}$ del que li faltava i dimecres va acabar el llibre. Si dimecres va llegir 48 pàgines, quantes pàgines tenia el llibre?
49. He preparat una sangria amb 3 gots de suc, 2 gots de vi (amb $\frac{1}{8}$ part d'alcohol) i 1 got de ginebra (amb $\frac{1}{5}$ part d'alcohol). Quina fracció de sangria és alcohol?
50. Quantes botelles de $\frac{2}{3}$ de litre podem omplir amb 5 litres d'aigua,? Quina fracció de botella queda buida?
51. Un jove es gasta $\frac{1}{4}$ de la paga setmanal al cinema. Després, es gasta $\frac{2}{5}$ del que li queda en el transport setmanal. Al final de la setmana es compra un llibre que li costa 6 euros i aconsegueix estalviar $\frac{1}{5}$ de la paga setmanal. Quin és l'import de la paga setmanal?
52. En una taula hi ha quatre tipus d'entrepans. $\frac{1}{5}$ dels entrepans són de tonyina, $\frac{1}{4}$ dels entrepans són de formatge o d'ou i la resta són de pollastre. Sabem també que hi ha 3 vegades més entrepans de formatge que d'ou.

- a) Quina fracció dels entrepans són de pollastre?
 - b) Quina fracció dels entrepans són d'ou?
53. Demanem unes pizzes i tenim sort perquè en sobren (millor, per a esmorzar demà). Jo he sopat $\frac{3}{4}$ parts d'una pizza, la meua germana s'ha menjat $\frac{2}{3}$ d'una pizza i el seu nóvio sigut el que més n'ha menjat: $\frac{1}{2}$ pizza de pepperoni i $\frac{2}{3}$ de la de 4 formatges. Si havíem comprat 4 pizzes, quanta pizza hem menjat i quanta ens n'ha sobrat?
54. El meu pressupost per a les compres del Black Friday és de 300 € (he fet moltes classes particulars i em cremen els diners a la butxaca). He decidit gastar-me $\frac{2}{3}$ del meu pressupost en roba per a l'hivern i $\frac{3}{4}$ del que em quede en un nou videojoc per entretenir-me a les vacances. Amb el que em sobre, em compraré algun capritx.
- a) Quants diners m'he gastat en roba?
 - b) Quants me n'he gastat en el videojoc?
 - c) Quants diners em queden per als capritxos?
 - d) Quina fracció del pressupost representa el preu del videojoc?
 - e) Quina fracció del pressupost representen els diners que em queden per als capritxos?
55. El professor de Matemàtiques ha d'organitzar les reunions amb els pares dels alumnes. Si cada reunió dura 20 minuts:
- a) Quantes reunions pot organitzar en 3 hores?
 - b) Quantes reunions pot organitzar en dues hores i mitja?
 - c) El professor ha d'atendre els pares de 24 alumnes. Quantes hores necessita per A poder atendre'ls a tots?
56. Tenim dues truites i mitja de creïlla i volem repartir-les en 8 racions iguals per a tàpers. Quina és la fracció de truita que toca a cada ració?
57. Si repartim 4 pizzes i $\frac{2}{3}$ d'una altra pizza entre 7 amics, quina quantitat de pizza rep cadascú?
58. Quantes botelles de $\frac{3}{4}$ de litre podem omplir amb $\frac{17}{5}$ de litre?

59. Tinc el temps limitat per a fer totes les tasques aquest cap de setmana. Em propose treballar 8 hores dissabte i 7 diumenge, perquè tinc molta feina. Necessite la tercera part del temps per al treball de ciències, una cinquena part del que em queda per a fer problemes de matemàtiques, i una quarta part del que resta per a llegir el temari per a l'examen de la setmana vinent. Si la resta d'hores les dedique a passar en net els apunts de la setmana, quantes hores em queden per a passar apunts?
60. Tinc un pressupost de 600 € per a gastar-lo en decoració i mobles per al meu pis. Havia pensat gastar-me'n un terç amb el menjador, la meitat del que queda amb la cuina, una quarta part del restant amb el bany i la resta amb el dormitori. Si l'espill que vull comprar val 90 €, la tauleta val $\frac{2}{3}$ parts del que val l'espill i la manteta val $\frac{2}{5}$ parts del que val la tauleta, podria comprar-ho tot per al dormitori? Què podria comprar per aprofitar el pressupost al màxim?
61. Un terç dels xics del grup A han portat fruita per a dinar. Un quart de les xiques del grup A han portat fruita per a dinar. Si sabem que $\frac{2}{5}$ dels alumnes són xics i la resta són xiques, quina fracció del total dels estudiants del grup A han portat fruita per a dinar?
62. $\frac{3}{5}$ parts de les alumnes d'una classe fan el camí en cotxe o en autobús, les altres van caminant. Tres quartes parts de les alumnes que van en vehicle fan el viatge en cotxe i 9 alumnes utilitzen l'autobús. Quantes alumnes hi ha a classe?
63. Entre tres germans es repartiran 120 euros. El primer s'endú $\frac{7}{15}$ del total; el segon, $\frac{5}{12}$ del total, i el tercer, la resta. Quina fracció del total s'endú el tercer?
64. En un quiosc s'han venut al llarg del matí $\frac{2}{3}$ dels diaris. A la vesprada, se n'han venut la meitat dels que han quedat. Quina fracció del total de diaris representen els que s'han venut de vesprada? Si no s'han venut dos diaris, quants n'hi havia de bon matí?
65. Vull repartir una beguda que he comprat en botelles de $\frac{3}{4}$ de litre en botelletes d' $\frac{1}{5}$ de litre, que és una ració més raonable per a una persona. Si tenim tres botelles grans:
- Quantes botelles menudes podem omplir per complet?
 - Si volem repartir tota la beguda, quantes botelles menudes necessitarem?
 - Quin és el volum de beguda que ha quedat a la botella que no està completament plena?

- d) Després de calcular el volum de l'apartat anterior, quina és la fracció que representa la botelleta menuda?

66. Vaig fer una recollida de diners per fer un regal a un amic que compleix 30 anys. La meua millor amiga en va posar el doble que jo (perquè també posava diners per a la seua parella), i el grup d'amics de la universitat en van posar, entre tots, el triple que la meua amiga. En total, vam dedicar la meitat dels diners per a comprar unes sabates, una tercera part del que quedava per a comprar un rellotge i un terç, per a una jaqueta. Amb els 40 € que van sobrar vam reservar un massatge. Quants diners hi vaig posar jo?

67. Completa:

- a) 410 dècimes són ... centèsimes
- b) 5.200 dècimes són ... desenes
- c) 41 desenes són ... centèsimes
- d) 1.000.000 deumil·lèsimes són ... unitats
- e) 53 centenenes són ... dècimes

68. Escriu els nombres:

- a) Dotze unitats i quatre-centes cinquanta-quatre mil·lèsimes
- b) Cinc centenenes, dues desenes, cinquanta centèsimes i trenta dècimes
- c) Setanta unitats, catorze dècimes i dotze mil·lèsimes
- d) Setanta-tres centenenes, vint unitats i trenta-sis mil·lèsimes
- e) Vint-i-dos milers i tres-centes deumil·lèsimes
- f) Cinc centenenes, sis unitats i deu centèsimes
- g) Dues-centes quaranta-cinc unitats i cent trenta-cinc centmil·lèsimes.

69. Escriu verbalment els nombres següents:

- | | |
|---------------|------------|
| a) 430,00208 | c) 403,208 |
| b) 4300,00208 | d) 43,208 |

70. Tria una escala adequada per a representar els nombres decimals següents en la recta numèrica de la figura perquè es vegi de la millor manera possible: 1,509; 1,52; 1,469; 1,592 i 1,6.

71. Troba l'expressió decimal de les fraccions següents:

a) $\frac{3}{8}$

d) $\frac{28}{11}$

b) $\frac{15}{11}$

e) $\frac{757}{165}$

c) $\frac{38}{45}$

72. Escriu les fraccions dels nombres decimals següents:

a) $0,\hat{2}$

e) $0,\hat{252}$

i) $0,01\hat{37}$

b) $0,25$

f) $0,\hat{252}$

j) $3,\hat{0365}$

c) $0,2\hat{5}$

g) $51,076$

d) $0,\hat{25}$

h) $6,\hat{78}$

73. Vertader o fals?

a) $1,\hat{9} < 2$

c) $2,\hat{2} = 2,2\hat{2}$

b) $3,\hat{01} > 3,01$

d) $0,\hat{6} < \frac{2}{3}$

74. Fes les aproximacions següents:

a) Aproxima 12,645 per truncament a les centèsimes

b) Arredoneix 12,645 a les centèsimes

c) Aproxima 12,644 per truncament a les centèsimes

d) Arredoneix 12,644 a les centèsimes

e) Aproxima 3,51 per excés a les unitats

f) Aproxima 3,51 per defecte a les unitats

g) Aproxima 3,51 per truncament a les unitats

h) Arredoneix 3,51 a les unitats

75. Expressa en notació decimal:

- | | |
|-------------------------|-----------------------|
| a) $2 \cdot 10^5$ | e) $0,14 \cdot 10000$ |
| b) $700 \cdot 10^{-9}$ | f) $53 \cdot 0,001$ |
| c) $23,6 : 10^{-3}$ | g) $88 : 0,00001$ |
| d) $0,03124 \cdot 10^8$ | h) $456,81 : 10000$ |

76. Completa aquestes expressions (la línia contínua equival a una fracció i la línia discontinua equival a un percentatge):

- a) Una cosa que valia C augmenta el valor en un 50 %. Ara val _____ C .
- b) El volum era V i ara és $\frac{4}{5} V$. Ha perdut _____ del valor. El seu valor ha descendit un ____ %.
- c) Si un preu P augmenta en $\frac{1}{4}$ del seu valor, passa de ser P a ser _____ P . El seu valor ha augmentat un ____ %.
- d) Si el preu inicial era P i ara és $\frac{1}{4} P$, el preu s'ha reduït en un ____ %. P ha perdut _____ del valor.

77. Una mercaderia es va encarir un 10% i després es va abaratir també un 10%. Quan val menys, abans de tot el procés o després, o potser el preu és el mateix?

78. El meu grup d'amigues i jo hem venut loteria per recaptar diners per a ajudar l'ONG del barri; tenim un bon feix de bitllets! El 70% dels bitllets que hem recaptat són de 20 euros, $\frac{3}{5}$ de la resta de bitllets són de 10 euros i la resta són bitllets de 5 euros. Hem comptat i tenim 120 euros en bitllets de 5€. Quants diners hem recaptat?

79. Lluís fa llimonada amb 12 litres d'aigua i 8 de suc. Quin és el percentatge de suc de la llimonada?

80. En una granja, la pesta porcina mata el 18% dels porcs i en queden 164 de vius. Quants n'han mort?

81. Una impressora costa 215 € sense IVA i 249,40 € amb IVA. Quin percentatge d'IVA presenta?

82. He comprat 3 kg de polpa de meló d'Alger, que té un 90 % d'aigua. L'he deshidratat fins que el percentatge d'aigua és del 80 %. Quant pesa ara la polpa del meló d'Alger?

83. L'aigua augmenta de volum un 10 % quan es congela. En quin percentatge disminueix el volum del gel quan es fon?

84. M'he comprat un ordinador que m'ha costat 1.550 euros. Si l'IVA és el 21 %, calcula l'IVA que he pagat i el preu de l'ordinador abans d'incloure-hi l'IVA.
85. En un concert, el 55% de les entrades es van vendre al preu original, i el 40 %, a meitat de preu. Van sobrar 20 entrades, que es van regalar. En total, es van recaptar 7.200 euros. Quin era el preu de venda inicial de les entrades?
86. He comprat un abric per 156 euros que estava rebaixat un 35%. Quin preu tenia abans de les rebaxes?
87. Les rebaxes! A la botiga de moda han reduït un 25% els preus de tots els productes.
- a) Anna ja s'havia fixat en una jaqueta lluïdora abans de les rebaxes que costava 32€. Quant costa en rebaxes?
 - b) En la segona setmana de rebaxes, redueixen els preus un 25% més. En la tercera setmana, els redueixen de nou un 25%. En la quarta setmana, els redueixen una altra vegada un 25%. Anna creu que, si espera fins a la quarta setmana, la jaqueta pot eixir-li per 0 €. Explica per què està equivocada.
 - c) Si Anna compra la jaqueta després de les quartes rebaxes, quant pagarà? Quin percentatge del preu original s'ha estalviat?
88. La corona reial. El rei pregunta al seu científic de capçalera si la corona reial està feta d'or pur, ja que té dubtes sobre si és un aliatge d'or i plata. Arquímedes pren algunes mesures i calcula que el volum de la corona és 125 cm^3 i que pesa 1,8 kg.
- a) Arquímedes sap que 1 kg d'or té un volum de 50 cm^3 i que 1 kg de plata té un volum de 100 cm^3 .
 - b) La corona és d'or pur?
 - c) Si no ho és, quanta plata hi ha en la corona?
89. Vull omplir la piscina amb l'aigua per a regar l'hort. Per a omplir-la amb un bidó de 15 litres necessite omplir-lo 200 vegades. Estic farta de fer tants viatges a l'hort! Quants viatges he de fer amb un bidó més gran amb capacitat de 25 litres?
90. Estic editant un treball de classe de manera que en cada pàgina caben 32 línies i el treball ocupa 70 pàgines. Com que sobrepassa el límit d'espai, l'he d'ajustar una mica. Quantes pàgines ocupa el treball si col·loque 35 línies per pàgina?

91. En un camió caben 1.215 sacs de creïlles de 4 kg cadascun. En un altre camió amb la mateixa capacitat fiquem sacs de 5 kg. Quants sacs hi caben?
92. En una fàbrica automobilística, una màquina posa, en total, 15.000 caragols en les 8 hores de jornada laboral, funcionant de manera ininterrompuda. Quants caragols posarà en 3 hores?

TEMA 2: ESTADÍSTICA

L'estadística és una de les branques més útils de les matemàtiques. Té nombroses aplicacions que van des de les humanitats, passant per les ciències socials i les de la salut, fins a les ciències més innovadores. La societat d'avui acumula una quantitat enorme de dades que s'han de recollir, resumir, representar i interpretar. I, d'això, se n'encarrega l'estadística. En aquest tema estudiarem les nocions bàsiques d'aquesta interessantíssima branca de les matemàtiques i parlarem d'alguna de les utilitats que té.

Els continguts de què consta aquest tema són els següents:

1. Definicions prèvies
2. El procés d'un estudi estadístic
3. La recollida de dades: mostreig i variables
4. La representació de les dades
 1. Taules de freqüències
 2. Gràfics estadístics
5. El resum de les dades: paràmetres estadístics
 1. De posició
 2. De dispersió
 3. De forma
6. La interpretació de les dades
7. Tendenciositat i errades en estadística

Comencem!

1. Definicions prèvies

Estadística : branca de les matemàtiques que es dedica a recollir, representar, resumir i analitzar les dades disponibles per tal d'extraure'n conclusions útils i versemblants.

Probabilitat: branca de les matemàtiques que estudia els processos aleatoris, és a dir, aquells que *a priori* no en coneixem amb certesa el resultat.

Cal destacar que, en moltes ocasions, l'estadística fa ús de la probabilitat. Mentre que l'estadística descriptiva solament es dedica a resumir les dades disponibles i a analitzar-les, l'estadística inferencial utilitza la probabilitat per estimar les característiques d'una població a partir de les d'una mostra d'aquesta mateixa població.

L'estadística es divideix en dues branques fonamentals:

Estadística descriptiva: consisteix en la representació, el resum i la interpretació de les dades recollides en una mostra per a extraure'n conclusions. No s'hi utilitzen conceptes probabilístics.

Estadística inferencial: consisteix a estimar (inferir) les característiques de tota la població a partir de les característiques de la mostra. Per poder fer aquesta inferència s'utilitzen conceptes probabilístics.

Vegem-ne alguns exemples:

1. Tenim una classe de 35 alumnes i volem saber quina és la proporció de xiques, quina és la nota mitjana i quants alumnes han suspès l'últim examen.
2. Hem fet una enquesta a la gent del meu barri per saber quina és la intenció de vot de la ciutat de València a les pròximes eleccions.
3. Tinc una granja de pollastres i he donat a la meitat un nou tipus de menjar per poder estudiar si aquest menjar augmenta la potència de sabor en la carn dels pollastres.
4. A l'hospital La Fe s'utilitza un nou medicament per als pacients que pateixen varicel·la per esbrinar si redueix la gravetat dels símptomes.
5. A casa hem organitzat els CD de música i els hem classificat per gèneres musicals i per any de publicació; així ens resultarà més fàcil triar-ne un quan vulguem escoltar música.

2. El procés d'un estudi estadístic

Qualsevol estudi estadístic inclou els passos següents :

1. La recollida de les dades.
2. La representació de les dades: en taules estadístiques i mitjançant gràfics.
3. El resum de les dades: mitjançant els paràmetres estadístics.
4. La interpretació de les dades i les conclusions.

A diferència de l'estadística inferencial (que inclou sempre més o menys aleatorietat), l'estadística descriptiva és un procés determinista. Les conclusions sobre les dades (si s'extrauen a partir de càlculs ben fets) són fiables al 100%, ja que es refereixen a la mateixa mostra.

3. La recollida de dades: mostreig i variables

Cal fer-ne unes definicions prèvies:

- S'anomena **població** el conjunt de tots els elements que s'estudien.
- Cadascun dels components s'anomena **individu**.
- S'anomena **mostra** un subconjunt de la població elegit per a l'estudi estadístic. En l'estadística descriptiva, la mostra coincideix amb la població.
- S'anomena **observació** cadascuna de les dades de cadascun dels individus de la mostra.

En l'estadística descriptiva, agafem tota la població com a mostra. No obstant això, en la majoria de vegades la població és massa gran i no es pot estudiar per complet. És aleshores quan n'agafem una mostra amb les característiques que estudiarem per tal d'extraure'n conclusions sobre la població (inferència estadística).

Hi ha diverses tècniques de mostreig (sistemàtica, estratificada, per conglomerats...), encara que la més utilitzada és el mostreig aleatori, en el qual tots els individus de la població tenen la mateixa probabilitat de ser triats per a formar part de la mostra.

Per exemple, si volem determinar l'alçada mitjana de la província de València, triem a l'atzar una mostra de cinc-centes persones, n'anotem l'alçada i calculem la mitjana.

Una altra tècnica, com, per exemple, l'estratificada, consisteix a agafar a l'atzar cinc persones de cada municipi de la província.

Una vegada hàgem triat una mostra, el pas següent és recollir les dades de les característiques que volem estudiar. En estadística, aquestes característiques s'anomenen variables i es classifiquen en dos tipus:

- **Variables qualitatives:** són les que no es poden mesurar utilitzant nombres, sinó que representen qualitats (color d'ulls, ciutat de naixement, assignatura preferida, partit al qual vota...).
- **Variables quantitatives:** són les que es poden mesurar utilitzant nombres. D'altra banda, es divideixen en:
 - **Discretes:** es mesuren utilitzant nombres naturals (nombre de fills, vegades que ha anat al dentista, nombre de germans...).
 - **Contínues:** es mesuren utilitzant nombres reals (alçada, pes, concentració de glòbuls rojos, nivell de sucre en sang, distància recorreguda...).

4. La representació de les dades

Quan ja tenim recollides totes les observacions, és l'hora de representar-les o resumir-les. Les representarem mitjançant taules de freqüències i, posteriorment, mitjançant gràfics estadístics, i les resumirem mitjançant els paràmetres estadístics.

Depenent del tipus de variable, farem unes coses o unes altres:

Tipus de variable	Taula de freqüències	Paràmetres estadístics	Gràfics estadístics
Qualitativa	Es poden usar	Se'n poden usar solament alguns	S'utilitzen els mateixos
Quantitativa discreta	Es poden usar	Se'n poden usar solament alguns	
Quantitativa contínua	Es poden usar utilitzant intervals	Es poden usar tots	Se n'utilitzen uns de diferents

Les taules de freqüències

Són taules cada columna de les quals conté els valors de les magnituds següents per a cada observació:

- **Freqüència absoluta:** és el nombre de vegades que es repeteix cada observació i es representa per f_i .
- **Freqüència absoluta acumulada:** és la suma de totes les f_i fins a l'observació i es representa per F_i .
- **Freqüència relativa:** és defineix com a f_i/n i es representa per h_i .
- **Freqüència relativa acumulada:** és la suma de totes les h_i fins a l'observació i es representa per H_i .
- **Percentatge:** són els valors de h_i multiplicats per 100. Es representa per p_i .
- **Percentatge acumulat:** són els valors de H_i multiplicats per 100. Es representa per P_i .

Nota: les magnituds acumulades no tenen sentit per a les variables qualitatives.

Exemple: suposem una enquesta a 10 persones sobre el nombre de fills amb les observacions següents:

0 0 0 1 1 1 2 2 3 4

Observació	f_i	F_i	h_i	H_i	p_i	P_i
0	3	3	0,3	0,3	30 %	30 %
1	3	6	0,3	0,6	30 %	60 %
2	2	8	0,2	0,8	20 %	80 %
3	1	9	0,1	0,9	10 %	90 %
4	1	10	0,1	1	10 %	100 %

En el cas de les variables quantitatives contínues, per a poder representar les dades en taules de freqüències, primer cald agrupar-les en intervals.

Si tenim n dades, el nombre d'intervals dependrà de la fórmula:

$$k = [1 + \log_2 n]$$

I l'amplitud dels mateixos nombres, per la fórmula:

$$a = \left[\frac{rang}{k} \right]$$

En els dos casos, el símbol [...] significa que s'ha d'agafar la part entera per excés.

Nota: els intervals també s'utilitzen en les variables quantitatives discretes, quan el nombre d'observacions diferents és gran.

Exemple: suposem una enquesta a 32 persones sobre la superfície (en m²) de cada casa amb les observacions següents:

30, 32, 33, 33, 37, 43, 50, 52, 54, 60, 61, 67, 68, 69, 70, 76, 79, 87, 90, 93, 95, 96, 98, 100, 17, 108, 115, 123, 130, 138, 145

$$\text{Aleshores, } k = [1 + \log_2 32] = 6 \rightarrow a = \left[\frac{145-30}{6} \right] = [19,17] = 20$$

Interval	f_i	F_i	h_i	H_i	p_i	P_i
[30,50)	6	6	0,19	0,19	19 %	19 %
[50,70)	8	14	0,25	0,44	25 %	44 %
[70,90)	5	19	0,16	0,6	16 %	60 %
[90,110)	8	27	0,25	0,85	25 %	85 %
[110,130)	2	29	0,06	0,91	6 %	91 %
[130,150)	3	32	0,09	1	9 %	100 %

Els gràfics estadístics

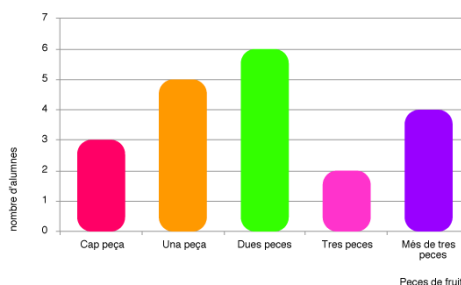
Els gràfics estadístics són la manera de representar visualment les dades recollides, cosa que en facilita la interpretació d'una manera intuïtiva.

Segons el tipus de variable utilitzarem uns gràfics o uns altres.

Variables qualitatives i quantitatives discretes

- **Diagrama de barres:** es representen a l'eix X els valors que pot tenir la variable d'estudi i, per a cadascun, s'hi dibuixa una barra d'alçada igual a la freqüència absoluta d'aquest valor.
- **Diagrama de sectors:** consisteix en un cercle dividit en sectors, on l'angle del sector corresponent al valor i de la variable es calcula en 360° . S'hi solen indicar les freqüències relatives o els percentatges.

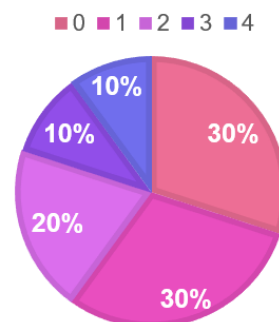
Peces de fruita que mengen els alumnes al dia



En l'exemple sobre l'enquesta del nombre de fills, tenim la taula següent:

Observació	h_i	$h_i \cdot 360^\circ$	p_i
0	0,3	108°	30 %
1	0,3	108°	30 %
2	0,2	72°	20 %
3	0,1	36°	10 %
4	0,1	36°	10 %

NOMBRE DE FILLS

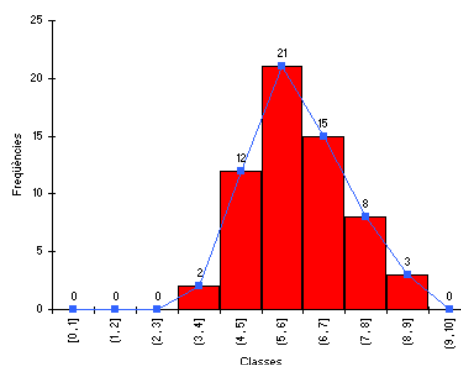


Variables quantitatives contínues

- **Histograma:** es representen a l'eix X els extrems dels intervals extrets de la taula de freqüències i, per a cada interval, s'hi dibuixa un rectangle d'alçada igual a la freqüència absoluta d'aquest interval. A diferència dels diagrames de barres, els rectangles es troben els uns al costat dels altres.

A vegades, s'hi afeg el **polígon de freqüències**, que consisteix a unir els centres dels segments superiors dels rectangles.

Notes de la prova de selectivitat



Altres tipus de gràfics:

- **Diagrames de caixes i bigots**
- **Pictogrames**
- **Piràmides de població**
- **Climogrames**
- **Cartogrames**

5. El resum de les dades: paràmetres estadístics

Els paràmetres estadístics són nombres que es calculen mitjançant operacions fetes amb les dades, que serveixen per a resumir la informació que aporten. Segons l'objectiu, es divideixen en mesures de posició, de dispersió o de forma.

Mesures de posició

Indiquen al voltant de quina posició es troben les dades. Són:

- **La mitjana:** es calcula sumant totes les observacions i dividint la suma entre el nombre d'observacions.
- **La moda:** és el valor que més vegades es repeteix. Pot ser més d'un valor.
- **Els quartils:** són els valors que deixen darrere seu un percentatge concret de les dades. Si deixen darrere un 25%, 50% o 75% de les dades, s'anomenen quartil 1, quartil 2 o quartil 3, respectivament.
- **La mediana:** és el quartil 2.

Mesures de dispersió

Indiquen com de diferents són les dades entre si. Són:

- **El rang:** és la diferència entre el valor màxim i el mínim.
- **La variància:** es calcula amb una fórmula que NO utilitzarem.
- **La desviació típica:** és l'arrel quadrada de la variància.
- **El coeficient de variació:** és el quocient entre la desviació típica i la mitjana. Serveix per a comparar la dispersió de magnituds que es troben en escales diferents.

Mesures de forma

Indiquen quin aspecte té el gràfic de la distribució de les dades. Són:

- **El coeficient d'asimetria:** indica com de simètric és el gràfic.
- **El coeficient de curtosi o aplatament:** indica com de pla és el gràfic.

Utilitzant l'exemple del nombre de fills:

Observació	f_i
0	3
1	3
2	2
3	1
4	1

Mitjana: $\bar{x} = \frac{0+0+0+1+1+1+2+2+3+4}{10} = 1,4$

Moda: 0 i 1.

Quartil 1: 0; quartil 2 (mediana): 1; quartil 3: 2

6. La interpretació de les dades

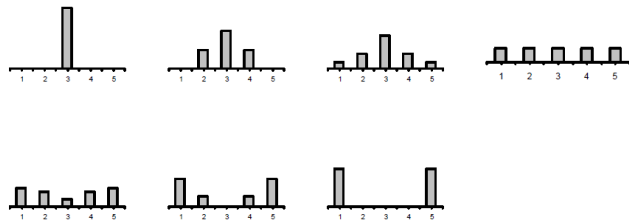
Interpretar les dades vol dir descriure'n el comportament i interpretar-lo segons el context en el qual estem. Per a fer-ne una bona interpretació, hem de tenir en compte els factors següents:

- El valor de la mitjana: sempre ens indicarà al voltant de quin valor es troben les dades.
- El valor de la variància/desviació típica: ens indicarà com de disperses estan les dades.

Compte! Quan el valor de la variància és gran, la mitjana perd valor i agafa molt més valor la mediana.

No obstant això, nosaltres utilitzarem els gràfics per a interpretar les dades i relacionar-les amb el seu context.

Per exemple, totes aquestes distribucions tenen la mateixa mitjana, però la desviació típica va augmentant. Quan hi haja valors molt dispersos, hem de basar les nostres conclusions en la mediana i no en la mitjana.



7. Tendenciositat i errades en estadística

Moltes vegades, els resultats estadístics –en particular, els gràfics– es manipulen per tal d’obtenir les interpretacions desitjades. És important saber quines són les manipulacions més freqüents i saber com s’han d’interpretar críticament els gràfics que ens presenten des dels mitjans de comunicació, les xarxes socials etc.

1. **La mitjana no és representativa:** per exemple, la mitjana dels sous d’un país no és representa si hi ha un nombre reduït de persones que concentren la major part de la riquesa.
2. **Escala i mida dels gràfics:** modificar-los pot donar lloc a interpretacions diferents.
3. **Línies de temps:** si no s’utilitza un increment uniforme dels salts de temps en l’eix X, els gràfics seran confusos.
4. **Interpretació dels percentatges:** si un valor varia d’un 5% a un 10%, no ha pujat un 5%, sinó un 100%.

EXERCICIS I PROBLEMES D'ESTADÍSTICA

1. Indica si cadascuna de les variables estadístiques següents és quantitativa (contínua o discreta) o qualitativa:
 - a) Equip de futbol preferit.
 - b) Edat.
 - c) Lloc de naixement.
 - d) Nombre d'assignatures suspeses en la primera avaluació.
 - e) Alçària dels exemplars de girafes del Bioparc.
 - f) Assignatures aprovades en la segona avaluació.
 - g) Nombre d'habitatges que hi ha al teu carrer.
 - h) Temps que tardes a recórrer els 100 m llisos.
2. Reconeix, en cadascuna de les situacions següents, la població, la mostra i els individus.
 - a) Una fàbrica de bombetes vol fer un control de qualitat. Per això, analitza una bombeta de cada caixa de 1.000.
 - b) Una farmacèutica visita un metge de cada hospital per ensenyar-li els nous productes.
 - c) Un agricultor recull una taronja de cadascun dels arbres del camp per comprovar la quantitat de suc que en pot obtenir.
 - d) Agafe una llepolia de cada caixa de la botiga.
 - e) Es volen estudiar les migracions anuals de les balenes de l'oceà índic. Amb aquesta finalitat, es col·loquen radiotransmissors a 30 d'aquests cetacis.
 - f) L'ajuntament vol saber què opina la gent major sobre les noves iniciatives. Amb aquesta finalitat, entrevista 100 persones triades a l'atzar.
 - g) Per saber quina és l'opinió d'una secció nova d'una revista, s'ha preguntat telefònicament a 50 lectors.

3. Es pregunta a 40 estudiants què prefereixen fer en el seu temps lliure: esport (E), llegir (L), veure la tele (T), eixir amb els amics (A), jugar a videojocs (V). Els resultats són:

- | | | |
|--|-------------------------|-------------------------|
| a) Elabora la taula de freqüències corresponent. | AAEAV
LVAAL
EAAVA | ALAET
EEAVL
EVEEV |
| b) Quins diagrames es poden utilitzar? | VTAAE | LETTL |
| c) Fes un diagrama de barres. | | |

4. S'ha calculat el nombre de llibres que han llegit 30 estudiants d'un curs durant les vacances d'estiu. Aquests en són els resultats:

- | | | |
|--|------------------------|------------------------|
| a) Elabora la taula de freqüències corresponent. | 1 3 1 0 4
0 1 1 2 3 | 4 1 0 2 3
2 3 1 1 6 |
| b) Quins diagrames es poden utilitzar? | 1 1 2 1 2 | 0 0 2 1 4 |
| c) Fes un diagrama de sectors. | | |

5. En la planta de maternitat de l'hospital La Fe s'han mesurat els pesos (en kg) de 50 bebès:

2,8 3,2 3,8 2,5 2,7	3,7 1,9 2,6 3,5 2,3
3,3 2,6 1,8 3,3 2,9	2,1 3,4 2,8 3,1 3,9
2,9 3,5 3,0 3,1 2,2	3,4 2,5 1,9 3,0 2,9
2,4 3,4 2,0 2,6 3,1	2,3 3,5 2,9 3,0 2,7
2,9 2,8 2,7 3,1 3,0	3,1 2,8 2,6 2,9 3,3

- a) Construeix una taula de freqüències.
- b) Quins tipus de gràfics podem fer?
- c) Fes un histograma amb un polígon de freqüències.
6. Al mateix hospital s'ha mesurat el nombre de pulsacions per minut dels pacients de l'àrea d'oncologia i s'han obtingut les dades següents:

87 85 61 51 64	75 80 70 69 82
80 79 82 74 92	76 72 73 63 65
67 71 88 76 68	73 70 76 71 86

- a) Construeix una taula de freqüències.
 - b) Quins tipus de gràfics podem fer?
 - c) Fes un histograma amb un polígon de freqüències.
7. Calcula, si pot ser, els criteris següents dels exercicis 3, 4, 5 i 6,:
- a) La moda
 - b) La mitjana
 - c) La mediana
 - d) Q1, Q2 i Q3
 - e) El rang
8. Amb l'ajuda del programa informàtic Excel:
- a) Repeteix els gràfics dels exercicis 3, 4, 5 i 6.
 - b) Calcula la variància i la desviació típica dels exercicis.
 - c) Interpreta els resultats dels exercicis.
9. Explica per què són tendenciosos els gràfics següents:



TEMA 3: PROBABILITAT

La probabilitat és la joia de la corona de les matemàtiques, la branca més “màgica”, ja que és l’única capaç de predir el futur. De vegades ens trobem problemes amb una solució que no podem determinar amb total seguretat. Aquests problemes o experiments s’anomenen aleatoris. I la probabilitat és l’encarregada d’esbrinar quines possibles solucions poden tenir aquests problemes i amb quins graus de certesa. Així doncs, la probabilitat té moltes aplicacions en les situacions de la vida on volem saber què passarà en el futur, com, per exemple, en les previsions meteorològiques, en els moviments borsaris o en els estudis sociològics.

Els continguts de què consta aquest tema són els següents:

1. Definicions bàsiques
2. Probabilitat. Propietats de la probabilitat
3. Llei de Laplace
4. Dependència i independència
5. Experiments compostos dependents. Probabilitat condicionada. Diagrama en arbre
6. Taules de contingència
7. Quan la probabilitat ajuda l’estadística: inferència

Comencem!

1. Definicions bàsiques

Probabilitat: branca de les matemàtiques que estudia els processos aleatoris; és a dir, els processos en què no es coneix amb certesa el resultat *a priori*.

En el món científic hi ha dos tipus d’experiments: els deterministes, en què es coneix el resultat abans de posar-los en pràctica; i els aleatoris, en què no es coneix el resultat ja que hi influeix l’atzar. La probabilitat s’ocupa d’aquests últims.

Definim:

- **Succés:** cadascun dels possibles resultats d’un experiment aleatori. Poden ser elementals (simples) o compostos. S’escriuen amb lletres majúscules (A, B, C, D...).
- **Espai mostral:** el conjunt de tots els successos elementals possibles d’un experiment. Es representa amb la lletra E .
- **Succés impossible:** el que no passa mai. Es representa amb $\emptyset$.

- **Unió de successos ($A \cup B$):** succés format per tots els elements de A i de B .
- **Intersecció de successos ($A \cap B$):** succés format per tots els elements comuns de A i B .
- **Successos incompatibles:** quan la intersecció és buida.
- **Succés contrari o complementari ($\bar{A}$, A' , A^c):** format per tots els elements de E que no es troben en A .

Notes: $\bar{E} = \emptyset$; $\bar{\emptyset} = E$; $A \cap \bar{A} = \emptyset$; $A \cup \bar{A} = E$.

Exemple:

L'experiment és *tirar un dau i anotar la cara que ix*:

- L'espai mostral és $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Els successos elementals són $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$ i $\{6\}$.
- Definim els successos compostos $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6\}$ i $C = \{1, 3\}$, aleshores

$$A \cup B = E; \quad A \cap B = \emptyset; \quad \bar{A} = B;$$

$$A \cup C = A; \quad A \cap C = C; \quad \bar{B} = A;$$

$$B \cup C = \{1, 3, 4, 5, 6\}; \quad B \cap C = \emptyset; \quad \bar{C} = \{2, 4, 5, 6\}$$

2. Probabilitat. Propietats de la probabilitat

Probabilitat d'un succés: indica el grau de confiança que podem tenir que el succés tinga lloc. Es representa amb la lletra $P(S)$ i s'expressa mitjançant un nombre entre 0 i 1.

Propietats de la probabilitat:

1. $P(\emptyset) = 0$.
2. $P(E) = 1$.
3. $0 < P(A) < 1$.
4. Si $E = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ aleshores $P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = 1$.
5. La probabilitat d'un succés compost és la suma de la probabilitat dels seus successos elementals.
6. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

3. Llei de Laplace

Llei dels grans nombres: si fem un experiment aleatori reiteradament, la freqüència relativa d'un determinat succés, h_A , s'aproximarà eventualment a la probabilitat d'aquest succés, $P(A)$.

Llei de Laplace: La probabilitat que, en un experiment aleatori on tots els successos tenen la mateixa probabilitat d'ocórrer, tinga lloc el succés A es calcula com:

$$P(A) = \frac{\text{nombre de casos favorables a } A}{\text{nombre de casos totals}}$$

4. Dependència i independència

Els experiments que consisteixen a extraure objectes d'un contenidor poden ser:

- **Amb reemplaçament:** si quan anem a fer la segona extracció tornem a introduir la primera al contenidor, de manera que el nombre total d'elements no canvie.
- **Sense reemplaçament:** si quan anem a fer la segona extracció no tornem a introduir la primera al contenidor, de manera que el nombre total d'elements disminuisca en una unitat per cada extracció.

Els experiments aleatoris poden ser:

- **Independents:** quan el resultat de cada experiment no influeix en el següent. Per exemple: llançar un dau. Les extraccions amb reemplaçament són experiments independents.
- **Dependents:** quan el resultat de cada experiment influeix en el següent. Per exemple: traure una carta d'una baralla sense reemplaçament, agafar una boleta d'una bossa sense reemplaçament etc.

S'anomena **experiment compost** un experiment que està format per la realització successiva de diferents experiments simples. Per exemple: llançar un dau tres vegades, agafar dues cartes (l'una darrere de l'altra) d'una baralla, extraure tres boletes d'una urna etc.

Si els experiments simples que formen un experiment compost són independents entre si, la probabilitat de l'experiment compost és el producte de les probabilitats dels experiments simples. Per exemple:

Extraiem tres cartes d'una baralla de 48 cartes amb reemplaçament. Quina és la probabilitat d'obtenir dues espases i un rei?

$$P(E_1 \cap E_2 \cap R) = P(E_1) \cdot P(E_2) \cdot P(R) = \frac{12}{48} \cdot \frac{12}{48} \cdot \frac{4}{48} = 0,0052.$$

5. Experiments compostos dependents

Si els experiments simples que conformen un experiment compost són dependents, diem que el segon està condicionat pel primer, ja que la probabilitat depèn del que haja ocorregut amb el primer experiment.

S'anomena **probabilitat condicionada** de B condicionat per A la probabilitat que tinga lloc B , tenint en compte el que ha ocorregut amb A . S'escriu $P(B/A)$.

Per exemple:

Extraiem tres cartes d'una baralla de 48 cartes sense reemplaçament. Quina és la probabilitat d'obtenir dues espases?

$$\text{Està clar que } P(E_1) = \frac{12}{48}.$$

Ara bé, com que hem extret de la baralla una espasa i no l'hem tornada, queden 11 espases i un total de 47 cartes, aleshores:

$$P(E_2 | E_1) = \frac{11}{47} \quad \text{per tant, } P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2 | E_1) = \frac{12}{48} \cdot \frac{11}{47} = 0,0585.$$

Moltes vegades, per a resoldre problemes d'experiments compostos dependents utilitzem **diagrames en arbre**.

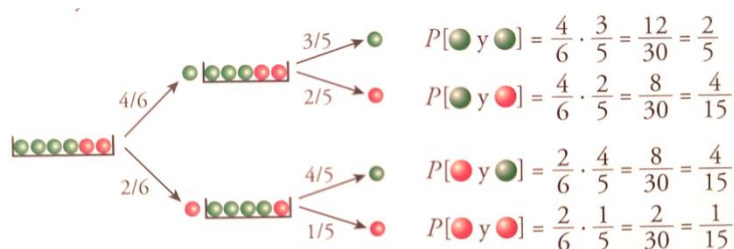
Exemple:

D'una urna amb quatre boles verdes i dues de roges, n'extraiem dues boles. Calcula la probabilitat que:

a) Les dues siguin verdes.

b) La primera siga roja, i la segona, verda.

c) Que n'isca una de cada color.



6. Taules de contingència

Quan en un problema de probabilitat s'estudien probabilitats associades a dues característiques d'uns individus (curs escolar i sexe, edat i assignatura, ciutat i partit polític, etc.) és molt freqüent i útil usar taules de contingència.

Aquestes taules recopilen tota la informació necessària per tal d'obtenir les probabilitats que es busquen.

Per exemple:

En un centre docent hi ha 400 estudiants d'ESO (120 de 1r, 100 de 2n, 100 de 3r i 80 de 4t). Cadascun d'ells pot inscriure's a futbol, al cor o a cap d'aquestes activitats. Pel que fa al futbol, n'hi ha 12 d'inscrits de 1r, 15 de 2n, 21 de 3r i 24 de 4t. Pel que fa al cor, hi ha 36, 40, 44 i 40 alumnes inscrits respectivament. La resta no fa res. Calcula:

- La probabilitat que siga un alumne de 1r.
- La probabilitat que no estiga inscrit en cap activitat.
- La probabilitat que siga de primer i que cante al cor.
- La probabilitat que jugue a futbol i siga de 4t.
- La probabilitat que jugue a futbol, sabent que és de 4t.
- La probabilitat que siga de 2n, sabent que està apuntat al cor.

	COR	FUTBOL	RES	TOTAL
1r	12	36	72	120
2n	15	40	45	100
3r	21	44	35	100
4t	24	40	16	80
TOTAL	72	160	168	400

7. Quan la probabilitat ajuda l'estadística: inferència matemàtica

Finalment, llegirem alguns problemes d'inferència matemàtica, la branca que naix de la unió de l'estadística i la probabilitat, i en la qual s'utilitzen dades d'una mostra d'una població per a extraure conclusions sobre tota la població.

- Un metge investigador de l'Institut de Càncer d'una escola de Medicina desenvolupa un estudi per saber si una nova droga prolonga la vida en pacients amb càncer de gola en l'últim període. Després d'estudiar 100 individus a qui va administrar la droga, troba una prolongació mitjana de vida $\bar{x} = 4,6$ mesos. Si sap que en la població la desviació típica és $\sigma = 2$ mesos, pot calcular un interval de confiança al 90% per a la prolongació mitjana de vida en la població. Quina grandària hauria de tenir la mostra necessària per a

estimar la mitjana de la població amb una aproximació de mig mes al 95% de confiança? I al 90%? I al 99%?

2. Una companyia farmacèutica sosté que el seu remei contra el mal de cap lleva el dolor en 14 minuts en els casos corrents. Amb un determinat escepticisme sobre aquest tema, una clínica selecciona 25 pacients amb mal de cap i els demana que prenguen una d'aquestes píndoles quan tinguen dolor i que registren el temps (en minuts) que tarda a desaparèixer. El resultat de l'estudi és $\bar{x} = 19$, $s = 7$ minuts. Aquests resultats confirmen o desmenteixen el que afirma la companyia farmacèutica amb un nivell de rellevància $\alpha = 0.05$? I per a $\alpha = 0.10$? I per a $\alpha = 0.01$?
3. Un investigador està interessat a estudiar la influència d'una nova dieta per a gallines en la quantitat de colesterol dels ous que ponen. Se sap per experiència que amb una dieta estàndard la quantitat mitjana de colesterol en els ous és de 270 mg. Després d'utilitzar la dieta durant un temps, s'obté una mostra aleatòria de 18 ous i se'n mesura el contingut en colesterol, en mg, amb els valors següents:

280, 241, 259, 265, 260, 266, 261, 255, 272, 260, 260, 264, 242, 218, 271,
281, 276, 266

Si suposem que la quantitat de colesterol per ou segueix una distribució normal:

- a) Determina un interval de confiança al 99% per a la quantitat mitjana de colesterol en els ous amb la nova dieta.
- b) Planteja un contrast d'hipòtesis per a contestar aquesta pregunta: La nova dieta redueix el contingut mitjà de colesterol?
- c) Resol el contrast i extrau-ne les conclusions oportunes.

EL SORTEIG QUE ENS UNEIX

Anàlisi probabilística i estadística del sorteig extraordinari de Nadal

1. Esbrina en què consisteix el sorteig extraordinari de Nadal (d'Espanya): quants números hi juguen, quins premis hi ha, quina és la mecànica del sorteig, etc. Extrau-ne la informació del PDF que hi ha a l'Aula Virtual.
2. Elabora una taula amb la qual calcules la probabilitat que tenen de guanyar els diferents premis del sorteig (incloent-hi els premis menors, les aproximacions i el reintegrament).
3. Imagina que has anat a l'administració del teu barri a comprar un dècim. Calcula la probabilitat en els casos següents:
 - a) Que perdes tots els diners que t'has gastat.
 - b) Que recuperes exactament els mateixos diners que t'has gastat.
 - c) Que guanyes diners.
4. Repeteix els exercicis 1, 2 i 3, però ara analitza el sorteig extraordinari de Reis. Què convé més, jugar en el sorteig de Nadal o en el de Reis?
5. A continuació, pel que fa al sorteig de Nadal:
 - a) Representa les vegades que ha tocat la Grossa en cada comunitat autònoma i els diners que ha invertit en loteria cada comunitat. Què hi observes? Com ho interpretes?
 - b) Representa les terminacions o els començaments dels primers premis que han tocat al llarg de la història. Què hi observes? Com ho interpretes?
 - c) Tenint en compte els apartats anteriors, explica per què aquestes frases no tenen sentit des d'un punt de vista estadístic: "Me'n vaig a Manises a comprar el dècim, que allà sempre toca."; "No agafes aquest número, que és molt lleig."; "Ací, a Vilarrasa, no toca mai res.", "Hi he jugat tota la vida amb aquest número, ja m'ha de tocar."

7. Fes una investigació amb les persones del teu entorn (amics, familiars, professors, etc.) i pregunta'ls sobre els seus hàbits de compra de dècims de loteria de Nadal. Recull dades d'almenys 30 persones. Has de tenir en compte aspectes com aquests:
 - a) Quantitat de dècims.
 - b) Diners invertits en loteria de Nadal.
 - c) Diners guanyats/perduts.
 - d) Edat.
 - e) Home/dona.
 - f) Si compra sempre el mateix número o no.
 - g) Si compra dècims sempre a la mateixa administració o no.
 - h) Si en compra al seu lloc de residència o no.
 - i) En quin mes en compra (d'agost a desembre).
8. Fes una anàlisi estadística completa sobre les dades que has recollit, en què diferencies les variables quantitatives (analitzant mesures de centralització i dispersió) i qualitatives (elaborant taules de freqüència).
9. Elabora, almenys, dos gràfics relacionats amb les variables qualitatives i, almenys, dos més relacionats amb les variables quantitatives.
10. Extrau conclusions dels gràfics i comenta els resultats de l'anàlisi, reflexionant sobre els aspectes més rellevants.

Utilitza el programa Excel per a fer els càlculs, les taules i els gràfics. S'ha de lliurar tot en un únic PDF en la tasca corresponent de l'Aula Virtual.

I recorda: el més important no són les probabilitats o els números, sinó el goig de compartir la il·lusió amb la gent que estimes. Aquest és el premi més gran: compartir-lo.



TEMA 4: GEOMETRIA

Encetem ara un dels blocs més interessants i visuals de les matemàtiques: la geometria. Aquesta branca potser és la que més recordem de quan fèiem matemàtiques a l'escola. Els quadrats, els cercles, els cubs... Tothom té una idea intuïtiva de què són cadascuna d'aquestes formes. No obstant això, és convenient recordar als estudiants les propietats que caracteritzen cadascun dels llocs geomètrics, tant en el pla com en l'espai. Aquest tema es construeix des d'allò més simple: el punt. I, a poc a poc, explicarem totes les figures i cossos geomètrics que cal dominar de cara a l'ensenyament de Primària.

Els continguts de què consta aquest tema són els següents:

1. Punts i línies
 1. Posicions relatives de les rectes en el pla
 2. Una recta especial: la mediatriu
2. Angles
 1. Elements d'un angle
 2. Tipus d'angles
 3. Posicions relatives d'angles que comparteixen un vèrtex
 4. Angles les amplituds dels quals tenen una suma particular
 5. Una altra recta especial: la bisectriu
3. Classificació general de figures planes
4. Polígons
 1. Elements d'un polígon
 2. Tipus de polígons segons els costats
 3. Tipus de polígons segons els angles interns
 4. Tipus de polígons segons el nombre de costats
 5. Tipus de triangles segons els costats
 6. Tipus de triangles segons els angles
5. Circumferència i cercle
 1. Elements de la circumferència i del cercle
 2. Superfícies circulars
 3. Posicions relatives d'una recta i d'una circumferència
6. Perímetre i àrea de figures planes
 1. Perímetre de polígons
 2. Àrea de polígons
 3. Perímetre de la circumferència i longitud del seu arc
 4. Àrea de les figures circulars
7. Classificació general de figures en l'espai: cossos geomètrics
8. Poliedres
 1. Classificació de poliedres
 2. Els cinc poliedres regulars o sòlids platònics
 3. Elements d'un prisma
 4. Tipus de prismes segons els angles
7. Tipus de quadrilàters convexos
8. Elements d'un polígon regular

- | | |
|--|---|
| <ul style="list-style-type: none"> 5. Tipus de prismes segons les bases 6. Elements d'una piràmide 7. Tipus de piràmides segons els angles 8. Tipus de piràmides segons la base 9. No poliedres <ul style="list-style-type: none"> 1. L'esfera 2. El cilindre 3. Elements del cilindre 4. Tipus de cilindres segons els angles 5. El con 6. Elements del con | <ul style="list-style-type: none"> 7. Tipus de cons segons els angles 10. Àrea i volum de cossos geomètrics <ul style="list-style-type: none"> 1. Àrea dels poliedres 2. Àrea dels cossos redons 3. Volum dels poliedres 4. Volum dels cossos redons 11. Semblança 12. Teoremes de Tales i Pitàgores <ul style="list-style-type: none"> 1. Teorema de Tales 2. Teorema de Pitàgores 13. El pla cartesià 14. Moviments en el pla |
|--|---|

Comencem!

1. Punts i línies

Vegem les definicions més bàsiques:

Punt: és l'element mínim amb sentit geomètric. No té dimensions, longitud, àrea ni volum. És simplement un element de referència.

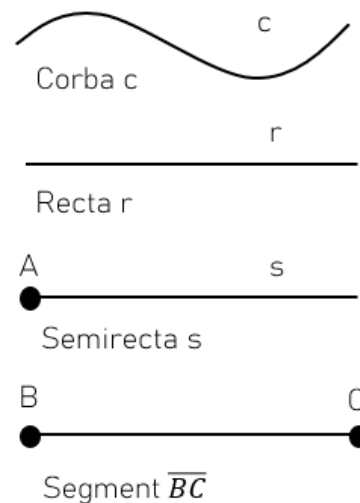
Línia: és una successió infinita de punts. Pot ser recta o corba.

Corba: és una línia que té curvatura.

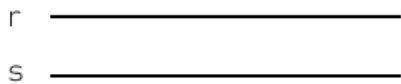
Recta: és una línia sense curvatura. Infinita pels dos costats.

Semirecta: és una línia recta que per un dels seus costats està limitada per un punt.

Segment: és una línia recta limitada per un punt a cadascun dels seus costats. Té longitud.



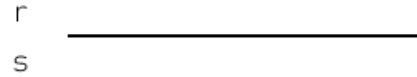
Posicions relatives de les rectes al pla



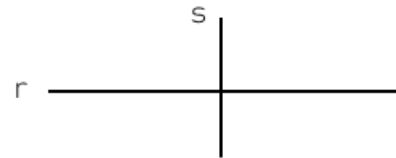
Paral·leles : mateixa direcció i cap punt en comú



Secants : diferent direcció i un punt en comú



Coincidents : mateixa direcció i tots els punts en comú



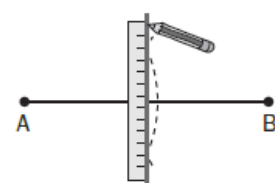
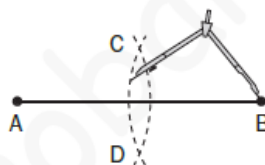
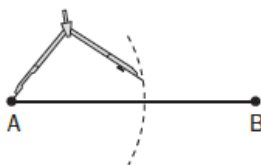
Perpendiculars : són secants que formen quatre angles rectes.

Una recta especial: la mediatriu

Mediatriu: és la recta perpendicular a un segment que passa pel seu punt mitjà.

Com es dibuixa?

- S'obri el compàs amb una obertura més gran que la meitat del segment AB.
- Es traça un arc amb el centre en el punt A.
- Amb la mateixa obertura, es traça un altre arc amb el centre en el punt B.
- Els arcs es tallen en dos punts: C i D.
- Es traça una línia que passe pels punts C i D. Aquesta és la mediatriu del segment.



2. Angles

Angle: part del pla compresa entre dues semirectes que parteixen del mateix punt, entre dues rectes secants o entre dos segments que parteixen del mateix punt.

Elements d'un angle

Vèrtex: és el punt comú dels segments o de les semirectes que formen l'angle; o el punt de tall de les rectes que formen l'angle.

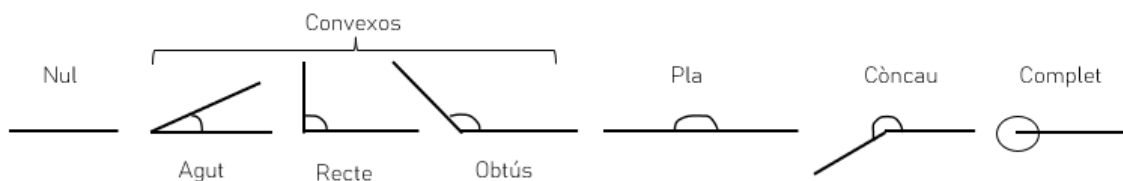
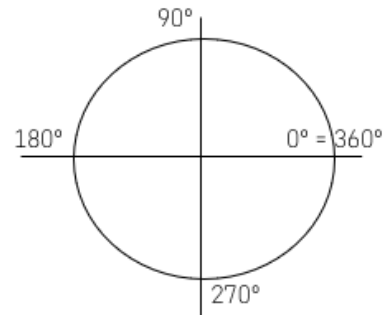
Costats: cadascun dels dos segments, semirectes o trossos de rectes que delimiten l'angle.

Els vèrtexs es representen amb lletres majúscules; els costats, amb minúscules, i els angles, amb lletres majúscules i accent circumflex.

Tipus d'angles

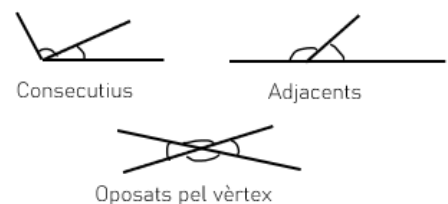
Els angles es classifiquen segons l'amplitud, que es mesura en graus sexagesimals. Poden ser:

- **Nuls:** amb una amplitud igual a 0° .
- **Convexos:** amb una amplitud més gran que 0° , però inferior a 180° . Poden ser:
 - **Aguts:** amb una amplitud més gran que 0° però inferior a 90° .
 - **Rectes:** amb una amplitud igual a 90° .
 - **Obtusos:** amb amplitud més gran que 90° , però inferior a 180° .
- **Plans:** amb una amplitud igual a 180° .
- **Còncaus:** amb una amplitud més gran que 180° , però inferior a 360° .
- **Complets:** amb una amplitud igual a 360° .



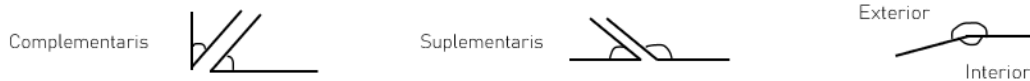
Posicions relatives d'angles que comparteixen un vèrtex

- **Consecutius:** tenen en comú el vèrtex i un costat.
- **Adjacents:** són consecutius que tenen el costat no comú sobre la mateixa recta. Sempre són suplementaris.
- **Oposats pel vèrtex:** tenen en comú el vèrtex però els costats no. Tenen la mateixa amplitud.



Angles les amplituds dels quals tenen una suma particular

- **Complementaris:** les seues amplituds sumen 90° .
- **Suplementaris:** les seues amplituds sumen 180° .
- Si són consecutius i sumen 360° , el més menut s'anomena **angle interior**, i el més gran, **angle exterior**.

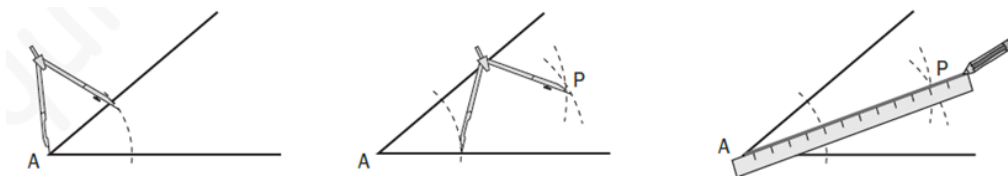


Una altra recta especial: la bisectriu

Bisectriu: és la semirecta que passa pel vèrtex d'un angle i el divideix en dues parts amb la mateixa amplitud.

Com es dibuixa?

- Es traça un arc amb el centre en el vèrtex de l'angle (que talle els costats).
- Amb la mateixa obertura del compàs, es tracen dos arcs amb els centres en els punts de tall. Aquests arcs es tallen en un punt P.
- Es traça una semirecta amb l'origen en el vèrtex de l'angle i que passe pel punt P.
- Aquesta és la bisectriu de l'angle.



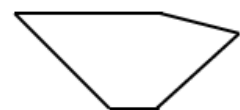
3. Classificació general de figures planes

Abans de veure la classificació general, cal recordar algunes definicions:

- **Línia poligonal:** és una línia formada per diversos segments.
- **Línia mixta:** és una línia formada per segments i per línies corbes.

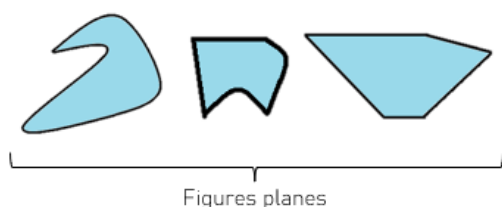


Línia poligonal oberta



Línia poligonal tancada

- **Figura plana:** és qualsevol línia corba tancada, qualsevol línia poligonal tancada o qualsevol línia mixta tancada, juntament amb el seu interior.



Línia corba oberta



Línia corba tancada

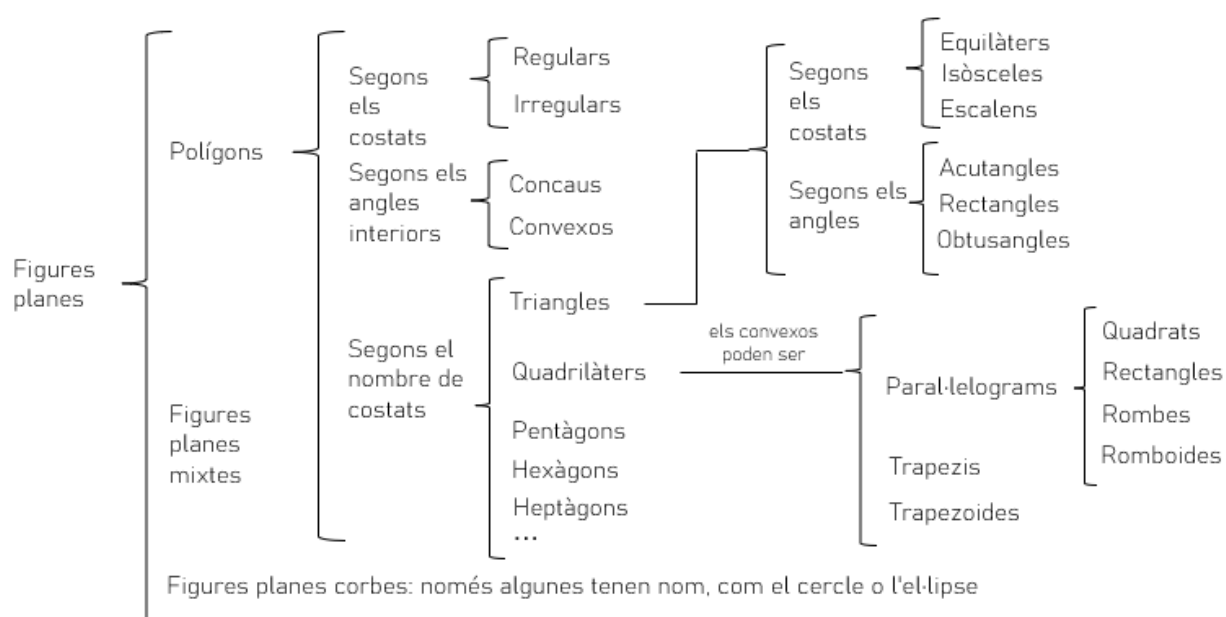


Línia mixta oberta



Línia mixta tancada

A continuació hi ha una vista panoràmica de com es classifiquen les figures en el pla:



4. Polígons

Polígon: qualsevol figura plana formada per una línia poligonal tancada i el seu interior.

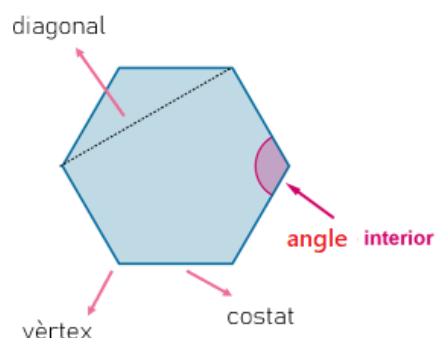
Elements d'un polígon

Costats: els segments que formen la línia poligonal.

Vèrtexs: punts on s'uneixen els costats.

Angles interiors: angles interiors formats pels costats.

Diagonals: segments que uneixen dos vèrtexs no consecutius.



Tipus de polígons segons els costats

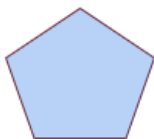
Regulars : tenen tots els costats iguals (mateixa longitud).



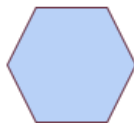
Triangle
equilàter



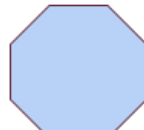
Quadrilàter
regular (quadrat)



Pentàgon
regular



Hexàgon
regular



Octògon regular



Decàgon
regular

Irregulars: no tenen tots els costats iguals.



Triangle
isòsceles



Triangle
escalé



Quadrilàter
irregular (rectangle)



Quadrilàter
irregular (romboide)



Heptàgon
irregular

Tipus de polígons segons els angles interns

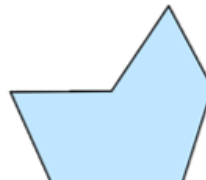
Còncaus : tenen algun angle interior amb amplitud major a 180° .



Heptàgon
irregular
còncau



Decàgon
regular
còncau



Hexàgon
irregular
còncau



Quadrilàter
irregular
còncau

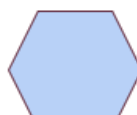
Convexos: tots els angles tenen amplitud menor a 180° .



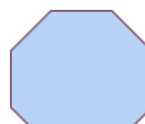
Triangle
isòsceles



Quadrilàter
irregular convex
(trapezi)



Hexàgon
regular
convex



Octògon regular
convex



Quadrilàter
irregular convex
(rectangle)

Tipus de polígons segons el nombre de costats

Triangles : 3 costats.

Quadrilàters: 4 costats.

Pentàgons: 5 costats.

Hexàgons: 6 costats.

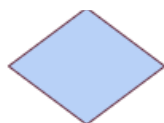
Heptàgons: 7 costats.

Octògons: 8 costats.

Enneàgons: 9 costats

Decàgons: 10 costats

Undecàgons: 11 costats



Quadrilàter regular
convex (rombe)

Dodecàgons: 12 costats.

Tridecàgons : 13 costats.

Tetradecàgons: 14 costats.

Pentadecàgons: 15 costats.

Hexadecàgons : 16 costats.

Heptadecàgons: 17 costats.

Octadecàgons : 18 costats.

Enadecàgons : 19 costats.

Isodecàgons: 20 costats.

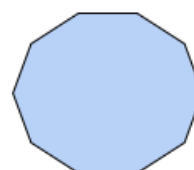
I molts més noms rars...



Quadrilàter irregular
còncau



Tetradecàgon
irregular
còncau



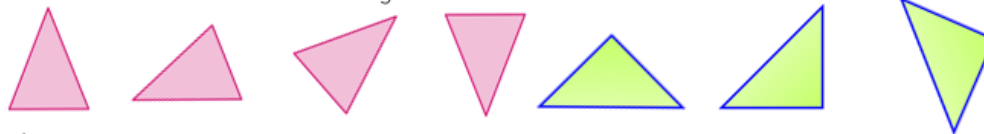
Decàgon regular convex

Tipus de triangles segons els costats

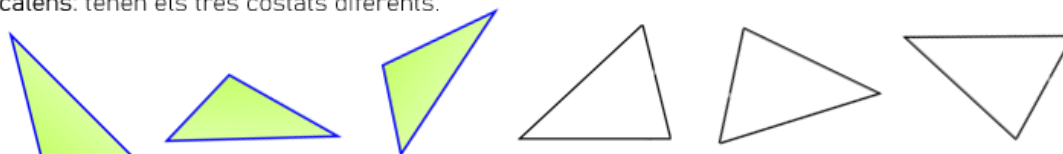
Equilàters : tenen els tres costats iguals (mateixa longitud).



Isòsceles: tenen només dos costats iguals.

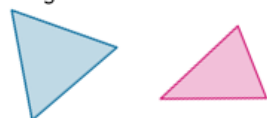


Escalens: tenen els tres costats diferents.

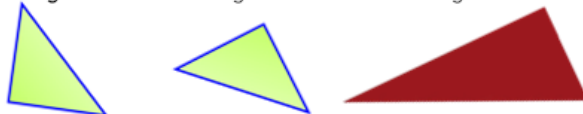


Tipus de triangles segons els angles

Acutangles : tenen els tres angles aguts.



Rectangles: tenen un angle recte i la resta aguts.



Obtusangles: tenen un angle obtús i la resta aguts.



Tipus de quadrilàters convexos

- Paral·lelograms : tenen els costats oposats paral·lels.
 - Quadrats: són regulars i tenen els angles interiors iguals.
 - Rectangles: tenen els costats oposats iguals i els angles interiors iguals.
 - Rombes: són regulars i tenen els angles interiors oposats iguals.
 - Romboides: tenen els costats oposats iguals i els angles interiors oposats iguals.
- Trapezis: tenen només un parell de costats paral·lels que s'anomenen base major i base menor.
- Trapezoides: no tenen cap costat paral·lel.



Quadrilàter irregular convex (paral·lelogram rectangle)



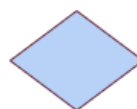
Quadrilàter regular convex (paral·lelogram quadrat)



Quadrilàter irregular convex (trapezi)



Quadrilàter irregular convex (paral·lelogram romboide)



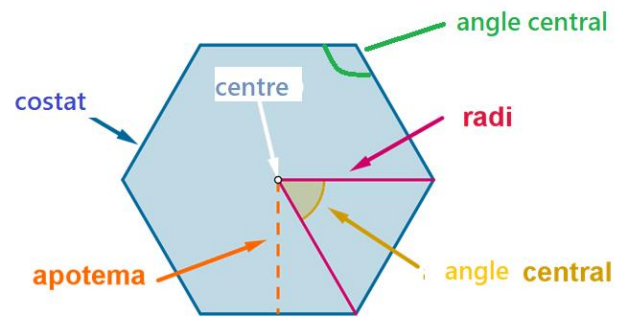
Quadrilàter regular convex (paral·lelogram rombe)



Quadrilàter irregular convex (trapezoide)

Elements d'un polígon regular

- **Costat:** cadascun dels costats del polígon.
- **Vèrtex:** cadascun dels vèrtexs del polígon.
- **Radi:** segment que uneix un vèrtex amb el centre.
- **Apotema:** segment que uneix el centre d'un costat amb el centre.
- **Angle interior:** angle entre dos costats.
- **Angle central:** angle entre dos radis.
- **Centre:** punt equidistant entre tots els vèrtexs.



5. Circumferència i cercle

Circumferència: és una línia corba tancada, els punts de la qual estan tots a la mateixa distància d'un punt anomenat centre.

Cercle: és una figura plana corba que està tancada per una circumferència.

Elements de la circumferència i del cercle

Centre: punt del qual equidisten tots els punts de la circumferència.

Radi: segment que uneix el centre amb un punt de la circumferència.

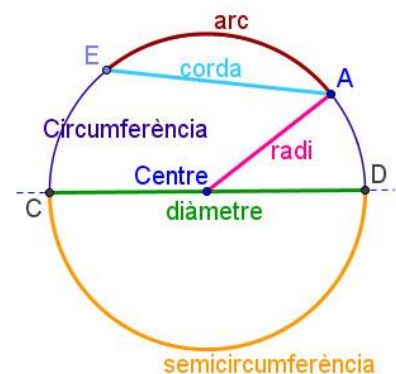
Corda: segment que uneix dos punts de la circumferència.

Diàmetre: corda que passa pel centre.

Arc: part de la circumferència compresa entre dos punts d'aquesta.

Semicircumferència: arc igual a mitja circumferència.

Semicercle: mig cercle.



Superfícies circulars

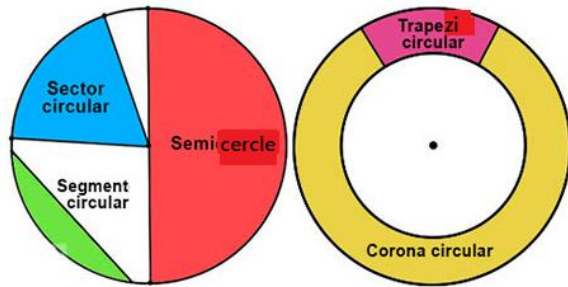
Sector circular: part limitada per dos radis i un arc.

Segment circular: part limitada per una corda i un arc.

Semicercle: mig cercle.

Corona circular: part compresa entre dues circumferències que comparteixen el centre.

Trapezi circular: part de la corona circular entre dos segments que uneixen les dues circumferències.

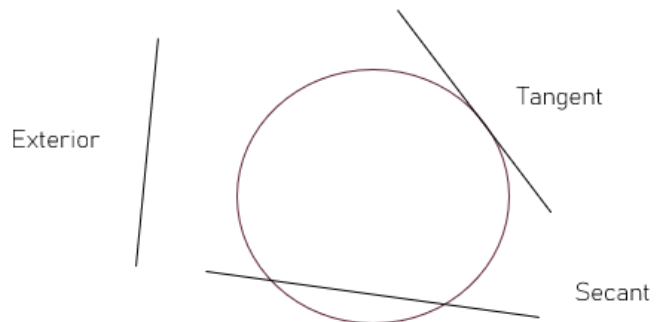


Posicions relatives d'una recta i una circumferència

Recta exterior: la recta no talla la circumferència.

Recta tangent: la recta talla la circumferència en un punt.

Recta secant: la recta talla la circumferència en dos punts.

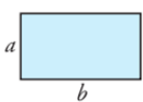
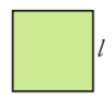
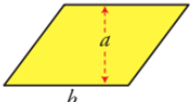
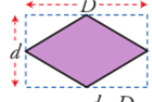
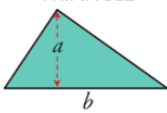
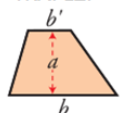
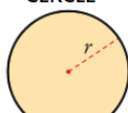


6. Perímetre i àrea de figures planes

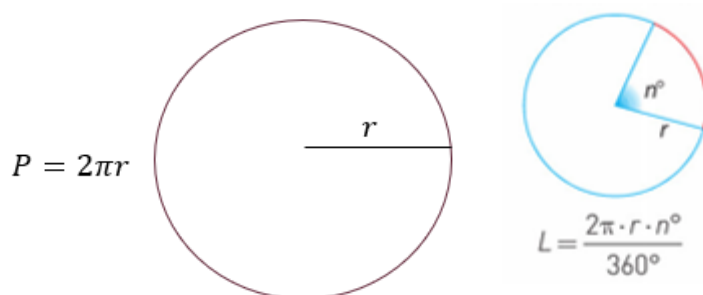
Perímetre de polígons

En tots els polígons, el perímetre es calcula com la suma de les longituds dels costats.

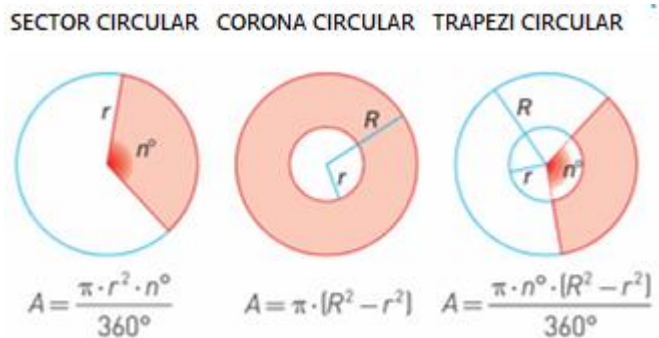
Àrea de polígons

RECTANGLE  $A = a \cdot b$	QUADRAT  $A = l^2$	PARAL·LELOGRAM  $A = a \cdot b$	ROMBE  $A = \frac{d \cdot D}{2}$
TRIANGLE  $A = \frac{a \cdot b}{2}$	TRAPEZI  $A = \frac{b + b'}{2} \cdot a$	POLÍGON REGULAR  $A = \frac{\text{Perímetro} \cdot a}{2}$	CERCLE  $A = \pi r^2$

Perímetre de la circumferència i longitud del seu arc



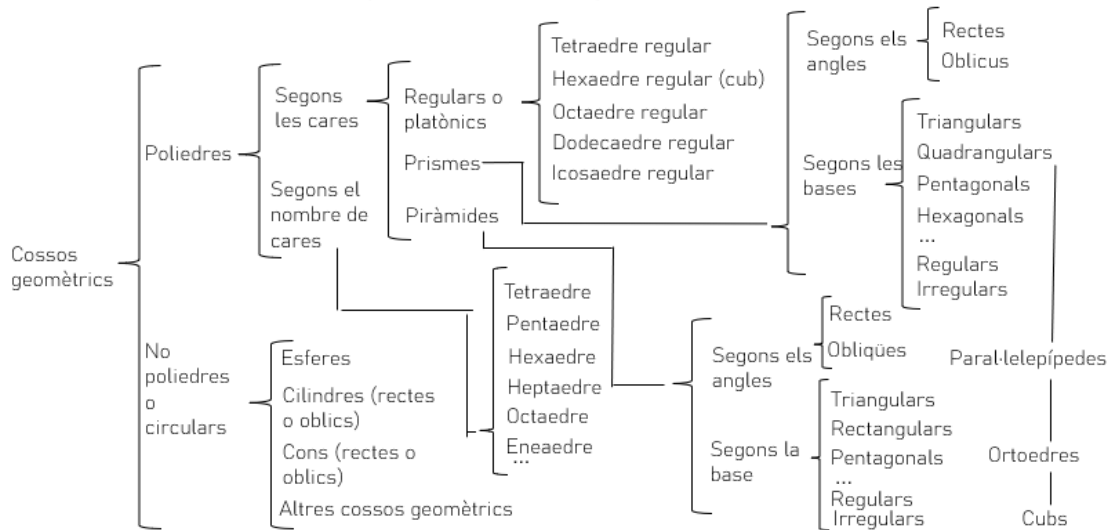
Àrea de les figures circulars



Nota: el perímetre de la semicircumferència és la meitat de la circumferència, i l'àrea del semicercle, la meitat de la del cercle.

7. Classificació general de figures en l'espai: cossos geomètrics

Ací presentem un esquema global dels diferents tipus de cossos geomètrics que hi ha:



8. Poliedres

Cos geomètric: qualsevol figura que es representa en l'espai tridimensional.

Poliedre: cos geomètric les cares del qual són polígons.

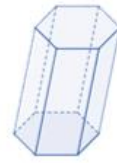
Classificació de poliedres

Segons el nombre de cares:

- **Tetraedres:** 4 cares.
- **Pentaedres:** 5 cares.
- **Hexaedres:** 6 cares.
- **Heptaedres:** 7 cares.
- **Octaedres:** 8 cares.
- **Enneaedres:** 9 cares.
- **Decaedres:** 10 cares.
- **Hendecaedres:** 11 cares.
- **Dodecaedres:** 12 cares.
- **Icosaedres:** 20 cares.

Segons el tipus de cares:

- **Regulars o platònics:** totes les cares iguals.
- **Prismes:** dues cares iguals i paral·leles, anomenades bases, i cares laterals que són paral·lelograms.
- **Piràmides:** formades per un polígon anomenat base i per cares laterals que són triangles que s'uneixen en un punt.



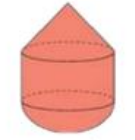
Octaedre
(prisma)



Tetraedre
regular
(piràmide)

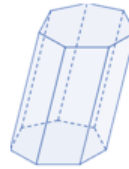


Icosaedre
regular



Cos geomètric

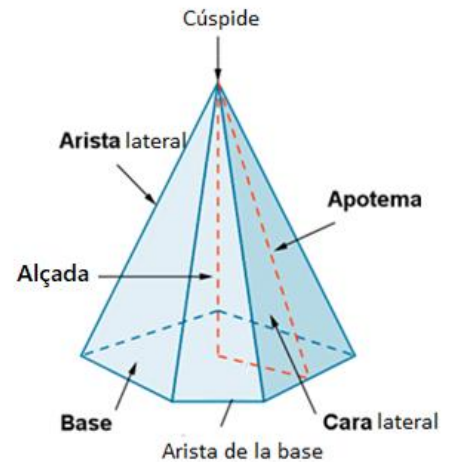
- **Irregulars:** les bases són polígons irregulars.



Enneaedre prismàtic
heptagonal regular oblic

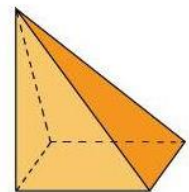
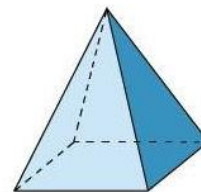
Elements d'una piràmide

- **Base:** el polígon oposat al vèrtex.
- **Cares laterals:** els triangles que van de la base a la cúspide.
- **Vèrtex:** el punt on s'uneixen les arestes laterals.
- **Arestes de la base:** els costats de les bases.
- **Arestes laterals:** els costats dels triangles.
- **Alçada:** la distància des de la base fins al vèrtex.
- **Apotema:** l'altura dels triangles.



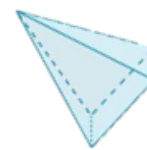
Tipus de piràmides segons els angles

- **Rectes:** el vèrtex es troba sobre el centre de la base.
- **Obliqües:** el vèrtex no es troba sobre el centre de la base.

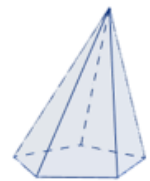


Tipus de piràmides segons la base

- **Triangulars:** la base és un triangle.
 - **Tetraedre regular**
- **Quadrangulars:** la base és un quadrilàter.
- **Pentagonals:** la base és un pentàgon.
- **Hexagonals:** la base és un hexàgon.
- **Heptagonals:** la base és un heptàgon.
- **Octogonals:** la base és un octògon.
- **Enneagonals:** la base és un enneàgon.
- **Decagonals:** la base és un decàgon.
- ...
- **Regulars:** la base és un polígon regular.
- **Irregulars:** la base és un polígon irregular.



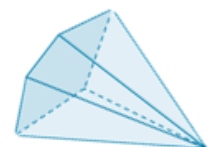
Pentaedre piràmide
quadrangular recta
irregular



Hexaedre piràmide
pentagonal obliqua regular



Decaedre piràmide
eneagonal recta regular



Hexaedre piràmide
pentagonal obliqua
irregular

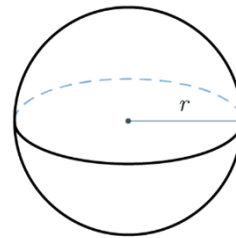
9. No poliedres

No poliedres o cossos redons: són cossos geomètrics que tenen una superfície corba en alguna de les cares.

L'esfera

Esfera: conjunt de punts de l'espai que equidisten d'un punt anomenat centre.

Radi de l'esfera: segment que uneix el centre de l'esfera amb qualsevol punt d'aquesta.

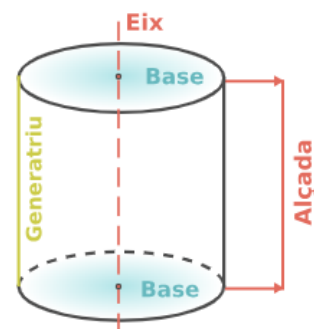


El cilindre

Cilindre: cos geomètric format per un rectangle que gira al voltant d'un dels costats.

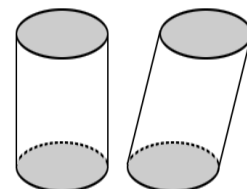
Elements del cilindre

- **Bases:** els dos cercles que forma el rectangle quan gira.
- **Superfície lateral:** formada pel rectangle quan gira.
- **Generatriu:** l'altura de la superfície lateral.
- **Alçada:** distància entre les dues bases.
- **Radi:** és el radi del cercle que forma la base.



Tipus de cilindres segons els angles

- **Rectes:** la generatriu és perpendicular a les bases.
- **Oblics:** la generatriu no és perpendicular a les bases.

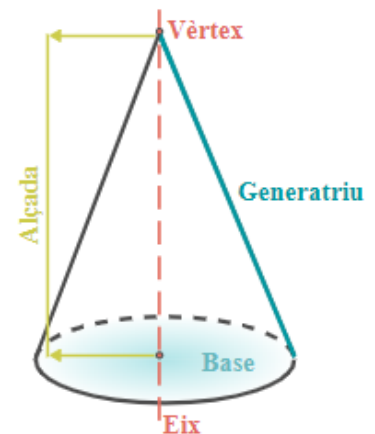


El con

Con: cos geomètric format per un triangle rectangle que gira al voltant d'un dels catets.

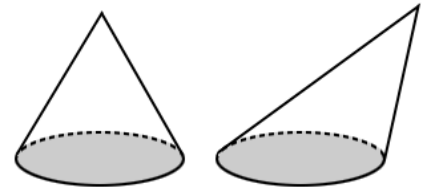
Elements del con

- **Base:** el cercle que forma el triangle en girar.
- **Superfície lateral:** la que forma el triangle en girar.
- **Generatriu:** segment des del vèrtex fins a un extrem de la base.
- **Altura:** distància entre la base i el vèrtex.
- **Radi:** és el radi del cercle que forma la base.
- **Vèrtex:** punt oposat a la base.



Tipus de cons segons els angles

- **Rectes:** el vèrtex està sobre el centre de la base.
- **Oblics:** el vèrtex no està sobre el centre de la base.

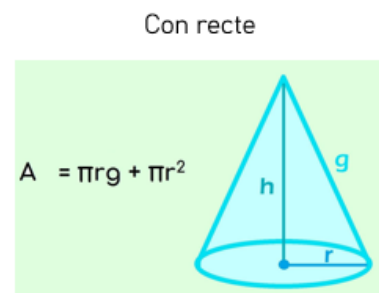
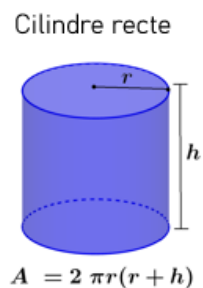
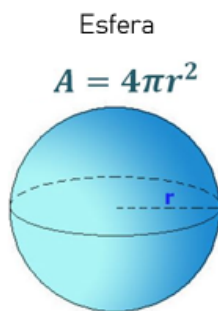


10. Àrea i volum dels cossos geomètrics

Àrea dels poliedres

En tots els poliedres, l'àrea es calcula com la suma de les àrees de les cares.

Àrea dels cossos redons

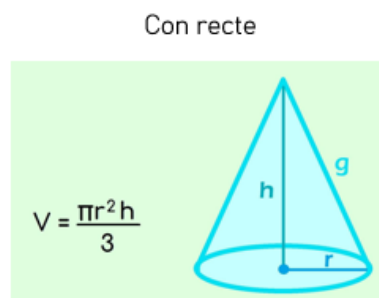
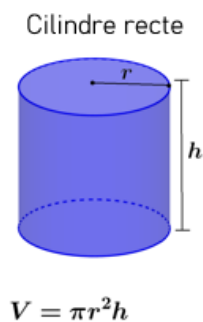
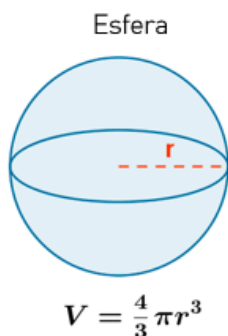


Volum dels poliedres

En els prismes: $\text{Àrea} = \text{Àrea de la base} \times \text{altura}$

En les piràmides: $\text{Àrea} = \frac{\text{Àrea de la base} \times \text{altura}}{3}$

Volum dels cossos redons



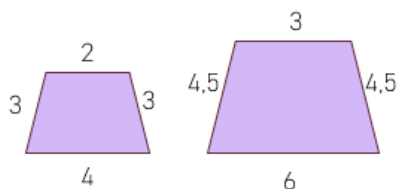
11. Semblança

Dues figures o més són semblants si tenen la mateixa forma, però mesures diferents.

Dos polígons són semblants si els costats corresponents són proporcionals.



Figures semblants



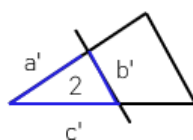
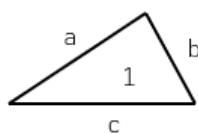
Com:

$$\frac{3}{2} = \frac{4,5}{3} = \frac{6}{4} = \frac{4,5}{3} = 1,5 \longrightarrow \text{Trapezis semblants}$$

12. Teoremes de Tales i Pitàgores

Teorema de Tales

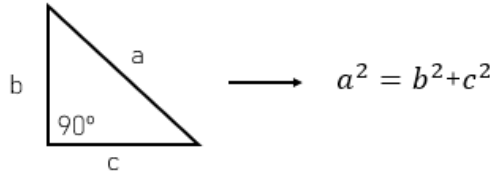
Si en un triangle es traça una línia paral·lela a qualsevol dels costats, s'obté un triangle que és semblant al triangle donat.



$$1 \text{ i } 2 \text{ són semblants} \longrightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

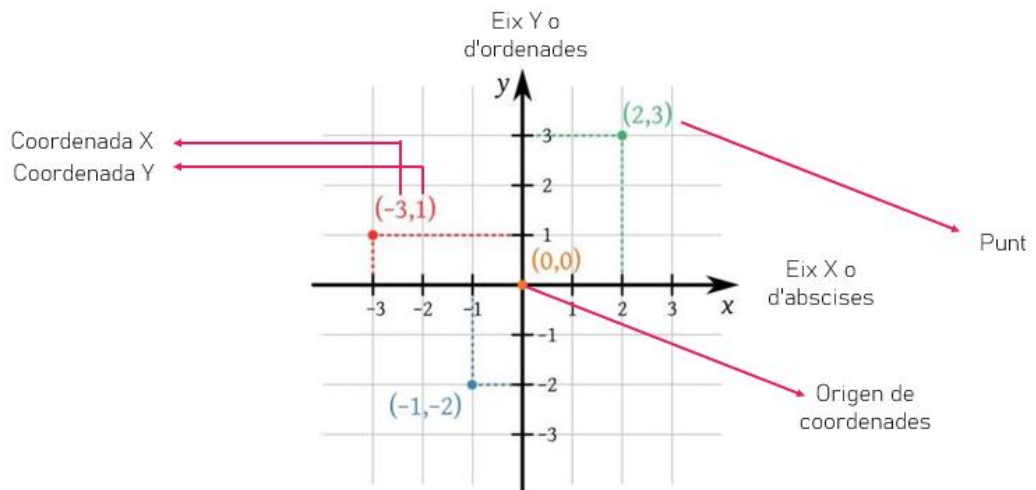
Teorema de Pitàgores

En un triangle rectangle, la suma dels quadrats dels catets és igual al quadrat de la hipotenusa.



13. El pla cartesià

Recordem els elements bàsics del sistema de referència usual en el pla cartesià:

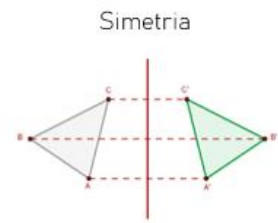
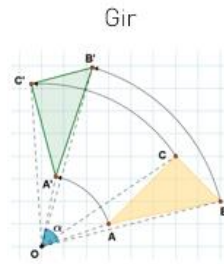
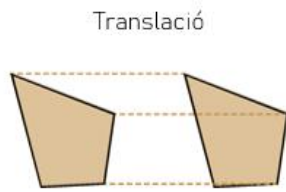


14. Moviments en el pla

Un moviment en el pla és una transformació geomètrica que no altera la forma ni la mesura de les figures. Hi ha tres tipus de moviments en el pla: les translacions, els girs i les simetries.

- **Translació:** una figura es trasllada quan es mou en línia recta en qualsevol direcció.
- **Gir:** una figura pateix un gir quan rota respecte d'un punt.

- **Simetria:** una figura és simètrica a una altra si en doblegar per una recta, anomenada eix de simetria, les dues figures coincideixen.



PROBLEMA SOBRE VOLUMS

L'estiu comença i volem omplir la piscina de la nostra comunitat de veïns. Tanmateix, hi ha sequera i l'ajuntament ha prohibit omplir les piscines. Només podran fer-les servir aquelles comunitats que no la van buidar l'any passat.

Davant l'enuig dels veïns, al president se li ocorre un pla genial: robar l'aigua de la piscina a la comunitat del costat, portant-la amb cubells fins a la seua piscina. Amb aquesta finalitat, hi ha un equip de tres persones format pel president, el conserge i el jardiner. La primera nit, cadascun d'ells fa 16 viatges amb 2 cubells de 10 litres cadascun. Acaben exhausts, però orgullosos. Segons assegura la primera dama, el cap de setmana tindran la piscina plena.

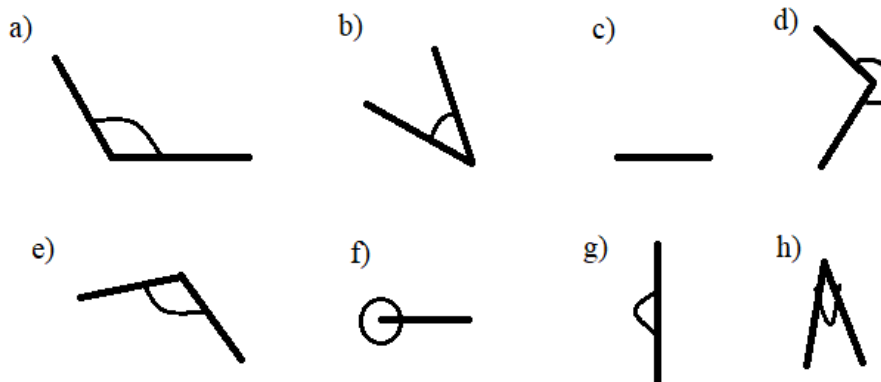
La piscina és un ortoedre i té unes dimensions de 15 metres de llarg, 7 metres d'ample i 2 metres de profunditat.

La primera dama té raó? És un pla genial o el president se n'ha anat del cap?

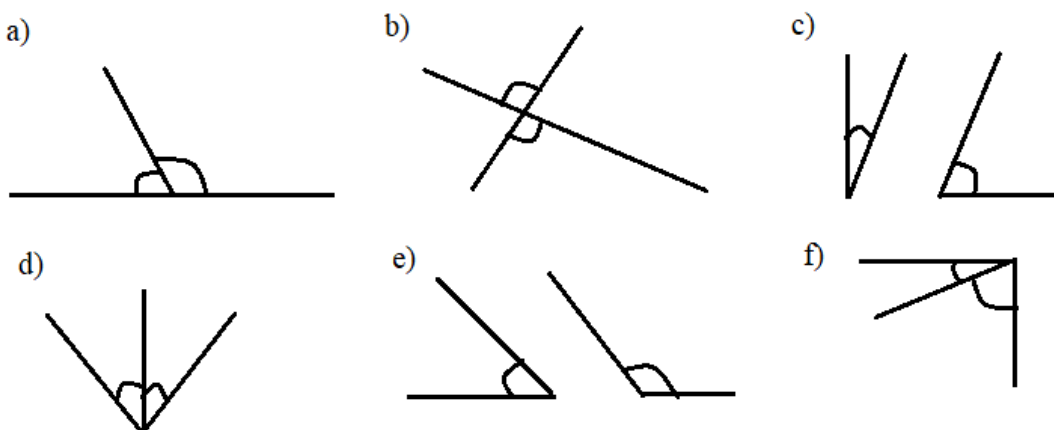
EXERCICIS I PROBLEMES DE GEOMETRIA

Nota: Tots els exercicis excepte l'1 entren per a l'examen.

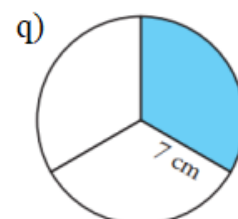
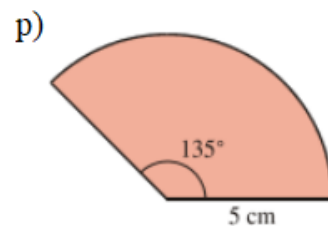
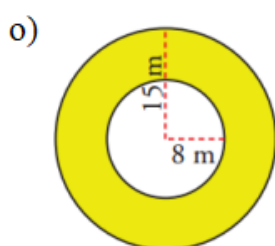
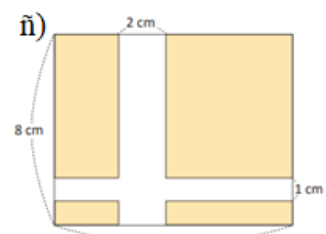
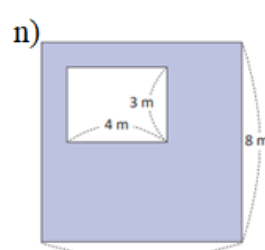
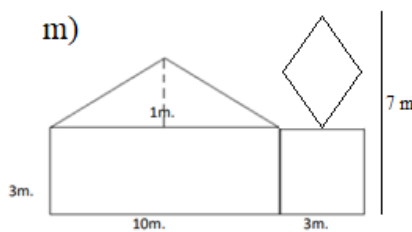
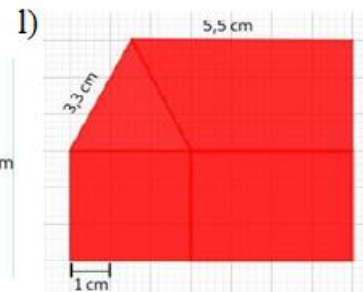
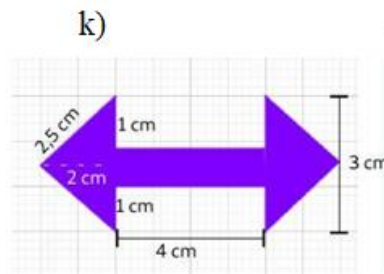
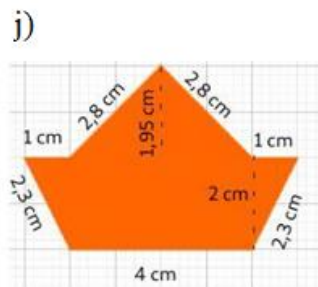
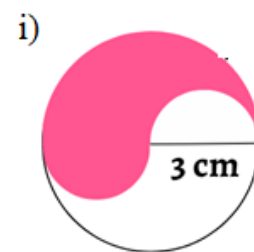
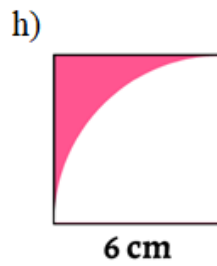
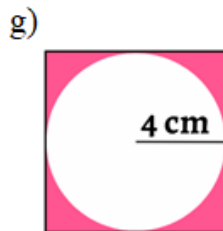
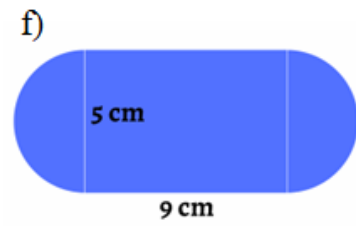
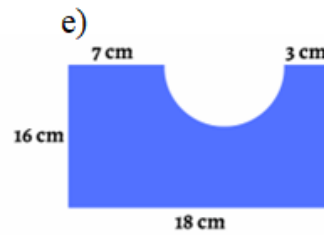
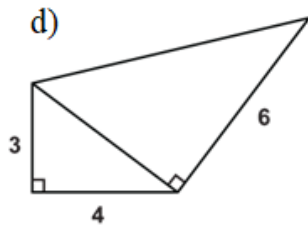
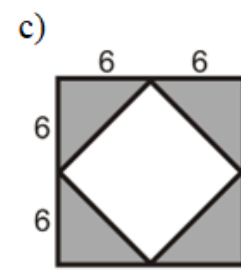
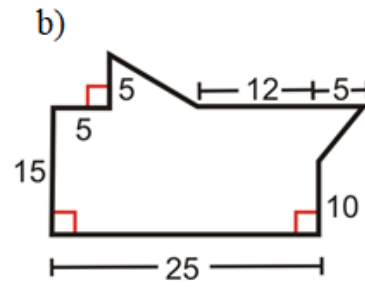
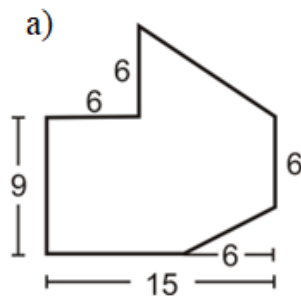
1. Dibuixa tres segments i traça'n les mediatris. Dibuixa tres angles i traça'n les bisectrius.
2. Classifica els angles següents:

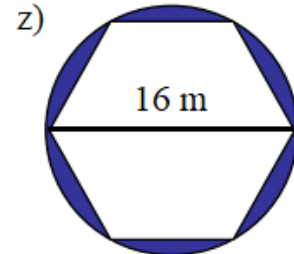
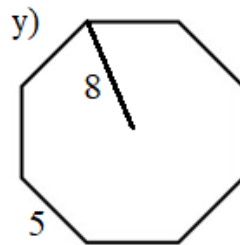
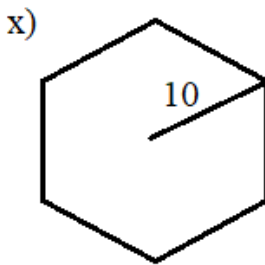
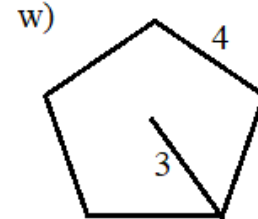
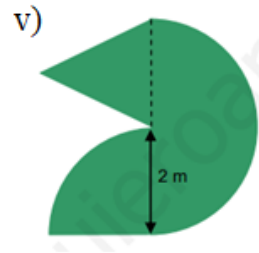
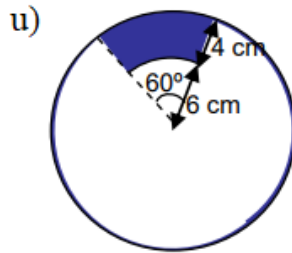
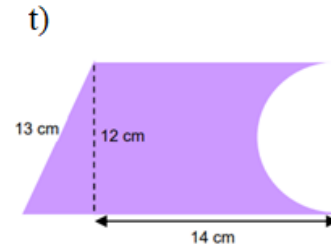
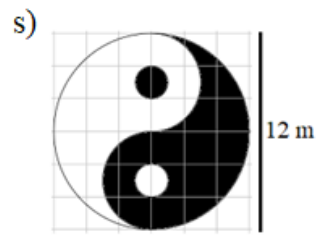
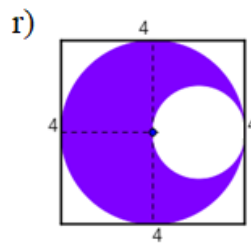


3. Digues si els parells d'angles següents són consecutius, adjacents, oposats pel vèrtex, complementaris o suplementaris:



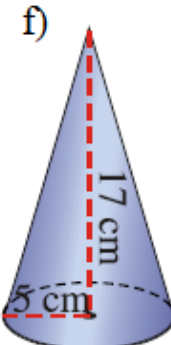
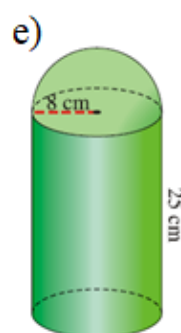
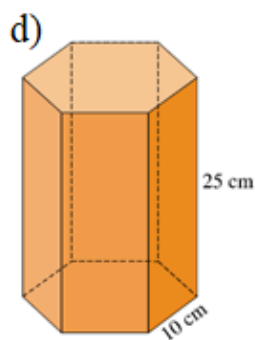
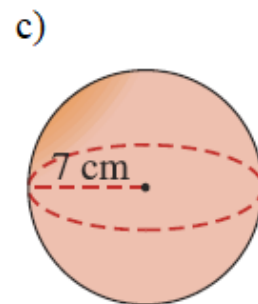
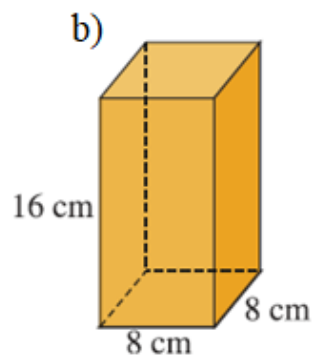
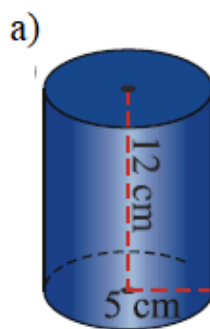
4. Completa la taula 1 que hi ha en la penúltima pàgina.
5. Calcula el perímetre i l'àrea de les figures següents. Si tenen una part ressaltada, només d'aquesta part:

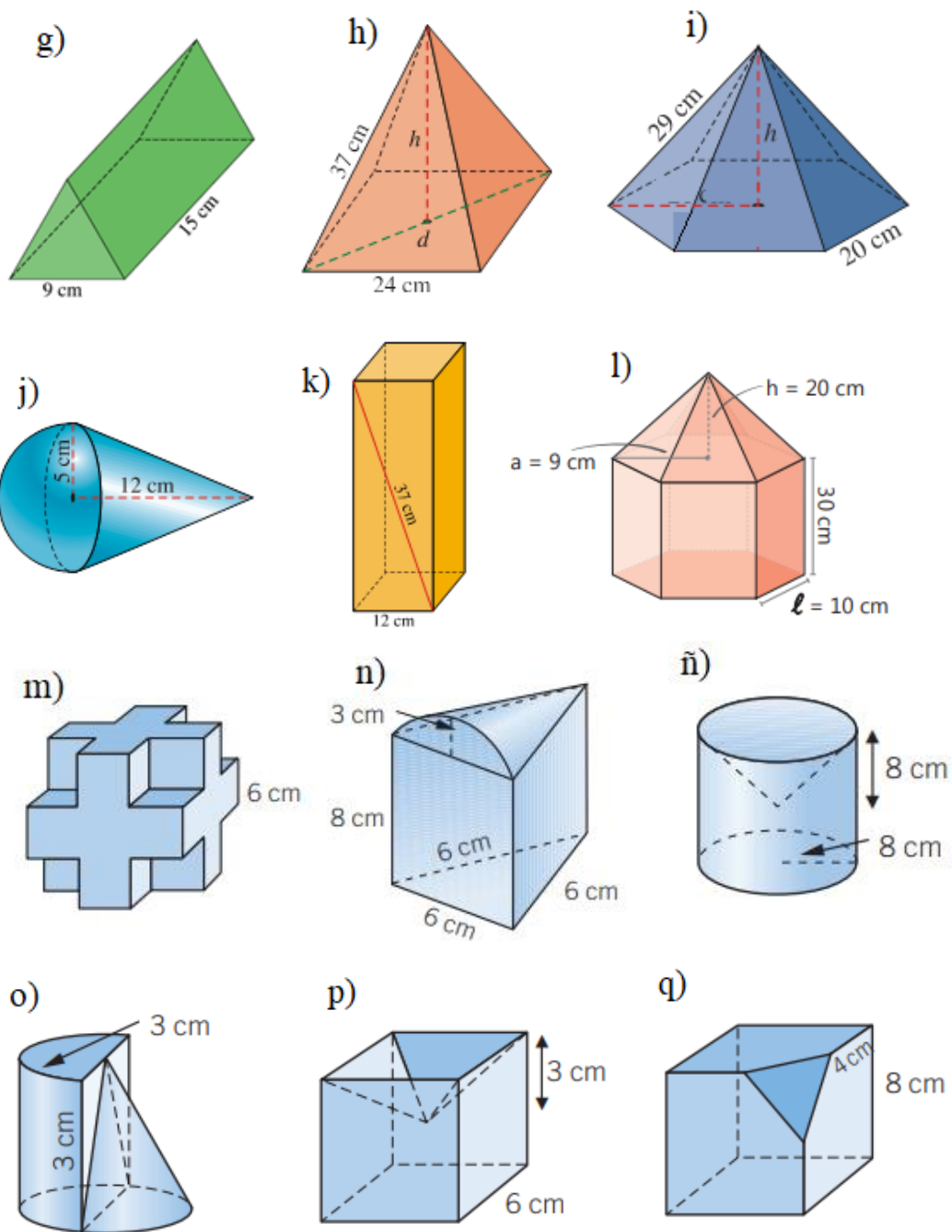




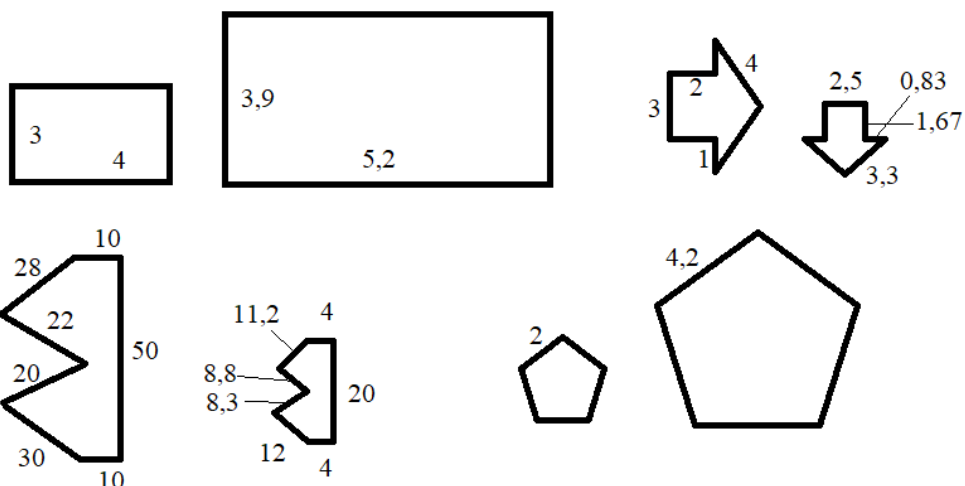
6. Completa la taula 2 que hi ha en l'última pàgina.

7. Calcula l'àrea i el volum dels cossos següents:

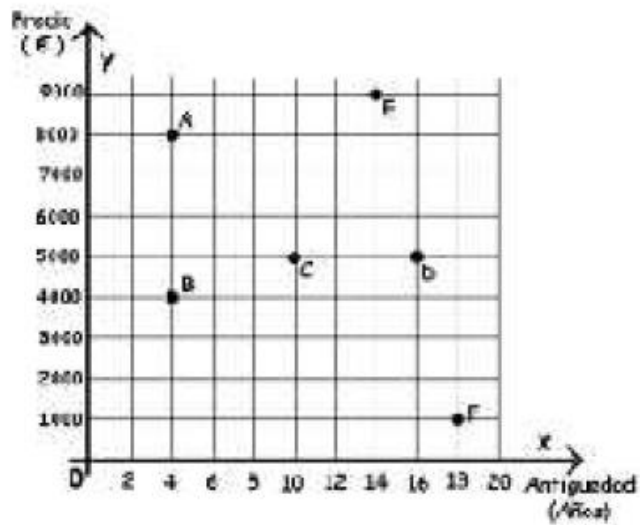




8. Indica si els polígons següents són semblants o no:



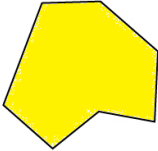
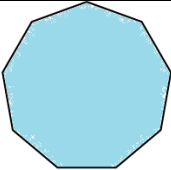
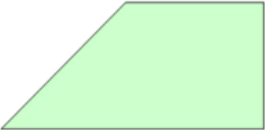
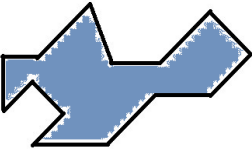
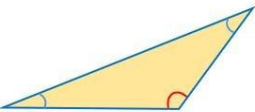
9. En aquest pla cartesià es mostra l'antiguitat i el preu de sis cotxes de segona mà. Contesta a les preguntes:



- Quin és el cotxe més car?
- Quin és el cotxe més antic?
- Quants cotxes valen 5.000€?
- Quants cotxes tenen 4 anys d'antiguitat?
- Quants cotxes valen més de 4.000€?
- Dels cotxes que costen 5.000€, quin té menys anys?

10. Identifica si les figures següents han patit translacions, girs, simetries o cap d'aquestes.



TAULA 1 Figura	Polígon?	Si és un polígon						
		Regular o irregular?	Còncav o convex?	Nom segons el nombre de costats	Si és un triangle		Si és un quadrilàter convex	
					Tipus segons els costats	Tipus segons els angles	Tipus de quadrilàter convex	Si és un paral·lelogram
								Tipus de paral·lelogram
								
								
								
								
								
								
								
								
								
								

[illegible]

TEMA 5: MESURA

Per fi arribem a l'últim tema del curs que, a més, és el més senzill de tots. En aquesta unitat ens dedicarem a repassar totes les eines matemàtiques de què disposem per a mesurar el món: les magnituds i les unitats, les conversions i les operacions entre unitats.

Els continguts de què consta aquest tema són els següents:

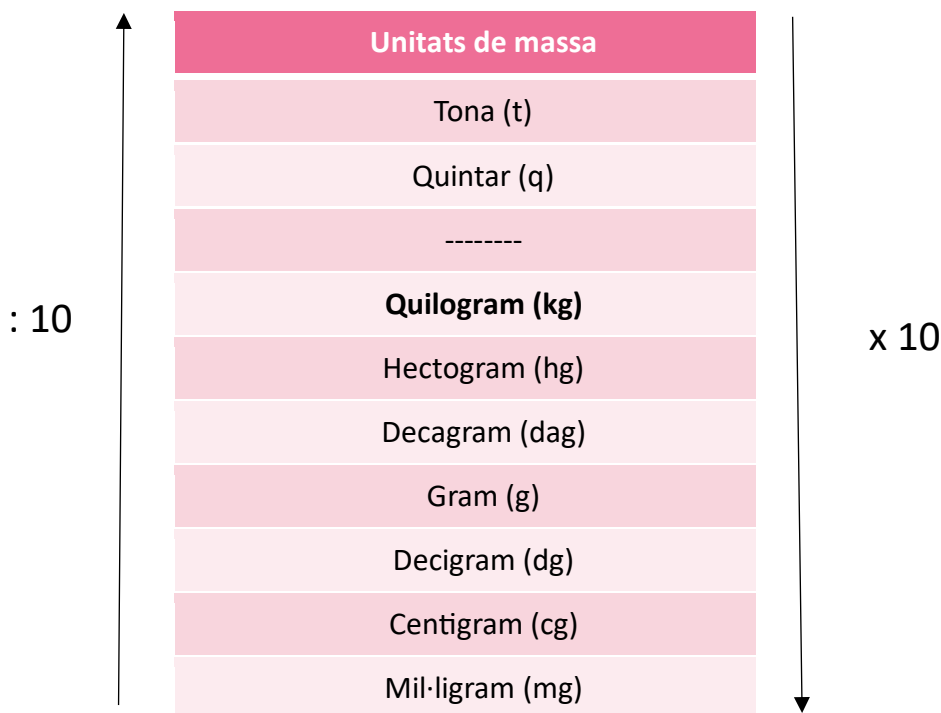
1. Unitats de massa
2. Unitats de longitud
3. Unitats de superfície
4. Unitats de volum
5. Unitats de capacitat
6. Relació entre volum i capacitat
7. El sistema sexagesimal: angles i temps
 1. Operacions en el sistema sexagesimal
8. La mesura del temps
9. Escales: plànols i mapes

Comencem!

1. Unitats de massa

Massa: expressa la quantitat de matèria que té un cos. NO ÉS EL PES.

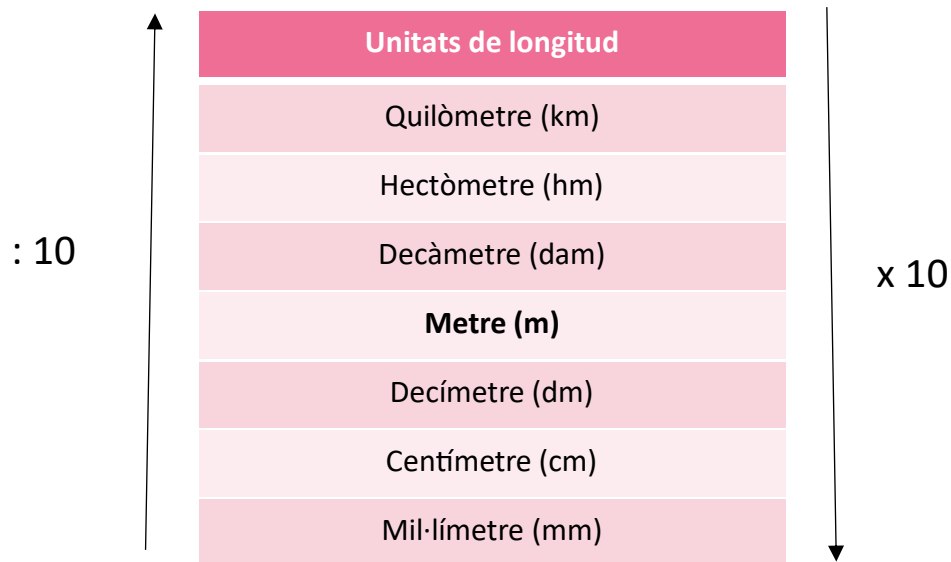
Unitat principal: el quilogram (kg).



2. Unitats de longitud

Longitud: expressa la distància entre dos punts.

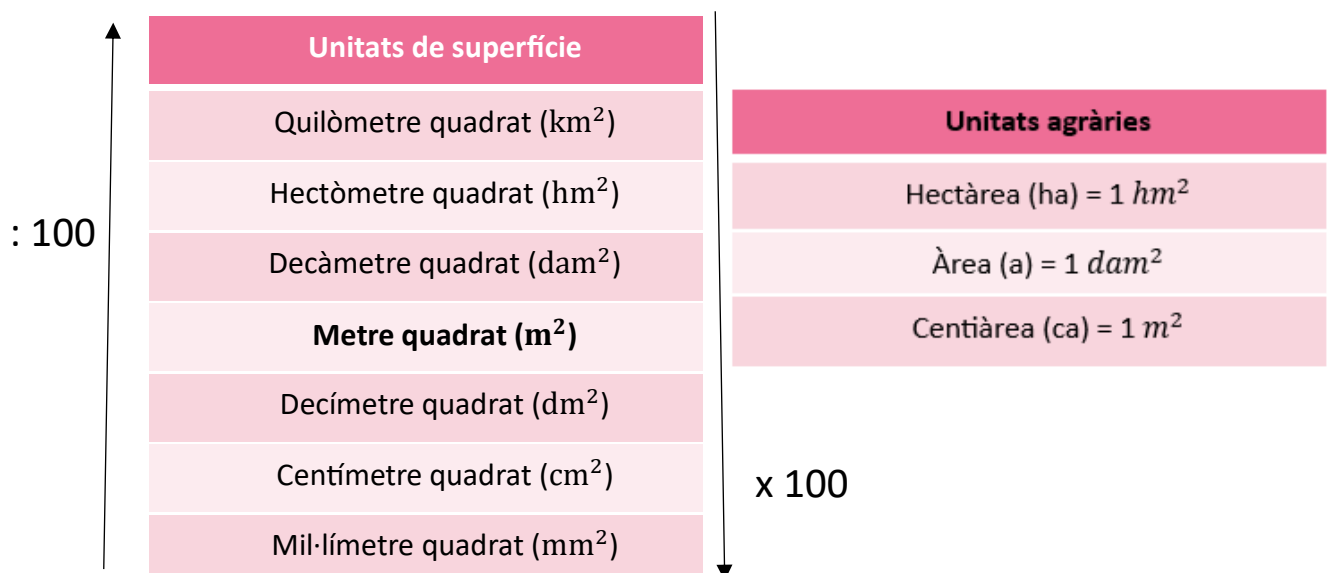
Unitat principal: el metre (m).



3. Unitats de superfície

Superfície: expressa la mesura de l'àrea d'una superfície.

Unitat principal: el metre quadrat (m^2).



4. Unitats de volum

Volum: expressa la mesura de l'espai que ocupa un cos sòlid.

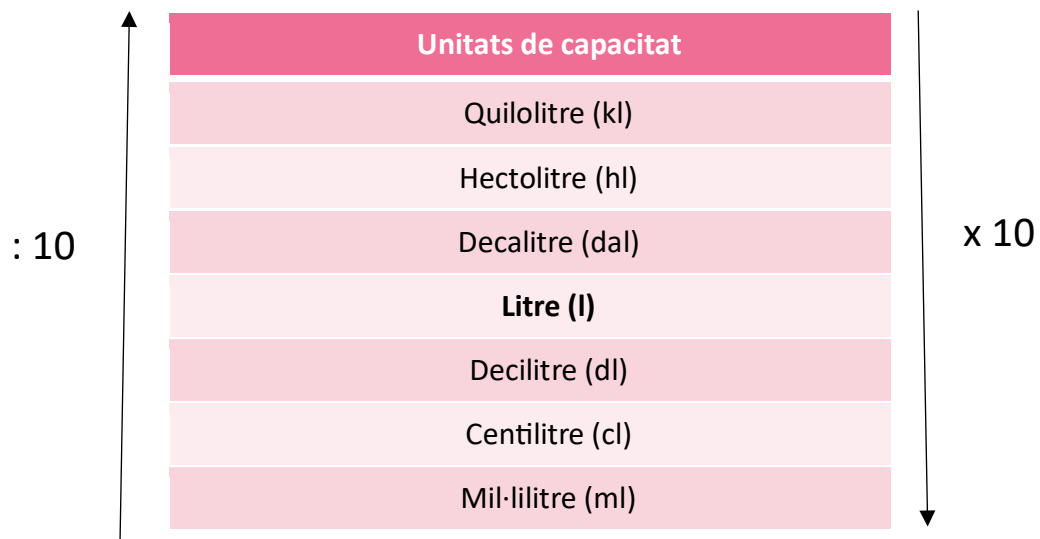
Unitat principal: el metre cúbic (m^3).



5. Unitats de capacitat

Volum: expressa la mesura de l'espai que ocupa un cos líquid.

Unitat principal: el litre (l).



6. Relació entre volum i capacitat

El volum i la capacitat mesuren el mateix: l'espai que ocupa un cos. No obstant això, segons el context s'utilitza una magnitud o l'altra. Normalment es fa servir el volum per als cossos sòlids i la capacitat per als líquids. És important saber passar d'una magnitud a l'altra i viceversa.

x 10 : 10 ↓	Unitats de volum	Unitats de capacitat
	Metre cúbic (m³)	Quilolitre (kl)
		Hectolitre (hl)
		Decalitre (dal)
	Decímetre cúbic (dm³)	Litre (l)
		Decilitre (dl)
		Centilitre (cl)
	Centímetre cúbic (cm³)	Mil·lilitre (ml)

7. El sistema sexagesimal: angles i temps

En el sistema sexagesimal s'utilitza com a element principal el número 60 (a diferència del decimal, en què s'utilitza el número 10). Per tant, en les situacions on es fa servir aquest sistema, comptarem de 60 en 60. Les dues situacions més habituals són: la mesura d'angles i la mesura del temps.

La unitat de mesura principal dels angles és el grau sexagesimal (°), i la del temps, el segon (s).

x 60 : 60 ↓	Unitats de mesura d'angles	Unitats de mesura del temps
	Grau sexagesimal (°)	Hora (h)
	Minut sexagesimal (')	Minut (min)
	Segon sexagesimal (")	Segon (s)

Operacions en el sistema sexagesimal

Per a operar amb mesures en el sistema sexagesimal, cal operar amb cada unitat per separat i fer les conversions necessàries.

$$\begin{array}{r}
 4 \text{ h } 21 \text{ min } 40 \text{ s} \\
 + 5 \text{ h } 45 \text{ min } 38 \text{ s} \\
 \hline
 9 \text{ h } 66 \text{ min } 78 \text{ s} \\
 9 \text{ h } 67 \text{ min } 18 \text{ s} \\
 10 \text{ h } 7 \text{ min } 18 \text{ s}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 51^\circ 96' 76'' \\
 52^\circ 36' 76'' \\
 52^\circ 37' 16'' \\
 - 41^\circ 38' 50'' \\
 \hline
 10^\circ 58' 26''
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 46^\circ 53' 18'' \\
 45 \quad \downarrow \\
 1^\circ = 60' \\
 113' \\
 111' \\
 2' = 120'' \\
 138'' \\
 138'' \\
 \hline
 0
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 27^\circ 18' 34'' \\
 \times 4 \\
 \hline
 108^\circ 72' 136'' \\
 2' 16'' \\
 108^\circ 74' 16'' \\
 1^\circ 14' \\
 \hline
 109^\circ 14' 16''
 \end{array}$$

8. La mesura del temps

A més de les tres unitats del sistema sexagesimal que ja hem vist, en el dia a dia utilitzem moltes més unitats de mesura del temps. Són les següents:

Unitat	Equivalència	Unitat	Equivalència	Unitat	Equivalència
Segon	Unitat principal	Bimestre	2 mesos	Quadrienni	4 anys
Minut	60 segons	Trimestre	3 mesos	Lustre	5 anys
Hora	60 minuts	Quadrimestre	4 mesos	Dècada	10 anys
Dia	24 hores	Semestre	6 mesos	Segle	100 anys
Setmana	7 dies	Any	12 mesos	Mil·lenni	1000 anys
Quinzena	2 setmanes	Bienni	2 anys	Edat	Diversos segles
Mes	4 setmanes	Trienni	3 anys	Era	Diversos mil·lennis

9. Escales: plànols i mapes

Una escala és l'expressió de la raó que hi ha entre les mesures d'un objecte real i la seua representació reduïda. Podem trobar escales en els mapes, els plànols, les maquetes, els puzles, les construccions, etc.

Sempre és de la forma 1 : x, que es llig com "una unitat al mapa correspon a x unitats en la realitat". Sempre ens han de dir quines unitats són.

Per exemple, si l'escala d'una maqueta està en cm i és de 1:1.000, significa que 1 cm de la maqueta equival a 1.000 cm a la realitat. Així, si sabem que la maqueta mesura 35 cm d'altura, podem calcular l'altura de la figura real:

$$\begin{array}{lcl}
 1 \text{ cm maqueta} & \longrightarrow & 1.000 \text{ cm reals} \\
 35 \text{ cm maqueta} & \longrightarrow & ? \qquad \text{Són } 35.000 \text{ cm} = 350 \text{ m reals}
 \end{array}$$

EXERCICIS I PROBLEMES DE MESURA

Nota: Tots els exercicis entren per a l'examen.

1. Transforma les unitats següents:

- | | | |
|-----------------------|---|---------------------------------------|
| a) 4 dag = _____ g | f) 35 dm ² = _____ m ² | k) 25 hl = _____ m ³ |
| b) 35 kg = _____ t | g) 0,14 km ² = _____ dam ² | l) 940 cm ³ = _____ kl |
| c) 50 m = _____ hm | h) 1,5 m ³ = _____ cm ³ | m) 0,043 dal = _____ dam ³ |
| d) 2,5 mm = _____ dam | i) 7.000 mm ³ = _____ dam ³ | n) 32.000 mm ³ = _____ l |
| e) 600 ml = _____ hl | j) 1,5 l = _____ dm ³ | o) 2 km ³ = _____ dl |

- Lluís va fer una excursió de 20 km, 75 hm, 75 dam i 250 m en tres etapes. En la primera, va recórrer 5 km i 5 hm, i en la segona, 1 km i 50 dam més que en l'anterior. Quant va recórrer en la tercera etapa? Expressa el resultat de forma complexa i incompleta.
- Gabriel té dues milotxes, una de roja i una altra de verda. La corda de la roja mesura 8 m, 6 dm i 9 cm, i la de la verda, 7 m, 3 dm i 5 cm. Quants centímetres mesura menys la verda que la roja? Quant falta a la roja perquè arribi als nou metres (de forma complexa)?
- La muntanya més alta del món, l'Everest, té una alçada de 8.848 m. El K2, la segona més alta, fa 2 hm, 3 dam i 7 m menys. Quant mesura el K2?
- En una fàbrica de refrescos tenen un depòsit de 2,97 kl. Quantes botelles d'1,5 l poden omplir amb el refresc del depòsit? I si l'envasen en llaunes de 33 cl cadascuna?
- Solana està entre Teulars i Ombria. Entre Teulars i Solana hi ha 8 km i 5 hm; i entre Teulars i Ombria hi ha 12 km i 450 m. Quants hectòmetres hi ha entre Solana i Ombria? I de forma complexa?
- Un camió pot portar una càrrega màxima de 5 t. En una fàbrica ha carregat 6 contenidors de 3 q i 85 kg cadascun. Quants quilos més pot carregar?
- Carles té 38,5 l d'oli i ha omplert 8 botelles de tres quarts de litre cadascuna. La resta la posa en pots de 125 ml cadascun. Quants pots ompli?
- Marta té un poal d'un litre de capacitat amb un poc d'aigua. Després d'abocar-hi dos gots de 20 cl cadascun, falten 3 dl per a omplir el poal. Quanta aigua hi havia al poal al principi?

10. En un festival es van arreplegar 150.000 confetis de 5 mm de llarg cadascun. Quants quilòmetres feia la cinta de paper amb la qual es van fabricar?
11. En un supermercat venen botelles de llimonada de mig litre, de taronjada de tres quarts de litre i de cola d'un litre. Per a la meua festa d'aniversari he comprat 3 botelles de refresc de cada tipus. Els convidats han demanat 4 gots de llimonada, 6 de taronjada i 10 de cola. Cada got és de 200 ml. En tinc prou per a tothom?
12. Un iogurt conté 1,5 mg de vitamina E.
 - a) Quants grams de vitamina E contenen 1.000 iogurts?
 - b) Quants iogurts es poden elaborar amb 30 g de vitamina E?
 - c) Mariola menja 2 iogurts al dia. Quants decigrams de vitamina E pren a l'any amb els iogurts?
13. Lucas busca pis i troba els tres habitatges següents:
 - a) Benimaclet: 0,75 dam² de superfície i 116.000 €
 - b) Russafa: 0,009 ha de superfície i 193.500 €
 - c) Campanar: 0,84 a de superfície i 68.900 €Quina oferta té el millor preu per metre quadrat?
14. Raquel té una parcel·la de 18 ha. Ha sembrat blat en un terç de la parcel·la i avena en la resta. Quants m² ha sembrat de cada cereal?
15. En un poble es dediquen als cultius de regadiu 18 ha i 90 a; i als de secà, 19.000 a. A quin cultiu es dedica més extensió? Quants metres quadrats més?
16. En un solar de 2,05 hm² es reserven 11.300 m² per a zones verdes i la resta es divideix en 23 parcel·les iguals per a xalets. Quants m² mesura cada parcel·la?
17. Ferran vol posar un sòcol a una habitació rectangular de 6,25 m de llarg i 3,5 m d'ample. A l'habitació hi ha una porta de 0,12 dam d'ample. Quants dm de sòcol necessita?
18. Una canonada en mal estat té un forat per on es perden 3 ml d'aigua cada segon. Quants litres d'aigua es perden en un dia? Quants quilolitres d'aigua es perden en un any?
19. Nicolau posa a la venda una parcel·la de 3,5 ha i 9 a per 574.400 €, i un solar de 6,5 a i 80 ca per 17.520 €. Per quant ven el metre quadrat de la parcel·la? I del solar?

20. Transforma les mesures següents tal com s'indica:

- | | |
|---|--|
| a) 12 h 10 min 20 s = _____ s | g) $61.927' = \text{_____}^{\circ} \text{_____}'$ |
| b) 1h 12 min = _____ min | h) $17^{\circ} 12' = \text{_____}'$ |
| c) 2.493 min = _____ h _____ min | i) $54^{\circ} 20' 15'' = \text{_____} \text{_____}''$ |
| d) 28.689 min = _____ h _____ min | j) 67 h 93 min = _____ h _____ s |
| e) 8.162.810 s = _____ | k) 6.748 s = _____ |
| f) $7.150.817'' = \text{_____}' \text{_____}''$ | l) $3r 23' 43'' = \text{_____}''$ |

21. Matilde ha jugat aquesta setmana dos partits de bàdminton. El primer va durar 1 hora i 52 minuts, i el segon, 1 hora, 47 minuts i 50 segons. Quant de temps van durar en total els dos partits? Expressa-ho de forma complexa i incomplexa.

22. En mesurar l'angle del sol sobre l'horitzó, Joana va obtenir $35^{\circ} 27' 45''$. Vint minuts més tard, en va calcular l'angle de nou i era $6^{\circ} 45' 23''$ menor. Quin angle formava el sol en la segona mesura? Quant descendeix el sol cada hora? I cada minut?

23. Miquel volia caminar dilluns 2 hores, però al final només va caminar 1 hora, 45 minuts i 30 segons. Quant de temps li va faltar per dur a terme el seu pla? Si durant tota la setmana camina el mateix que dilluns, quant caminarà en total?

24. El penell de ma casa va girar un angle de $70^{\circ} 50'$. Després, va girar $25^{\circ} 40''$. Quant va girar en total? Quant va girar la primera vegada més que la segona? El penell del meu veí va girar en total una cinquena part del meu. Quants graus va girar?

25. Joan va completar una prova en 2 h, 15 min i 20 s. Maria va tardar a completar-la 50 min i 30 s més que ell, i Pere va tardar 3 h, 50 min i 40 s. Quant va tardar Maria? Quant va tardar Pere més que Maria?

26. Contesta les següents preguntes:

- a) Són les 16:45. Quina hora serà 9 hores i 20 minuts després? I 3 hores i mitja abans?
- b) Són les 8:45 pm. Quina hora era 3 hores i 35 minuts abans? I 6 hores i quart després?
- c) Isc de casa a les 10:05 h del matí i tarde una hora i mitja a tornar. A quina hora torne a casa?

- d) La classe comença a les 17:15 h i dura una hora i quart. A quina hora acaba?
 - e) Acabem d'eixir del cinema i són les 19:45 h de la vesprada. La pel·lícula ha durat 2 hores i 10 minuts. A quina hora ha començat la pel·lícula?
 - f) Són les 10:10 h del matí i la botiga fa 40 minuts que ha obert. A quina hora obri la botiga?
 - g) Hem eixit de la discoteca a les 4 am i m'adone que el mòbil s'acaba de quedar sense bateria. Normal, ja han passat 7 hores i 45 minuts des que el vaig carregar just abans d'eixir de casa. A quina hora vaig eixir de casa?
 - h) Me'n vaig de viatge a Los Angeles. Allà són 8 hores menys que a Espanya. Tinc el vol a les 6:25 pm i el viatge dura 12 hores i mitja. A quina hora hi arribaré?
27. El telèfon es va inventar el 1876; el microscopi, el 1590, i els prismàtics, el 1608.
- a) Quants segles fa que es va inventar cada aparell? I anys?
 - b) Quantes dècades van passar des de la invenció dels prismàtics fins a la del telèfon? I anys?
 - c) Quants lustres van passar des de la invenció del microscopi fins a la dels prismàtics? I anys?
28. Fabiana compra una finca a terminis durant 10 anys, i paga la mateixa quota cada trimestre: 1.350 €.
- a) Quantes quotes pagarà en dos anys? I en un quadrienni?
 - b) Quants diners haurà pagat quan hagen passat cinc semestres? I quan hagen passat tres quadrimestres més?
 - c) Quant val la finca?
29. L'escala del meu plànol de València és d'1:15.000. A quina distància (en m) es troba la Llotja de l'Hemisfèric si la distància en el plànol és de 23 cm?
30. M'he comprat una maqueta del Titanic que fa 7 dm de llarg. El Titanic feia 2 hm, 6 dam i 9 m de llarg. Quina és l'escala de la maqueta?
31. En el meu atlas mundial, la distància entre Pequín i Nova York és de mig metre. He buscat en internet i aquestes ciutats estan a 11.000 km de distància. Quina és l'escala del meu atlas?