



VNIVERSITAT
DE VALÈNCIA

Departament de Didàctica de la Matemàtica
Facultat de Magisteri

Manual de apuntes

DIDÁCTICA DE LA GEOMETRÍA, LA MEDIDA Y LA
PROBABILIDAD Y LA ESTADÍSTICA

Autora:
Carmen Melchor Borja

ÍNDICE

1. Formas planas y cuerpos tridimensionales	3
1.1. Aspectos curriculares y focos de contenido	3
1.1.1. Geometría en el plano	4
1.1.2. Geometría en el espacio	20
1.2. Fundamentos didácticos	25
1.2.1. La teoría de Piaget	25
1.2.2. El modelo de Van Hiele	28
1.2.3. El modelo de Vinner	42
1.2.4. Orientaciones de enseñanza por niveles	53
1.3. Errores y dificultades en el aprendizaje	56
1.4. Laboratorio de materiales y recursos	65
1.5. Práctica sobre formas planas y cuerpos tridimensionales	70
1.6. Práctica de GeoGebra	76
2. Orientación, visualización y transformaciones geométricas	81
2.1. Aspectos curriculares y focos de contenido	81
2.1.1. Orientación	83
2.1.2. Visualización	87
2.1.3. Transformaciones geométricas	88
2.2. Fundamentos didácticos	97
2.2.1. Aspectos del desarrollo de los sistemas de referencia y las nociones de situación	98

2.2.2.	Los procesos y las habilidades de visualización	101
2.2.3.	La comprensión de las transformaciones geométricas	106
2.2.4.	Enseñanza y mejora de las habilidades de visualización y orientación	111
2.2.5.	Fases de aprendizaje de van Hiele para las transformaciones geométricas	122
2.2.6.	Orientaciones por niveles	124
2.3.	Errores y dificultades en el aprendizaje	127
2.3.1.	Errores y dificultades de orientación y visualización	127
2.3.2.	Errores y dificultades en el aprendizaje de las transformaciones geométricas	134
2.4.	Laboratorio de materiales y recursos	143
2.5.	Práctica sobre orientación, visualización y transformaciones geométricas	151
3.	Magnitudes y su medida	171
3.1.	Aspectos curriculares y focos de contenido	171
3.2.	Fundamentos didácticos	180
3.2.1.	La teoría de Piaget sobre los estadios de comprensión del proceso de medida.	180
3.2.2.	Las propiedades de la medida	181
3.2.3.	La enseñanza de las magnitudes y su medida	183
3.2.4.	Orientaciones por niveles	194
3.2.5.	Resolución y planteamiento de problemas matemáticos	199
3.3.	Errores y dificultades en el aprendizaje	211
3.4.	Laboratorio de materiales y recursos	216
3.5.	Práctica de Medida	220
4.	Estadística y probabilidad	223
4.1.	Aspectos curriculares y focos de contenido	223
4.2.	Fundamentos didácticos	237
4.2.1.	Orientaciones por niveles	248
4.3.	Errores y dificultades en el aprendizaje	251
4.4.	Laboratorio de materiales y recursos	257
4.5.	Práctica de Estadística y Probabilidad	259
	Referencias	261

Copyright © 2024 Carmen Melchor Borja

Licencia Creative Commons Atribución/Reconocimiento-NoComercial-SinObraDerivada 4.0
Licencia Pública Internacional — CC BY-NC-ND 4.0. Puede obtenerse una copia de la licencia en <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>.

Primera impresión, agosto 2024

TEMA 1

FORMAS PLANAS Y CUERPOS TRIDIMENSIONALES

1.1. Aspectos curriculares y focos de contenido

En el currículo de Educación Primaria regulado por la LOMLOE (Ministerio de Educación y Formación Profesional, 2022) se contemplan los saberes básicos del sentido espacial y geométrico que se muestran en la Tabla 1.1

Saberes básicos	1er ciclo	2º ciclo	3er ciclo
Localización y visualización de objetos. Orientación básica en el espacio (derecha, izquierda, delante, detrás, arriba, abajo, etc.)	x		
Localización de objetos (puntos) sobre los ejes, el plano cartesiano. Localización en mapas a partir de puntos de referencia, incluidos los puntos cardinales.		x	x
Elementos básicos: vértices y lados. Polígonos regulares.	x	x	x

Saberes básicos	1er ciclo	2º ciclo	3er ciclo
Poliedros regulares. Vocabulario básico. Relación entre vértices, aristas y caras.		x	x
Líneas rectas, curvas.	x	x	
Intersección, paralelismo y perpendicularidad. Posiciones relativas de rectas en el plano.		x	x
Identificación y descripción de diferentes polígonos. Composición y descomposición	x	x	x
Cálculo de perímetros y áreas de polígonos.		x	x
La circunferencia y el círculo. Elementos y propiedades.	x	x	x
Longitud de la circunferencia y área del círculo. Número π .			x
Ángulos, medición y clasificación de ángulos. Clasificación de triángulos.		x	x
Transformaciones: giros, traslaciones y simetrías en situaciones reales.		x	x
Semejanza: identificación y generación a partir de patrones.			x
Concavidad y convexidad de figuras planas.		x	x
Desarrollo y clasificación de prismas y pirámides.			x
Programas informáticos de geometría dinámica	x	x	x
Desarrollo y usos de la geometría, tanto a nivel práctico como estético, incorporando la perspectiva de género.	x	x	x
Estrategias de aprendizaje de conceptos geométricos y aceptación de dificultades.	x	x	x

Tabla 1.1: Saberes básicos del sentido espacial y geométrico

1.1.1. Geometría en el plano

Superficie, recta y punto

Un plano tiene dos dimensiones (dimensión 2). *Euclides* en el libro *Los Elementos* afirma que una *superficie es aquello que solo tiene longitud y anchura*. Normalmente representamos un plano como la superficie representada en la Figura 1.1. Usualmente se utilizan letras griegas para nombrar los planos. Un plano está formado por infinitos puntos, por tanto, es ilimitado en todas sus direcciones. Sin embargo, esta infinitud no la podemos represen-

tar gráficamente. La idea de superficie se puede trabajar intuitivamente con el alumnado de Educación Primaria entendiendo que es aquello que se puede palpar sin coger, por ejemplo, la superficie de un libro, de una pelota o de la pizarra.

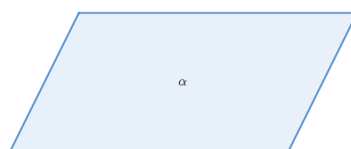


Figura 1.1: Superficie plana

Un punto no tiene dimensión (dimensión 0) y sirve para indicar una posición. Los puntos se suelen nombrar con letras mayúsculas. En la Figura 1.2 se representa un punto P como elemento de un plano α . Las líneas rectas como objetos geométricos tienen infinitos puntos. Sin embargo, del mismo modo que ocurre con los planos, esta infinitud no se puede representar gráficamente y los modelos representados gráficamente tienen extensión limitada. Las líneas rectas se trazan utilizando como instrumento de apoyo la regla. En la Figura

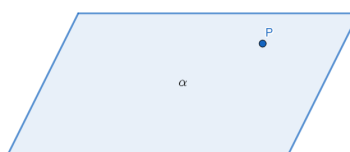


Figura 1.2: Punto P del plano α

Una línea recta que pasa por dos puntos A y B es el camino más corto entre esos dos puntos y tiene solo una dimensión (dimensión 1) que denominamos *longitud*. Las rectas se suelen nombrar con letras minúsculas. En la Figura 1.3 vemos representada la recta m que pasa por los puntos A y B . El tramo de recta entre los dos puntos se denomina *segmento*. El segmento que tiene por extremos los puntos A y B se denota $\overline{AB}$ y representa la distancia entre A y B .

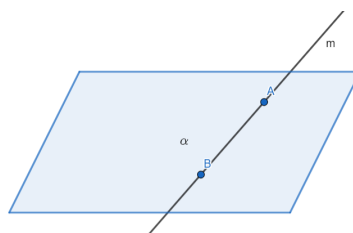


Figura 1.3: Recta m del plano α y que pasa por los puntos A y B

Segmentos

El tramo de recta entre dos puntos se denomina *segmento*. El segmento que tiene por extremos los puntos A y B representa la distancia entre A y B y se denota $\overline{AB}$ o también se puede utilizar un letra minúscula para denotarlo. En la Figura 1.4 se representa el segmento de extremos A y B . La idea de recta o segmento se puede trabajar intuitivamente con el alumnado de Educación Primaria a partir de objetos físicos que se recorren con la punta del dedo, pero no se palpan con la palma. Por ejemplo, el borde de un folio o una cuerda estirada.

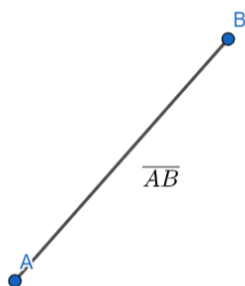


Figura 1.4: Segmento $\overline{AB}$

Dos segmentos son *consecutivos* si tienen un extremo en común. En la Figura 1.5 los segmentos a y b son consecutivos porque tienen el extremo B en común.

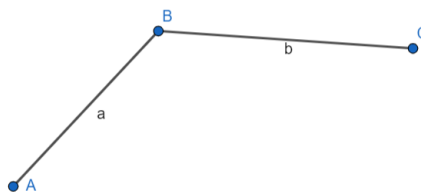


Figura 1.5: Segmentos a y b consecutivos

Posiciones relativas entre rectas

Dos rectas que se cortan se dice que son *secantes* y determinan un punto de corte único. En la Figura 1.6 las rectas m y n son secantes y se cortan en el punto E .

Dos puntos siempre están alineados, es decir, siempre existe una recta que pasa por esos dos puntos. Sin embargo, tres o más puntos pueden estar alineados o no. Tres puntos no alineados siempre determinan un plano. Por ellos, los taburetes de tres patas no cojean. En la Figura 1.7 vemos que los puntos A , B y C determinan el plano β . Además, B y C están alineados en la recta r . Aunque no se muestren en la figura, los puntos A y B están alineados en una recta y los puntos A y C están alineados en otra recta.

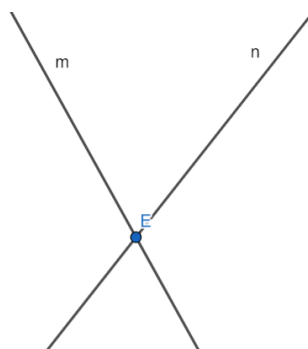


Figura 1.6: Rectas m y n que son secantes con punto de corte E

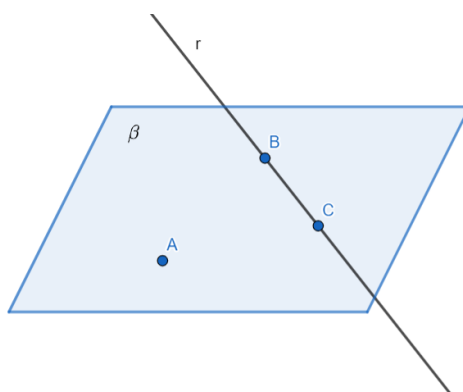


Figura 1.7: Puntos A , B y C que determinan el plano β

Por un mismo punto pasan infinitas rectas. Al conjunto de todas las rectas que pasan por un punto se le llama *haz de rectas*. En la Figura 1.8 se representa un conjunto de rectas que forman parte del haz de rectas que pasan por el punto A .

Cuando dos rectas no se cortan en ningún punto se dice que son *paralelas* y significa que *tienen la misma dirección*. En la Figura 1.9 las rectas r y s son paralelas.

Semirrectas

Un punto P sobre una recta r la divide en dos partes que llamamos *semirrectas*. El punto P es el origen de las dos semirrectas que tienen sentidos distintos a partir de este punto. Así, distinguiremos las dos semirrectas que tienen extremo P marcando otro punto en cada una de ellas. En la Figura 1.10 se representan dos semirrectas determinadas por el punto P sobre la recta r . Una semirrecta tiene extremo P y pasa por el punto A (trazado continuo) y la otra semirrecta tiene extremo P y pasa por el punto B (trazado discontinuo).

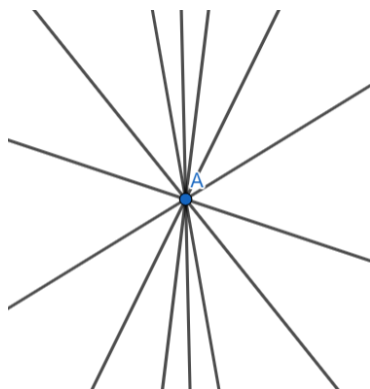


Figura 1.8: Conjunto de rectas que pasan por el punto A

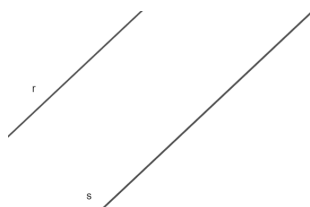


Figura 1.9: Rectas paralelas

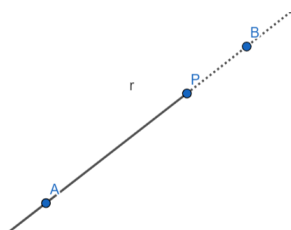
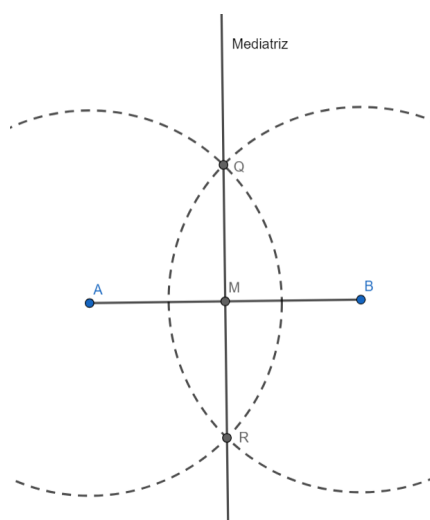
Mediatriz

La recta perpendicular a un segmento en su punto medio es la *mediatriz*. En la Figura 1.11 se muestra la mediatriz del segmento $\overline{AB}$ que pasa por M que es el punto medio del segmento. Para obtenerla utilizando regla y compás, se sitúa la aguja del compás en un extremo del segmento y se marca una curva con una amplitud cualquiera de apertura del compás. Luego se repite el procedimiento colocando la aguja del compás en el otro extremo del segmento. Se traza la recta que pasa por los dos puntos de intersección en las curvas.

Ángulos

Una recta trazada sobre un plano lo divide en dos partes cada una de las cuales se llama *semiplano*. Esta recta se llama *frontera* de los dos semiplanos. En la Figura 1.12 la recta r divide el plano en dos semiplanos.

Consideramos dos rectas r y s que son secantes y se cortan en el punto V . Cada una de estas rectas determina dos semiplanos. Definimos un *ángulo* como la región que resulta de la intersección de uno de los semiplanos de r con uno de los semiplanos de s , tiene vértice V y los lados son dos semirrectas, una de r y otra de s . Se suelen utilizar letras griegas para denotar ángulos. Cuando dos rectas se cortan se determinan cuatro ángulos. En la Figura 1.13, las

Figura 1.10: Semirrectas de origen P en la recta r Figura 1.11: Mediatriz del segmento $\overline{AB}$

rectas r y s determinan los ángulos α , β , γ y δ que tienen el punto V como vértice común. Es importante notar que en la definición de ángulos se incluye la región del plano limitada por dos semirrectas y las propias semirrectas.

Concavidad y convexidad

Dos semirrectas que tienen el mismo punto de origen determinan en el plano una región convexa y una región cóncava. En la Figura 1.14 las semirrectas r y s determinan una parte convexa en azul y una parte cóncava en blanco.

Rectas perpendiculares

Cuando dos rectas se cortan determinando cuatro ángulos iguales decimos que las rectas son *perpendiculares*. Cada uno de esos cuatro ángulos se llama *ángulo recto*. En la Figura 1.15 se muestran dos pares de rectas perpendiculares.

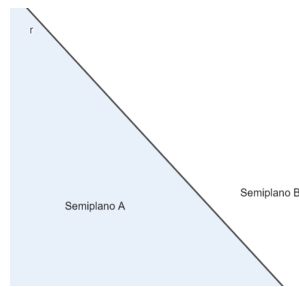
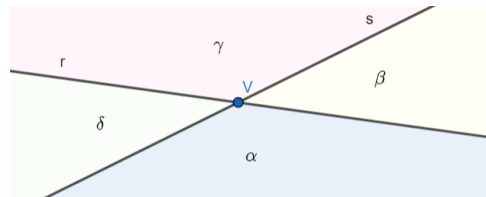


Figura 1.12: Recta frontera entre dos semiplanos

Figura 1.13: Ángulos determinados a partir de la intersección de las rectas r y s

Tipos de ángulos

La clasificación de los tipos de ángulos se hace por comparación con el ángulo recto. Si un ángulo es menor que el ángulo recto, se dice que es *agudo*. Si un ángulo es mayor que el ángulo recto, se dice que es *obtuso*. En la Figura 1.16 se muestran los tres tipos de ángulos.

La amplitud angular se mide en grados y un grado se simboliza 1° . Un ángulo recto mide 90° , un ángulo agudo mide menos de 90° y un ángulo obtuso mide más de 90° . Un ángulo que mida 180° se llama *ángulo llano* y un ángulo que mida 360° se llama *ángulo completo*. En la Figura 1.17 se muestran un ángulo llano y un ángulo completo.

Relaciones entre ángulos

Se pueden establecer relaciones de ángulos según sus medidas y según sus posiciones relativas. En la Tabla 1.2 se muestran todas las posibles relaciones.

Bisectriz

La *bisectriz* de un ángulo es la recta que lo divide en dos ángulos de la misma amplitud. En la Figura 1.18 se muestra la bisectriz del ángulo α determinado por las semirectas r y s de origen común V . Para obtenerla utilizando regla y compás se debe dibujar una circunferencia de centro V y radio arbitrario, la cual cortará a las semirectas en dos puntos P y Q . A continuación, se dibujará la mediatriz del segmento $\overline{PQ}$ tal y como se ha explicado anteriormente. Esta mediatriz es la bisectriz del ángulo α .

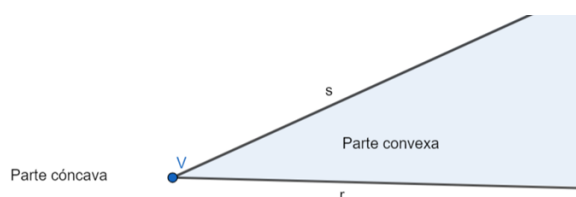


Figura 1.14: Partes cóncava y convexa determinadas por dos semirectas de origen común

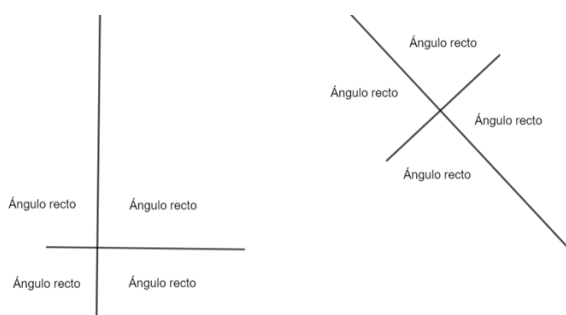


Figura 1.15: Pares de rectas perpendiculares

Nombre de los ángulos	Definición
Según la relación entre sus medidas	
Ángulos congruentes	Su amplitud tiene la misma medida
Ángulos complementarios	La suma de sus amplitudes es 90°
Ángulos suplementarios	La suma de sus amplitudes es 180°
Ángulos conjugados	La suma de sus amplitudes es 360°
Según la posición de los ángulos	
Ángulos adyacentes	Tienen un vértice y un lado común, pero no tienen ningún punto interior común
Ángulos consecutivos	Tienen un lado y el vértice comunes
Ángulos opuestos por el vértice	Los lados son semirrectas opuestas

Tabla 1.2: Relaciones entre ángulos

Polígono

Una *línea poligonal* es un conjunto finito de segmentos no alineados concatenados, esto es, el extremo de uno de ellos coincide con el origen de otro. Los *vértices* de la línea poligonal son los extremos de los segmentos que la determinan. Una línea poligonal es *simple* si no



Figura 1.16: Tipos de ángulos

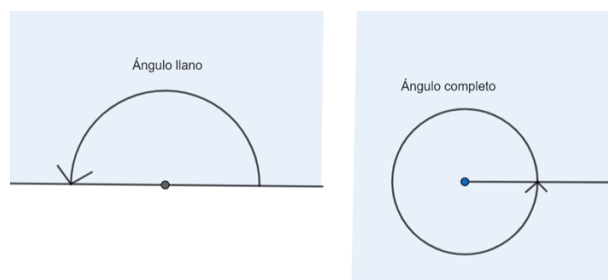


Figura 1.17: Ángulo llano y ángulo completo

existe intersección entre los segmentos que la componen. En caso contrario, la línea poligonal es *no simple*. Además, la línea poligonal es *abierta* si los vértices inicial y final coinciden. En caso contrario, la línea poligonal es *cerrada*. En la Figura 1.19 se muestran ejemplos de todos los tipos de líneas poligonales.

Un *polígono simple*, de ahora en adelante *polígono*, es una región del plano limitada por una línea poligonal cerrada simple y esta línea. Los vértices de la línea poligonal son los *vértices* del polígono. Los *lados* del polígono son los segmentos que unen los vértices consecutivos de la poligonal. Cada polígono determina dos regiones en el plano, la interior y la exterior. Se suelen utilizar letras mayúsculas para denotar los vértices de un polígono. Los lados del polígono se suelen denotar utilizando la misma notación que para los segmentos. Una *diagonal* de un polígono es un segmento cuyos extremos son dos vértices no consecutivos. Un polígono de n lados tiene $\frac{n(n-3)}{2}$ diagonales, ¿podrías razonar cómo se obtiene esta fórmula? En la Figura 1.20 se muestra un polígono y tres de sus diagonales, en particular, los segmentos $\overline{AC}$, $\overline{BE}$ y $\overline{FD}$.

Además, la suma de los ángulos interiores de un polígono convexo es $180^\circ(n-2)$. ¿Puedes razonar cómo se obtiene esta fórmula?

Los polígonos se nombran en función del número de lados (que coincide con el número de ángulos) que tienen utilizando prefijos griegos hasta el polígono de 12 lados. Con un número mayor de lados se llaman n -polígonos. En la Tabla 1.3 se presenta la clasificación de los polígonos según el número de lados de 3 a 12 lados.

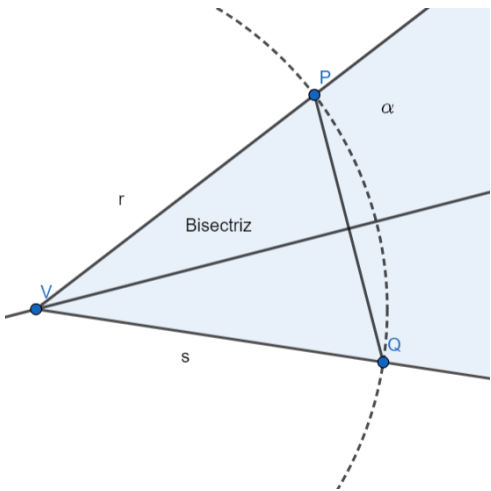


Figura 1.18: Bisectriz del ángulo α

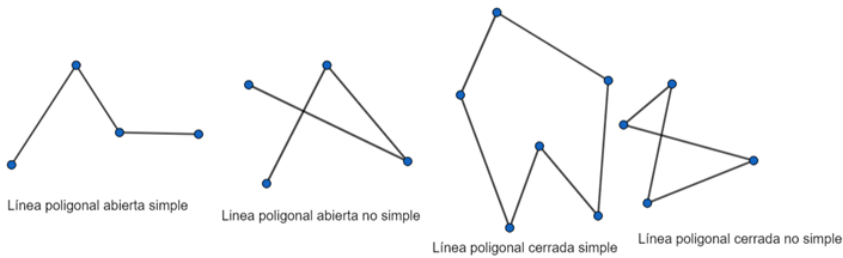


Figura 1.19: Tipos de líneas poligonales

Número de lados del polígono	Nombre del polígono
3	Triángulo
4	Cuadrilátero
5	Pentágono
6	Hexágono
7	Heptágono
8	Octógono
9	Nonágono
10	Decágono
11	Eneágono
12	Dodecágono

Tabla 1.3: Clasificación de polígonos según el número de lados

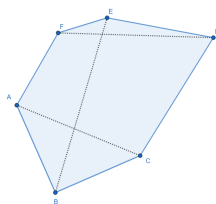


Figura 1.20: Polígono y tres de sus diagonales

Un polígono es *regular* si tiene todos sus lados y sus ángulos iguales. En caso contrario, el polígono es *irregular*. La regularidad es un criterio de clasificación de polígonos. Un polígono es *convexo* si tiene todos sus ángulos menores que 180° . Un polígono cóncavo tiene, al menos, un ángulo mayor que 180° . La convexidad también es un criterio de clasificación. Por tanto, dado un polígono lo nombraremos según el número lados, la regularidad y la convexidad. Hay otro criterio para saber si un polígono es cóncavo o convexo. Si en un polígono existen dos puntos de forma que el segmento que los conecta no está totalmente incluido en el polígono, entonces es cóncavo. En la Figura 1.21 se muestra un heptágono irregular cóncavo.

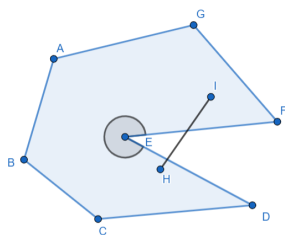


Figura 1.21: Heptágono, irregular y cóncavo

Además, el *centro* de un polígono regular es el punto interior que equidista de todos sus vértices y la *apotema* es el segmento determinado por el centro y el punto medio de uno de sus segmentos. En la Figura 1.22 se muestra un octógono regular, su centro y una de sus apotemas.

Clasificaciones de triángulos

Un *triángulo* es un polígono de tres lados, y es el único polígono rígido, es decir, no se puede deformar. Cumple la propiedad de *desigualdad triangular* que dice que cada lado es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia. Esta propiedad permite saber cuándo se puede construir un triángulo a partir de tres segmentos. Además, la suma de los ángulos interiores de un triángulo es siempre 180° . Para saber si dos triángulos son igua-

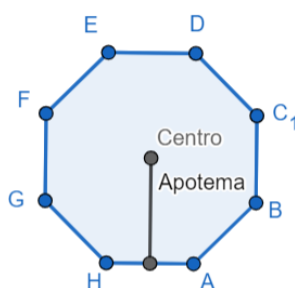


Figura 1.22: Octógono, regular y convexo

les se tiene que comprobar que cumplen una de las siguientes características: a) tienen los tres ángulos iguales; b) tienen los tres lados iguales, o c) tienen dos lados iguales y el ángulo comprendido entre ellos igual.

Hay dos criterios para clasificar triángulos: a) atendiendo a la amplitud de sus ángulos y b) atendiendo a la longitud de sus lados. Según el primer criterio, el triángulo puede ser *acutángulo* si todos sus ángulos son agudos, *rectángulo* si tiene un ángulo recto u *obtusángulo* si tiene un ángulo obtuso. Por el segundo criterio, el triángulo puede ser *equilátero* si los tres lados tienen la misma longitud, *isósceles* si dos lados tienen la misma longitud o *escaleno* si los tres lados tienen diferente longitud. Un triángulo se puede caracterizar según ambos criterios. En la Figura 1.23 se muestra un triángulo rectángulo escaleno. Los triángulos se pueden dibujar con regla y compás si se conocen las longitudes de los tres lados o con regla y transportador de ángulos si se conocen las longitudes de dos de sus lados y la amplitud de un ángulo o las amplitudes de dos de sus ángulos y la longitud de un lado.

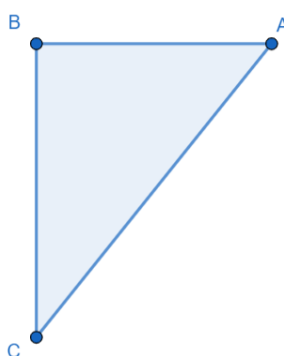


Figura 1.23: Triángulo, rectángulo y escaleno

Los lados que determinan el ángulo recto en un triángulo rectángulo se llaman *catetos* y el tercer lado, *hipotenusa*. El *Teorema de Pitágoras* afirma que en un triángulo rectángulo la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.

Elementos notables del triángulo

Los elementos notables del triángulo son el *baricentro*, el *ortocentro*, el *circuncentro* y el *incentro*. Las medianas de un triángulo son los segmentos que unen cada vértice con el punto medio del lado opuesto. Un triángulo tiene tres medianas. El baricentro G de un triángulo es el punto donde se cortan sus tres medianas. En la Figura 1.24 se muestran las medianas del triángulo, que son los segmentos $\overline{BM}$, $\overline{AN}$ y $\overline{CP}$, y el punto G , que es el baricentro.

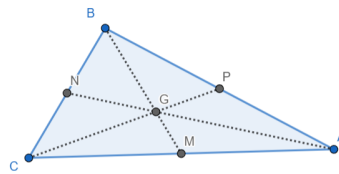


Figura 1.24: Medianas y baricentro de un triángulo

Las *alturas* de un triángulo son los segmentos trazados en perpendicular desde cada vértice hasta el lado opuesto o su prolongación. Un triángulo tiene tres alturas. El punto O en el que se cortan las tres alturas de un triángulo se llama *ortocentro*. En la Figura 1.25 se muestran las tres alturas de un triángulo, que son los segmentos con línea continua, y su ortocentro, que es el punto O . Observar que las alturas no necesariamente están dentro del triángulo.

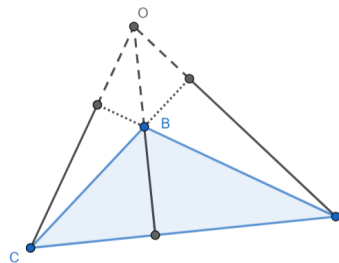


Figura 1.25: Alturas y ortocentro de un triángulo

El circuncentro K de un triángulo es el punto donde se cortan las mediatrices de sus lados. Este punto equidista de sus tres vértices y tomándolo como centro de una circunferencia de radio el segmento que une K con cualquiera de los tres vértices, el triángulo queda inscrito en dicha circunferencia. Es decir, la circunferencia circunscribe al triángulo. En la Figura 1.26 se muestra el circuncentro de un triángulo y su circunferencia circunscrita.

Si dibujamos el baricentro, el ortocentro y el circuncentro de un mismo triángulo, obtenemos que los tres están alineados en una recta que se llama *recta de Euler*. En la Figura 1.27 se muestra la recta de Euler de un triángulo.

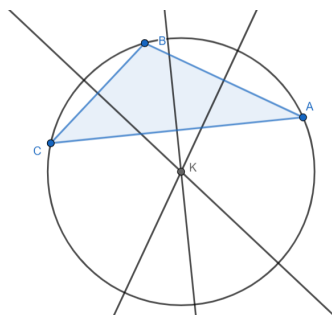


Figura 1.26: Mediatrices y circuncentro de un triángulo

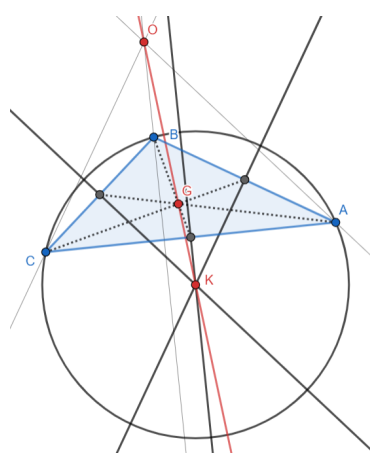


Figura 1.27: Recta de Euler

El *incentro* I de un triángulo es el punto de intersección de las tres bisectrices de sus ángulos. La circunferencia que tiene centro I y radio un segmento perpendicular a cualquiera de los lados del triángulo y que tiene por extremo I está *inscrita* al triángulo. Esto quiere decir que la circunferencia es interior al triángulo y los lados de este son tangentes a ella, como se observa en la Figura 1.28. La línea en rojo es la perpendicular que determina el radio de la circunferencia inscrita al triángulo.

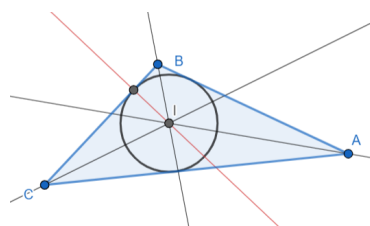


Figura 1.28: Bisectrices e incentro de un triángulo

Clasificaciones de cuadriláteros

Existen dos clasificaciones habituales de los cuadriláteros: a) según el número de lados iguales (4 lados iguales, iguales 2 a 2, no hay igualdad), y b) según el número de ángulos iguales (4 ángulos iguales, iguales 2 a 2, no hay igualdad). Además, los *paralelogramos* son los cuadriláteros que tienen los lados paralelos dos a dos. Se distinguen tres tipos de paralelogramos: a) *rectángulos*, que tienen cuatro ángulos rectos; b) *romboides*, con lados iguales dos a dos y ángulos iguales dos a dos, y c) *rombos*, con los cuatro lados iguales y los ángulos iguales dos a dos. Los polígonos *no paralelogramos* que tienen un par de lados paralelos se llaman *trapezios* y los que no tienen ningún par de lados paralelos se llaman *trapezoides*. Los trapezios con un par de lados iguales se llaman *isósceles* y los que no tienen ningún par de lados iguales se llaman *escalenos*. En la familia de los trapezios escalenos, los que tienen un ángulo recto se llaman *trapezios escalenos rectángulos*. En la Figura 1.29 se muestra una clasificación de los cuadriláteros según el paralelismo entre sus lados que es disjunta. Sin embargo, dentro de la familia de los paralelogramos se establece una clasificación inclusiva, pues tal y como está definido el cuadrado, pertenece a la familia de los rectángulos y de los rombos.

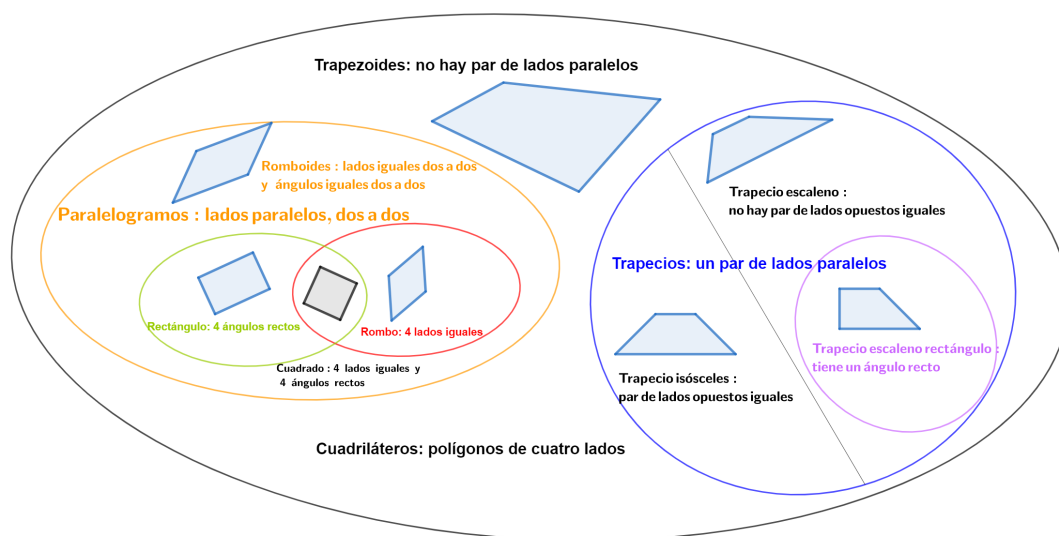


Figura 1.29: Clasificación de cuadriláteros

Polígonos no simples

Un *polígono no simple* es una región de plano limitada por una línea poligonal cerrada y no simple y esta línea. Se caracteriza porque tiene más de una región interior. Los *polígonos estrellados* son un tipo particular de polígonos no simples que resultan de unir de forma alterna los vértices de un polígono convexo. En la Figura 1.30 se muestran ejemplos de polígonos

no simples, siendo el de color rojo un pentágono irregular estrellado y se muestra en línea discontinua el pentágono convexo a partir del cual se ha construido. Los *polígonos regulares estrellados* se construyen a partir de polígonos regulares.

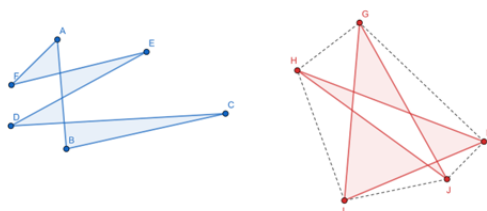


Figura 1.30: Polígonos no simples

Tipos de líneas

Una *curva* es una línea que, sin tener vértices, va cambiando de dirección. Se llama *curva cerrada* a aquella en la que los puntos inicial y final coinciden. En caso contrario, se llama *curva abierta*. Una curva *simple* es la que no tiene punto de intersección consigo misma.

La circunferencia y el círculo

La *circunferencia* es el lugar geométrico de todos los puntos del plano que equidistan de un punto que se llaman *centro*. El *círculo* es la región de plano limitada por la circunferencia. Todos los segmentos que unen el centro con un punto cualquiera de la circunferencia se llaman *radios* y todos tienen la misma medida. En la Figura 1.31 se representan los principales elementos del círculo y de la circunferencia.

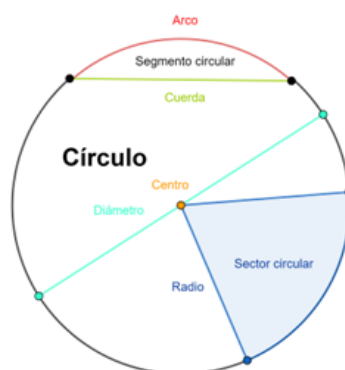


Figura 1.31: Elementos del círculo y de la circunferencia

Posiciones relativas entre rectas y circunferencias

Hay diferentes posiciones relativas entre una recta y una circunferencia y entre dos circunferencias. En la Figura 1.32 se muestran las siguientes posiciones:

- * La recta r es exterior a C_1
- * La recta r es tangente a C_3 y secante a C_4
- * C_1 y C_4 son circunferencias exteriores
- * C_1 y C_3 son circunferencias tangentes exteriores
- * C_4 y C_5 son circunferencias tangentes interiores
- * C_3 y C_4 son circunferencias secantes
- * C_1 y C_2 son circunferencias concéntricas
- * La región de plano comprendida entre C_1 y C_2 se llama corona circular

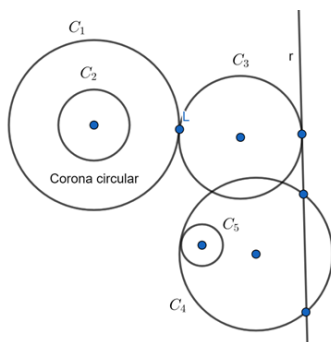


Figura 1.32: Posiciones relativas entre recta y circunferencia y entre circunferencias

1.1.2. Geometría en el espacio

Ángulos en el espacio

Cuando dos planos se cortan, lo hacen mediante una recta y, si consideramos que esas caras son ilimitadas, dividen el espacio en cuatro partes. Cada una de esas partes, incluyendo las propias caras, se llama *ángulo diedro* (Figura 1.33). El ángulo diedro se mide con la ayuda de un ángulo plano: se elige un punto de la recta común y se trazan perpendiculares a éstas contenidas en los semiplanos elegidos; el ángulo de estas perpendiculares es una medida de ángulo diedro.

Consideramos tres semirrectas con origen en el mismo punto y que no están en el mismo plano. Cada dos de esas semirrectas forman un plano, que llamaremos *cara*. Las tres rectas, conjuntamente, dividen el espacio en dos partes (Figura 1.34). Las tres semirrectas están definidas por los segmentos $V-A$, $V-B$ y $V-C$ y el vértice común es V . Se ha pintado una parte

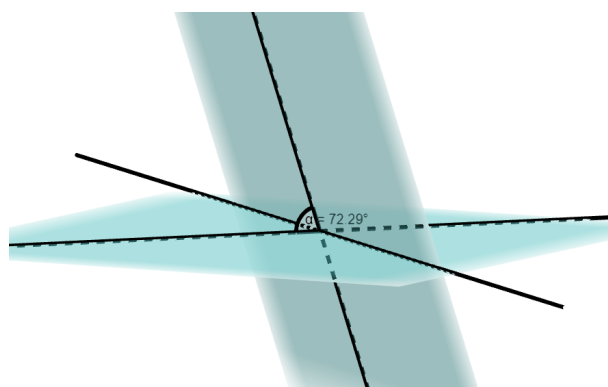


Figura 1.33: Ángulo diedro entre dos planos

del plano $V-A-B$ y una parte del plano $V-B-C$. El triángulo $A-B-C$ es el límite de la figura que no es relevante considerar. Vamos a distinguir esas dos partes con la idea de convexidad. Una de las partes tiene la siguiente propiedad: al prolongar cualquier cara, es imposible «entrar» en esa parte. En la Figura 1.34, esa parte corresponde a la región «más pequeña» de las dos. Esta parte se denomina parte *convexa*. La otra se llama parte *cóncava*, y se caracteriza por el hecho de que, al prolongar una de las caras, atravesamos esa parte. En la Figura 1.34, la parte convexa es la que queda «dentro» de los tres planos $V-A-B$, $V-B-C$ y $V-C-A$.

Si tenemos tres semirrectas concurrentes que no están en el mismo plano, la parte convexa que determinan se llama *ángulo triedro* o, simplemente, triedro. El ángulo triedro incluye las caras y las semirrectas, que se llaman *aristas*. El punto común V se llama *vértice*. En la Figura 1.34, el triedro corresponde a la parte de espacio que hay «dentro» de $V-A$, $V-B$ y $V-C$. Si tenemos cuatro rectas concurrentes de manera que ningún grupo de tres de ellas esté en el mismo plano, la parte convexa asociada se llama ángulo tetraedro. El ángulo tetraedro incluye las caras y las líneas, que se llaman aristas. El punto común se llama vértice y, a veces, cúspide.

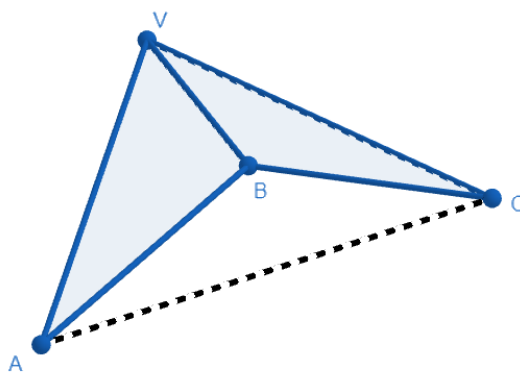


Figura 1.34: Planos que concurren en un punto

Si tenemos varias semirrectas concurrentes, de manera que ningún grupo de tres de ellas esté en el mismo plano, la parte convexa asociada se llama *ángulo poliedro*. El ángulo poliedro incluye sus *caras*, *aristas* y el *vértice o cúspide*. La Figura 1.35, muestra la representación en el plano de un *ángulo tetraedro*; se observan las 4 caras, las 4 aristas y el vértice o cúspide, punto del que parten las cuatro semirrectas.

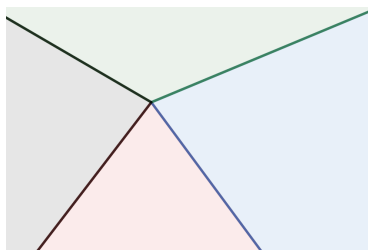


Figura 1.35: Ángulo tetraedro

Un *cuerpo geométrico* o *sólido* es una figura que resulta al considerar una parte del espacio limitada por una superficie cerrada y simple incluyendo esta superficie. Distinguiremos entre poliedros y cuerpos redondos.

Poliedros

Si varios ángulos poliedros cierran, conjuntamente, una parte del espacio, el correspondiente cuerpo geométrico se denomina *poliedro*. Por tanto, las caras de un poliedro siempre son polígonos. El *ortopedro* (Figura 1.36 (a)) es un poliedro formado por ocho triédros, como se observa considerando que, en cada vértice del ortopedro, confluyen tres caras y tres aristas. La *pirámide cuadrangular* (Figura 1.36 (b)) es un poliedro formado por un ángulo tetraedro (el de la cúspide) y cuatro ángulos triédros. El *cono* (Figura 1.36 (c)) no es un poliedro porque una de sus caras no es plana; tampoco son poliedros la esfera o el cilindro.

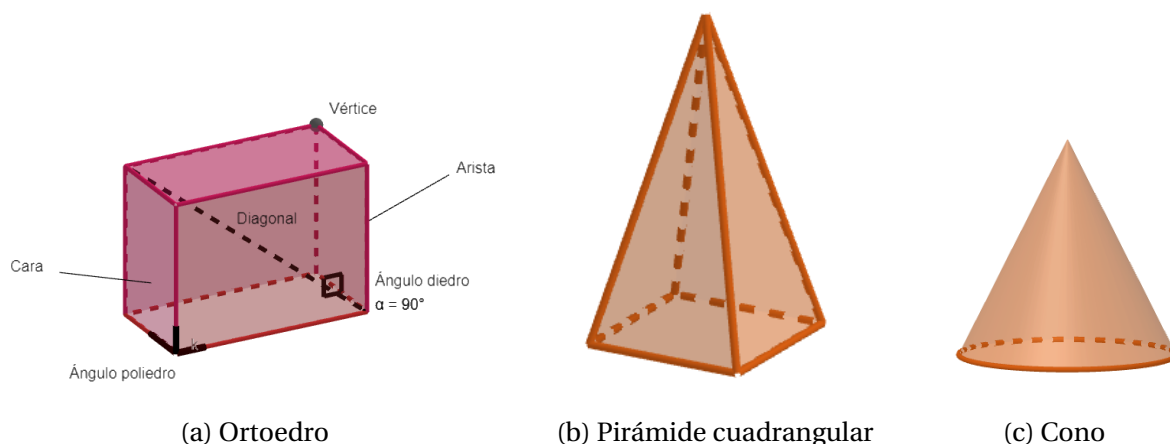


Figura 1.36: Poliedros

En un poliedro, el número de ángulos poliedro coincide con el número de sus vértices, pero este número no da información sobre esos ángulos poliedros. El tipo de ángulo poliedro lo da el número de caras o de aristas que llegan a cada vértice; este número se llama orden del vértice. Por ejemplo, en todo triedro, el vértice es de orden tres y en todo ángulo tetraedro, el vértice es de orden cuatro.

Un *poliedro es cóncavo* si encontramos dos puntos de su superficie de forma que al unirlos el segmento que se forma sobresale al exterior del poliedro. En caso contrario, el *poliedro es convexo*. Para todo poliedro convexo se cumple que el número de vértices más el número de caras menos el número de aristas es igual a 2, lo que se conoce como *Fórmula de Euler*.

Los *poliedros regulares* son aquellos en los que todas sus caras son polígonos regulares idénticos, tienen todos sus vértices del mismo orden y tienen todos sus ángulos poliedros iguales y de la misma medida. Solamente hay 5 poliedros regulares: tetraedro (4 vértices de orden 3, 4 caras triángulos equiláteros y 6 aristas), hexaedro o cubo (8 vértices de orden 3, 6 caras cuadradas y 12 aristas), octaedro (6 vértices de orden 4, 8 caras triángulos equiláteros y 12 aristas), icosaedro (12 vértices de orden 5, 20 caras triángulos equiláteros y 30 aristas) y dodecaedro (20 vértices de orden 3, 12 caras pentágonos regulares y 30 aristas). En la Figura 1.37 se muestran ejemplos de cada poliedro regular.



Figura 1.37: Poliedros regulares

Los *prismas regulares* tienen dos caras que son polígonos regulares, paralelas y colocadas de manera que sus lados son paralelos y se unen por rectángulos. Si el polígono regular tiene n lados, entonces el prisma regular tiene $2n$ vértices de orden 3, n caras rectángulos y 2 caras polígonos regulares de n lados y $3n$ aristas. Por ejemplo, un prisma hexagonal regular tiene 12 vértices de orden 3, 6 caras rectángulos, 2 caras hexágonos regulares y 18 aristas (Figura 1.38). Todos los prismas regulares son rectos, esto es, el ángulo entre el polígono regular y cada rectángulo es 90° .

Las *pirámides regulares* tienen una cara que es un polígono regular y el resto de sus caras son triángulos isósceles o equiláteros iguales. El polígono regular se llama base de la pirámide; el vértice opuesto a la base se llama cúspide de la pirámide. Si el polígono regular tiene n lados, la pirámide tiene 1 vértice cúspide de orden n , n vértices de orden 3, n caras triángulos

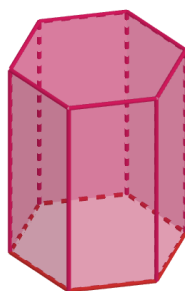


Figura 1.38: Prisma hexagonal regular

isósceles, 1 cara polígono regular de n lados y $2n$ aristas. Por ejemplo, la pirámide hexagonal regular tiene 6 vértices de orden 3, un cúspide de orden 6, 6 caras triángulos isósceles, 1 cara hexágono regular y 12 aristas (Figura 1.39). Las pirámides regulares con todos rectas, lo que significa que la línea definida por la cúspide y el centro del polígono regular es perpendicular al plano de ese polígono.

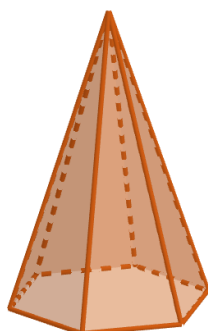


Figura 1.39: Pirámide hexagonal regular

Los *prismas* y las *pirámides no regulares* se definen de la misma forma que en los casos regulares quitando la condición de regularidad de los polígonos a los que se les exigía. Además, también se pueden definir *prismas* y *pirámides oblicuos* quitando la condición de perpendicularidad en los casos rectos. En la Figura 1.40 se muestran un prisma y una pirámide hexagonales oblicuos.

Cuerpos redondos

Los *cuerpos redondos* son cuerpos geométricos limitados por superficies cerradas simples donde todas las caras son superficies curvas y/o planas no poligonales. Aunque hay muchos cuerpos de este tipo, nos interesaremos particularmente por los que derivan del círculo o que contienen círculos entre las superficies que los delimitan

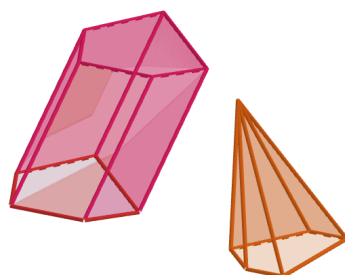


Figura 1.40: Prisma hexagonal oblicuo y pirámide hexagonal oblicua

Los *cuerpos de revolución* son los sólidos que resultan al girar una figura plana alrededor de un eje, denominado *eje de revolución*. Los más representativos en el aula de primaria son el *cilindro*, el *cono recto* y la *esfera* (Figura 1.41).

El *cilindro circular recto* es el cuerpo geométrico que se obtiene al hacer girar un rectángulo alrededor de uno de sus lados. Al revolucionar el rectángulo, aparecen dos círculos que son las *bases* del cilindro y la superficie cilíndrica comprendida entre ellas se denomina superficie o *cara lateral del cilindro*. El lado del rectángulo que genera el cilindro es la *altura del cilindro*. El radio de las bases es el *radio del cilindro*. Si hacemos girar un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos, obtenemos un cuerpo geométrico llamado *cono circular recto*. Al revolucionar el triángulo, aparece un círculo que es la *base del cono* y la superficie cónica alrededor del círculo se denomina superficie o *cara lateral del cono*. El cateto del triángulo alrededor del cual se ha girado es la *altura del cono*. El radio de la base es el *radio del cono*. La *esfera* es el cuerpo geométrico que se obtiene al hacer girar un círculo alrededor de cualquiera de sus diámetros. El diámetro de este círculo es el *diámetro de la esfera*. De forma análoga a los casos de los prismas y de las pirámides, se pueden definir cilindros y conos oblicuos.

1.2. Fundamentos didácticos

1.2.1. La teoría de Piaget

Piaget propuso una teoría para explicar el desarrollo de conceptos espaciales en el niño. Distingue entre la *percepción*, que es «el conocimiento de objetos resultante del contacto directo con ellos» y la *representación* (o imaginiería mental), que «comporta la evocación de objetos en ausencia de ellos» (Piaget y Inhelder, 1956). Las capacidades de percepción del niño se desarrollan hasta la edad de dos años (estadio *sensoriomotor*), mientras que la capacidad de reconstrucción de imágenes espaciales comienza hacia los dos años, y en la mayoría de los casos se perfecciona desde los siete años en adelante (el período de *operaciones concretas*). Los tests de percepción se basan en la capacidad de discriminación entre diferentes

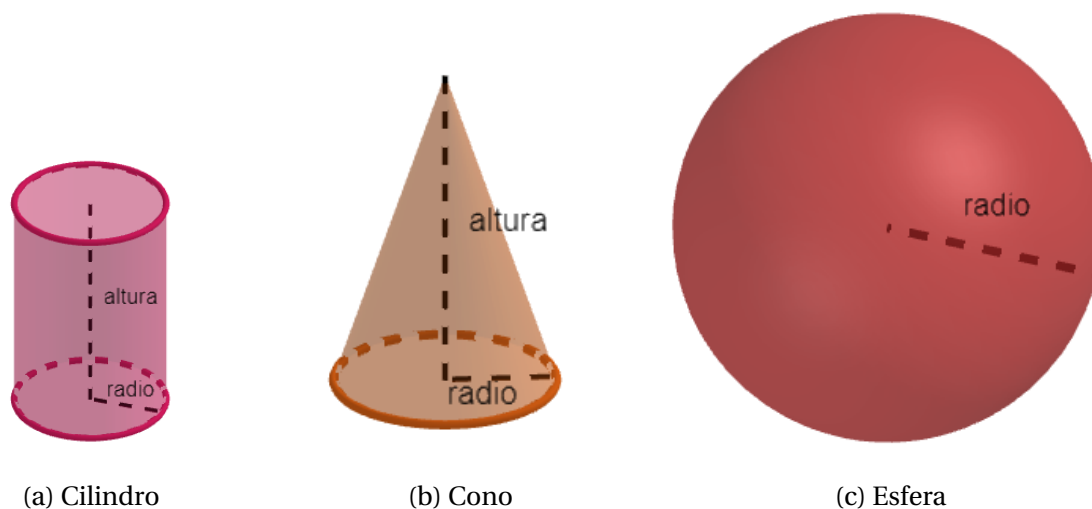


Figura 1.41: Cilindro, cono y esfera

objetos presentados visualmente. Los tests de representación (imaginería mental) requieren la capacidad de identificar formas al tacto y en la capacidad para reproducir formas mediante dibujos.

En cada uno de estos estadios del desarrollo, Piaget distingue una diferenciación progresiva de las propiedades geométricas, partiendo de las que denomina *topológicas*, es decir, propiedades globales independientes de la forma o del tamaño. Estas propiedades son:

- 1 cercanía («proximidad»); por ejemplo, dibujar un hombre con los ojos muy juntos, aun cuando éstos puedan haber sido situados por debajo de la boca.
- 2 separación; por ejemplo no separar la cabeza y el cuerpo;
- 3 ordenación; por ejemplo, dibujar la nariz entro los ojos y la boca;
- 4 cerramiento; por ejemplo, dibujar los ojos dentro de la cabeza;
- 5 continuidad; por ejemplo, hacer que los brazos formen un continuo con el tronco y no con la cabeza.

El segundo tipo de propiedades que, según Piaget, distinguen los niños son las que denomina *proyectivas*. Estas representan la capacidad del niño para predecir qué aspecto presentará un objeto al ser visto desde diversos ángulos. Por ejemplo, un niño puede querer dibujar una cara de perfil y, sin embargo, seguir poniendo dos ojos en ella; o puede no ser capaz de darse cuenta de que al mirar un lápiz desde un extremo se verá un círculo. La rectitud es una propiedad proyectiva, dado que las líneas rectas siguen mostrando aspecto rectilíneo cualquiera que sea el punto de vista desde el que se observe.

El tercer tipo de propiedades son las *euclídeas*, es decir, las relativas a tamaños, distancias y direcciones, que conducen a la medición de longitudes, ángulos, áreas, etc. Se puede distinguir, por ejemplo, un trapecio y un rectángulo en base a los ángulos. Desde el punto de vista proyectivo, ambas figuras son equivalentes, ya que el tablero de una mesa rectangular ofrece aspecto de trapecio visto desde ciertos ángulos. Los niños que manejan estas propiedades pueden reproducir la posición exacta de un punto en una página, o una figura geométrica, y decidir qué líneas y ángulos han de medir para ello.

Por tanto, entre las figuras que se muestran en la Figura 1.42 sería de esperar que la primera figura en ser diferenciada fuese el anillo, pues tener un agujero guarda relación con la propiedad de encerramiento, que es una propiedad topológica. A continuación, el círculo, pues la propiedad que distingue a los cuadriláteros del círculo es la rectitud de los lados, que es una propiedad proyectiva. Finalmente, se haría distinción entre el cuadrado y el rombo, por ser la noción de ángulo una propiedad euclídea. Piaget afirmó que las propiedades proyectivas y euclídeas se distinguen aproximadamente en el mismo periodo.

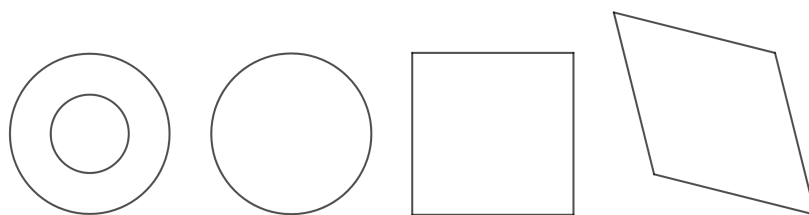


Figura 1.42: Propiedades geométricas

Además, la teoría de Piaget incluye contribuciones sobre la medida que se explicarán en el Tema 4.

Críticas a Piaget

En los 80 se publicaron trabajos criticando ciertos aspectos sobre el campo del desarrollo del pensamiento geométrico y espacial de la teoría piagetiana. Los tres puntos más susceptibles recogidos por Dickson, Brown, y Gibson (1991) fueron los siguientes:

- (a) La percepción se consideró un proceso complejo y se difuminaba la distinción entre la percepción y la representación. Se observaban tareas intermedias y no únicamente los dos tipos que contempla Piaget.
- (b) Los experimentos de Piaget mostraban a veces resultados muy diferentes al modificar la metodología en aspectos aparentemente triviales. Por ejemplo, se vio que los niños podían identificar con mayor facilidad las formas al tacto si se reduce su tamaño; así pues, la dificultad podía residir no tanto en la identificación con información visual como en no utilizar un método de exploración de manipulación de formas más grandes.

- (c) Piaget trató de explicar el desarrollo de ideas espaciales utilizando la estructura lógica de las propias matemáticas al conjeturar una secuencia topológico-proyectivo-euclídea. Se criticó que Piaget no utilizaba definiciones de tales propiedades que fueran matemáticamente aceptables. Además, también se discrepó en que las ideas topológicas fueran las primeras en desarrollarse. Se vio que algunos conceptos topológicos se desarrollan muy al principio, mientras otros, como la equivalencia topológica, se desarrollan más tarde, tras haber sido comprendidas ciertas ideas euclídeas y proyectivas, a pesar incluso de que las ideas topológicas más difíciles pueden no depender matemáticamente de conceptos euclídeos ni proyectivos. En la Figura 1.43 se muestra un ejemplo de equivalencia topológica.



Figura 1.43: Equivalencia topológica de tres figuras extraído de Dickson y cols. (1991)

1.2.2. El modelo de Van Hiele

Hasta finales de los años 70 las teorías de Piaget eran el marco teórico predominante en el mundo de la didáctica de todas las áreas de las matemáticas. Sin embargo, a partir de la siguiente década surgieron diversos marcos teóricos. En lo que se refiere a la geometría, en la actualidad el modelo de razonamiento matemático de Van Hiele es el marco teórico predominante y cuya aplicación al desarrollo curricular está dando mejores resultados (Gutiérrez, 2006). Fue desarrollado por el matrimonio holandés Dina y Pierre Marie Van Hiele a finales de los años cincuenta. Se trata de un modelo de carácter descriptivo porque intenta explicar e interpretar el aprendizaje de los conceptos geométricos mediante una nivelación de razonamiento progresivo y prescriptivo al proponer pautas a seguir en la organización de la enseñanza que permiten pasar al siguiente nivel de razonamiento.

Los niveles de razonamiento

En este modelo se consideran cinco niveles de razonamiento. Se suelen numerar del 1 al 5, aunque hay textos en los que se numeran del 0 al 4 con equivalencia de características. Reciben los siguientes nombres: Visualización o reconocimiento; análisis; deducción informal; deducción formal, y rigor. Un estudiante puede estar, dependiendo del contenido que

se trabaje, en un nivel u otro distinto. Los niveles predominantes en Educación Primaria son los dos primeros, aunque también puede aparecer el tercer nivel. La siguiente síntesis de las características de los niveles de Van Hiele se extrae de Carrillo y cols. (2016).

Nivel 1 (de reconocimiento)

El tipo de razonamiento que corresponde a este nivel es fundamentalmente visual, táctil y se basa en la experiencia física. Sus principales características son:

- * Se tiene una percepción global de las figuras geométricas, por lo que no se identifican de forma explícita sus partes o elementos matemáticos.
- * Las descripciones o comparaciones de figuras u objetos se basan en propiedades, con frecuencia no relevantes geométricamente, como posición, tamaño, etc.
- * Se consideran los objetos geométricos de manera individual, es decir, lo observado en una figura no se suele generalizar a otras figuras diferentes de la misma familia.
- * Al describir objetos geométricos se utilizan con frecuencia referencias a objetos físicos como «se parece a...», «tiene forma de...», etc.

En la Figura 1.44 se muestra la respuesta de un estudiante de 2º de primaria al haberle pedido que pinte los triángulos de color azul, los cuadrados de color rojo, los cuadriláteros de color amarillo y los círculos de color verde. Se observa que identifica dos figuras como triángulos sin tener en cuenta que tienen lados que no son segmentos, no identifica un cuadrado por la posición en la que se presenta o piensa que una figura es un círculo simplemente por estar limitada por una línea curva.

Además, en una tarea de identificación de rectángulos o cuadrados, un argumento típico de los primeros cursos de primaria es que digan que la figura se trata de un rectángulo «porque se parece a una puerta». Asimismo, se muestra la Figura 1.45 y se identifica como un rombo pudiendo decir que «no es cuadrado porque está girado» o «si giráramos la figura sería un cuadrado, pero ahora es un rombo».

Puede ocurrir que haya alumnado que utilice términos matemáticos dando la sensación de que comprende lo que está diciendo. Sin embargo, se puede observar cómo en el conjunto de la verbalización se utilizan estos términos de manera inadecuada sin darles significado geométrico.

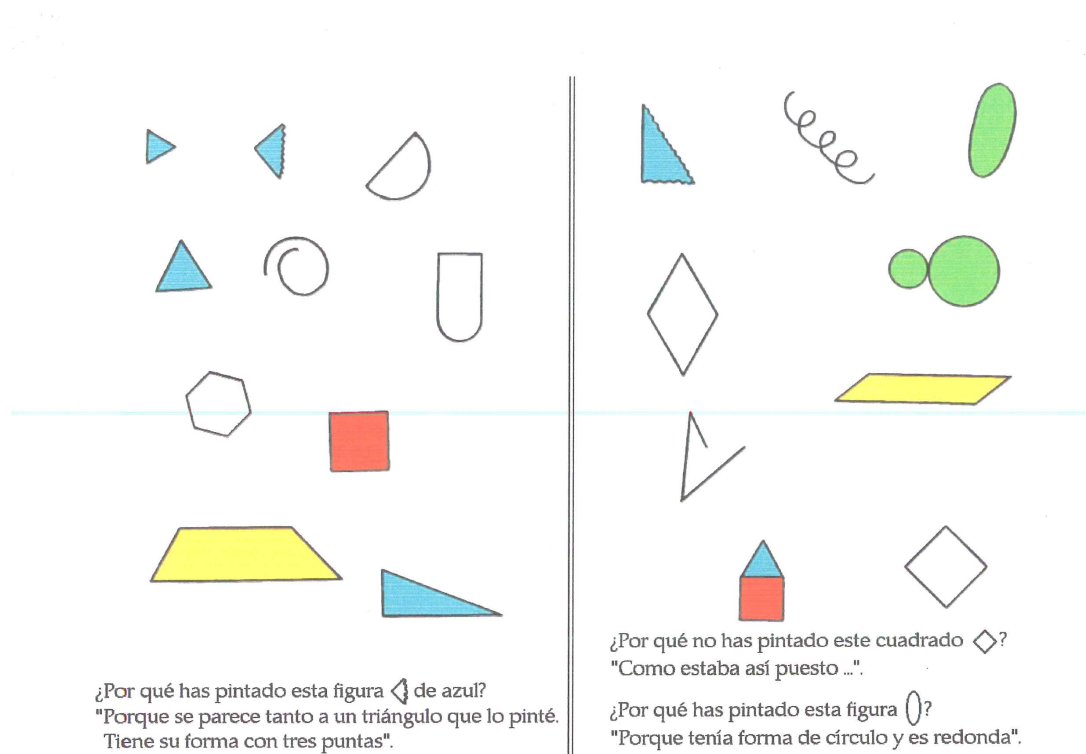


Figura 1.44: Tarea de identificación de figuras en 2º de Educación Primaria

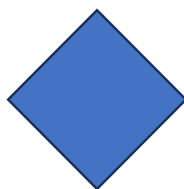


Figura 1.45: Cuadrado

Nivel 2 (de análisis)

Actividad 1.1

Considera las siguientes definiciones:

- * Cuadrado: cuadrilátero con los cuatro lados iguales y los cuatro ángulos rectos.
- * Rombo: cuadrilátero con los cuatro lados iguales.
- * Rectángulo: cuadriláteros con los cuatro ángulos rectos.

Di si el polígono de esta imagen es un cuadrado, un rombo, un rectángulo o ninguna de estas figuras. Si piensas que el polígono puede ser de diferentes tipos, escribe todos lo que correspondan. Utiliza las definiciones dadas para justificar tu elección.



Si planteáramos la Actividad 1.1 a estudiantes de primaria, una posible respuesta podría ser: «Es un cuadrado porque tiene cuatro lados iguales y cuatro ángulos rectos. No es un rombo porque no tiene los ángulos iguales dos a dos. No es un rectángulo porque no tiene los lados iguales dos a dos». En el nivel 2, el estudiantado ya emplea propiedades matemáticas en sus razonamientos para realizar tareas o resolver problemas. En la Actividad 1.1, el alumnado que ya razona en el nivel 2 utiliza propiedades matemáticas para argumentar su decisión. Para justificar la clasificación, el alumnado puede añadir condiciones que no están en las definiciones dadas en la actividad obteniendo la clasificación de la Figura 1.46 a) para mantener la idea de que rectángulos, cuadrados y rombos son familias disjuntas. De ahora en adelante nos referiremos a este caso como *clasificación disjunta*. Si se siguieran estrictamente las definiciones de la actividad, el estudiantado entendería que los cuadrados son rectángulos y rombos, pues cumplen las definiciones dadas de ambos cuadriláteros y se obtendría la *clasificación inclusiva* de la Figura 1.46 b). En el nivel 2, el alumnado puede manejar clasificaciones simples, pero encuentra más dificultad cuando trabaja con definiciones complejas que generan clasificaciones inclusivas como las de la Actividad 1.1.

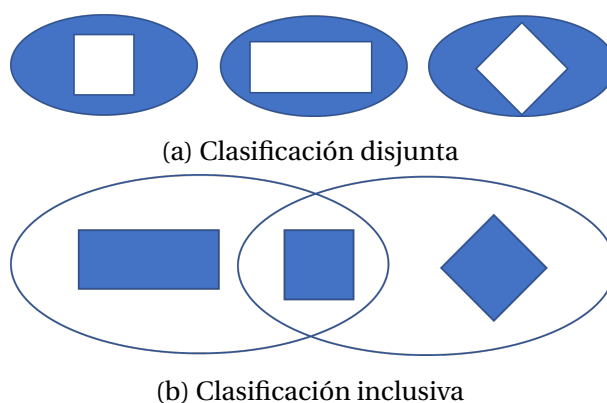


Figura 1.46: Tipos de clasificaciones

Actividad 1.2

En esta imagen se muestran las definiciones de los paralelogramos presentadas en el cuarto curso de primaria en el libro de texto de Anaya. ¿Cómo son estas definiciones? Con estas definiciones, ¿qué tipos de razonamientos pueden generar la clasificación disjunta y la clasificación inclusiva?



En los libros de texto de primaria es posible encontrar definiciones diferentes de algunas formas geométricas, por lo que es frecuente que el estudiantado tenga que cambiar de definición de un curso a otro. Una característica del nivel 2 es la resistencia a este tipo de cambios. Ante una definición alternativa a la que se ha aprendido, el alumnado rechaza la nueva y sigue utilizando la suya.

Actividad 1.3

Analiza las definiciones de polígono y de sus elementos presentadas en las siguientes figuras. De arriba a abajo, las definiciones se ubican en los cursos 3º, 4º y 5º y han sido extraídas de *Matemáticas 3: Primaria. Pieza a pieza* (2022, p. 108), *Matemáticas 4: Primaria. Pieza a pieza* (2022, p. 200) y *Matemáticas 5: Primaria. Pieza a pieza* (2022, p. 170), respectivamente. ¿Qué diferencias encuentras?

Los polígonos

Un **polígono** es una superficie plana con todos sus bordes rectos.

Elementos

Los **elementos** de un polígono son: **ángulos, vértices y lados.**

Perímetro

El **perímetro** de un polígono es la suma de las longitudes de los lados.

$$P = 9 + 13 + 15 + 15 + 20 = 72 \text{ cm}$$

Los polígonos

Un **polígono** es una superficie plana y cerrada con todos sus bordes rectos.

El **perímetro** (P) de un polígono es la suma de las longitudes de los lados.

$$P = 8 + 13 + 8 + 5 = 34 \text{ m}$$

Un polígono es **regular** cuando tiene todos sus lados y sus ángulos iguales.

Polígonos. Elementos y clasificación

Un **polígono** es una figura plana limitada por segmentos de recta. Los elementos de los polígonos son: lados, ángulos, vértices y diagonales.

Los polígonos se clasifican según su número de lados:

Triángulo 3 lados	Cuadrilátero 4 lados	Pentágono 5 lados
Hexágono 6 lados	Heptágono 7 lados	Octógono 8 lados

Actividad 1.4

- (a) ¿Cuánto suman los ángulos interiores de un triángulo? Demuestra tu respuesta.
- (b) ¿Cuánto suman los ángulos interiores de un cuadrilátero? Demuestra tu respuesta.
- (c) ¿Cuánto suman los ángulos interiores de un polígono convexo de n lados? Demuestra tu respuesta.

Si se plantea la Actividad 1.4 al estudiantado de primaria, este podría dibujar diferentes ejemplos de triángulos y cuadriláteros y medir los ángulos para poder sumarlos y responder a la preguntas (a) y (b). Podría dar respuestas del tipo: «He dibujado un triángulo, he medido sus ángulos con el transportador y luego he sumado los tres ángulos. Luego lo he repetido con otro triángulo y otra vez la suma ha sido 180° ». Y podría dar una respuesta análoga en el caso de los cuadriláteros. Estas demostraciones se basan en la medición de ángulos en varios ejemplos concretos, e incluso en solo uno, para seguir con una generalización ya que el estudiantado se convence con ejemplos, sin necesitar más argumentos, de que la propiedad se cumple en general para todos los triángulos o cuadriláteros. El alumnado en el nivel 2 podría construir la Tabla 1.4 para responder al apartado (c) de la Actividad 1.4 buscando ejemplos de polígonos con cada vez mayor número de lados pero sin conseguir llegar a generalizar.

Nº de lados	Nº de diagonales	Nº de triángulos	Suma de ángulos
3	0	1	180°
4	1	2	$2 \times 180 = 360^\circ$
5	2	3	$3 \times 180 = 540^\circ$
6	3	4	$4 \times 180 = 720^\circ$
20	17	18	$18 \times 180 = 3240^\circ$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
100	97	98	$98 \times 180 = 17640^\circ$

Tabla 1.4: Suma de los ángulos interiores de un polígono convexo.

Como síntesis del nivel 2 de razonamiento de Van Hiele se presentan las siguientes características:

- * La definición de un objeto geométrico consiste en una lista con muchas de las propiedades matemáticas aprendidas.
- * Se reconoce de forma explícita que las figuras y cuerpos geométricos están formados por partes, propiedades y elementos matemáticos, pero no se establecen relaciones matemáticas entre ellos. Se tiene dificultad en el manejo de clasificaciones disjuntas derivadas de definiciones complejas.
- * Es un razonamiento empírico, basado en la manipulación de ejemplos concretos. Las propiedades matemáticas se pueden descubrir mediante ejemplos, y la demostración de dichas propiedades consiste en verificarlas en algunos ejemplos particulares.
- * Se tiene capacidad para generalizar las propiedades observadas en unas pocas figuras u objetos a todos los de la misma familia.
- * Solo se pueden comprender las estructuras lógicas sencillas, pues hay dificultad para manejar correctamente partículas lógicas como *y*, *o*, *a veces*, *por lo menos/al menos*, *no*, etc.

Se puede interpretar el nivel 2 como el inicio del razonamiento matemático. Puede ocurrir que en un determinado periodo de tiempo el alumnado mezcle razonamientos de los niveles 1 y 2, pero, el objetivo debería ser que se abandonaran los argumentos visuales hasta llegar a usar solamente propiedades matemáticas.

Nivel 3 (de clasificación)

El alumnado que se encuentre en el nivel 3 de razonamiento de Van Hiele podría responder a la Actividad 1.1 diciendo que: «Según las definiciones, la figura cumple la definición de cuadrado, ya que tiene 4 lados iguales y 4 ángulos rectos; también a la definición de rectángulo, ya que tiene 4 ángulos rectos; y también a la definición de rombo porque tiene 4 lados iguales». Es decir, de acuerdo a las definiciones dadas, maneja una clasificación inclusiva de los objetos. En contraposición al estudiantado que está en un nivel 2, en el nivel 3 sí se utilizan las propiedades de las definiciones para relacionar las de una definición con las de otra. Por tanto, se incluyen los cuadrados en el conjunto de los rombos y en el de los rectángulos, como en la Figura 1.46 b), manejando una clasificación diferente a la que habían aprendido con anterioridad, es decir, la de la Figura 1.46 a).

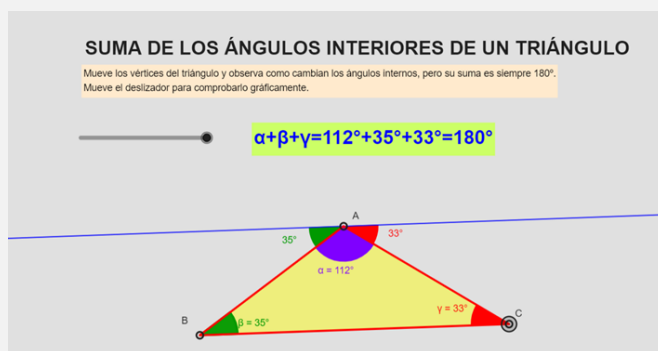
El alumnado en el nivel 3 podría responder al apartado (c) de la Actividad 1.4 verbalizando una relación general para cualquier polígono convexo: «La cantidad de diagonales que salen de un vértice es 3 menos el número de lados, ya que podemos unir cada vértice con todos los demás excepto consigo mismo y con los dos adyacentes. Además, se forma un triángulo más que diagonales salen de un vértice y, por tanto, salen 2 triángulos menos que lados». En este caso, se relacionan diversos elementos y propiedades para demostrar la fórmula obtenida

a partir de los ejemplos. A diferencia del estudiantado del nivel 2, en el nivel 3 se utilizan los ejemplos como apoyo para descubrir propiedades o definiciones que luego servirán para dar el salto a la deducción. El estudiantado que esté familiarizado con el uso de expresiones algebraicas, podrá obtener en el nivel 3 la expresión $180^\circ(n - 2)$ como la suma de los ángulos interiores de un polígono convexo de n lados.

Actividad 1.5

Mueve los vértices del triángulo del siguiente applet de GeoGebra para ver una demostración gráfica de la propiedad de que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180° .

<https://www.geogebra.org/m/TxJJHhDr>



El alumnado en el nivel 3 puede entender la demostración gráfica como la de la Actividad 1.5 guiada por el docente.

Como síntesis, las características del nivel 3 del razonamiento de Van Hiele son:

- * Se reconoce que las partes, propiedades y elementos matemáticos que integran las figuras y cuerpos geométricos está ligados mediante relaciones matemáticas. Se realizan implicaciones lógicas simples en un contexto matemático abstracto.
- * Se hacen clasificaciones lógicas de familias de objetos matemáticos, siendo estas clasificaciones inclusivas (Figura 1.46 (b)) o disjuntas (Figura 1.46 (b)), según las definiciones que se usen.
- * Se usan correctamente las partículas lógicas habituales. Esto permite definir objetos geométricos correctamente mediante listas de propiedades necesarias y suficientes.

- * Se pueden deducir propiedades de objetos geométricos mediante la manipulación de ejemplos y también de manera deductiva abstracta. La demostración de estas propiedades se hace mediante argumentos abstractos deductivos informales.
- * Imposibilidad de realizar demostraciones formales de manera autónoma, pero se pueden entender sus pasos con guía del profesor.

Nivel 4 (de deducción formal)

Este es el nivel de razonamiento utilizado por matemáticos profesionales y tiene las siguientes características:

- * Es deductivo formal y permite entender la estructura axiomática de las matemáticas (axiomas, hipótesis, definiciones, etc.).
- * Se realizan demostraciones formales de manera autónoma, planteando una secuencia de implicaciones.
- * Se comprende el hecho de que haya diversas definiciones, que pueden ser equivalentes o no, de un mismo concepto.
- * Se reconoce la variedad de diferentes demostraciones para una misma propiedad.

Nivel 5 (de rigor)

En este nivel se entiende que una determinada geometría se basa en un conjunto de axiomas y que con diferentes conjuntos de axiomas, se crean diferentes geometrías. Las características de este nivel son:

- * Se comprende la necesidad de un razonamiento formal riguroso que base las demostraciones en un determinado conjunto de axiomas.
- * Se puede operar con sistemas axiomáticos diferentes, y se es capaz de realizar demostraciones formales en cada uno de ellos.
- * Se pueden analizar y comparar geometrías basadas en distintos sistemas axiomáticos.

Características de los procesos de razonamiento de los niveles de Van Hiele

En Gutiérrez y Jaime (1998) se identifican diferentes procesos de razonamiento como característicos de varios (pero no todos) los niveles de van Hiele:

- 1 Reconocimiento de tipos y familias de figuras geométricas, identificación de componentes y propiedades de las figuras.

- 2 Definición de un concepto geométrico. Este proceso puede considerarse de dos maneras: A medida que los alumnos formulan definiciones del concepto que están aprendiendo, y a medida que los alumnos utilizan una definición dada leída en un libro de texto, o escuchada del profesor o de otro alumno.
- 3 Clasificación de figuras o conceptos geométricos en diferentes familias o clases.
- 4 Demostración de propiedades o enunciados, es decir, explicar de alguna manera convincente por qué dicha propiedad o afirmación es cierta.

Cómo un estudiante lleva a cabo cada uno de los procesos descritos indica en qué nivel de razonamiento se encuentra. En la Tabla 1.5, extraída de Gutiérrez y Jaime (1998), se presentan las características de cada proceso según el nivel de razonamiento en el que se encuentra el estudiante.

Procesos de razonamiento	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 4
Reconocimiento	Propiedades físicas	Propiedades matemáticas	–	–
Uso de definiciones	–	Se usan definiciones con estructura simple	Se utiliza cualquier definición	Se admiten definiciones equivalentes
Formulación de definiciones	Lista de propiedades físicas	Lista de propiedades matemáticas	Conjunto de propiedades necesarias y suficientes	Se demuestra la equivalencia entre definiciones
Clasificación	Disjunta, basada en propiedades físicas	Disjunta, basada en propiedades matemáticas	Puede oscilar entre inclusiva y disjunta	–
Demostración	–	Verificación con ejemplos	Deductivas informales abstractas	Deductivas formales

Tabla 1.5: Características de los procesos de razonamiento en cada nivel de Van Hiele extraídas de Gutiérrez y Jaime (1998).

Propiedades de los niveles de razonamiento del modelo de Van Hiele

Jaime y Gutiérrez (1990) definen las propiedades a nivel global que cumplen los niveles de Van Hiele y se sintetizan a continuación:

- * **Jerarquización y Secuencialidad:** Cada nivel de razonamiento se sostiene en el anterior. No es posible alcanzar un nivel de razonamiento sin antes haber superado el nivel inferior ya que en cada nivel hay determinadas habilidades que están siendo usadas implícitamente por los estudiantes y cuyo uso explícito se aprende en el siguiente nivel. Es decir, los niveles de Van Hiele tienen una estructura recursiva. Por ejemplo, en el nivel 1 los elementos que se manejan de forma explícita son las figuras y de forma implícita las partes y propiedades de las figuras, que pasan a trabajarse de forma explícita en el nivel 2. Las implicaciones entre las propiedades se manejan de forma implícita en el nivel 2 y de forma explícita en el nivel 3. Por último, la deducción formal de teoremas se trabaja de forma implícita en el nivel 3 y explícita en el nivel 4. Hay que tener cuidado, ya que puede aparentar que un estudiante está en un determinado nivel porque ha aprendido rutinariamente o de memoria procesos propios de ese nivel y, sin embargo, no comprenderlos.
- * **Especificidad del lenguaje:** Las diferentes capacidades de razonamiento asociadas a los niveles de van Hiele no solo se reflejan en la forma de resolver los problemas propuestos, sino en la forma de expresarse y en el significado que se le da a determinado vocabulario. Cada nivel lleva asociado un tipo de lenguaje y un significado específico del vocabulario matemático. Dos personas que razonan e interpretan los argumentos en diferentes niveles no podrán entenderse. Por tanto, el docente debe ajustarse al nivel en que están sus estudiantes.
- * **Continuidad:** El paso de un nivel de razonamiento al siguiente se produce de manera gradual y durante algún tiempo el estudiante se encontrará en un período de transición en el que combinará razonamientos de un nivel y del otro. No debe confundirse haber comprendido la solución de un problema (o tipo de problemas) concreto con haber adquirido destreza en el manejo del nuevo tipo de razonamiento necesario para resolver ese problema. Solo se puede considerar adquirido un nivel de razonamiento cuando se tenga un dominio adecuado de todas las destrezas características de ese nivel. Este dominio no se adquiere de forma automática y simultánea.
- * **Localidad:** El individuo se desenvuelve en distintos niveles de razonamiento si le proponemos actividades basadas en diferentes áreas de las matemáticas. Esta diversidad de niveles es más fácil encontrarla en estudiantes que no han llegado a razonar en el nivel 4 en ningún área de las matemáticas y esto es lo que ocurre con el estudiantado de Educación Primaria.

El progreso en los niveles de razonamiento de Van Hiele no depende de la edad del estudiante, sino de cuál ha sido su experiencia en la adquisición de las habilidades propias de cada nivel. No se puede asumir que todo el alumnado de un determinado curso de Educación Primaria está al mismo nivel de razonamiento. El docente debe conocer el nivel de razonamiento de su estudiantado para poder hacer adaptaciones que le permitan incrementar su nivel. Gutiérrez y Jaime (1998) especifican las características que debe tener una prueba para conocer el nivel de razonamiento del modelo de Van Hiele:

- a) Debe evaluar los cinco procesos enumerados anteriormente (reconocimiento, formulación y uso de definiciones, clasificación, prueba).
- b) Debe evaluar los cuatro niveles de razonamiento, es decir, cada alumno debe tener la posibilidad de responder a las preguntas según su capacidad máxima de razonamiento.
- c) Debe ofrecer a los alumnos la oportunidad de explicar las razones de sus respuestas para que el investigador pueda determinar qué nivel de resonancia había detrás de cada respuesta.

Actividad 1.6

A vuestro grupo de trabajo se le asignarán dos resoluciones de un test para evaluar el nivel de Van Hiele. Cada resolución corresponde a un curso diferente de Educación Primaria. ¿Qué niveles de Van Hiele habéis detectado en las resoluciones? Razonad vuestras respuestas con ejemplos. Recordad que un mismo estudiante puede presentar diferentes niveles de razonamiento según el problema que se le plantee. ¿Hay diferencias en el nivel de razonamiento según el curso?

Las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele

El matrimonio Van Hiele desarrolló una metodología de enseñanza para ayudar a los alumnos a progresar en su nivel de razonamiento. De esta manera, dieron unas directrices de cómo organizar la enseñanza de la geometría para fomentar dicho progreso, denominadas *las fases de aprendizaje* del modelo de van Hiele. Las fases son cinco y organizan el trabajo del profesor y de los alumnos desde el comienzo hasta el final de cualquier tema de geometría. Estas fases son las mismas para todos los niveles de razonamiento de los alumnos y para todos los temas de estudio. Hacen hincapié en lo que debe considerar el profesor como respuesta correcta o incorrecta para cada contenido específico de geometría. Se sintetiza a continuación la descripción de cada fase según Jaime y Gutiérrez (1990).

- * **Fase 1, de información.** El objetivo es dirigir la atención del estudiantado hacia el nuevo tema a estudiar y hacerle saber el tipo de trabajo que va a hacer, qué tipo de problemas resolverá, qué materiales utilizará, etc. Además, esta fase le servirá al docente para que descubra qué nivel de razonamiento y conocimiento tiene su alumnado sobre el nuevo tema.
- * **Fase 2, de orientación dirigida.** El objetivo es que el alumnado explore el campo de estudio por medio de investigaciones basadas en el material que el docente le ha proporcionado. Se tiene que conseguir que el estudiantado descubra, comprenda y aprenda cuáles son los conceptos, propiedades, figuras, etc. principales en el área de la geometría que están estudiando. El estudiantado por sí solo, no podría realizar un aprendizaje eficaz, por lo que es necesario que las actividades que se le propongan estén convenientemente dirigidas hacia los conceptos, propiedades, etc. que se deben estudiar. El trabajo estará seleccionado de tal forma que los conceptos y estructuras característicos del tema se les presenten de forma progresiva.
- * **Fase 3, de explicitación.** El objetivo de esta fase es hacer que el estudiantado intercambie sus experiencias, que comente las regularidades que ha observado, que explique cómo ha resuelto las actividades, todo ello dentro de un contexto de diálogo en el grupo. El hecho de que aparezcan puntos de vista diferentes será beneficioso para que cada estudiante justifique su opinión teniendo que analizar sus ideas, ordenarlas y expresarlas adecuadamente. Esta fase no se centra en el aprendizaje de cosas nuevas, sino en la revisión del trabajo hecho antes, en la obtención de conclusiones y en la práctica y perfeccionamiento en la forma de expresarse.
- * **Fase 4, de orientación libre.** El objetivo de esta fase es consolidar el aprendizaje adquirido en las fases anteriores. El alumnado utilizará los conocimientos que tiene para resolver nuevos problemas que puedan desarrollarse de diferentes formas o que puedan tener distintas soluciones. En esta fase los problemas no pueden ser aplicaciones directas de fórmulas, datos memorizados o algoritmos conocidos, sino que han de servir para aprender nuevas relaciones y propiedades. En esta fase, el docente limitará su ayuda en la resolución de los problemas.
- * **Fase 5, de integración.** Se pretende que el alumnado adquiera una visión general de los contenidos y métodos que tiene a su disposición, relacionando los nuevos conocimientos con otros campos que haya estudiado anteriormente. El docente debe dirigir la elaboración de resúmenes o recopilaciones de información que ayuden al estudiante a lograr la integración del conocimiento. Las actividades ahora no deben requerir nuevos conocimientos, sino únicamente la organización e integración de los ya estudiados.

1.2.3. El modelo de Vinner

Los apuntes de esta sección se basan en el trabajo de Jaime y Gutiérrez (2016).

Actividad 1.7

Pensad en una manzana, en un cuadrado, un rectángulo o un romboide y salid a la pizarra a dibujar las imágenes que tenéis en mente.

En el proceso de aprendizaje de los conceptos matemáticos en los trabajos de Vinner (1991) y Vinner y Hershkowitz (1983) se definen dos estructuras que se forman en la mente para gestionar la información geométrica:

- * La *imagen conceptual* está formada por la información gráfica memorizada incluyendo los ejemplos del concepto observados o dibujados por el individuo. Por ejemplo, al aprender el concepto de círculo, el alumnado memoriza los dibujos de círculos que ha visto por ejemplo en una moneda, en el libro de texto, etc. Una imagen será correcta si le permite al individuo seleccionar correctamente todos los ejemplos de ese concepto y cuando las propiedades que lleva asociadas son todas relevantes (Gutiérrez y Jaime, 1996).
- * La *definición conceptual* está formada por la información verbal memorizada. Esta estructura incluye la definición aprendida del concepto, que puede ser correcta o no, y la verbalización de las propiedades matemáticas del concepto. Por ejemplo, al aprender el concepto de círculo, el alumnado memoriza su definición y también que tiene radio, diámetros, la fórmula para el cálculo de su área, etc.

En el contexto de este modelo, se entiende que el aprendizaje de un concepto se ha completado si se ha formado una imagen y una definición del concepto integradas lo más correctas y completas posible. Es responsabilidad del docente realizar actividades ricas que ayuden a establecer definiciones e imágenes adecuadas de los conceptos.

Puede ocurrir que se presente un concepto sin mucha variedad de ejemplos que lo ilustren en cuanto a sus posiciones, formas o tamaños. Denotaremos por *prototípicos* los ejemplos que aparecen con mucha frecuencia en las aulas de primaria. En el caso de los polígonos o de los poliedros, los ejemplos prototípicos se presentan «apoyados» sobre uno de sus lados o una de sus bases. Además, los polígonos prototípicos tienen dimensiones que se asemejan mucho a los casos regulares. Como caso excepcional, el rombo prototípico se suele presentar «apoyado» sobre uno de sus vértices con la diagonal vertical. ¿Han aparecido ejemplos proto-

típicos en el apartado a) de la Actividad 1.7? En la Figura 1.47 se muestra cómo se presentan gráficamente los conceptos prisma y pirámide en un libro de texto de 5º de primaria con dos ejemplos prototípicos.

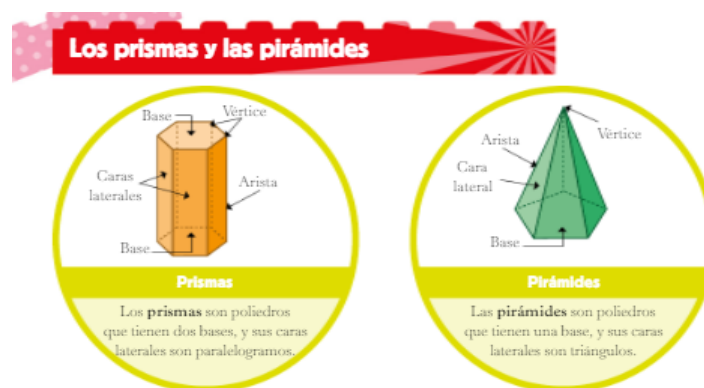


Figura 1.47: Presentación de los conceptos prisma y pirámide con ejemplo gráfico prototípico extraída de *Matemáticas 5: Primaria. Pieza a pieza* (2022, p. 179).

Cuando el alumnado de primaria tiene que decidir si una figura geométrica pertenece a una determina familia, lo que hace es compararla con los ejemplos que tiene memorizados y que forman su imagen conceptual de esa familia de figuras. Si la figura que está analizando se parece lo suficiente a los ejemplos de su imagen conceptual, la identificará. Si no, pensará que pertenece a otra familia de figuras. Por tanto, si las imágenes conceptuales del alumnado son pobres en cuanto a que únicamente se forman con ejemplos prototípicos, se pueden generar problemas en el aprendizaje de los conceptos.

Actividad 1.8

En parejas, analizad los temas de geometría de libros de texto de varios cursos de Primaria para observar la variedad de formas, tamaños y posiciones de los triángulos dibujados y valorar la abundancia de ejemplos prototípicos. Haz el mismo tipo de análisis para los cuadriláteros, polígonos regulares, prismas, pirámides, conos y cilindros.

Para evitar el efecto negativo que produce la reducción de los ejemplos a solamente los prototípicos, el docente tiene que enriquecer la información proporcionada al alumnado con actividades en las que se vean, manipulen, describan y analicen una gran variedad de formas, tamaños y posiciones de las figuras correspondientes al concepto que se está aprendiendo.

E] objetivo que se pretende es que el estudiantado recuerde muchas formas, tamaños y posiciones diferentes, para que llegue a abstraer solamente las propiedades matemáticas que realmente posee el concepto, es decir, las propiedades relevantes del concepto.

La enseñanza de los conceptos geométricos en primaria no puede estar limitada únicamente a la formación de imágenes conceptuales. Es necesario que el estudiantado comprenda y aprenda, además, sus definiciones y propiedades básicas. La definición conceptual deberá desarrollarse en paralelo a la formación de la imagen conceptual. El docente deberá conseguir que el alumnado haga formulaciones correctas de la definición y las propiedades del concepto que se esté aprendiendo. Esto no significa que el alumnado deba aprender una definición de forma memorística, pues esto conlleva que se utilicen de forma independiente la imagen y la definición del concepto.

La Figura 1.48 muestra las respuestas de un estudiante de magisterio en el contexto de la investigación recogida en Gutiérrez y Jaime (1996) y ante la tarea de trazar sobre el lado a la altura de diferentes triángulos. Se puede observar que el estudiante tiene una imagen errónea del concepto de altura, pues lo confunde con la mediana. En el experimento se proporcionaba a los participantes la definición de altura de un triángulo (perpendicular trazada desde un vértice hasta el lado opuesto o su prolongación). Por tanto, los errores ilustrados en la Figura 1.48 y los demás errores descritos en el trabajo de Gutiérrez y Jaime (1996) muestran una desconexión entre la imagen y la definición del concepto de altura. Este tipo de desconexiones se puede observar en primaria en diversos conceptos geométricos. Gutiérrez y Jaime (1996) explican como ejemplo que un estudiante de primaria recita correctamente la definición de polígono regular como polígono que tiene todos sus lados y ángulos iguales y, sin embargo, identifica como tal el rectángulo «porque tiene los ángulos iguales». Recíprocamente, el alumnado puede identificar correctamente un polígono regular y no saber definirlo adecuadamente. Vinner (1991) explica que esto se debe a que no se han establecido correctamente las conexiones entre la imagen y la definición de un concepto y se utilizan con independencia una y otra. Por tanto, el docente tiene que lograr que el alumnado comprenda y aprenda los nuevos contenidos relacionando la imagen y la definición para saber utilizar ambas de forma combinada. Para ello, por ejemplo, se pueden plantear actividades de clasificación o identificación de figuras geométricas que exijan argumentar el motivo de las decisiones y verbalizar de forma explícita la definición.

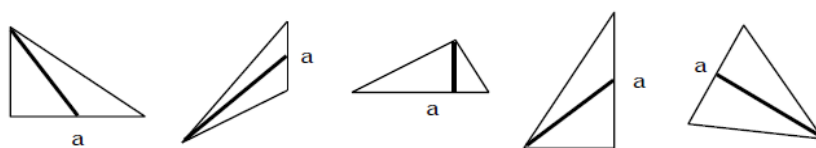
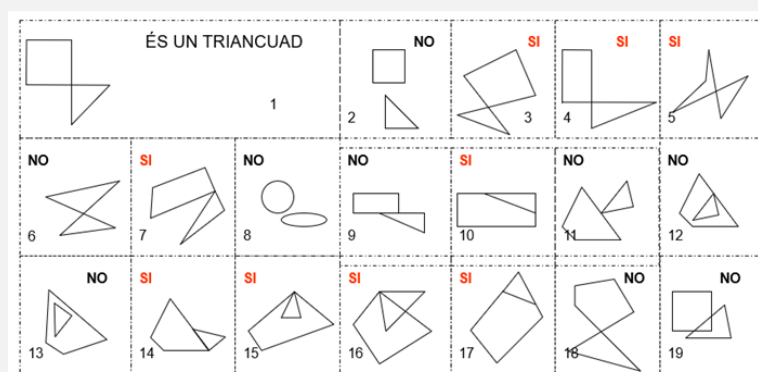


Figura 1.48: Imagen errónea del concepto de altura extraída de Gutiérrez y Jaime (1996)

La metodología de ejemplo y contraejemplo

Actividad 1.9

Da una definición de triancuad teniendo en cuenta los ejemplos y contraejemplos que se muestran a continuación:



Para conseguir la conexión entre la imagen y la definición de un concepto geométrico se presentarán actividades cuyo objetivo sea el descubrimiento de las características relevantes del nuevo concepto y finalmente la articulación de una definición correcta. La metodología consistirá en mostrar al estudiantado una amplia variedad de ejemplos y contraejemplos del concepto, es decir, figuras que se correspondan y que no se correspondan con el concepto.

Se muestran a continuación los pasos a seguir, establecidos en Charles (1980), para preparar una buena colección de ejemplos y contraejemplos de un concepto geométrico. En particular, se desarrollará en base a la *altura de un triángulo* y será aplicable a cualquier otro concepto geométrico de Educación Primaria.

Paso 1. Elegir una definición adecuada del concepto. En matemáticas muchos conceptos se pueden definir de varias formas correctas. Como hemos visto en la Actividad 1.3 la variedad de definiciones se refleja en los libros de texto. Por tanto, el primer paso de esta metodología consistirá en elegir la definición que se va enseñar. Algunos de los criterios didácticos para la elección de la definición son los siguientes: elegir la misma definición que el alumnado ha estudiado en años anteriores para no generar confusión; elegir una definición diferente de la que el alumnado ha estudiado en años anteriores para aumentar sus conocimientos matemáticos; elegir la definición con la que como docente más cómodamente trabaje; elegir la definición que a largo plazo es matemáticamente más útil; elegir la definición que es más fácil de entender para el grado de madurez del estudiantado; rechazar una definición porque es matemáticamente incorrecta; rechazar una definición porque es matemáticamente muy compleja, o rechazar una definición porque su estructura gramatical es muy compleja.

Actividad 1.10

Volviendo a la Actividad 1.3 recogemos las definiciones de polígono (a), b) y c)) y añadimos tres más (d), e) y f)):

- a) Un polígono es una superficie plana con todos sus bordes rectos.
- b) Un polígono es una superficie plana y cerrada con todos sus bordes rectos.
- c) Un polígono es una superficie plana limitada por segmentos de recta.
- d) Un polígono es una forma plana limitada por rectas
- e) Un polígono es una superficie plana limitada por segmentos de recta.
- f) Un polígono es una línea poligonal cerrada y su interior.
- g) Un polígono es una superficie plana y la línea poligonal cerrada que la limita.

Explica qué definición elegirías y por qué motivos la eliges y descartas las demás.

Actividad 1.11

Busca en internet o en libros de texto de 5º y 6º de primaria diferentes definiciones de la altura de un triángulo. Explica razonadamente cuál de ellas elegirías para presentarla al alumnado.

En la Figura 1.49 se muestra la secuencia de las dos páginas del libro de texto de 6º de primaria en las que se introduce por primera vez en el curso el concepto de altura de un triángulo. En la primera página se utiliza el concepto de altura del triángulo para el cálculo de su área sin haberlo definido explícitamente. En la siguiente página se da una definición verbal en la actividad 6, pero no se especifica el objeto geométrico que es, es decir, no se concreta que las alturas son segmentos. Además, se enuncia correctamente que un triángulo tiene tres alturas y, sin embargo, en el triángulo rectángulo no se aprecian con claridad y se deja a interpretación del lector el hecho de entender que dos de las alturas en ese caso coinciden con los catetos.

Una definición completa de altura de un triángulo para el alumnado de 6º curso de Educación Primaria sería: «La altura de un triángulo es el segmento trazado perpendicularmente desde un vértice hasta el lado opuesto o su prolongación». Esta definición se tendría que presentar cuidadosamente, explicando paso a paso todas las condiciones.

Perímetro y área del triángulo

Un triángulo ocupa la mitad de superficie que un rectángulo de la misma base y la misma altura.

Por tanto, su área será la mitad del área de ese paralelogramo.

$$A = \frac{b \cdot a}{2} \rightarrow A = \frac{6 \cdot 3}{2} = \frac{18}{2} = 9 \text{ cm}^2$$

Su perímetro es la suma de las longitudes de sus lados:

$$P = 6 + 5 + 3,6 = 14,6 \text{ cm}$$

1 Halla el área de este triángulo.

86 cm
120 cm

2 Calcula de dos formas distintas el área de este triángulo y explica cómo lo has hecho.

9 cm
15 cm
16 cm
20 cm

3 Calcula la superficie del triángulo amarillo y, después, averigua cuál es la superficie que ocupa cada color en la vitriera.

3 cm
6 cm

4 ¿Tienen la misma área el triángulo azul y el triángulo verde? Razona tu respuesta.

5 Calcula el área y el perímetro de estos triángulos. Luego, clasifícalos según sus lados.

8,7 cm
10 cm

6 cm
4 cm
4,5 cm

6 cm
11,4 cm
12 cm

6 En un triángulo podemos trazar tres alturas; una desde cada uno de sus vértices y que corte al lado opuesto, o a su prolongación, perpendicularmente. El punto donde se cortan las tres alturas se denomina **ortocentro**.

Triángulo acutángulo: El ortocentro está dentro del triángulo.

Triángulo rectángulo: El ortocentro coincide con el vértice del ángulo recto.

Triángulo obtusángulo: El ortocentro está fuera del triángulo.

Dibuja en tu cuaderno un triángulo acutángulo, otro rectángulo y un obtusángulo, y señala sus ortocentros.

7 Observa las dimensiones de este jardín y calcula.

a) ¿Qué superficie ocupan las flores?
b) ¿Qué superficie ocupa el césped?
c) ¿Cuál es la superficie total del jardín?

7,5 m
4 m
1,5 m

Recuerda
Según sus lados, los triángulos se clasifican en:

- Equiláteros**: Todos sus lados iguales.
- Isósceles**: Dos lados iguales.
- Escalenos**: Todos desiguales.

Cálculo mental
Calcula el 10% de una cantidad.

10% de 40	10% de 240
10% de 30	10% de 90
10% de 70	10% de 360
10% de 120	10% de 100
10% de 60	10% de 700

Figura 1.49: Introducción de la fórmula del área del triángulo *Matemáticas 6: Primaria. Pieza a pieza* (2022, p. 174-175)

Paso 2. Identificar las propiedades características del concepto. Para conseguir que el estudiantado de Primaria comprenda y aprenda correctamente un concepto formando una definición conceptual adecuada, el docente debe asegurarse de que el alumnado comprende y aprende cada sub-concepto incluido en la definición y de que es consciente de la necesidad de cada uno de ellos. Así pues, la descomposición de la definición de altura de un triángulo en las partes matemáticamente relevantes se puede descomponer en los siguientes sub-conceptos: La altura de un triángulo es:

- * el segmento
- * trazado perpendicularmente
- * desde un vértice
- * hasta el lado opuesto
- * o su prolongación

Si no se tiene en cuenta o no se entiende alguno de estos subconceptos que aparecen en la definición de un concepto (en este caso de la altura de un triángulo), se cometerán errores en el manejo del concepto principal. Algunos de los subconceptos de la definición habrán sido

estudiados antes y otros se introducirán por primera vez. En cualquier caso, todos ellos se deben entender correctamente para que se pueda dar un adecuado aprendizaje del concepto principal.

Actividad 1.12

Descompón en subconceptos matemáticamente relevantes las definiciones de uno de los siguientes conceptos: bisectriz, ángulos suplementarios, trapecio, polígono regular, prisma y pirámide.

Paso 3. Identificar atributos no necesarios del concepto que pueden llevar a confusión.

Puede ocurrir que el alumnado tenga una imagen conceptual incorrecta debido a que ha incorporado características que en realidad no lo son del concepto en cuestión. Por ejemplo, Gutiérrez y Jaime (1996) muestran que los atributos no característicos que más frecuentemente se incorporan a las imágenes conceptuales de altura de un triángulo son:

- * la altura es vertical
- * la altura es interior al triángulo
- * la altura termina en el punto medio del lado (confusión con la mediana)
- * los triángulos sólo tienen una altura

Para lograr que el alumnado no incorpore atributos innecesarios a los conceptos, el docente debe plantear una discusión sobre esos atributos en particular para que se entienda que no tienen por qué estar presentes o que lo están de formas diferentes en el concepto. Además, también hay que incidir en los atributos visuales que no son característicos del concepto para que sean lo más variados posible para que el alumnado entienda que son algo irrelevante. Por ejemplo, en el caso de la altura, hay que variar los tamaños de las alturas y de los triángulos y sus formas.

Actividad 1.13

Para el concepto que has trabajado en la Actividad 1.12 escribe de forma razonada una lista de atributos no relevantes.

Paso 4. Seleccionar la colección de ejemplos y contraejemplos. Tras haber identificado en el paso 2 los atributos necesarios para definir el concepto y en el paso 3 los no característicos del concepto, se presentarán explícitamente colecciones de ejemplos y contraejemplos cada una de las cuales enfatizará una característica necesaria o innecesaria.

Presentamos a continuación los ejemplos y contraejemplos para incidir en las propiedades necesarias de la altura de un triángulo:

- * La altura es un segmento

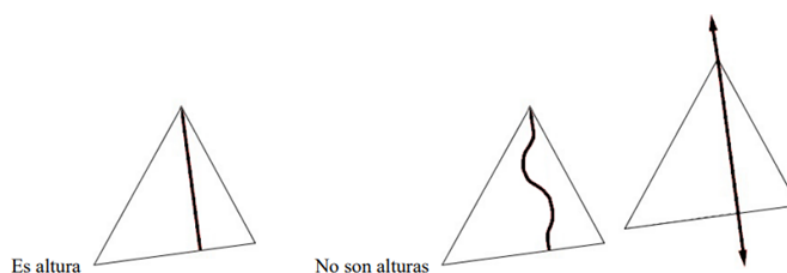


Figura 1.50: Ejemplo y contraejemplo de que la altura tiene que ser un segmento extraído de Gutiérrez y Jaime (1996)

- * La altura es perpendicular al lado sobre el que se traza

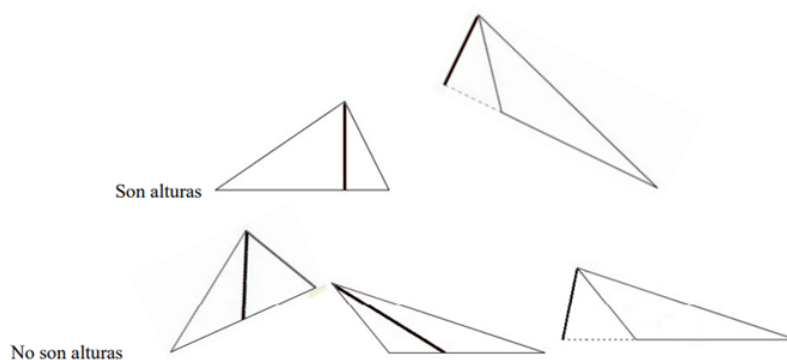


Figura 1.51: Ejemplo y contraejemplo de que la altura tiene que ser perpendicular a la base extraído de Gutiérrez y Jaime (1996)

- * La altura se traza desde un vértice del triángulo

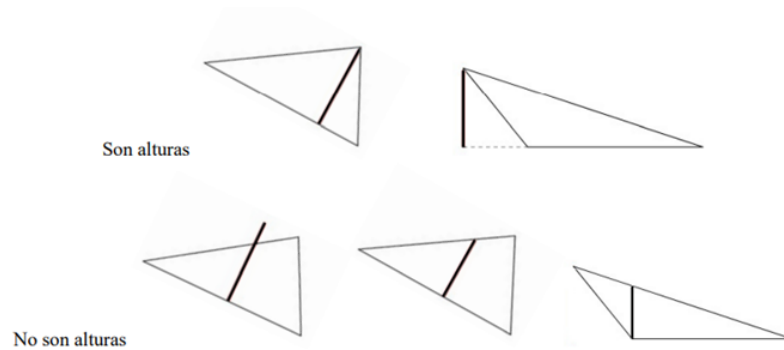


Figura 1.52: Ejemplo y contraejemplo de que la altura se traza desde un vértice extraído de Gutiérrez y Jaime (1996)

- * La altura termina en el lado opuesto al vértice o en su prolongación

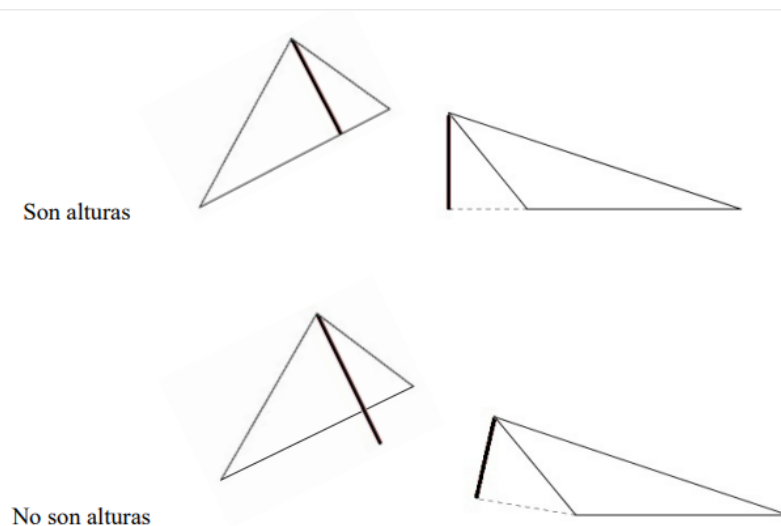


Figura 1.53: Ejemplo y contraejemplo de que la altura termina en el lado opuesto al vértice o en su prolongación extraído de Gutiérrez y Jaime (1996)

Mostraremos ahora ejemplos para ilustrar atributos innecesarios en el concepto de altura de un triángulo:

- * La altura no tiene por qué ser vertical.

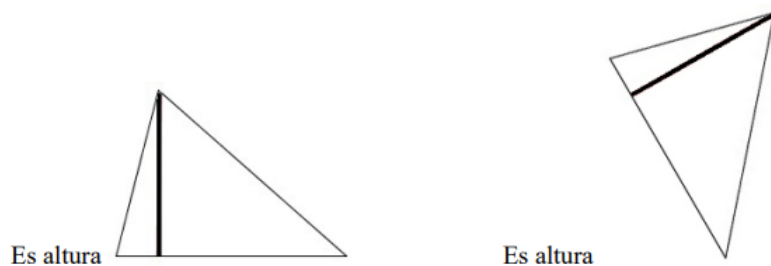


Figura 1.54: Ejemplos de alturas con diferentes inclinaciones respecto a la vertical extraída de Gutiérrez y Jaime (1996)

- * La altura no tiene por qué estar dentro del triángulo.

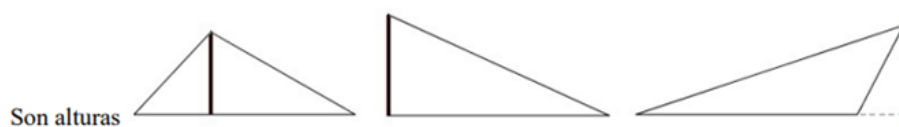


Figura 1.55: Ejemplos de alturas en diferentes posiciones (dentro, etc.) respecto del triángulo extraída de Gutiérrez y Jaime (1996)

- * La altura puede terminar en cualquier punto de la base.

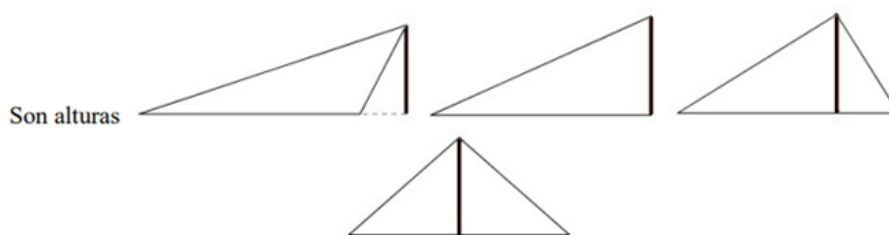


Figura 1.56: Las alturas pueden terminar en cualquier punto de la base extraída de Gutiérrez y Jaime (1996)

- * Los triángulos tienen tres alturas.

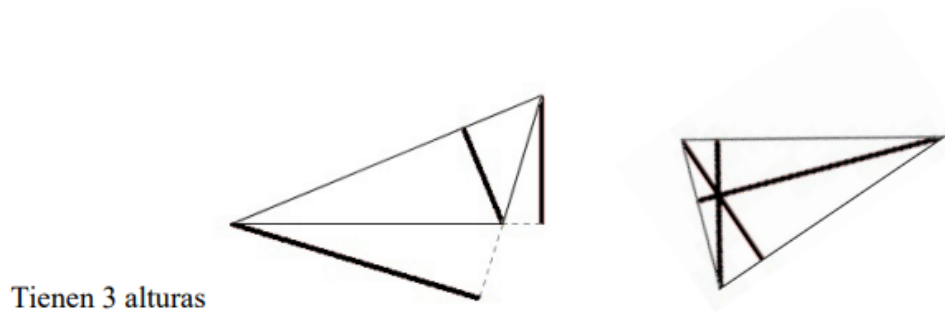


Figura 1.57: Los triángulos tienen tres alturas extraída de Gutiérrez y Jaime (1996)

- * Las alturas y los triángulos pueden tener cualquier tamaño.

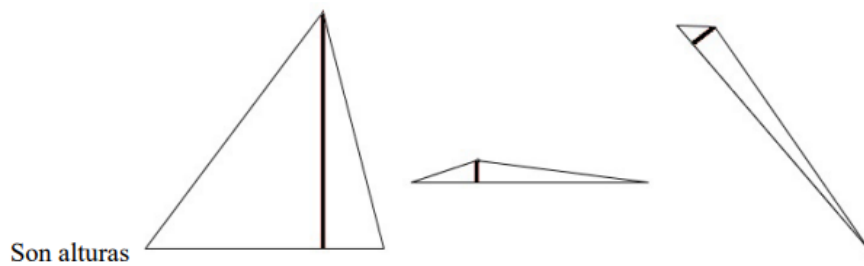


Figura 1.58: Ejemplos de alturas y triángulos de diferentes tamaños extraída de Gutiérrez y Jaime (1996)

- * Todos los triángulos tienen alturas, independientemente de su forma.

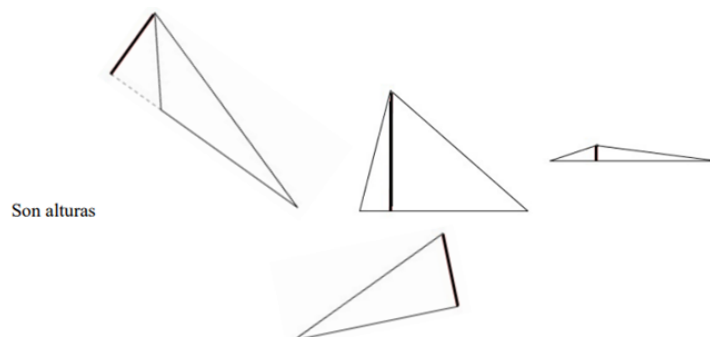


Figura 1.59: Ejemplos de alturas en triángulos de diferentes formas extraída de Gutiérrez y Jaime (1996)

Actividad 1.14

Para uno de los conceptos que has trabajado en las actividades 1.12 y 1.13 diseña una presentación razonada de ejemplos y contraejemplos para que se entienda el concepto.

1.2.4. Orientaciones de enseñanza por niveles

1. Punto, línea, superficie y espacio

Desde el primer curso y transversal a toda la EP

—o Aproximar con objetos de la realidad primero al *espacio* y a los cuerpos o sólidos, posteriormente a las *superficies* y, por último, a las *líneas* y los *puntos*. Por ejemplo, se pueden hacer actividades de juego psicomotor.

2. Líneas rectas y curvas. Líneas poligonales abiertas y cerradas. Posiciones de la línea recta. Paralelismo y perpendicularidad de rectas

—o **Evolución:** reconocer y construir primero en la realidad y luego en representaciones gráficas. Insistir en verbalización. Completar con GeoGebra.

1er ciclo de EP

—o Distinguir *líneas rectas y curvas*. Utilización de la regla para el dibujo de líneas rectas. Distinguir *líneas horizontales, verticales, oblicuas, quebradas, mixtas, espirales y líneas poligonales abiertas y cerradas*.

2º ciclo de EP

—o Distinción de *líneas paralelas, líneas secantes perpendiculares y líneas secantes oblicuas*.

3er ciclo de EP

—o Completar el conocimiento de las *líneas rectas paralelas y perpendiculares* con la utilización de regla, escuadra y cartabón. Construir la mediatriz de un segmento con y sin compás.

3. Superficies planas y curvas

1er ciclo de EP

—o Manipular, reconocer y construir en la realidad, distinguir *superficies planas y superficies curvas*. Intentar el trabajo de reconocimiento y representación gráfica.

4. Ángulos en el plano

—o **Evolución:** en la realidad y en representación gráfica.

2º ciclo de EP

- o Atender a las cuatro regiones que se determinan en el plano siempre que se cortan dos rectas. Insistir en que el *ángulo* es tanto la región como las *semirrectas* que la limitan.
- o Definir y clasificar los ángulos *rectos, agudos, obtusos, llanos, cóncavos y completos*. Verbalización.
- o Reconocer y construir los distintos ángulos. Completar con GeoGebra.

3er ciclo de EP

- o Reconocer y construir las posiciones de dos ángulos *consecutivos, adyacentes u opuestos por el vértice*.
- o Construir la *bisectriz* de un ángulo por diversos procedimientos.

5. Polígonos

Evolución: identificación y descripción verbal a partir de objetos reales, manipulación de materiales, construcción en la realidad utilizando material, representación gráfica con y sin modelos y trabajo gráfico. Complementar con GeoGebra.

1er ciclo de EP

- o Identificación de *triángulos, cuadrados y rectángulos* en objetos reales. Nombrar las figuras y verbalizar diferencias. Situar sobre el papel objetos con estas formas, bordear su contorno con el lápiz y colorear su interior para trabajar la bidimensionalidad. Introducir los términos *lado* y *vértice*.
- o Análogamente, introducir *rombos, romboídes, trapecios y trapezoides* y reconocerlos en el contexto general de polígonos. Introducir el concepto de *cuadrilátero*.

2ª ciclo de EP

- o Introducir el concepto de *paralelogramo* observando el paralelismo en los cuadriláteros ya conocidos.
- o Introducir polígonos de más de cuatro lados y su *clasificación según el número de lados*: pentágono, hexágono, heptágono, octógono, etc. Introducción del término *base* de un polígono.
- o Introducir la clasificación de los polígonos por *regularidad e irregularidad* y por *concavidad y convexidad*.

3er ciclo de EP

- o Profundizar en la elaboración de expresiones de los conceptos que se aproximen a las definiciones.
- o Dibujar polígonos regulares con el transportador de ángulos y de la medida de la amplitud angular.

- o Descubrir la propiedad que cumplen las diagonales de los polígonos según su carácter cóncavo o convexo.

6. Clasificaciones de triángulos y cuadriláteros

2º ciclo de EP

- o Observar las diferencias entre triángulos para introducir las clasificaciones por longitud de los lados y por amplitud angular.
- o Análogamente, introducir las clasificaciones de los cuadriláteros por longitud de los lados y por amplitud angular.
- o Identificar el triángulo y el cuadrilátero regulares.

3er ciclo de EP

- o Reflexionar sobre *clasificaciones excluyentes e inclusivas* de los triángulos y los cuadriláteros.

7. Relaciones entre los lados y entre los ángulos de un triángulo

- o **Evolución:** descubrir con material manipulativo o Geogebra y aplicar a representaciones gráficas

3er ciclo de EP

- o Desigualdad triangular, Teorema de Pitágoras, suma de los ángulos interiores de un triángulo y suma de los ángulos interiores de un polígono convexo.

8. Circunferencias y círculos. Posiciones relativas con rectas

- o **Evolución:** identificación y descripción verbal a partir de objetos reales, manipulación de materiales, construcción en la realidad utilizando material, representación gráfica con y sin modelos y trabajo gráfico. Complementar con GeoGebra.

1er ciclo de EP

- o Identificación del círculo. Trabajo de la bidimensionalidad como en el caso de los polígonos
- o Diferenciar *la circunferencia y el círculo* e introducir sus elementos básicos (*centro, radio y diámetro*). Observar propiedades de la circunferencia.

2º ciclo de EP

- o Introducir el compás y la regla como herramientas de construcción de la circunferencia, el círculo y sus elementos básicos.
- o Introducir *recta secante, cuerda y arco de una circunferencia, recta tangente a una circunferencia, sector circular y semicírculo*. Reflexionar sobre la bidimensionalidad del *sector circular y del semicírculo*.

9. Cuerpos geométricos: Poliedros y cuerpos redondos

—◦ **Evolución:** identificación y manipulación en objetos reales y material estructurado, descripción verbal y la verbalización de diferencias entre objetos. Construcción en la realidad y en representación gráfica en la medida de lo posible. Utilizar el vocabulario (*cara, base, arista, vértice, centro y diámetro*).

1er ciclo de EP

—◦ Introducir y distinguir *poliedros* y los *cuerpos redondos*.
 —◦ Introducir y distinguir *prismas* y *pirámides* en coherencia con el conocimiento que el alumnado tiene de los polígonos que aparecen en las bases. Caso particular del *ortopedro*.
 —◦ Introducir y distinguir *cilindros, conos y esferas*.

2º ciclo de EP

—◦ Ampliar el punto anterior en coherencia con el conocimiento sobre polígonos. Insistir en tridimensionalidad y verbalización.

3er ciclo de EP

—◦ Refinamiento vocabulario y definiciones anteriores. —◦ Reflexionar sobre las propiedades de paralelismo y regularidad en los poliedros.
 —◦ Introducir los *sólidos platónicos*.
 —◦ Introducir *la concavidad y la convexidad* de los poliedros.
 —◦ Descubrir la *fórmula de Euler*.

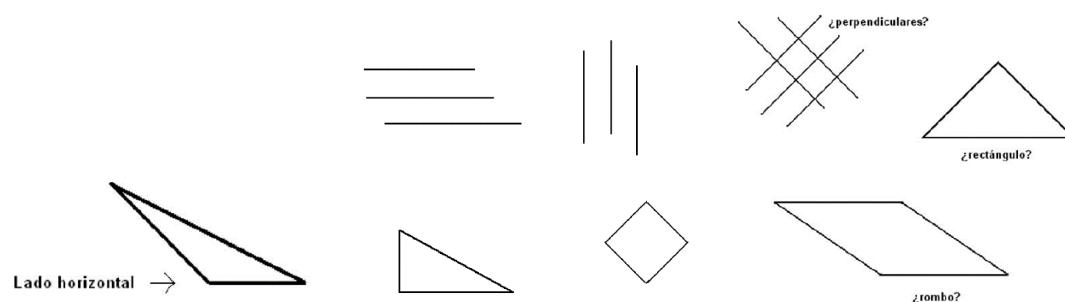
1.3. Errores y dificultades en el aprendizaje

Presentamos una recopilación de errores cometidos por el alumnado de Educación Primaria y que se plasman en diversos trabajos de investigación.

Barrantes-López y Zapata-Esteves (2008) identifican, en primer lugar, los errores que posiblemente están generados en el proceso de aprendizaje de los conceptos geométricos basado exclusivamente en el libro de texto sin utilización de otros materiales para enriquecer el esquema conceptual del alumnado. En los libros de texto se muestran ciertas figuras geométricas mediante una única representación gráfica o una reducida cantidad de dibujos. En consecuencia, el alumnado construye imágenes del concepto basadas en los ejemplos prototípicos y alejadas de su definición.

Dificultades causadas por los distractores de orientación

Hershkowitz (1990) distingue entre los atributos relevantes que son necesarios para ser ejemplo de un concepto y los irrelevantes que solamente tienen algunos ejemplos. Existen ciertos atributos irrelevantes que visualmente tienen características muy marcadas y que son distractores para el alumnado. Vinner y Hershkowitz (1983) definen los *distractores de orientación* como las propiedades visuales que se asumen como pertenecientes al concepto y, sin embargo, no tienen nada que ver con su definición. Por ejemplo, respecto al concepto de ángulo, el alumnado asume que uno de los lados tiene que estar en horizontal, como se muestra en la Figura 1.60 (a) debido a que se suele presentar de esta forma en los libros de texto. Además, el hecho de que se tienda a dibujar rectas paralelas o perpendiculares respecto a la dirección de los lados del papel puede generar dificultades en el manejo de estos conceptos. Del mismo modo, la tendencia a dibujar triángulos con uno de los lados en horizontal o rombos en vertical apoyados sobre uno de sus vértices también se ha observado que genera dificultades. En la Figura 1.60 (b) se muestran ejemplos prototípicos de todas estas situaciones. El abuso de los ejemplos prototípicos de la Figura 1.60 puede generar que no se identifiquen correctamente las características de los ejemplos de la Figura 1.60 (c).



(a) Ángulo con lado horizontal (b) Posiciones prototípicas de paralelismo, triángulo y rombo (c) Ejemplos no prototípicos

Figura 1.60: Ejemplos extraídos de Barrantes-López y Zapata-Esteves (2008)

A continuación se muestran ejemplos de errores, posiblemente causados por distractores de orientación, que se recopilan en Dickson y cols. (1991) y que han sido detectados en diversas investigaciones. En la Figura 1.61 el estudiante afirma que *a* no es paralela a *c* porque *b* está por el medio (Fielker, 1973).

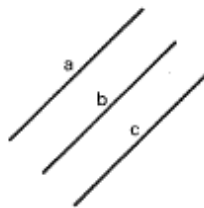


Figura 1.61: Ejemplo de error con el manejo del paralelismo del trabajo de Fielker (1973) extraído de Dickson y cols. (1991)

En la Figura 1.62 el estudiante afirma que C no es un triángulo porque «se ha caído» (Greenes, 1979).



Figura 1.62: Ejemplo de error en la detección de un triángulo en posición no prototípica del trabajo de Greenes (1979) extraído de Dickson y cols. (1991)

En la Figura 1.63 se contrastan ejemplos prototípicos con ejemplos que generan dificultades debido a la posición en la que se muestran. Además, en la Figura 1.64 (a) se muestran los porcentajes de estudiantes que reconocieron cada ejemplo como ángulo recto y en (b) los correspondientes al reconocimiento del paralelismo (Kerslake, 1979). Parece que el alumnado ha asumido que la igualdad de longitudes es condición necesaria para tener paralelismo.

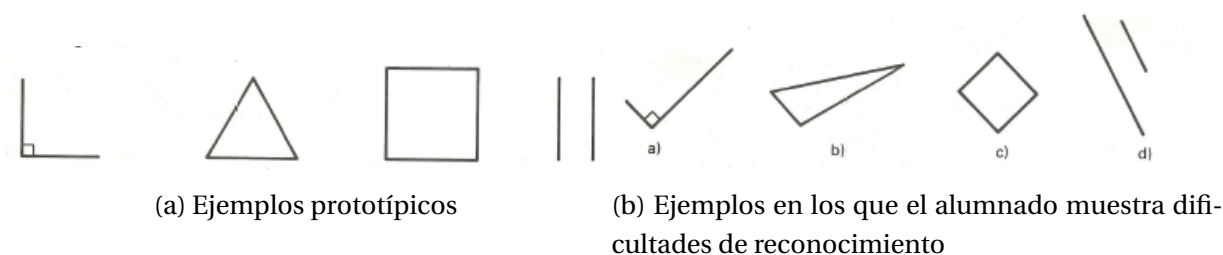


Figura 1.63: Ejemplos prototípicos frente a ejemplos que generan dificultad del trabajo de Kerslake (1979) extraídos de Dickson y cols. (1991)

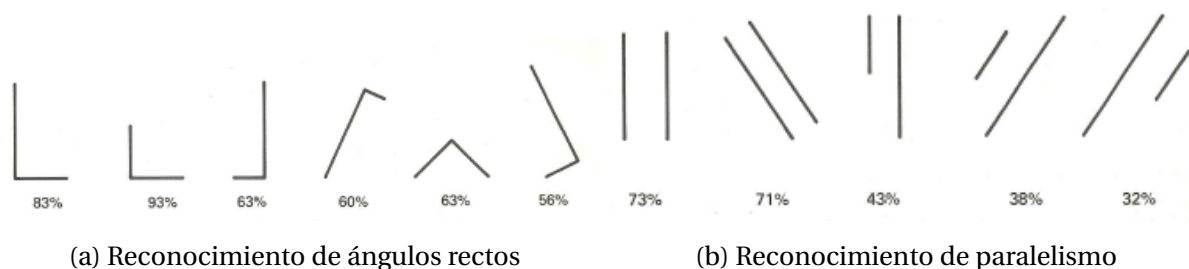


Figura 1.64: Porcentajes de detección de conceptos del trabajo de Kerslake (1979) extraídos de Dickson y cols. (1991)

Los distractores de orientación también aparecen en el trabajo con sólidos. El alumnado muestra dificultades al identificar los prismas cuando se presentan apoyados sobre una cara lateral. También supone un obstáculo identificar el cubo cuando su representación se apoya sobre un vértice. Un error común en el estudiantado es considerar que la base es la cara en la que se apoya el objeto y se entiende que solamente son caras las laterales (Guillén-Soler, 2000).

Dificultades causadas por los distractores de estructuración

Durante el aprendizaje de un concepto geométrico se pueden formar imágenes o definiciones incompletas debido a una presentación débil del concepto en la que se excluyen ciertos elementos y propiedades. Un ejemplo de la presencia de estos distractores es la ten-

dencia a mostrar ejemplos de triángulos isósceles en los que la longitud de los lados iguales es mayor que la del lado desigual y, además, se suele presentar apoyado sobre el lado desigual (Figura 1.65).

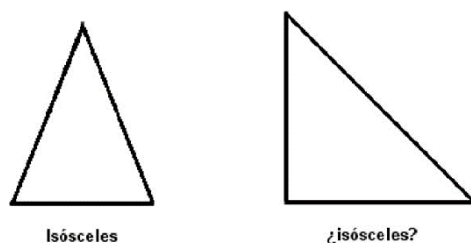


Figura 1.65: Ejemplos de triángulo isósceles prototípico y otro triángulo isósceles extraídos de Barrantes-López y Zapata-Esteves (2008)

Los errores producidos a raíz de los distractores de estructuración también aparecen en el estudio de alturas, medianas, mediatrices y bisectrices de un triángulo al asumir que todas tienen que ser interiores al triángulo. Por este motivo el alumnado suele cometer errores al trazar las alturas de un triángulo obtusángulo y rectángulo. También puede ocurrir que el alumnado dibuje la altura del triángulo, que piensa que es única, en paralelo al lado del papel en lugar de en perpendicular a la base de triángulo (Figura 1.66). Esto puede estar causado porque en los libros de texto se suele mostrar una única altura que, además, suele ser paralela al lado del papel.

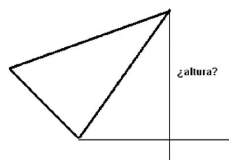


Figura 1.66: Dibujo de la altura en paralelo al lado del papel extraído de Barrantes-López y Zapata-Esteves (2008)

Además, Barrantes-López y Zapata-Esteves (2008) reportan que en los ejemplos de los libros de texto existe un predominio de formas planas y cuerpos geométricos convexos frente a cóncavos, lo que produce que el alumnado tenga dificultades para concebir la concavidad en estas figuras. También se ha detectado una presencia pobre en la ejemplificación de los trapecios.

Dificultades causadas por la nomenclatura

Barrantes-López y Zapata-Esteves (2008) constatan que el alumnado tiene facilidad para identificar los polígonos y sólidos de los cuales conoce el nombre como, por ejemplo, cuadrado o cilindro. Sin embargo, tiene más dificultad para identificar los polígonos que no tie-

nen un nombre común como, por ejemplo, el decágono (polígono de diez lados). Además, el hecho de utilizar términos individuales como «el cuadrado» en lugar de colectivos hace que se generen dificultades, pues parece que únicamente existen las figuras arquetipo. Por su parte, Mora-Sánchez (1995) remarca las dificultades que genera la nomenclatura redundante de ciertas formas geométricas. Por ejemplo, se utiliza el nombre de trapezoide para referirse al cuadrilátero convexo sin lados opuestos paralelos. Esta figura quedaría nombrada simplemente como cuadrilátero sin necesidad de añadirle un nuevo nombre caracterizando los propiedades que no tiene.

Dificultades causadas por las imágenes reales del concepto

Los objetos geométricos son generales y abstractos y, sin embargo, se representan en la realidad con ejemplos concretos. Esta disociación genera conflictos al alumnado, pues los objetos que encuentran en la realidad solamente se parecen a los objetos geométricos ideales (de la Torre Fernández, 1998). Además, en los libros de texto se suelen presentar imágenes de objetos reales para identificarlas como cuerpos geométricos. En algunos casos, estas representaciones no son adecuadas para hacer una primera aproximación al concepto. Por ejemplo, en la Figura 1.67 observamos como ejemplo del cono un sombrero, de pirámide cuadrangular una tienda de campaña abierta y como fusión de una esfera con un cono un helado. En los tres casos se observan variaciones que no tiene el cuerpo geométrico al que representan. La base del sombrero no se corresponde con ninguna parte del cono, la tienda de campaña está abierta y el helado no muestra de forma clara las partes del cono y de la esfera.



Figura 1.67: Actividad de identificación de cuerpos geométricos en representaciones de objetos reales extraída *Matemáticas 3: Primaria. Pieza a pieza* (2022, p. 188)

Dificultades causadas por las definiciones y los tipos de clasificaciones

En Gutiérrez y Jaime (1996) se explica la tendencia para presentar conceptos nuevos de geometría en la que, o bien se enuncia la definición seguida de ejercicios de memorización y reconocimiento de algunas figuras concretas, o bien se presentan primero ejemplos de figuras para describir sus características y acabar obteniendo una definición, seguida de ejercicios memorísticos y actividades de reconocimiento en otras figuras. En cualquiera de los dos casos se pone el acento en la definición más que en la variedad de ejemplos, por lo que el alumnado memoriza definiciones pero no las utiliza para resolver actividades por falta de una adecuada imagen conceptual (Vinner, 1991).

Otro factor que agrava las definiciones que aprende el alumnado de los objetos geométricos son los errores en los libros de texto. En la Figura 1.49 se mostraba la definición de la altura de un triángulo de un libro de texto de 6º de Educación Primaria. Esta definición no es correcta porque no especifica de qué tipo de objeto geométrico se trata. Además, también se pueden producir errores a causa de las distintas interpretaciones que se pueden dar a la misma expresión gramatical. Por ejemplo, se puede definir el triángulo isósceles como el triángulo que tiene dos lados iguales. Esto se puede interpretar como que dos lados son iguales y uno desigual o como que dos lados son iguales y el otro puede ser igual o no. En el segundo caso se incluiría el triángulo equilátero dentro de la familia de los triángulos isósceles, mientras que en la primera interpretación no sería así. Este tipo de definiciones complejas que generan clasificaciones inclusivas 1.46 (b) genera dificultades al alumnado.

Actividad 1.15

Analiza las siguientes definiciones y propiedades:

- * Los cuadriláteros pueden ser cóncavos o convexos.
- * En el conjunto de los convexos encontramos:
 - Paralelogramos: tienen dos pares de lados paralelos
 - Trapecios: tienen un par de lados paralelos

Representa mediante un diagrama de Venn los cuadriláteros según las definiciones anteriores. ¿Qué dificultades puede tener el alumnado de Educación Primaria con la clasificación que obtienes?

Barrantes-López y Zapata-Esteves (2008) sostienen que las imágenes conceptuales y las definiciones del alumnado en el nivel dos de razonamiento de Van Hiele están muy arraigadas y resulta muy complicado incluir nuevas definiciones que cambien la imagen del concepto, ya que no se pone suficiente atención a estos cambios ni en los libros de texto ni por parte del docente (Jaime, Chapa, y Gutiérrez, 1992).

Dificultades relativas a la tridimensionalidad

Es fundamental que el estudiantado maneje sólidos con material manipulativo antes de trabajar con sus representaciones gráficas (Cañizares, 2001; Romero-Albaladejo y Cañadas, 2022). Sin embargo, la lectura perceptiva de los modelos físicos puede conllevar errores. Por ejemplo, si se construye un cubo con pajitas de refresco pegadas entre sí con cinta adhesiva, se superpondrán dos pajitas en una de las aristas, lo que puede confundir al estudiante haciéndole pensar que cada pajita representa una arista.

El alumnado encuentra dificultades para distinguir entre la visión que tiene de un objeto y su desarrollo plano (Cañizares, 2001; Romero-Albaladejo y Cañadas, 2022) tal y como se muestra en la Figura 1.68.

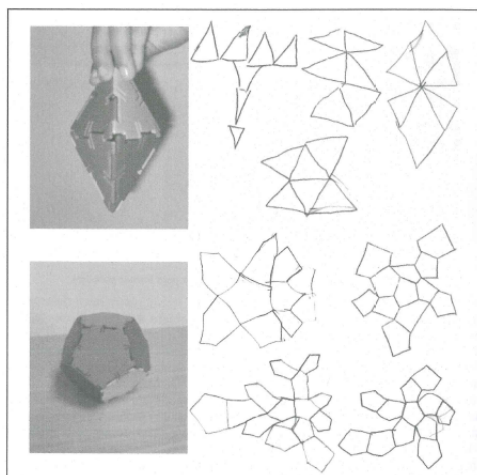


Figura 1.68: Desarrollos planos dibujados por alumnado de Educación Primaria extraído de Romero-Albaladejo y Cañadas (2022)

La representación gráfica plana de un objeto tridimensional necesariamente va a alterar las propiedades del objeto de la realidad y hay que cuidar que el dibujo haga parecer superfluas ciertas partes del razonamiento (Cañizares, 2001). Puede ocurrir que no se atienda suficientemente a la simbología que tiene el lenguaje visual y se generen discrepancias entre las interpretaciones del docente y del alumnado. En particular, esto ocurre en las representaciones planas de figuras tridimensionales. Por ejemplo, en la Figura 1.69 (a) se muestra una representación gráfica de un objeto geométrico que puede ser una pirámide de base cua-

drangular, una bipirámide cuadrangular o un cuadrado y sus diagonales. En la Figura 1.69 (b) se muestra otro ejemplo de una representación plana de objetos tridimensionales que genera confusión al alumnado, pues no es capaz de ver los tres ángulos rectos a causa de la falta de dominio del sistema de representación.

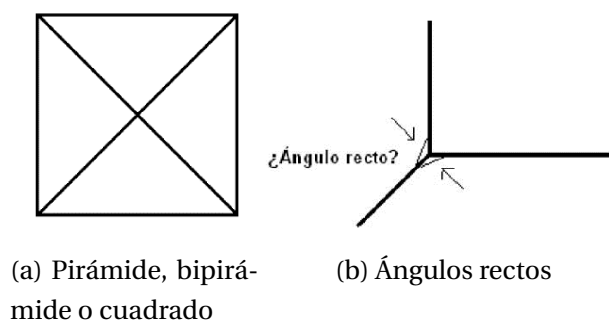


Figura 1.69: Ejemplos de representación gráfica que genera discrepancias en su interpretación extraídas de Barrantes-López y Zapata-Esteves (2008)

Por tanto, el docente debe prestar especial atención a la representación plana de objetos en el espacio, pues el hecho de que admita varias posibilidades genera dificultades de interpretación al alumnado. Se profundizará más en este aspecto en el Tema 2.

Actividad 1.16

Analiza tus respuestas a la prueba inicial del tema respondiendo a las siguientes preguntas:

- (a) En las actividades 1 y 2, ¿encuentras desconexiones entre la imagen y la definición de los conceptos? ¿los dibujos que has realizado son prototípicos?
 - (b) ¿Qué niveles de razonamiento del modelo de Van Hiele detectas en las actividades 3 y 4? Razona tu respuesta.
 - (c) ¿Has cometido errores en las respuestas que has dado en toda la prueba? En caso afirmativo, explica de qué tipo son.
-

1.4. Laboratorio de materiales y recursos

Geoplano

El geoplano (Figura 1.70) es un material manipulativo que consta de una superficie plana cuadrada y rígida de la cual sobresalen de manera vertical una red de pivotes colocados regularmente en los cuales se pueden colocar gomas elásticas. Según la disposición de los pivotes, los geoplanos pueden ser de malla cuadrada, triangular, isométrica o circular. En el mercado podemos encontrar geoplanos de madera y de plástico. Entre los de plástico hay modelos que por cada cara tienen una disposición diferente de los pivotes. Por ejemplo, por una cara la malla es isométrica y por la otra es cuadrada. El geoplano se puede construir utilizando, por ejemplo, un cartón y palillos. También se puede trabajar con un geoplano representado gráficamente mediante una cuadrícula.



Figura 1.70: Geoplanos

Son múltiples los usos que se pueden hacer de este material. Algunos de ellos son:

- * Estudiar segmentos y sus posiciones relativas de segmentos.
- * Estudiar polígonos, sus elementos básicos como lados, vértices o ángulos.
- * Hacer clasificaciones según: el número de lados, la igualdad de lados, igualdad de ángulos, tipo de ángulos, paralelismo de los lados, número de diagonales, longitud de las diagonales, . . .
- * Estudiar la concavidad y la convexidad de los polígonos.
- * Construir y estudiar polígonos estrellados.
- * Trabajar conceptos de medida de los polígonos como suma de los ángulos interiores, perímetro, área, equivalencia de perímetros o equivalencia de áreas.
- * Trabajar descomposiciones de polígonos.

- * Estudiar traslaciones, giros respecto a un punto y simetrías axiales.
- * Estudiar la congruencia de polígonos.
- * Estudiar comprobaciones del teorema de Pitágoras.

Mecano o Listones geométricos

El Mecano, o listones geométricos, es un material que originalmente constaba de múltiples varillas de madera de diferentes longitudes. Las varillas tenían una serie de agujeros cada dos centímetros, aproximadamente, que permitían unificarlas utilizando roscas o piezas similares que permitían el movimiento. El Mecano proporcionaba una visión dinámica de las figuras geométricas, con las que no podían competir las imágenes estáticas del libro o la pizarra. La versión actual del Mecano está compuesta por listones de plástico (véase Figura 1.71) de cuatro colores (rojo, amarillo, azul y blanco), de longitudes diferentes y con varios agujeros equidistantes en cada listón. Contiene también una caja de encuadernadores que, al atravesar los agujeros de dos listones superpuestos, sirven para unirlos y formar figuras.



Figura 1.71: Listones

Algunos de los usos del Mecano son:

- * Construir, estudiar y clasificar polígonos.
- * Comprobar pertenencia de polígonos a más de un conjunto.
- * Estudiar diagonales y ángulos interiores y exteriores de polígonos.
- * Comparar polígonos con el mismo perímetro.
- * Construir polígonos de áreas máxima y mínima fijados unos listones.
- * Comprobar que de todos los rombos de perímetro fijo el cuadrado es el de área máxima.

Tangram

El Tangram es un material que consta de 7 piezas que se obtienen a partir de la descomposición de un cuadrado y que son: 2 triángulos grandes, 1 triángulo mediano, 2 triángulos pequeños, 1 cuadrado y 1 romboide. Este material ofrece la posibilidad de programar actividades en tres niveles de dificultad: composición de figuras libremente, empleando la imaginación; composición de figuras dadas previamente; resolución de una gran diversidad de problemas de geometría con las diferentes combinaciones que se pueden hacer con las piezas.



Figura 1.72: Tangrams

Algunos de los usos del Tangram son:

- * Componer diferentes clases de polígonos.
- * Estudiar polígonos con áreas iguales o perímetros iguales.
- * Estudiar ángulos: comparación, ordenación, suma e igualdad.
- * Trabajar paralelismo y perpendicularidad.
- * Ordenar piezas por áreas. Medir las áreas usando la pieza menor.
- * Fijar un número de piezas, componer polígonos distintos y ver sus características.
- * Estudiar la convexidad y la concavidad de las figuras.
- * Comprobar el teorema de Pitágoras

Polydron

Este material está compuesto por piezas de plástico de colores (rojo, azul, amarillo y verde) que tienen las siguientes formas: triángulos equiláteros e isósceles, cuadrados, rectángulos, rombos, pentágonos, hexágonos y octógonos, y que se presentan tanto con la superficie de la figura completa como con su borde (Figura 1.73 (a)). Las piezas se montan gracias a unas muescas que se encajan entre ellas sin ningún elemento intermedio. También dispone de unas piezas de superficie curva para construir cilindros, conos y esferas. Existen en el

mercado diferentes variantes del material en las que, por ejemplo, solamente se presentan los bordes de las figuras y que están imantadas (Figura 1.73 (b)) o las piezas son traslúcidas (Figura 1.73 (c)).



(a) Polydron encajable

(b) Polydron imantado

(c) Piezas encajables

Figura 1.73: Materiales tipo Polydron

Algunos de los usos que puede tener este material son los siguientes:

- * Construir poliedros a partir de los polígonos que los delimitan.
- * Construir cuerpos redondos a partir de las superficies que los delimitan.
- * Diferenciar los cuerpos que se construyen y nombrarlos correctamente.
- * Identificar las caras, aristas y vértices de los cuerpos que se trabajan.

Cuerpos geométricos

Existen diferentes versiones de modelos de cuerpos geométricos compuestos por piezas de diferentes materiales. Por ejemplo, el material puede ser de madera (Figura 1.74 (a)), de plástico y conteniendo el desarrollo plano del sólido (Figura 1.74 (b)) o metacrilato transparente (Figura 1.74 (c)) conteniendo modelos en color rojo o verde de las diferentes formas geométricas que generan el cuerpo de revolución o que son elementos básicos en su construcción (rectángulo en el cilindro, base de una pirámide, etc.).

Algunos de los usos que se pueden hacer de este material son:

- * Manipular poliedros y cuerpos redondos.
- * Visualizar y reflexionar sobre la construcción de poliedros y cuerpos redondos.
- * Observar los elementos de los cuerpos geométricos.



(a) Cuerpos geométricos de madera (b) Cuerpos geométricos de plástico con desarrollo plano (c) Cuerpos de metacrilato

Figura 1.74: Cuerpos geométricos

Varillas y vértices de construcción

Este material está compuesto por varillas de plástico de longitudes diferentes y con varias piezas para poderlas enganchar y construir tanto polígonos como poliedros.



(a) Varillas con vértices esféricos (b) Varillas de distintos tipos de enganches y longitudes (c) Varillas de distintos tipos de enganches y longitudes

Figura 1.75: Varillas de construcción

Algunos ejemplos del uso de este material son:

- * Construir, reconocer, diferenciar y denominar figuras y cuerpos geométricos.
- * Estudiar líneas poligonales abiertas o cerradas.
- * Construir polígonos y poliedros.
- * Calcular perímetros, áreas y volúmenes .
- * Observar los elementos de los polígonos y de los poliedros.
- * Transformar polígonos y poliedros.
- * Estudiar ángulos y diagonales.
- * Componer y descomponer figuras.
- * Construir figuras semejantes.

Pentomino

El Pentomino consiste en piezas que pueden ser de diferentes materiales como cartón, plástico o madera compuestas a partir de la unión de cuadrados iguales. En la Figura 1.76 se muestra el material de plástico.



Figura 1.76: Pentominos

Algunos de los usos del Pentomino son:

- * Generar formas distintas a partir de un número fijado de piezas.
- * Obtener todas las formas constituidas por n piezas a partir de la adición de una pieza de todas las maneras posibles a la formas generadas por $n - 1$.
- * Interpretar algunas formas compuestas, como desarrollos planos de poliedros.
- * Igualar figuras a partir de la superposición.
- * Estudiar polígonos semejantes y las relaciones entre lados correspondientes y entre áreas.
- * Clasificar formas cóncavas y convexas. Determinar el número máximo de ángulos cóncavos y, por tanto, el número mínimo de ángulos convexos.
- * Construir polígonos dado un perímetro fijo.
- * Construir polígonos equivalentes.
- * Calcular áreas a partir de la descomposición en formas más sencillas o por transformación en polígonos equivalentes.

1.5. Práctica sobre formas planas y cuerpos tridimensionales

Actividades con Geoplano

ACTIVIDAD 1: Utilizando el Geoplano resuelve los siguientes apartados:

- (a) Llamaremos *líneas poligonales* a los caminos que están formados sólo por líneas rectas. Representa tres ejemplos de líneas poligonales.

- (b) Si a cada tramo de la línea poligonal desde un pivote hasta otro lo llamamos *lado*, ¿cuántos lados tienen las líneas que has dibujado en el punto anterior?. Anota junto a cada figura el resultado que obtengas.
- (c) Los extremos de los lados de una línea poligonal se llaman *vértices*. ¿Cuántos vértices tienen las líneas poligonales que has dibujado? Anota de nuevo junto a cada figura el resultado que obtengas.
- (d) Compara el número de lados y el número de vértices que has anotado en cada línea poligonal. ¿Obtienes alguna relación entre esos dos números? ¿Se cumple la relación en todas la líneas poligonales que has dibujado?
- (e) Una línea poligonal es abierta si tiene determinados los vértices extremos. En caso contrario, la línea poligonal es cerrada. Dibuja tres ejemplos de línea poligonal abierta y tres ejemplos de línea poligonal cerrada. ¿Qué relación ves entre el número de lados y el número de vértices en una poligonal abierta y en una poligonal cerrada?
- (f) Dibuja varias poligonales que tengan 1 lado, otras que tengan 2 lados, otras que tengan 3 lados y otras que tengan 4 lados. En cada caso construye ejemplos de poligonales abiertas y cerradas. ¿Puedes construir poligonales cerradas en todas las clases?
- (g) Vamos a llamar *polígonos* a las líneas poligonales cerradas. Dibuja polígonos de 3 lados, otros de 4 lados y otros de 5 lados.

1 ¿Qué se pretende con las construcciones anteriores?

2 ¿Qué nivel de razonamiento de Van Hiele crees que puede tener el alumnado al que dirigirías esta actividad?

3 ¿Cómo podrían reflejarse algunas de las dificultades o errores comunes que comete el alumnado?

ACTIVIDAD 2: Utilizando el Geoplano resuelve los siguientes apartados:

- (a) En el geoplano de malla cuadrangular de 5×5 pivotes construye polígonos. Cuenta el número de cada uno de ellos y señala los que tienen 3 lados (*triángulos*), los que tienen 4 lados (*cuadriláteros*) y los que tienen 5 lados (*pentágonos*).
- (b) Repite el apartado anterior pero con un geoplano circular.
- (c) En un geoplano de malla cuadrangular de 3×3 pivotes, ¿cuántos triángulos diferentes se pueden construir con la combinación de la clasificación según la longitud de los lados y la clasificación según la amplitud angular? No cuentes los giros o semejanzas de un mismo triángulo.

- (d) Respecto al apartado anterior, ¿puedes obtener los triángulos que aparecen en los nueve casos al combinar las clasificaciones? En el caso que no puedas construirlo, reflexiona si no los puedes obtener debido a que las restricciones de la malla no te lo permiten o porque no se puede construir en general. Puedes rellenar la siguiente tabla para marcar los casos que obtienes:

	Triángulo rectángulo	Triángulo acutángulo	Triángulo obtusángulo
Triángulo equilátero			
Triángulo isósceles			
Triángulo escaleno			

- (e) En un geoplano de malla cuadrangular de 3×3 pivotes, ¿cuántos cuadriláteros y pentágonos diferentes se pueden construir?
- (f) Construye un pentágono. Une con una goma de otro color dos vértices que no sean *adyacentes*, es decir que no estén seguidos. Repite esto varias veces en el mismo polígono. Estas líneas se llaman *diagonales* del polígono. Construye las diagonales de varios polígonos. ¿Qué diferencias hay entre las diagonales y los lados de un polígono?
- (g) Construye triángulos, cuadriláteros, pentágonos y todas sus diagonales. ¿Has podido dibujar las diagonales de todas las figuras? ¿Están las diagonales siempre dentro del polígono?
- (h) Los polígonos que tienen alguna de sus diagonales fuera se les llaman *cóncavos* y a los que tienen todas sus diagonales dentro se les llaman *convexos*. ¿Has obtenido algún polígono convexo en el apartado anterior? Construye polígonos cóncavos y polígonos convexos. Sin tener en cuenta las diagonales, ¿cómo puedes saber si un polígono es cóncavo a convexo? ¿Existen triángulos cóncavos? ¿Por qué?

1 ¿Qué se pretende con las construcciones anteriores?

2 ¿Qué nivel de razonamiento de Van Hiele crees que puede tener el alumnado al que dirigirías esta actividad?

3 ¿Cómo podrían reflejarse algunas de las dificultades o errores comunes que comete el alumnado?

Actividades con Listones

ACTIVIDAD 3: Coge tres listones cualesquiera y forma un triángulo. Repite lo anterior varias veces ¿Es siempre posible construir un triángulo? Razona tu respuesta.

- 1 ¿Qué se pretende con esta actividad?
- 2 ¿Qué nivel de razonamiento de Van Hiele crees que puede tener el alumnado al que dirigirías esta actividad?
- 3 ¿Cómo podrían reflejarse algunas de las dificultades o errores comunes que comete el alumnado?
- 4 Explica la idea de construcción del triángulo con regla y compás que se deriva de esta actividad. Dibuja un triángulo utilizando regla y compás.

ACTIVIDAD 4: Los cuadriláteros no son figuras rígidas. Construye un cuadrado con listones. Solo hay que presionar levemente uno de los vértices para observar que no es rígido sino que se transforma en otra figura geométrica con otras propiedades, se trata de un *rombo*, es decir, un cuadrilátero con cuatro lados iguales pero con un ángulo desigual. Si ahora tomamos cuatro tiras iguales dos a dos y las unimos entre ellas podemos obtener un *rectángulo*, es decir, un cuadrilátero con los lados opuestos paralelos y todos los ángulos iguales. Presionando un vértice obtenemos fácilmente un *paralelogramo*, es decir un cuadrilátero con los lados opuestos iguales pero los ángulos desiguales. Deducimos, por lo tanto, que el rectángulo es un tipo especial de paralelogramo. Manipulando los listones llegamos a la conclusión que los cuadrados pertenecen a dos grandes conjuntos de cuadriláteros, el de rombos y el de rectángulos, decimos que los cuadrados son la intersección de ambos conjuntos. Representa la anterior clasificación con diagramas de Venn.

- 1 ¿Qué se pretende con esta actividad?
- 2 ¿Qué nivel de razonamiento de Van Hiele crees que puede tener el alumnado al que dirigirías esta actividad?
- 3 ¿Cómo podrían reflejarse algunas de las dificultades o errores comunes que comete el alumnado?

Actividades con Tangram

ACTIVIDAD 5: Utilizando el Tangram resuelve los siguientes apartados:

- (a) Construye un triángulo utilizando 2, 3 y 4 piezas, respectivamente.

- (b) Construye un cuadrado utilizando 2, 3 y 4 piezas, respectivamente.
- (c) Construye un rectángulo utilizando 3 y 5 piezas, respectivamente.
- (d) Construye un romboide utilizando 2, 3 y 4 piezas, respectivamente.
- (e) Construye un trapecio utilizando 2, 3 y 4 piezas, respectivamente.
- (f) Construye cuadriláteros utilizando todas las piezas.

1 ¿Qué se pretende con las construcciones anteriores?

2 ¿Qué nivel de razonamiento de Van Hiele crees que puede tener el alumnado al que dirigirías esta actividad?

3 ¿Cómo podrían reflejarse algunas de las dificultades o errores comunes que comete el alumnado?

ACTIVIDAD 6: Utilizando un Tangram construye un polígono con el mayor número de lados que puedas e indica el número de lados que has conseguido, si es regular o irregular y si es cóncavo a convexo.

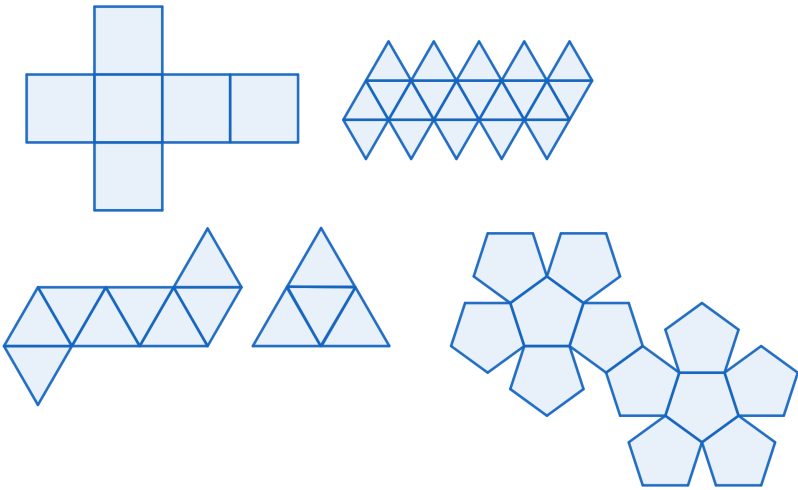
1 ¿Qué se pretende con esta actividad?

2 ¿Qué nivel de razonamiento de Van Hiele crees que puede tener el alumnado al que dirigirías esta actividad?

3 ¿Cómo podrían reflejarse algunas de las dificultades o errores comunes que comete el alumnado?

Actividades con Polydron

ACTIVIDAD 7: Utilizando el polydron construye los siguientes cuerpos geométricos y rellena la siguiente tabla. ¿Qué relación encuentras entre el número de vértices, caras y aristas?



Nombre	Números de vértices	Número y tipo de caras	Número de aristas
Tetraedro			
	8		
		8 triángulos equiláteros	
Dodecaedro			30
Iscosaedro		20 triángulos equiláteros	

1.6. Práctica de GeoGebra

GeoGebra es un software dinámico de matemáticas para todos los niveles educativos  <https://www.geogebra.org/?lang=es-E>. Tiene diferentes aplicaciones para el trabajo de geometría, álgebra, gráficas, estadísticas y hojas de cálculo. Además, se trata de una plataforma de acceso en línea y tiene numerosos recursos para el aula creados por la comunidad de Geogebra. Es un software de código abierto libre y disponible para usos no comerciales. A continuación, se muestran algunos ejemplos de actividades que se pueden realizar en GeoGebra.

ACTIVIDAD 1:

- (a) Dibuja un punto en el plano.
- (b) Dibuja una recta que pase por el punto.
- (c) ¿Cuántas rectas pueden pasar por ese punto? Razona la respuesta.

ACTIVIDAD 2:

- (a) Dibuja dos puntos en el plano.
- (b) Dibuja una recta que pase por los dos puntos.
- (c) ¿Cuántas rectas pueden pasar por esos dos puntos? Razona la respuesta.

ACTIVIDAD 3:

- (a) Dibuja una recta.
- (b) Dibuja una recta que ni sea paralela ni sea la recta dibujada en 3 a). ¿En cuántos puntos se corta? Razona la respuesta.

ACTIVIDAD 4:

- (a) Dibuja una recta.
- (b) Dibuja una recta paralela a la recta dibujada en el ejercicio 3 a) (no utilices el botón Paralela).
- (c) Dibuja un punto en la recta dibujada en 3 a). Dibuja una recta perpendicular a la recta dibujada en el ejercicio 3 a) que pase por ese punto. Utiliza, al menos, dos métodos para hacerlo. ¿Qué posición tiene con respecto a la recta dibujada en 3 b)? Razona la respuesta.

ACTIVIDAD 5:

- (a) Dibuja una recta y un punto que no pertenezca a esa recta.
- (b) Dibuja una recta perpendicular a la recta trazada que pase por el punto dibujado (no utilices el botón Perpendicular).

ACTIVIDAD 6:

- (a) Dibuja una semirrecta.
- (b) Dibuja un segmento.
- (c) Calcula la mediatriz del segmento. Utiliza, al menos, dos formas para realizarlo.

ACTIVIDAD 7:

- (a) Dibuja una circunferencia de radio 3.
- (b) A raíz de lo dibujado, ¿cómo se define una circunferencia?
- (c) ¿Qué diferencia hay entre una circunferencia y un círculo?

ACTIVIDAD 8:

- (a) Dibuja un punto A.
- (b) Dibuja dos semirrectas distintas desde el punto A.
- (c) Dibuja la bisectriz del ángulo interior que forman las semirrectas (sin utilizar el botón Bisectriz).

ACTIVIDAD 9: Dibuja un ángulo:

- (a) Agudo.
- (b) Recto.
- (c) Obtuso.
- (d) Plano.
- (e) Convexo.
- (f) Cóncavo.

ACTIVIDAD 10:

- (a) Dibuja un punto A.
- (b) Dibuja dos semirrectas distintas desde el punto A.
- (c) Transporta el ángulo interior formado por las dos semirrectas.

ACTIVIDAD 11:

- (a) Dibuja dos ángulos y súmalos transportándolos.

ACTIVIDAD 12:

- (a) Dibuja un triángulo. Indica qué tipo de triángulo es clasificándolo según sus lados.
- (b) Dibuja las diagonales que existen.
- (c) Halla el número de lados, de ángulos interiores, de vértices, y de diagonales.
- (d) Halla la suma de los ángulos interiores del polígono.

ACTIVIDAD 13:

- (a) Dibuja un cuadrilátero convexo. Indica qué tipo de cuadrilátero es.
- (b) Dibuja las diagonales que existen.
- (c) Halla el número de lados, de ángulos interiores, de vértices, y de diagonales.
- (d) Halla la suma de los ángulos interiores del polígono.

ACTIVIDAD 14:

- (a) Dibuja un pentágono convexo.
- (b) Dibuja las diagonales que existen.
- (c) Halla el número de lados, de ángulos interiores, de vértices, y de diagonales.
- (d) Halla la suma de los ángulos interiores del polígono.

ACTIVIDAD 15:

- (a) Dibuja un hexágono convexo.

- (b) Dibuja las diagonales que existen.
- (c) Halla el número de lados, de ángulos interiores, de vértices, y de diagonales.
- (d) Halla la suma de los ángulos interiores del polígono.

ACTIVIDAD 16: Utilizando los ejercicios 1, 2, 3 y 4 deduce, dependiendo del número de lados:

- (a) Una fórmula para el número de ángulos interiores.
- (b) Una fórmula para el número de vértices.
- (c) Una fórmula para el número de diagonales.
- (d) Una fórmula para la suma de los ángulos interiores del polígono.

ACTIVIDAD 17:

- (a) Dibuja un triángulo.
- (b) Dibuja sus alturas, es decir, la perpendicular al lado que pasa por el vértice opuesto.
- (c) Señala el punto donde se cortan las alturas, ¿cómo se llama?

ACTIVIDAD 18:

- (a) Dibuja un triángulo con un ángulo interior mayor de 90° .
- (b) Dibuja sus alturas.

ACTIVIDAD 19:

- (a) Dibuja un triángulo con un ángulo interior de 90° (recto).
- (b) Dibuja sus alturas.

ACTIVIDAD 20:

- (a) Dibuja un triángulo.
- (b) Dibuja sus medianas, es decir, segmentos que unen cada vértice con el punto medio del lado opuesto.
- (c) Señala el punto donde se cortan las medianas, ¿cómo se llama?

ACTIVIDAD 21:

- (a) Dibuja un triángulo.
- (b) Dibuja las mediatrices de sus lados.
- (c) Señala el punto donde se cortan las mediatrices, ¿cómo se llama?

ACTIVIDAD 22:

- (a) Dibuja un triángulo.
- (b) Dibuja las bisectrices de sus ángulos interiores.
- (c) Señala el punto donde se cortan las bisectrices, ¿cómo se llama?

ACTIVIDAD 23:

- (a) Dibuja un triángulo.
- (b) Dibuja el ortocentro, el baricentro y el circuncentro, ¿están alineados?

ACTIVIDAD 24:

- (a) Dibuja un triángulo equilátero de 5 cm de lado.

ACTIVIDAD 25:

- (a) Dibuja un triángulo isósceles de 4 cm de base y los lados de 3 cm cada uno.

ACTIVIDAD DE AMPLIACIÓN 1: Diseña una actividad sobre cuerpos geométricos que se podría realizar en primaria con Geogebra e indica en qué curso las harías.

ACTIVIDAD DE AMPLIACIÓN 2: Busca applets ya diseñados en GeoGebra que sirvan para trabajar contenidos de este tema.

Actividad 1.17

Elige tres de las veinte actividades que no han sido resueltas en clase y resuélvelas. Además, realiza las dos actividades de ampliación. Haz un informe en PDF para entregarlo por el Aula Virtual. Haz capturas de pantalla del GeoGebra para poder incluirlas en el informe.

TEMA 2

ORIENTACIÓN, VISUALIZACIÓN Y TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS

2.1. Aspectos curriculares y focos de contenido

En el currículo de Educación Primaria regulado por la LOMLOE (Ministerio de Educación y Formación Profesional, 2022) se contemplan los saberes básicos del sentido espacial y geométrico que se muestran en la Tabla 2.1

Saberes básicos	1er ciclo	2º ciclo	3er ciclo
Localización y visualización de objetos. Orientación básica en el espacio (derecha, izquierda, delante, detrás, arriba, abajo, etc.)	x		
Localización de objetos (puntos) sobre los ejes, el plano cartesiano. Localización en mapas a partir de puntos de referencia, incluidos los puntos cardinales.		x	x
Elementos básicos: vértices y lados. Polígonos regulares.	x	x	x

Saberes básicos	1er ciclo	2º ciclo	3er ciclo
Poliedros regulares. Vocabulario básico. Relación entre vértices, aristas y caras.		x	x
Líneas rectas, curvas.	x	x	
Intersección, paralelismo y perpendicularidad. Posiciones relativas de rectas en el plano.		x	x
Identificación y descripción de diferentes polígonos. Composición y descomposición	x	x	x
Cálculo de perímetros y áreas de polígonos.		x	x
La circunferencia y el círculo. Elementos y propiedades.	x	x	x
Longitud de la circunferencia y área del círculo. Número pi.			x
Ángulos, medición y clasificación de ángulos. Clasificación de triángulos.		x	x
Transformaciones: giros, traslaciones y simetrías en situaciones reales.		x	x
Semejanza: identificación y generación a partir de patrones.			x
Concavidad y convexidad de figuras planas.		x	x
Desarrollo y clasificación de prismas y pirámides.			x
Programas informáticos de geometría dinámica	x	x	x
Desarrollo y usos de la geometría, tanto a nivel práctico como estético, incorporando la perspectiva de género.	x	x	x
Estrategias de aprendizaje de conceptos geométricos y aceptación de dificultades.	x	x	x

Tabla 2.1: Saberes básicos del sentido espacial y geométrico

La *orientación* es una destreza del ser humano en la que se usa la geometría para ubicarse en el espacio y comprender cómo están dispuestos los elementos en el plano y en el espacio especificando el lugar que ocupan. Para ello, se utilizan coordenadas u otras formas como los sistemas de localización de la esfera terrestre y la manipulación e interpretación de mapas y planos. La *visualización* geométrica es la capacidad visual que consiste en un conjunto de imágenes, capacidades y habilidades para elaborar, analizar, transformar y comunicar información sobre las posiciones entre figuras, objetos y modelos geométricos. La visualización incluye el reconocimiento de formas en el entorno, el desarrollo de relaciones de objetos bi-dimensionales y tridimensionales y la habilidad para representar y reconocer objetos desde

diferentes perspectivas (P. Flores, Ramírez, y del Río, 2022; Lupiañez y Flores, 2015). Podemos realizar transformaciones a los objetos del mundo que nos rodea haciendo cambios sobre sus atributos. Podemos distinguir entre las *transformaciones geométricas* que no cambian ni la forma ni el tamaño del objeto de las que sí que lo hacen. Las primeras se llaman *isometrías* y las segundas *congruencias* o *semejanzas*.

2.1.1. Orientación

Determinación y descripción de posiciones

En primera instancia, podemos utilizar el lenguaje para describir el lugar que un elemento ocupa con vocabulario específico sobre posiciones y situaciones. Por ejemplo, podemos clasificar según si se refieren a posición (arriba-abajo, encima-debajo, delante-detrás, enfrente, a la derecha, a la izquierda, etc.) o a distancia (cerca-lejos, etc.). Este vocabulario también se puede utilizar para describir trayectorias. En la Figura 2.1 se muestra una cuadrícula y dos puntos, *A* y *B*. Si solamente se pueden recorrer la líneas discontinuas, podemos describir exactamente caminos que se pueden seguir de *A* a *B*. Por ejemplo, avanza tres casillas hacia adelante y gira a la derecha y avanza otras cuatro casillas ¿Cuántos caminos diferentes hay de *A* a *B*? ¿Cuál de ellos es el más corto?

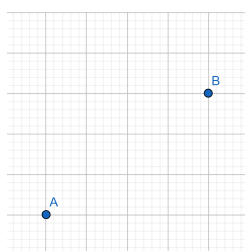


Figura 2.1: Trayectoria entre los puntos A y B

En la Edad Media se comenzó a organizar las calles de los núcleos urbanos utilizando cuadrículas debido a las ventajas que ello supone para orientarse. Algunas ciudades más modernas han seguido esta forma de organización. En la Figura 2.2 se muestra el plano de Manhattan en el que se puede observar la perpendicularidad entre las calles formando cuadrícula.

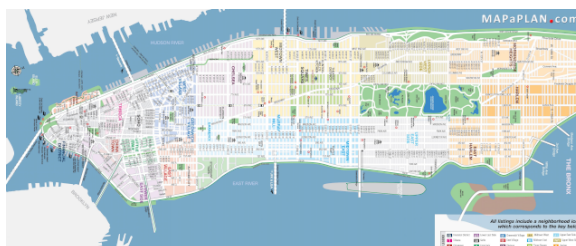


Figura 2.2: Plano del distrito de Manhattan

La organización de la cuadrícula de Manhattan consiste en que las avenidas van de norte a sur y están numeradas utilizando ordinales: la Primera Avenida está al este (East Side), y la Décima Avenida está en el extremo oeste (West Side). Las calles cortan en perpendicular las avenidas y se numeran de sur (downtown) a norte (uptown). Por ejemplo, la Ópera de Nueva York se sitúa en la esquina de la Calle 62 (oeste) con la Novena Avenida. Esta forma de organización constituye un *sistema de coordenadas* como método de localización. El popular juego de *Hundir la Flota* en el que hay un sistema de filas y columnas para determinar la posición de un barco o las hojas de cálculo, por ejemplo, también constituyen sistemas de coordenadas.

Coordenadas cartesianas

El sistema de coordenadas más utilizado en matemáticas es el *sistema de coordenadas cartesianas* (*cartesiano*), que recibe este nombre porque se le atribuye al filósofo y matemático René Descartes (1596-1650). En este sistema se determina la posición de un punto en el plano a partir de un par de números enteros o en el espacio a partir de una terna de números enteros. En el plano se utilizan dos ejes perpendiculares que describen la posición horizontal y vertical del punto a través de marcas en intervalos regulares como en la recta numérica. El eje de *abscisas*, o *eje x*, es el horizontal y el eje de *ordenadas*, o *eje y*, es el vertical. El punto de corte entre ambos ejes se llama *origen de coordenadas*.

En la Figura 2.3 se muestran ejemplos de puntos situados en los cuatro cuadrantes. La primera coordenada denota la posición en la dirección del eje x (en positivo a la derecha y negativo a la izquierda) y la segunda coordenada denota la posición en la dirección del eje y (en positivo arriba y en negativa abajo). También se muestra el punto origen de coordenadas. Además, el plano se divide en cuatro cuadrantes de acuerdo a los signos de las coordenadas.

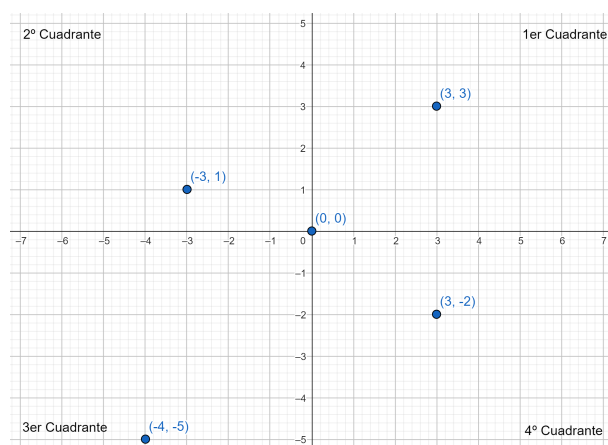


Figura 2.3: Ejemplos de puntos en el plano cartesiano

En la Figura 2.4 se muestran ejemplos de puntos en el espacio, en particular, son los vértices de un cubo. La primera coordenada indica la posición en el eje x, en rojo, la segunda en el eje y, en verde, y la tercera en el eje z, en azul.

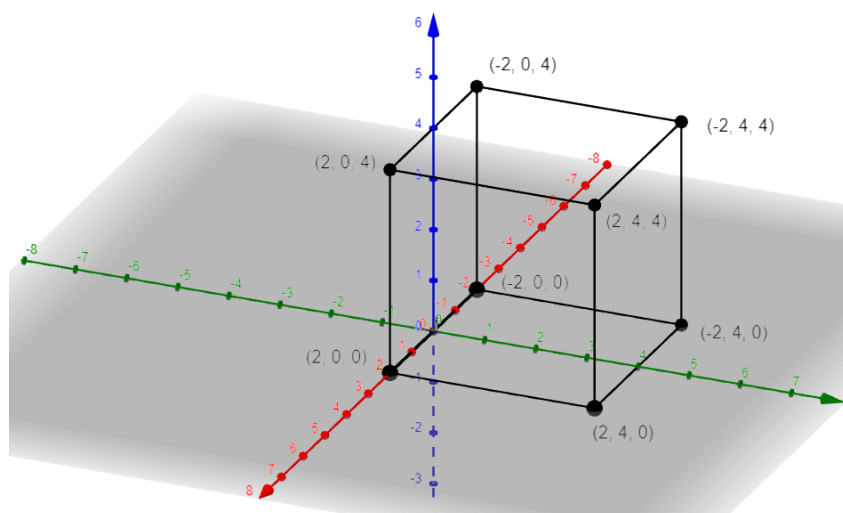


Figura 2.4: Ejemplos de puntos en el espacio

El sistema de coordenadas cartesianas es fundamental en varios temas del currículo de Educación Primaria. En particular, en el Tema 3 veremos aplicaciones para realizar transformaciones geométricas en el plano y en el espacio.

Sistemas de localización terrestre

Uno de los sistemas de coordenadas más utilizado en todo el mundo es el que permite localizar puntos en la superficie de la Tierra. Las *coordenadas geográficas o terrestres* son puntos que representan arcos de circunferencia dibujados sobre el globo terrestre en dos dimensiones. Los arcos en horizontal se denominan *paralelos* y los verticales *meridianos*. Los conjuntos de ambos tipos de arcos determinan el sistema de coordenadas terrestres. El paralelo de referencia es el Ecuador y el meridiano de Greenwich es el de referencia. Cualquier punto de la superficie terrestre queda determinado por la distancia a la que éste se encuentra del Ecuador (latitud) y a la que se encuentra del meridiano de Greenwich (longitud). Estas distancias se expresan considerando como unidad de medida grados sexagesimales. El Ecuador determina dos hemisferios, el norte y el sur. Asignada la latitud de 0° en él, los puntos que quedan en el hemisferio norte se representan con grados positivos, mientras que los que quedan en el hemisferio sur se miden con grados negativos. El Meridiano de Greenwich establece un valor de la longitud de 0° , y también determina dos hemisferios. Los puntos que quedan a la derecha del Meridiano de Greenwich están en el hemisferio oriental y se miden con grados positivos, mientras que a la izquierda se determina el hemisferio occidental y, en él, los puntos se miden con grados negativos. Si sólo se emplean medidas positivas de los grados, es

necesario indicar si están al Norte o al Sur del Ecuador y al Este o al Oeste del Meridiano de Greenwich. En la Figura 2.5 se muestra un esquema de los elementos que intervienen en el sistema de localización terrestre

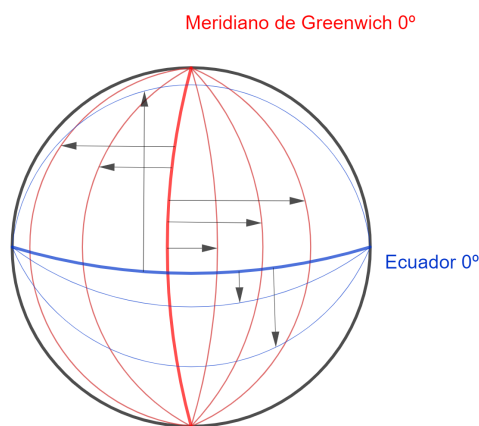


Figura 2.5: Sistema de coordenadas terrestres

Mapas, planos, redes de puntos y trazos

Los elementos básicos para la elaboración de planos son puntos y trazos. Los planos de-
formados tratan de mantener posiciones, pero se preocupan más de dar una imagen sencilla
que de reproducirla con fidelidad. Por ejemplo, el dibujo del plano de una línea de metro,
deforma la alineación en la que se sitúan en la realidad las distintas paradas. Es decir, en la
Figura 2.6 observamos que las paradas *Colón*, *Xàtiva* i *À.Gimerà* están totalmente alineadas
en la línea de metro en color marrón. Sin embargo, vemos en *Google Maps* que estas tres pa-
radas no están alineadas en la realidad, pero sí aparecen en el mismo orden. Del estudio de
las propiedades que se mantienen cuando se deforma una superficie sin romperla se ocupa
una parte de la matemática denominada *topología*. Sus razonamientos nos permiten dife-
renciar líneas abiertas y cerradas, las que se cortan a sí mismas y las que no lo hacen, o qué
regiones son continuas o tienen huecos. Son razonamientos topológicos los que se hacen,
por ejemplo, para determinar si se puede ir de un punto a otro en una ciudad sin saltar un
río, o evitando una zona que está cortada al tráfico o colapsada.

Para construir por ejemplo los planos y decidir cuál es más adecuado, las matemáticas se
abstraen del significado de los elementos que aparecen en ellos y buscan estudiar sus relacio-
nes, obteniendo teorías que tienen una amplia aplicación. Este tipo de construcciones son los
grafos y constituyen un campo de estudio e investigación que tiene importantes aplicaciones
en nuestra sociedad.

Un *grafo* es una colección finita de puntos, llamados *vértices*, unidos por curvas simples, denominadas *aristas*, de manera que cada arista une dos vértices. Por ejemplo, la red de líneas de telefonía móvil es un grafo, siendo los repetidores los vértices y las artistas las líneas.



Figura 2.6: Recorte de la línea 9 de metro de la ciudad de Valencia

2.1.2. Visualización

Existen diferentes formas de representar en el plano la perspectiva de un objeto tridimensional, una de ellas es la perspectiva isométrica. Esta es una representación visual de un objeto tridimensional que se reduce en dos dimensiones, en la que los tres ejes ortogonales principales, al proyectarse, forman ángulos de 120° y las dimensiones paralelas a dichos ejes se miden en una misma escala. La perspectiva isométrica tiene la ventaja de permitir la representación a escala. Se puede facilitar el dibujo de la perspectiva isométrica mediante el uso de papel isométrico (Figura 2.7).

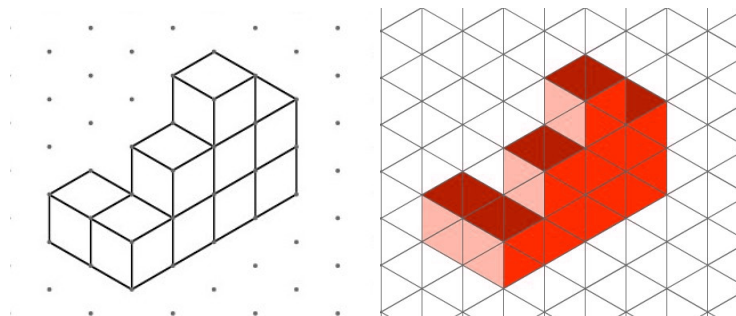


Figura 2.7: Vistas isométricas con papel isométrico.

Otra forma de representación plana de figuras tridimensionales son las vistas o proyecciones ortogonales. Una proyección ortogonal es aquella que se crea a partir del trazado de la totalidad de las rectas proyectantes perpendiculares a un cierto plano. De este modo, existe un vínculo entre los puntos de aquello que se proyecta con los puntos proyectados (ver Figura 2.8). Para las vistas o proyecciones ortogonales podemos usar el papel cuadriculado.

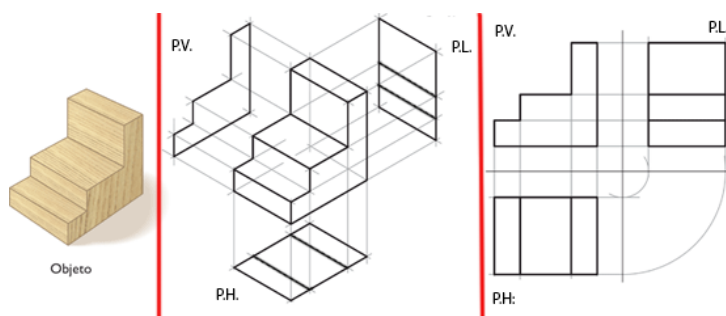


Figura 2.8: Vistas o proyecciones ortogonales.

2.1.3. Transformaciones geométricas

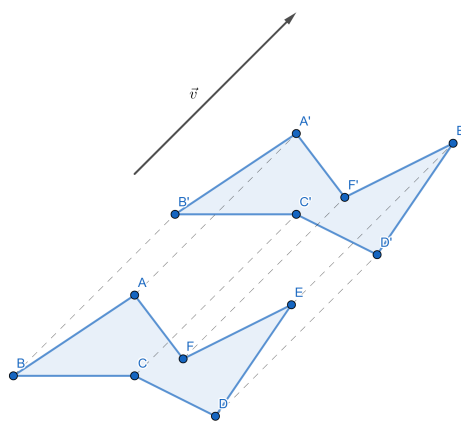
Isometrías

Una *isometría* o *movimiento rígido* es una transformación de los puntos del plano que conserva las distancias, y, por tanto, los ángulos. Es decir, si P' y Q' son los puntos transformados de P y Q , respectivamente, se cumple que $\overline{PQ} = \overline{P'Q'}$. Las isometrías también transforman puntos alineados en puntos alineados. Estos tres movimientos también se pueden definir sobre puntos en el espacio, aunque de ahora en adelante, se centrará la explicación en el caso bidimensional.

Traslación

La traslación es la transformación más simple. La traslación de vector $\vec{v}$ se representa por $T_{\vec{v}}$. Consiste en un movimiento de los puntos del plano en el que todos ellos se trasladan, es decir, se mueven en la misma dirección, la del vector, y a la misma distancia, el módulo del vector. Dados un punto P y un vector $\vec{v}$, se dice que P' es el punto trasladado de P mediante $\vec{v}$ si el segmento $\overline{PP'}$ determina un vector equivalente a $\vec{v}$, es decir, tiene la misma dirección y sentido que $\vec{v}$ y la distancia de P a P' es el módulo del vector $\vec{v}$ (Figura 2.9).

Una traslación queda determinada mediante su vector de traslación. Se suele expresar mediante $T_{\vec{v}}(P) = P'$, que el punto P' es el trasladado de P mediante el vector $\vec{v}$. Segmentos y rectas se transforman mediante la traslación en segmentos y rectas paralelos a los iniciales,

Figura 2.9: Traslación con vector $\vec{v}$

como se ve en la figura donde el segmento $\overline{AB}$ es paralelo al segmento $\overline{A'B'}$; $\overline{BC}$ es paralelo a $\overline{B'C'}$, etc. Además, un segmento y su trasladado tienen la misma medida, por este motivo se dice que la traslación es una isometría, ya que conserva las distancias.

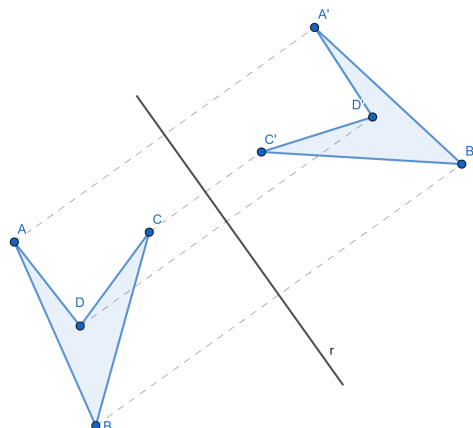
En una traslación, todos los puntos se mueven. Además, si se fija un sentido en la notación de la figura inicial, este mismo sentido se respeta en la figura imagen o trasladada. En el caso del polígono de la Figura 2.9 se ha elegido el sentido contrario al de las agujas del reloj. Si la figura inicial se nombra como $ABCDEF$, su imagen mediante la traslación respeta esta notación, y es nombrada por $A'B'C'D'E'F'$. Se dice entonces que como la traslación conserva la orientación, se trata de una *isometría directa*.

Simetría axial

Una *simetría axial* de eje la recta r es una transformación, denotada por S_r , de los puntos del plano donde cada punto P se transforma en otro punto P' , de tal manera que la recta r es mediatriz del segmento $\overline{PP'}$. La expresión $S_r(P) = P'$ indica que el punto P' es el simétrico de P mediante la simetría axial cuyo eje es la recta r . En la Figura 2.10 se muestra la simetría axial de un polígono con eje de simetría r .

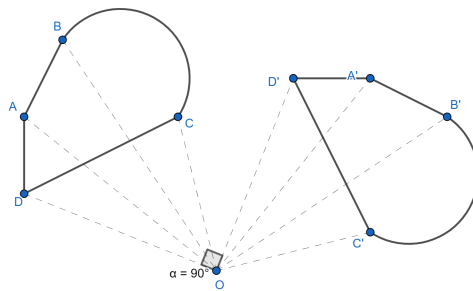
En la Figura 2.10, para obtener una figura simétrica a otra respecto de una recta r , se trazan los puntos reflejados de algunos puntos de la figura inicial uniando posteriormente dichos puntos en el orden adecuado. Es decir, si la figura inicial es nombrada como $ABCD$, se unen los puntos $A'B'C'D'$ de la figura simétrica.

La simetría es un movimiento inverso, pues cambia la orientación de las figuras, ya que la figura inicial $ABCD$ se ha nombrado siguiendo el sentido contrario a las agujas del reloj, y en cambio para nombrar la figura imagen $A'B'C'D'$ se tiene que seguir el sentido horario. Se dice entonces que como la traslación conserva la orientación, se trata de una *isometría indirecta*.

Figura 2.10: Simetría axial con eje de simetría r

Giro o rotación

Sea O un punto fijo del plano y $\alpha = MPN$ un ángulo orientado. Se llama *giro* $G(O, \alpha)$ de centro O y ángulo de giro α a la transformación del plano en la que un punto cualquiera P se transforma en otro punto P' de manera que la distancia de los puntos P y P' al punto O es la misma, es decir, los segmentos $\overline{OP}$ y $\overline{OP'}$ tienen el mismo módulo y, además, el ángulo formado por $POP' = \alpha$. Se dice que el punto P' es resultado de girar el punto P , alrededor del centro de giro O un ángulo α , lo cual se expresa por: $G(O, \alpha)(P) = P'$. En la Figura 2.11 se muestra un giro de 90° de centro O en el sentido horario.

Figura 2.11: Giro de 90° y centro O

Si se realiza el mismo giro para cada uno de los puntos de la Figura 2.11 $ABCD$, y se unen los correspondientes puntos transformados en el mismo orden que en la figura inicial, se obtiene la figura $A'B'C'D'$, que es la figura rotada de $ABCD$ alrededor del punto O según el ángulo establecido α . Esta construcción respeta la orientación de la figura, pues la notación $ABCD$ determina un sentido horario, y es ese mismo sentido el que determina la imagen $A'B'C'D'$. Por tanto, el giro es una *isometría directa*.

Simetría central

La rotación de 180° alrededor de un punto O recibe el nombre especial de *simetría central* respecto de O . Para realizar una simetría central de un punto P basta unir dicho punto con el centro de simetría O , prolongando el segmento de manera que los módulos de los segmentos $\overline{AO}$ y $\overline{OA'}$. En la Figura 2.12 se muestra un ejemplo si simetría central de centro O . Al tratarse de un giro, la simetría central es una *simetría directa*.

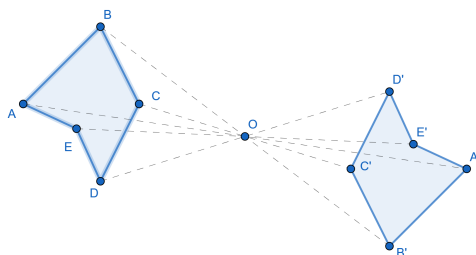


Figura 2.12: Simetría central de centro O

Composición de isometrías

A partir de una figura F se pueden aplicar dos o más transformaciones geométricas consecutivamente. Cuando a una figura F se le aplica una isometría, se obtiene su imagen F' . A continuación, es posible aplicar a F' otra isometría, obteniendo la imagen F'' de F' . Decimos que F'' resulta de aplicar a la figura F la composición de las dos isometrías anteriores.

La *simetría en deslizamiento* de una figura se obtiene al realizar a una figura original una simetría axial y, a continuación, una traslación con vector paralelo al eje de simetría del primer movimiento. Como el deslizamiento se trata de la composición de una isometría inversa (la simetría axial) y una directa (la traslación), el resultado es una isometría inversa. En la Figura 2.13 se muestra un ejemplo de una simetría en deslizamiento.

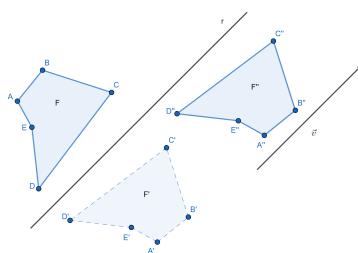


Figura 2.13: Deslizamiento con eje r y vector $\vec{v}$

También podemos realizar la *composición de dos simetrías axiales de ejes paralelos*. Como se componen dos isometrías indirectas, el resultado es una isometría directa. En particular, se trata de una traslación cuyo vector de traslación se obtiene al unir un punto de la figura original con su correspondiente en la figura obtenida tras haber realizado las dos simetrías.

Este vector es perpendicular a los ejes de simetría y su módulo es el doble de la distancia que hay entre dichos ejes. En la Figura 2.14 se muestra un ejemplo de composición de dos simetrías con ejes paralelos que resultan en una traslación.

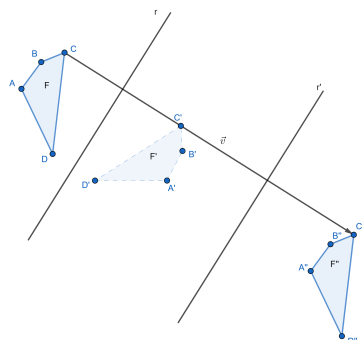


Figura 2.14: Composición de dos simetrías con ejes paralelos

Si ahora componemos dos simetrías con ejes que se cortan, obtendremos una rotación cuyo centro es el punto de corte de los dos ejes y la amplitud del ángulo de giro es el doble de la del ángulo que forman dichos ejes. En la Figura 2.15 se muestra un ejemplo de composición de dos simetrías con ejes que se cortan.

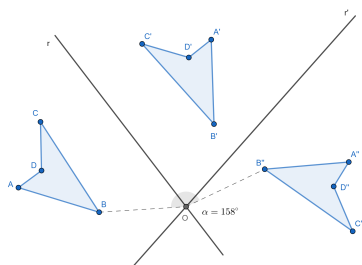


Figura 2.15: Composición de dos simetrías con ejes que se cortan

Rosetones, frisos y mosaicos

Existen elementos en la realidad que pueden ser vistos como regularidades con un patrón de repetición, pero también como el resultado de un proceso dinámico de composición de isometrías, esto sucede en los rosetones, los frisos y los mosaicos.

Si al girar una figura en torno a un punto O un determinado ángulo $\alpha = 360^\circ/n$, esta coincide n veces con la figura inicial en el transcurso de una vuelta completa, se dice que esa figura posee *simetría rotacional de orden n* . Toda figura plana tiene, al menos, una simetría rotacional de orden 1. Denotamos las figuras que tienen simetría rotacional como *rosetones*. ¿Qué orden tienen las simetrías rotacionales de la Figura 2.16?



Figura 2.16: Rosetones

Los frisos o cenefas son bandas ornamentales que se obtienen mediante la repetición de una figura base a lo largo de una franja rectangular. Esta figura base ha podido ser previamente transformada mediante alguna isometría y después es trasladada según un vector determinado. Existen solamente siete formas de realizar frisos, dependiendo de las isometrías a que sometamos previamente a la figura inicial antes de aplicarle las sucesivas traslaciones. Los siete tipos de frisos son:

- 1 Friso de las traslaciones.** Simplemente se traslada repetidamente en horizontal un motivo inicial en base a un vector de traslación.

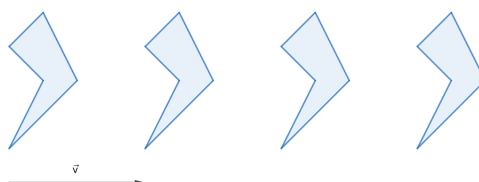


Figura 2.17: Friso 1

- 2 Friso de las traslaciones y la simetría horizontal.** Se realiza una simetría del motivo original respecto al eje horizontal y a continuación se trasladan ambas figuras (la original y la simétrica) repetidamente en horizontal en base a un vector de traslación.
- 3 Friso de las traslaciones y la simetría vertical.** Análogo al anterior con simetría vertical.
- 4 Friso de las traslaciones y del deslizamiento.** Se realiza una simetría en deslizamiento con respecto al eje horizontal y para un cierto vector. A continuación, se trasladan ambas figuras (la original y la simétrica deslizada) repetidamente en horizontal en base a un vector de traslación.

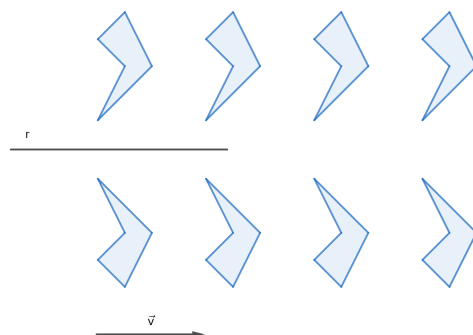


Figura 2.18: Friso 2

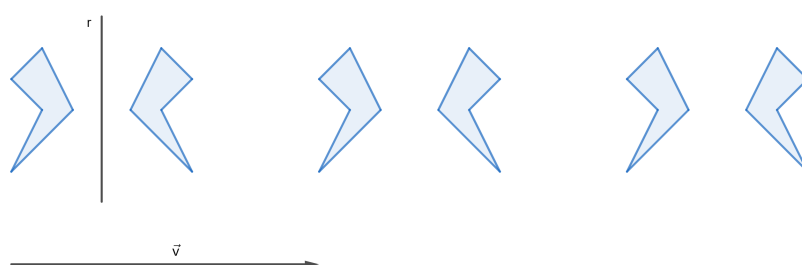


Figura 2.19: Friso 3

- 5 Friso de las traslaciones y del giro de 180° .** Se gira el motivo original 180° respecto a un centro de giro. A continuación, se trasladan ambas figuras (la original y la girada) repetidamente en horizontal en base a un vector de traslación.
- 6 Friso de las traslaciones, el giro de 180° y las simetrías horizontales.** Se gira el motivo original 180° respecto a un centro de giro. Con el resultado obtenido, se realiza una simetría horizontal. A continuación, se trasladan las cuatro figuras (la original, la girada y las dos resultantes de la simetría horizontal) repetidamente en horizontal en base a un vector de traslación.
- 7 Friso de las traslaciones, el deslizamiento y el giro de 180° .** Se realiza una simetría en deslizamiento con respecto al eje horizontal y para una cierto vector. Se gira el resultado 180° con respecto a un centro de giro. A continuación, se trasladan las cuatro figuras (la original, la simétrica deslizada y las dos resultantes de girar las anteriores) repetidamente en horizontal en base a un vector de traslación.

Un *mosaico* o *teselado plano* es el cubrimiento de una superficie plana mediante repetición de algún motivo inicial en el que no existen huecos ni solapamientos. Los teselados se generan mediante la aplicación de isometrías planas sobre alguna figura base, extendiendo

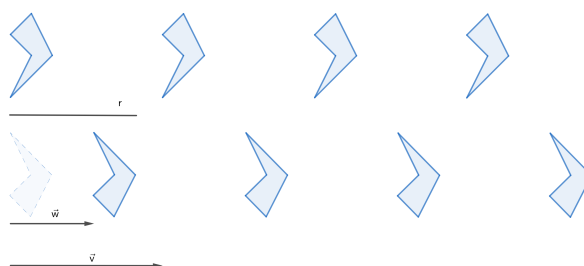


Figura 2.20: Friso 4

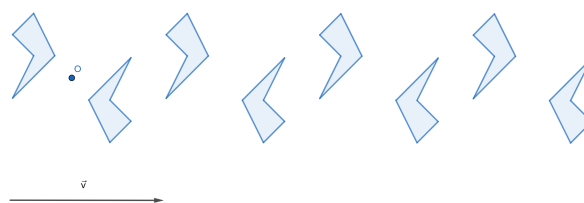


Figura 2.21: Friso 5

dicho proceso en dos direcciones, en lugar de una sola dirección como ocurre en los frisos. Cuando las piezas que conforman el teselado son polígonos, dicho cubrimiento se llama *teselado poligonal*.

El requisito de que no haya huecos ni solapamientos en un mosaico lleva a la condición de que la suma de los ángulos que concurren en un vértice debe ser 360° exactamente. Los únicos polígonos regulares que cumplen esta condición son el triángulo equilátero, el cuadrado y el hexágono regular, y generan los *teselados o mosaicos regulares*. ¿Podrías justificar que, efectivamente, estos tres tipos de polígonos cumplen esta condición? Tal y como se observa en la Figura 2.24, en cada vértice de un mosaico regular concurren exactamente el mismo número de vértices. Es decir, en el mosaico formado por triángulos equiláteros concurren seis triángulos en cada vértice; en el formado por cuadrados, cuatro; y en el formado por hexágonos, tres. Si utilizamos dígitos para indicar el número de lados de los polígonos regulares que concurren en un vértice del mosaico, podemos resumir numéricamente la estructura de las combinaciones que generan los tres mosaicos regulares: $\{3, 3, 3, 3, 3, 3\}$, $\{4, 4, 4, 4\}$ y $\{6, 6, 6\}$. En la Figura 2.25 se muestra un panel de abejas cuya estructura es un mosaico regular a partir de hexágonos.

Si en lugar de utilizar solamente un tipo de polígonos regulares se utilizan varios de ellos, se puede analizar sobre qué combinaciones de estos polígonos permiten obtener 360° en torno a un vértice. Por ejemplo, se pueden juntar tres triángulos equiláteros y dos cuadrados en torno a cada vértice del teselado, ¿puedes razonar por qué? De estos, únicamente hay ocho combinaciones que dan lugar a teselados de forma que en cada vértice concu-

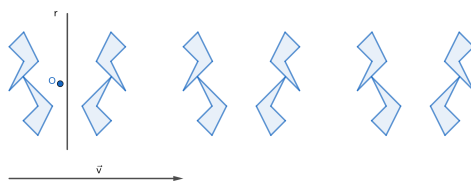


Figura 2.22: Friso 6

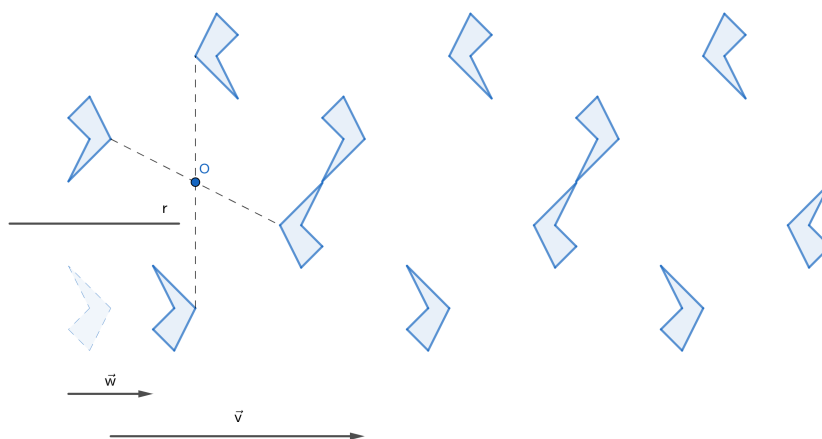


Figura 2.23: Friso 7

rran el mismo número de polígonos. Estos teselados se llaman *teselados semirregulares uniformes*. En la Figura 2.26 se muestran las combinaciones de polígonos regulares que generen los ocho mosaicos semirregulares uniformes y cuyas codificaciones son: $\{3, 3, 3, 4, 4\}$, $\{3, 3, 4, 3, 4\}$, $\{3, 3, 3, 3, 6\}$, $\{3, 6, 3, 6\}$, $\{4, 8, 8\}$, $\{3, 4, 6, 4\}$, $\{6, 4, 12\}$ y $\{3, 12, 12\}$.

Solo hay diez mosaicos semirregulares no uniformes que son los que se muestran en la Figura 2.27 y sus codificaciones son: $\{3, 3, 6, 6\}$, $\{3, 4, 4, 6\}$, $\{3, 3, 4, 12\}$, $\{3, 4, 3, 12\}$, $\{5, 5, 10\}$, $\{4, 5, 20\}$, $\{3, 7, 42\}$, $\{3, 8, 24\}$, $\{3, 9, 18\}$ y $\{3, 10, 15\}$.

Los *mosaicos irregulares* se generan combinando polígonos regulares e irregulares. Si nos preguntamos si existen polígonos irregulares de forma que se puede teselar todo el plano con copias de uno ellos, podemos obtener que todos los triángulos y todos los cuadriláteros teselan el plano. ¿Sabes razonar por qué? En la Figura 2.28 se presentan mosaicos contruidos, de izquierda a derecha, a partir de un pentágono regular y un decágono irregular; un trapecoide y un triángulo rectángulo escaleno.

Existen otras figuras, ya sean cóncavas o convexas que recubren el plano. La manera de obtener estas figuras es a partir de polígonos que recubran el plano y modifiquen sus lados a partir de isometrías de forma que se conserve la superficie cubierta por la figura. Por ejemplo, copiando la Figura 2.29 se puede recubrir el plano porque su superficie es la misma que la de un cuadrado cuyo lado es el segmento horizontal de la figura.

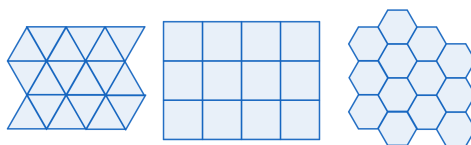


Figura 2.24: Mosaicos regulares



Figura 2.25: Mosaico regular hexagonal

Semejanzas

Dos figuras son semejantes si los ángulos correspondientes son iguales y sus lados son proporcionales. Es decir, una semejanza entre dos figuras geométricas viene definida exclusivamente por la condición de que la distancia entre cualquier par de puntos de la primera figura A y B dividida entre la distancia de sus correspondientes puntos de la segunda figura A' y B' es constante. A este valor se le llama razón de semejanza. En la Figura 2.30 se muestran dos triángulos semejantes y las medidas de sus lados.

2.2. Fundamentos didácticos

Cuando el niño desarrolla el pensamiento geométrico y espacial, una de las principales etapas de ese proceso es la de aprender a situarse y situar los objetos que le rodean. En un primer momento, el niño percibe el espacio de la forma en la que lo piensa y no como en realidad lo ve, en función del llamado *realismo intelectual*. En esta etapa, las nociones más fáciles para el niño son del tipo topológico, siendo complicadas otras opciones de representación del espacio (Carrillo y Contreras, 2001). La etapa de lo vivido (llamada etapa del «aquí») es la de la experiencia más directa con el medio, la más biológica; cuando se adquiere un grado de madurez en esta etapa, se va pasando a la etapa de lo percibido (llamada del «allá»), es una etapa en la que se pueden distinguir las distancias al observar un paisaje o una fotografía, precisando posiciones de objetos simplemente con la observación, es por ello una etapa relacionada con los conceptos geográficos más elementales; finalmente, la etapa de lo concebido (llamada del «doquier») es la etapa más matemática, la de la abstracción del espacio

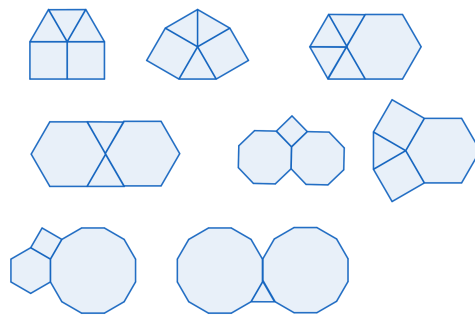


Figura 2.26: Mosaicos semirregulares uniformes

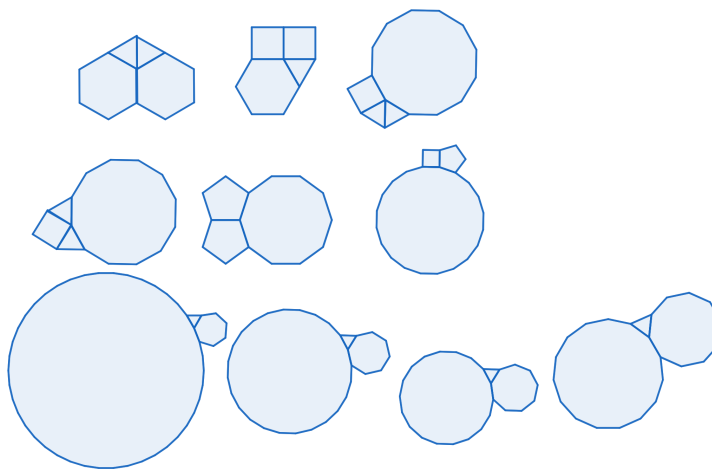


Figura 2.27: Mosaicos semirregulares no uniformes

y percepción de las formas en su estado puro, caracterizadas por sus relaciones. Es entonces cuando tendrán pleno sentido representaciones espaciales distintas de las del ámbito topológico o proyectivo; es la etapa de la medida de magnitudes propiamente dichas.

2.2.1. Aspectos del desarrollo de los sistemas de referencia y las nociones de situación

Para localizar la dirección y la posición de objetos en movimiento en el espacio se precisan puntos de referencia y, para ello, se necesita un sistema de referencia (Dickson y cols., 1991). Esto es, una relación de los objetos móviles con algún aspecto fijo del espacio. Por ejemplo, al caminar por encima de la acera estamos referenciando nuestro movimiento con respecto a la superficie de la acera. Piaget y Inhelder (1956) (citados en Dickson y cols. (1991)) afirman que la base del desarrollo de los sistemas de referencia consiste en la capacidad de utilizar de forma natural el marco de referencia correspondiente a la horizontal y la vertical utilizando correctamente *la conciencia de la dirección*.

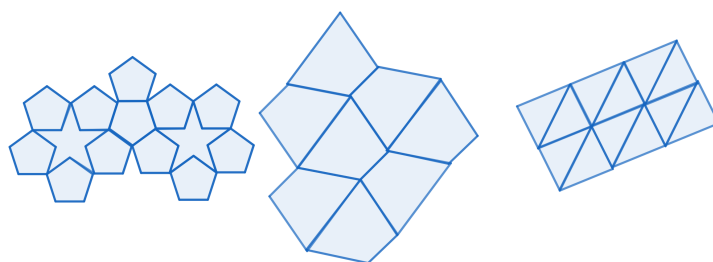


Figura 2.28: Mosaicos irregulares



Figura 2.29: Figura que tesela el plano

Greenes (1979) afirma que las primeras nociones espaciales que se manejan son las del eje vertical, es decir, arriba/abajo, alto/bajo, encima/debajo, etc. A continuación, se desarrollan las relaciones de orientación horizontal, las cuales tienen menos aspectos diferenciadores en comparación con las de orientación vertical. Al mirar en una dirección observamos lo que está a la derecha y a la izquierda. Sin embargo, al girarnos, lo que estaba a la derecha ahora está a la izquierda y, análogamente, lo que estaba a la izquierda ahora está a la derecha. Por tanto, por la relativa facilidad con la que el individuo se mueve sobre un plano horizontal, se crea más confusión y la orientación en las direcciones horizontales tarda más en desarrollarse, siendo la lateralidad izquierda-derecha la noción que más tarda en interiorizarse.

Dickson y cols. (1991) sintetizan diversos estudios hechos a partir del experimento realizado por Piaget y Inhelder (1956) y que consistió en mostrar a niños el dibujo de un frasco de agua que contenía una cierta cantidad de agua y un corcho que representaba un barco. Los niños tenían que dibujar el frasco en otras posiciones que les fueron indicadas. Se hizo un experimento análogo con dibujos de laderas de montañas para dibujar diferentes elementos en diferentes puntos. El objetivo de este tipo de experimentos era analizar los puntos de referencia que utilizaban los niños para hacer sus dibujos. Piaget y Inhelder (1956) establecieron diferentes estadios en función del cambio del punto de referencia. En la Figura 2.31 se muestran ejemplos de dibujos de los experimentos de Piaget y Inhelder en diferentes estadios.

Piaget e Inhelder afirman que el niño no comienza a utilizar otro punto de referencia externo, diferente a la jarra, para saber la posición del agua hasta que tiene entre cinco y siete años. El siguiente estadio de desarrollo se caracteriza porque el niño se percata de la necesidad de algún sistema de referencia distinto de la jarra y comienza a relacionar el nivel

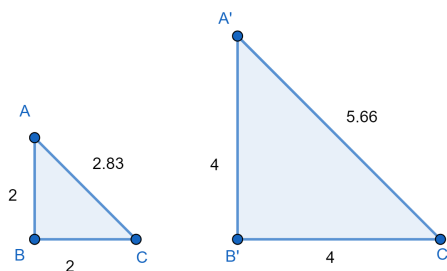


Figura 2.30: Figuras semejantes

del agua con la superficie de la mesa o del suelo. Según Piaget, no es hasta una edad de nueve o doce años cuando el niño comienza a ser capaz de coordinar todos los ángulos y paralelas que pasan a través de todo el sistema espacial que está siendo examinado.

Sin embargo, en investigaciones posteriores de otros autores se encontraron discrepancias en cuanto a las edades a las que los niños alcanzaban los diferentes estadios (Shayer, Küchemann, y Wylam, 1976). Además, Dietz y Barnett (1978) mostraron que estudiantes de magisterio eran incapaces de comparar las orientaciones de objetos reales y utilizarlas como sistemas de referencia naturales. Esto manifiesta la ambigüedad para la determinación de los momentos en los que se encuentra el individuo en cada estadio del desarrollo de los sistemas de referencia.

Piaget, Inhelder, y Szeminska (1960) afirman que la capacidad para utilizar coordenadas se desarrolla juntamente con la de utilizar los ejes de referencia horizontal y vertical.

Recio y Rivaya (1991) establecen que las nociones de situación incluyen las de *orientación* (delante-detrás, arriba-abajo y derecha-izquierda), *proximidad* (cerca-lejos), *interioridad* (dentro-fuera, abierto-cerrado) y *direccionalidad* (hacia, desde, hasta).

Las nociones *delante-detrás*, *hacia*, *hasta*, *desde* están relacionadas con la marcha, *cerca-lejos* con la posibilidad de acercar o no a objetos, *dentro*, *fuera*, *abierto*, *cerrado* con la posibilidad de esconderse o de esconder algo. Sin embargo, *izquierda-derecha* no tiene referencia corporal precisa (por la simetría del cuerpo), lo que hace que estos conceptos sean más complejos.

La construcción de estas nociones sigue el siguiente proceso de descentralización del yo egocéntrico:

- * Nivel 1: Se construye el esquema corporal propio percibiendo qué partes del cuerpo se tienen delante, detrás, arriba, abajo...

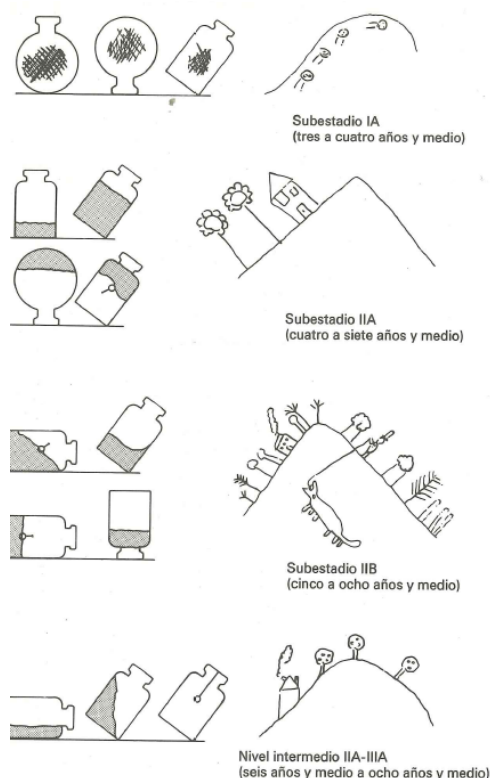


Figura 2.31: Dibujos del experimento de Piaget y Inhelder (1956) extraídos de Dickson y cols. (1991)

- * Nivel 2: Se sitúan los objetos exteriores respecto al propio cuerpo como sistema de referencia (la pelota está detrás de mí, la caja está delante de mí, ...).
- * Nivel 3: Se percibe que otras personas u objetos también tienen su propio sistema de referencia, es decir, lo externo al propio cuerpo también tiene un delante, detrás, ... que no tiene por qué coincidir con el propio. Respecto a ese sistema de referencia externo el niño también se puede situar (me pongo delante de la mesa).
- * Nivel 4: Se perciben las posiciones relativas de las personas y objetos entre sí (La pelota está delante de Laura, la caja está encima de la mesa)

2.2.2. Los procesos y las habilidades de visualización

Gutiérrez (1996) describe la visualización como el razonamiento que está basado en el uso de elementos visuales o espaciales, tanto mentales como físicos, con el objetivo de comprender y aprender conceptos y propiedades para resolver problemas de geometría. Las imágenes mentales que las personas se forman de los conceptos geométricos se asientan más que las definiciones. De esta manera, al leer la palabra *prisma* el individuo representa en su mente la imagen de un prisma y en ese momento comienza a actuar el razonamiento visual. Cuando

se resuelve un problema geométrico, se empieza leyendo el enunciado y se trata de entender su significado utilizando en muchos casos dibujos para obtener nueva información y avanzar en la resolución. En este proceso se ejecutan una serie de mecanismos cognitivos que conllevan la formación de imágenes mentales de las figuras o relaciones del problema que sirven para progresar en la resolución. Tener más o menos éxito en la resolución de un problema geométrico está relacionado con la destreza utilizando habilidades de visualización que se pueden aprender y mejorar con la práctica.

Para resolver un problema geométrico, el razonamiento visual relaciona las representaciones visuales mentales con las representaciones externas gráficas o verbales y para ello deben integrarse los tres elementos fundamentales de la visualización: *procesos de visualización, imágenes mentales y habilidades de visualización*.

Los *procesos de visualización* son las acciones mentales necesarias para resolver un problema y manejan la conexión bidireccional entre la información externa que recibe el alumnado y la información gráfica mental interna que genera. La información externa puede ser gráfica (esquemas, figuras, objetos reales o virtuales, etc.) o verbal (texto escrito, información oral, etc.). En el contexto de la geometría, los dos tipos de información se pueden convertir en representaciones gráficas mentales. Según Bishop (1989) citado en Gutiérrez (1991) estos procesos son:

- * **Procesamiento visual de la información (PVI)**, en el cual se convierte la información abstracta en imágenes mentales incluyendo la transformación de imágenes mentales ya creadas en otras. En el ejemplo de la lectura del enunciado de un problema geométrico, el estudiante va transformando la información que va leyendo en imágenes mentales que se van completando conforme avanza el proceso.
- * **Interpretación de la información figurativa (IIF)**, en la cual se comprende la representación visual con el objetivo de extraer la información que contiene. Esta se puede expresar interna o externamente mediante una nueva imagen mental. Se puede entender, por tanto, como un proceso inverso al anterior.

El proceso de formación de imágenes mentales y de análisis, transformación y generación de información para crear nuevas imágenes en la resolución de un problema matemático se puede repetir varias veces.

Actividad 2.1

Resuelve el siguiente problema geométrico y analiza de qué forma aparecen los procesos de PVI e IIF: *Dado un rectángulo cuyos lados miden 3 cm y 8 cm, calcula la distancia entre el centro y los vértices.*

Las *imágenes mentales* son los objetos mentales con los que hay que llevar a cabo las acciones mentales necesarias para resolver un problema. Presmeg (1986) citado en Gutiérrez (1991) clasifica diversos tipos de imágenes mentales que se utilizan en las clases de geometría:

- * Las **imágenes concretas pictóricas** son imágenes figurativas de objetos físicos que los representan con realismo. Se trata de imágenes que son como fotografías de los objetos que se recuerdan después de haberlos visto o manipulado.
- * Las **imágenes de fórmulas** son la visualización de fórmulas o relaciones de sus elementos mentalmente tal y como se verían, por ejemplo, en un libro de texto. También incluyen texto, diagramas o dibujos. Se puede recordar, por ejemplo, un trozo de texto por la forma en la que está ubicado en los apuntes con un determinado color o subrayado.
- * Las **imágenes de patrones** son representaciones visuales de conceptos o relaciones abstractas. Se trata de una representación gráfica del significado de un objeto concreto o fragmento de texto, pero no del objeto o del texto en sí mismos. Por ejemplo, al pensar en un giro en el plano se nos puede venir a la mente una imagen representando el movimiento sin estar presentes los elementos que los definen como el centro o el ángulo de giro.
- * Las **imágenes cinéticas** son una combinación de las físicas y mentales, pues en ellas intervienen acciones, como por ejemplo el movimiento de manos, para reforzar o representar la imagen mental. Los ejemplos típicos de uso de este tipo de imágenes son las explicaciones de cómo se va a un lugar o cómo es un cierto concepto geométrico acompañadas de gesticulaciones.
- * Las **imágenes dinámicas** son imágenes mentales en las que se incluye movimiento. Por ejemplo, imaginar un cono apoyado sobre su base y visualizarlo girando poco a poco hasta que se sitúa apoyado sobre su vértice como un helado.

Actividad 2.2

Por parejas pensad un ejemplo de cada tipo de imagen mental definida por Presmeg.

Las *habilidades de visualización* son las que permitirán que se realicen de forma correcta los procesos de visualización par crear, analizar y transformar imágenes mentales adecuadas para conseguir la resolución de un problema geométrico. En Gutiérrez (1991) se explica que Bishop no distingue entre procesos y habilidades de visualización. Sin embargo, otros autores sí lo hacen. Del Grande (1990) presenta una clasificación de habilidades de visualización que recoge las aportaciones de diversos autores e incluye aspectos que se refieren a un contexto más amplio que el de la geometría. En Carrillo y cols. (2016) se describen las siguientes habilidades de Del Grande (1990) específicamente relacionadas con las visualización para resolver problemas de geometría:

- * **Identificación visual:** se trata de reconocer una figura de forma que se aísla de un contexto geométrico más complejo. Tiene que ver con reconocer una o varias figuras desde un punto de vista puramente matemático, sin considerar otro contexto. Esta habilidad se necesita, por ejemplo, para identificar el motivo o la tesela básica que genera un friso o mosaico Lupiañez y Flores (2015). Otro ejemplo en el que precisaremos de esta habilidad es para saber cuántos triángulos hay en la Figura 2.32

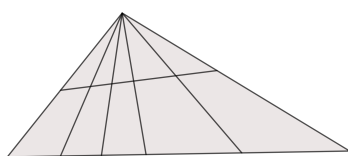


Figura 2.32: Triángulos

- * **Reconocimiento de posiciones en el plano o en el espacio:** consiste en reconocer la posición de un objeto o varios respecto a un punto de referencia. Se relacionan unos objetos con otros pero de forma indirecta, utilizando un punto de referencia externo y común a todos. Por ejemplo, un estudiante de primaria que tenga que describir cómo es el sólido de la Figura 2.33 dirá que hay tres cubos apoyados sobre la mesa y encima

del de la izquierda hay otros dos siendo el punto de referencia el propio alumno. Sin embargo, el estudiante sentado enfrente dirá que hay tres cubos sobre la mesa y encima del de la derecha hay otros dos.

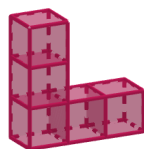


Figura 2.33: Posición de cubos

- * **Conservación de la percepción:** Es la habilidad de extraer información de figuras y formas espaciales que no se pueden ver al completo. En estos casos, es necesario inferir esa información partiendo de los referentes a los que sí tenemos acceso. Por ejemplo, esta habilidad nos permitirá saber cuántos cubos hay en el sólido de la Figura 2.34.

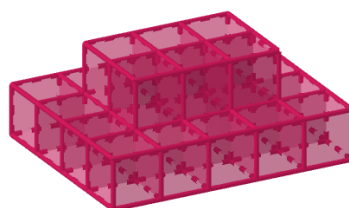


Figura 2.34: Sólido en el que no todos los cubos son visibles

Esta habilidad también se pone en juego para reconocer que un determinado objeto o figura mantiene su forma y sus dimensiones si se oculta parcial o completamente o si se modifica su posición. Así, por ejemplo, es evidente que si se gira el sólido de la Figura 2.34, la cantidad de cubos no cambiará

- * **Reconocimiento de relaciones en el plano o en el espacio:** se refiere a la identificación de las características que relacionan diferentes objetos de forma interna y directa sin puntos de referencia externos. Sería necesaria, por ejemplo, para construir con cubos Multilink el sólido de la Figura 2.33. Además, en la Figura 2.35 se muestran los 35 hexaminós posibles que son todas las combinaciones que se pueden hacer con 6 cuadrados iguales unidos por uno de sus lados. Para la realización de la tarea de detectar cuáles de estos se corresponden con el desarrollo plano de un cubo resultarán útiles la capacidad de creación de imágenes mentales dinámicas y la habilidad de reconocimiento de relaciones espaciales
- * **Discriminación visual:** permite comparar objetos por sus semejanzas y diferencias visuales a nivel local. Esta habilidad ayuda, por ejemplo, a identificar los módulos iguales de la Figura 2.36.

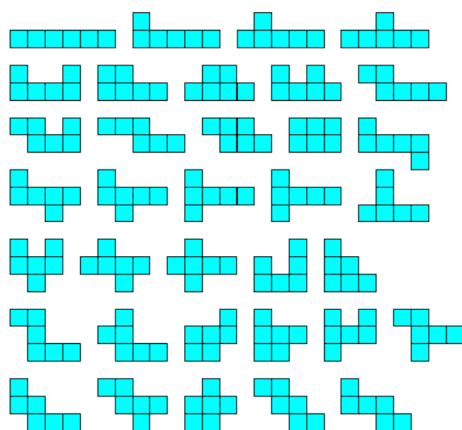


Figura 2.35: Hexaminós. Extraído de <http://www.cs.us.es/cursos/rc/POLIEDROS.htm>

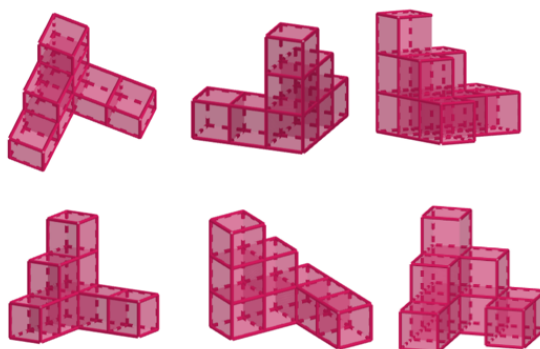


Figura 2.36: Identificación de módulos iguales

Es fundamental que el docente plantee actividades para utilizar, practicar y mejorar todas estas habilidades de visualización y detecte en las respuestas del alumnado las carencias que puedan aparecer.

2.2.3. La compresión de las transformaciones geométricas

Las variables que intervienen en la comprensión de las isometrías

Jaime y Gutiérrez (1996) recogen resultados fiables de investigaciones sobre la comprensión de las isometrías en Educación Primaria. Respecto a las simetrías, se presentan al alumnado varios ítems en los que, dados un eje y una figura, se pide dibujar la simétrica de la figura respecto del eje (Figura 2.37 (a)), dibujando unas veces a mano alzada y otras veces con regla. En otros ítems se dan dos figuras y se pide dibujar, cuando exista, el eje de simetría que las liga (Figura 2.37 (b)). En ambas partes se presentan casos con y sin cuadrícula, con los ejes de simetría y las figuras con diversas inclinaciones respecto de la horizontal, y con figuras de

distintas complejidades. Por último, hay algunos ítems en los que se dan un punto y un eje sobre una cuadrícula con coordenadas y se pide calcular las coordenadas de la imagen del punto (Figura 2.37 (c)).

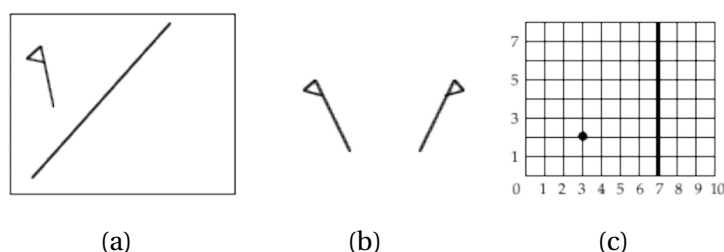


Figura 2.37: Experimento sobre la comprensión de las simetrías extraído de Jaime y Gutiérrez (1996)

La parte dedicada a los giros está formada por ítems en los que se pide dibujar la imagen de una figura (Figura 2.38 (a)), decir si un punto es o no centro de giro de un par de figuras o explicar por qué (Figura 2.38 (b)), y dibujar el centro de giro de un par de figuras (Figura 2.38 (c)). Las variables del contexto que se tienen en cuenta (cuadrícula, tipo de figura, etc.) son las mismas que para las simetrías. Una importante limitación del experimento descrito es que, en todos los casos, los giros son de $+90^\circ$.

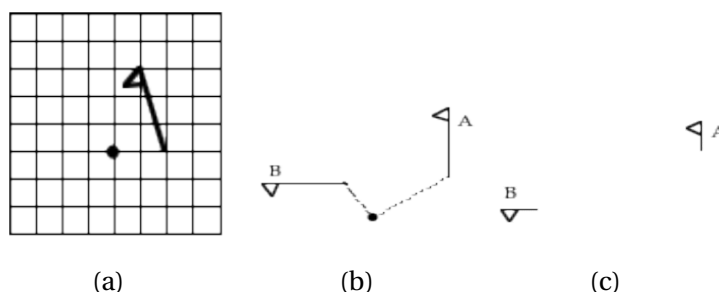


Figura 2.38: Experimento sobre la comprensión de los giros extraído de Jaime y Gutiérrez (1996)

Finalmente, en los ítems dedicados a la composición de simetrías y/o giros, se pide realizar la composición y encontrar la isometría simple equivalente (Figura 2.39 (a)) o identificar uno o los dos movimientos componentes de un producto conociendo el resultado (Figura 2.39 (b)).

De estos experimentos se concluye que existe influencia de los elementos que integran los ítems en la corrección de las respuestas del alumnado. Las variables que se tienen en cuenta son la complejidad de la figura a mover (un punto, un segmento o un triángulo), la presencia o no de cuadrícula, la posición del eje de simetría (vertical, horizontal, inclinado) y la distancia entre la figura y el eje de simetría o el centro de giro.

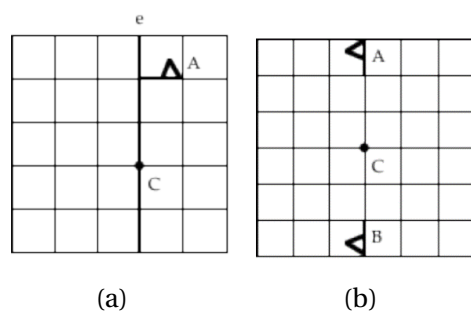


Figura 2.39: Experimento sobre la comprensión de la composición de isometrías extraído de Jaime y Gutiérrez (1996)

En otras investigaciones sobre la comprensión de las simetrías se consideran cuatro posiciones relativas entre un segmento y un eje de simetría: que el eje no toque al segmento, que lo toque en un extremo, que lo toque en el punto medio y que lo toque en otro punto interior distinto del punto medio (Figura 2.40 (a)). También consideran siete valores diferentes del ángulo formado entre el eje y el segmento (Figura 2.40 (b)). Además, se combinan estas dos variables con la presencia o no de malla y las cuatro posiciones del eje de simetría (0° , 45° , 90° y 135°).

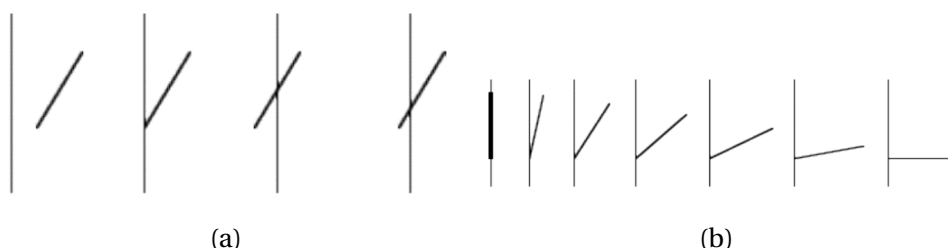


Figura 2.40: Experimento sobre la comprensión de las simetrías extraído de Jaime y Gutiérrez (1996)

En un análisis del comportamiento del estudiantado al trabajar con los giros (siempre de $+90^\circ$), se obtienen cinco componentes que integran la comprensión del concepto de giro:

- 1 Reconocimiento global, visual, de los giros, es decir ser capaz de estimar la posición de la figura imagen.
- 2 El ángulo de giro, formado por dos segmentos que unen el centro de giro con un punto y con su imagen, respectivamente.
- 3 La equidistancia al centro de giro de cualquier punto y su imagen.
- 4 El ángulo formado por cualquier segmento y su imagen, que coincide con el ángulo de giro.

5 La congruencia entre una figura y su imagen.

En este estudio se identifican diversas estrategias del alumnado para dibujar imágenes por giros o para determinar centros de giro, tanto correctas como erróneas. Una conclusión general a la que llega es que los componentes 2 a 5, que son características matemáticas de los giros, deben ser adquiridos por el alumnado para poder manipular correctamente los giros.

Las niveles de razonamiento del modelo de Van Hiele para las isometrías

Los comentarios sobre los niveles de razonamiento del modelo de Van Hiele del Tema 1 los vamos a particularizar al caso de las isometrías. Las características de cada nivel del aprendizaje de las isometrías, establecidas en Jaime y Gutiérrez (1996), son las siguientes:

Nivel 1: El estudiantado razonando en este nivel es capaz de:

- * Considerar los movimientos (traslaciones, giros y simetrías) de manera global.
- * Reconocer la característica de isometría (conservación del tamaño y la forma de las figuras) de los movimientos.
- * Reconocer los movimientos cuando se ven objetos en acción o sus resultados. Describir los movimientos, por ejemplo como recorrido en línea recta, circular, o paso al otro lado del eje.
- * Realizar movimientos (traslaciones, giros y simetrías) sirviéndose de materiales auxiliares, como una regla, un disco, un espejo, etc., en diferentes direcciones y con diferentes posiciones relativas de las figuras y el vector, centro o eje.
- * Utilizar propiedades visuales para identificar o describir los movimientos, como la «colocación igual» de las figuras en las traslaciones, la disposición circular de las figuras en los giros, y la visión del eje de simetría como separador «por la mitad» de las dos figuras simétricas, junto con el cambio de orientación en éstas.
- * Aprender y utilizar el vocabulario elemental de las isometrías: Traslación, giro, simetría, centro de giro, eje de simetría, etc.

Nivel 2: En este nivel de razonamiento, el alumnado es capaz de:

- * Considerar los movimientos mediante sus elementos matemáticos.
- * Utilizar de forma explícita los elementos propios de cada movimiento: Módulo, dirección y sentido del vector en las traslaciones, centro y ángulo en los giros, y eje en las simetrías.
- * Identificar en casos concretos las características de traslaciones (componentes del vector), giros (centro, sólo cuando está sobre la figura girada, ángulo, y equidistancia al centro) y simetrías (eje, perpendicularidad, y equidistancia respecto del eje).

- * Descubrir nuevas propiedades de los movimientos a partir de su verificación en casos concretos y utilizarlas para resolver otros problemas. En particular, generalizar los resultados de composiciones de movimientos (excepto de giros de distinto centro).
- * Realizar simetrías en deslizamiento.
- * Utilizar explícitamente las definiciones de traslación, giro y simetría en las explicaciones de las actividades realizadas.
- * Utilizar las coordenadas del vector de traslación en situaciones concretas.
- * Aprender y utilizar notación y vocabulario matemáticos asociados a las isometrías y sus elementos: perpendicularidad, mediatriz, módulo, dirección, sentido, etc.

Nivel 3: El estudiantado del tercer nivel adquiere capacidad para:

- * Identificar las características de cualquier giro (centro, mediante corte de mediatrices de segmentos, y ángulo). Generalizar y justificar los resultados de composiciones de giros de distinto centro.
- * Completar el estudio de las simetrías en deslizamiento, sus propiedades y sus relaciones con las otras isometrías.
- * Establecer relaciones entre las propiedades de las isometrías y descubrir o deducir nuevas propiedades. Comprender planteamientos y argumentaciones generales para demostrarlas.
- * Comprender y utilizar la posibilidad de descomposición, de infinitas formas, de traslaciones y giros en producto de dos simetrías o en producto de dos giros de distinto centro.
- * Utilizar las propiedades de las composiciones de isometrías para justificar:
 - Qué características se puedan conocer del resultado de una composición particular de isometrías.
 - La posibilidad de transformar una figura en otra congruente por una composición de isometrías.
- * Establecer relaciones generales, sin soporte de figuras o traslaciones concretas, entre las coordenadas de un punto, las de su imagen y el vector de la traslación aplicada.
- * Enunciar definiciones de las isometrías como conjunto de condiciones necesarias y suficientes. Comprender las definiciones formales usuales.
- * Comprender demostraciones formales sencillas que se presentan hechas o explicadas por el profesor. Hacer demostraciones formales simples que sólo supongan la adaptación de una demostración ya conocida.

- * Pasar de un caso concreto a una situación general realizando una demostración basada en argumentos informales.

Actividad 2.3

En grupos de trabajo estableced una lista de las características que penséis que tienen los dos primeros niveles de razonamiento de Van Hiele en el caso de las semejanzas. Luego se podrán comparar estas listas con las presentadas en el trabajo de Gualdrón y Gutiérrez (2007).

2.2.4. Enseñanza y mejora de las habilidades de visualización y orientación

En la literatura, las capacidades de orientación y visualización espacial se llaman «habilidades espaciales» y se han establecido diferentes categorías de actividades para poder desarrollarlas.

Hershkowitz, Parzysz, y Van Dormolen (1996) clasifican las actividades para el trabajo de las formas y el espacio en función de la relación entre el observador y los objetos a observar. El primer tipo de actividades se caracteriza porque la relación es directa, subjetiva, y requiere la reflexión sobre lo que el observador ve: el estudiante describe lo que ve como observador o lo que ve identificándose con un observador que no es él mismo. Las actividades del segundo tipo se caracterizan porque la relación es indirecta, objetiva, y requiere la reflexión sobre cómo el observador ve: el estudiante tiene que reflexionar sobre la situación del observador, tiene que identificarse con dos personas, una que observa y la otra que observa al observador.

Berthelot y Salin (1992) enumeran los tres tipos de actividades que se pueden realizar para que el estudiante controle sus relaciones con el espacio. Estas acciones son:

- 1 reconocer, describir, fabricar o transformar objetos;
- 2 desplazar, encontrar, comunicar la posición de objetos;
- 3 reconocer, describir, construir o transformar un espacio de la vida cotidiana o de desplazamiento.

Gonzato, Fernández, y Díaz (2011) prescindiendo de las tareas de orientación y visualización de figuras planas y centrándose en el contexto tridimensional, diferencian tres grandes tipos de actividades que recogen los aspectos fundamentales de las clasificaciones que se habían hecho hasta el momento:

1 Tipo 1: Orientación estática del sujeto y de los objetos

2 Tipo 2: Interpretación de perspectivas de objetos tridimensionales

3 Tipo 3: Orientación del sujeto en espacios reales

En las actividades del tipo 2 el sujeto debe cambiar su punto de vista de forma que se imagine o se ponga en una determinada posición con respecto a una composición de objetos, sin dar importancia al movimiento que tiene que hacer para cambiar su posición, sino solo al punto de vista final. Sin embargo, en las actividades del tipo 3 el punto de vista del sujeto cambia a lo largo de su desplazamiento continuo. Además, en las actividades del tipo 2 se trabaja con objetos aislados o composiciones de objetos sin fijar la atención en el espacio donde están, sino en su estructura y su composición. En las actividades del tipo 3 se consideran espacios más grandes, que puedan ser recorridos (físicamente o mentalmente) por el sujeto.

Tareas tipo 1 de orientación estática del sujeto y de los objetos

En las tareas de tipo 1 tanto las personas como los objetos están inmóviles. Además, requieren comprender el esquema corporal, identificar y utilizar las posiciones *arriba-abajo*, *izquierda-derecha* y *delante-detrás* y utilizar dicho lenguaje para describir tres situaciones:

- * la posición del propio cuerpo con respecto a objetos u otras personas
- * la posición de otro observador con respecto a objetos u otras personas
- * las posiciones de objetos con respecto a otros objetos

Por ejemplo, un tarea de tipo 1 consistiría en utilizar dos animales de juguete y pedir al niño que los coloque de las siguientes formas:

- (a) ambos a la derecha del niño;
- (b) el león delante del niño y el tigre a su derecha;
- (c) el león mirando hacia el niño y el tigre en dirección opuesta;
- (d) el león y el tigre uno frente al otro.
- (e) el tigre detrás del león

Otro ejemplo de este tipo de tarea se muestra en la Figura 2.41 ¿Qué nivel de construcción de las nociones de situación tiene desarrollado el niño para hacer las tareas de estos dos ejemplos?

2 Juan está entre la casa azul y la casa roja. Rodéalo.



Figura 2.41: Actividad extraída de *Matemáticas 1: Primaria. Pieza a pieza* (2022)

Tareas tipo 2 de interpretación de perspectivas de objetos tridimensionales

Este tipo de tareas incluye las actividades de reconocimiento y cambio de perspectiva; interpretación de perspectivas de objetos; rotación mental de objetos; interpretación de diferentes representaciones planas de objetos tridimensionales; cambio de una representación plana a otra; o construcción de objetos a partir de una o más representaciones planas, por ejemplo.

En Gutiérrez (1992) se exponen los diferentes tipos de actividades para desarrollar las habilidades de visualización, en particular distintas tareas de tipo 2, extraídas de un proyecto de investigación (Guillén, Gutiérrez, Jaime, y Cáceres, 1992). Los cuatro contextos posibles para realizar este tipo de actividades son el dibujo (en pizarra o papel), software de geometría dinámica, verbalización oral y escrita y manipulación de objetos reales. Los principales tipos de actividades son:

Identificar representaciones planas de sólidos: dado un sólido real y varias representaciones planas de este sólido y otros, se tiene que determinar qué representaciones se corresponden con el sólido. Las Figura 2.42 (a) y 2.42 (b) muestran ejemplos de este tipo de actividades.

Mover sólidos: dado un sólido real o representado en software, se tiene que mover a una posición dada por una copia real o en software de este sólido. La Figura 2.43 muestra una actividad de este tipo. En el siguiente enlace se puede rotar la representación en GeoGebra del tetraedro <https://www.geogebra.org/m/k8vnyfun>

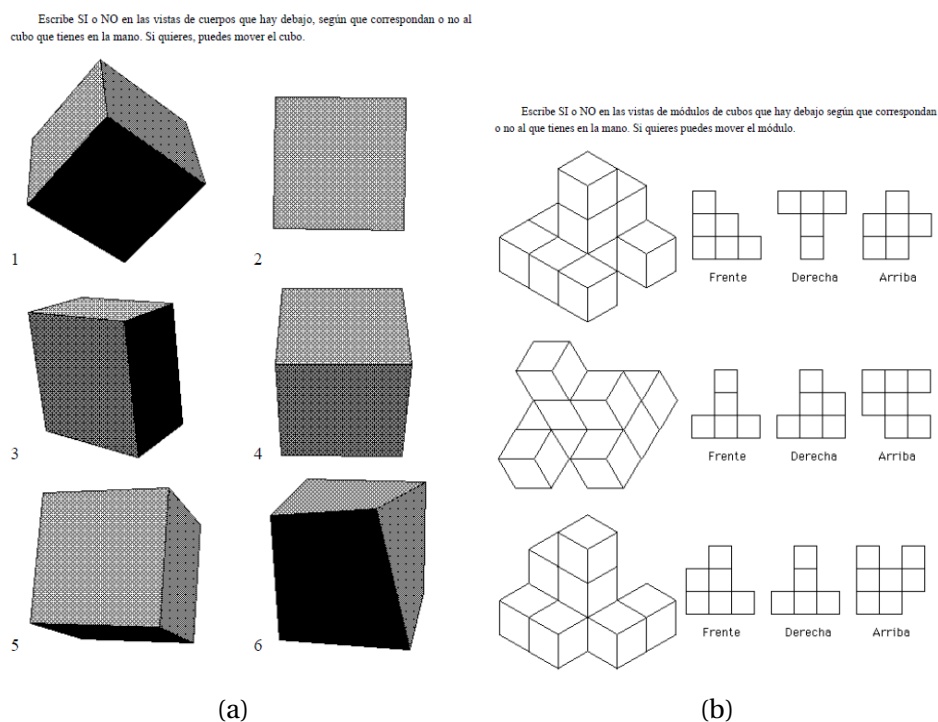


Figura 2.42: Actividades extraídas de Guillén y cols. (1992)

Dibujar representaciones planas de sólidos: dada un sólido real o representado en software, se tiene que dibujar sobre el papel.

Construir sólidos: dada una representación plana de un sólido, se tiene que construir este sólido utilizando material manipulativo.

En cada tipo de actividad es conveniente relacionar dos o más contextos de los mencionados anteriormente.

Además, en Gutiérrez (1998) se reflexiona sobre la importancia que tiene la utilización de actividades de representaciones planas de cuerpos geométricos tridimensionales adaptadas a los diferentes cursos de Educación Primaria.

Existen diversas maneras de representar de forma plana objetos tridimensionales. En el contexto de la geometría, las más utilizadas, y que se muestran en la Figura 2.44, son la representación por niveles y las proyecciones en perspectiva, paralela (caballera), isométrica, ortogonal y ortogonal codificada. La proyección ortogonal es igual que la ortogonal codificada, pero sin los números.

Hay estudios que demuestran que la formación específica basada en el uso de materiales manipulativos mejora la capacidad del estudiantado de manejar la transformación de cuerpos tridimensionales en sus representaciones planas y viceversa (Bishop, 1980; Clements y

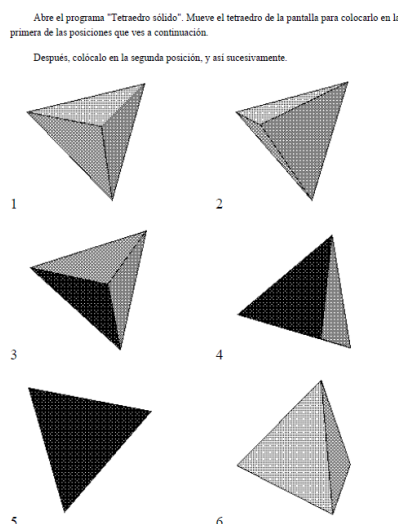


Figura 2.43: Actividad extraída de Guillén y cols. (1992)

Battista, 1992). Para la enseñanza de la geometría espacial en Educación Primaria será fundamental potenciar desde los primeros cursos el trabajo de producción e interpretación de representaciones planas en las dos direcciones, es decir, dibujo de representaciones planas de sólidos y construcción de sólidos a partir de su representación plana.

En Guillén y cols. (1992) y Gutiérrez, Jaime, Guillén, y García (1994) se realizan investigaciones en los niveles de Educación Primaria y de Educación Secundaria sobre la formación para la mejora de la representación plana que el estudiantado hace de cuerpos tridimensionales. Al comenzar los experimentos se pidió a cada estudiante, que no tenía ningún tipo de formación previa en este tipo de actividades, que debía explicar a un compañero cómo era el módulo formado con cubos Multilink que solamente él podía ver para que lo construyera. Se plantearon diferentes tipos de actividades según la forma en la que se podían dar las instrucciones. En el caso de las descripciones en papel, los investigadores detectaron tres tipos de representación de los cuerpos tridimensionales, cuyos ejemplos se muestran en la Figura 2.45, y son a) las *representaciones gráficas*, b) las *representaciones verbales* y c) las *representaciones mixtas*.

Los investigadores afirman que de entre las formas de representación gráfica de cuerpos tridimensionales, la perspectiva es la más natural y frecuente, aunque también es una de las más difíciles de realizar y resulta complicado saber cuáles son las claves del aprendizaje de esta destreza. La literatura recoge diferentes componentes que influyen y son la evolutiva, la destreza de dibujo y la cultural.

Mitchelmore (1980) describe las siguientes cuatro etapas, cuyos ejemplos se muestran en la Figura 2.46, de evolución de la habilidad del dibujo en perspectiva:

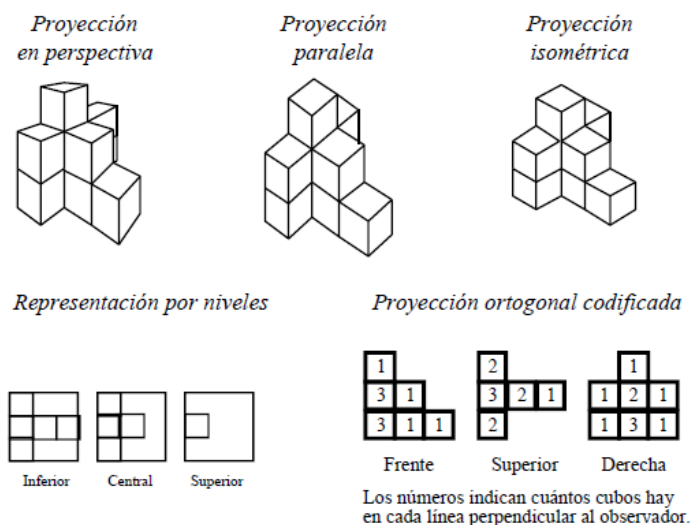


Figura 2.44: Representaciones planas de un sólido construido con Multilink extraído de Gutiérrez (1998)

- * Etapa 1: Esquemática plana, en la que las figuras se representan ortogonalmente dibujando una de sus caras.
- * Etapa 2: Esquemática espacial, en la que se dibujan varias caras de la figura de forma ortogonal, pudiéndose incluir caras ocultas, y sin dar sensación de profundidad.
- * Etapa 3: Pre-realista, en la que se hacen dibujos que intentan representar los cuerpos de forma realista y con profundidad, pero sin conseguirlo totalmente. En función de la perfección de la representación de la tridimensionalidad, esta etapa se divide en dos subetapas.
- * Etapa 4: Realista, en la cual se hacen dibujos correctos teniendo en cuenta, aunque puede que solamente de forma aproximada, el criterio de que las líneas convergen en un punto del infinito.

Cuando se programan actividades de tipo 2 para Educación Primaria hay que decidir los tipos de representaciones que se van a utilizar y los tipos de tareas que se van a plantear al estudiantado: de dibujo o de construcción de sólidos. Cada tipo de representación tiene en la práctica más o menos dificultad.

Otro tipo de actividades de tipo 2 es la descripción de determinados objetos geométricos, tanto planos como espaciales. Por ejemplo, el profesor pide a una estudiante que describa verbalmente un determinado sólido que el resto no puede ver y tiene que decir de cuál se trata. La forma más sencilla es hacer la descripción mediante sólidos reales; es más complicado si se hace a partir de una representación en papel; y el mayor nivel de dificultad se tiene si tiene que describir el sólido a partir de un modelo transparente hecho con varillas (Carri-

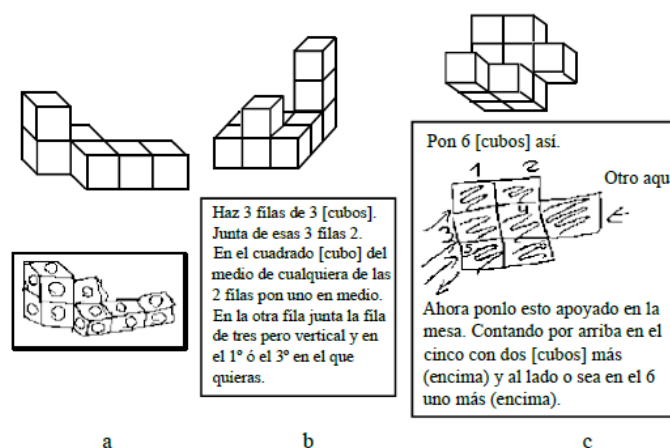


Figura 2.45: Representaciones planas de módulos Multilink de estudiantado de Educación Primaria extraído de Gutiérrez (1998)

llo y cols., 2016). Este tipo de actividades se pueden variar pidiendo descripciones en papel. Tras hacer las descripciones, orales, gráficas o mixtas, se observarán las diferencias entre el modelo original y el creado por quien tiene que averiguar de cuál se trata.

Gonzato y cols. (2011) presentan una clasificación de las tareas de tipo 2 que incluye la clasificación de Gutiérrez (1992) y se basa en tres parámetros: el estímulo inicial presentado, la acción principal requerida para resolver la tarea y el tipo de repuesta solicitada. El estímulo inicial se refiere a la presencia o no, en la descripción de la tarea, del objeto físico o de una de sus representaciones.

Se distinguen las siguientes acciones principales necesarias para realizar las tareas de tipo 2 que pueden aparecer de forma explícita o implícita en el enunciado de la tarea:

- * **Cambiar el tipo de representación (plana o tridimensional):** representar un objeto físico con una representación plana, construir un objeto tridimensional a partir de su representación plana o convertir representaciones planas de tipos diferentes (perspectiva/proyección isométrica/vistas/vistas codificadas/ fotografías). En este caso, el cambio de representación puede implicar también una rotación del objeto, un cambio de punto de vista. Gutiérrez (1996) determina los diferentes tipos de actividades que se pueden hacer con multicubos para representar módulos trimesionales y trabajar el paso a sus representaciones planas:

- A partir de una representación plana del módulo, el alumno tiene que construir el respectivo módulo físico.

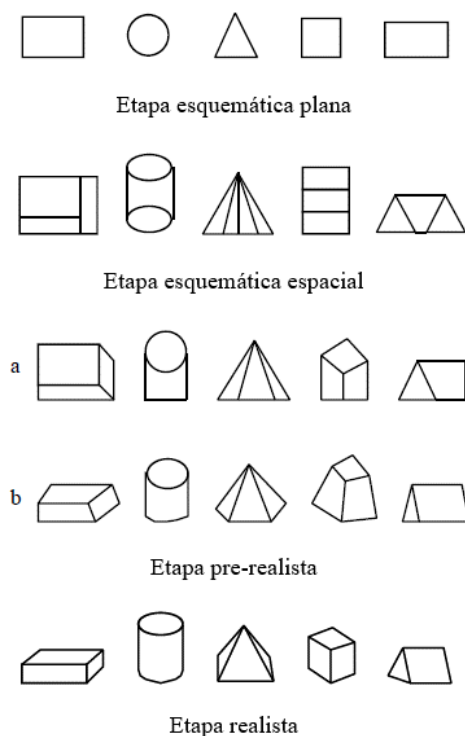


Figura 2.46: Etapas de la evolución de la representación en perspectiva extraído de Gutiérrez (1998)

- A partir del módulo (físico o presentado en perspectiva en el ordenador con la posibilidad de girarlo libremente), tiene que dibujar diferentes tipos de sus representaciones planas.
- El alumno tiene que relacionar dos tipos de representaciones planas del módulo, sin construirlo físicamente.
- * **Rotar:** rotar el objeto o partes del objeto o de manera equivalente cambiar mentalmente de perspectiva (imaginarse en otra posición con respecto al objeto). En este caso no hay cambio de tipo de representación plana.
- * **Plegar y desplegar:** plegar un desarrollo plano para formar un objeto tridimensional (físico o representado) o, viceversa, desplegar el objeto para obtener uno de sus desarrollos.
- * **Componer y descomponer en partes:** dadas dos o más piezas componerlas para formar un sólido o viceversa, dado el sólido descomponerlo en dos o más partes.
- * **Contar elementos:** dado un sólido contar los elementos que lo componen (unidades de volumen, caras, aristas, vértices, etc.).

En cuanto al tipo de respuesta requerida se diferencia:

- * **Construcción:** si se requiere la construcción del objeto tridimensional.
- * **Dibujo:** si se requiere una representación plana del objeto tridimensional.
- * **Identificación:** si se requiere identificar la respuesta correcta entre más opciones.
- * **Verbal:** si se requiere una respuesta verbal /numérica (que no exija ninguno de los anteriores tipos de repuesta).

Los objetos que se utilicen pueden ser cotidianos o materiales estructurados. Cuando se trabaja con un objeto ausente o representado en papel o en software, sin posibilidad de manipularlo, las acciones requeridas son mentales, como, por ejemplo, imaginar la rotación de un objeto o cambiar el punto de vista. Además, una tarea puede involucrar más de una acción.

El interés de distinguir los estímulos, las acciones y el tipo de respuestas está en poder analizar y buscar variaciones de tareas dadas. En la Tabla 2.2 se muestran las posibles combinaciones de estos tres parámetros para el diseño de actividades.

Estimulo inicial		Acción (ejecutar/imaginar)	Tipo de respuesta
Presencia del objeto físico	Objeto (y/o sujeto) móvil	· Convertir entre representaciones (plana o 3D)	· Construcción
	Objeto (y sujeto) fijo	· Rotar	· Dibujo
Ausencia del objeto físico	Objeto observado previamente	· Plegar o desplegar	· Identificación
	Objeto presentado en el plano	· Composición y descomposición en partes	· Verbal
		· Conteo de partes	· Otras

Tabla 2.2: Clasificación de las tareas de interpretación de objetos tridimensionales extraído de Gonzato y cols. (2011).

Tareas tipo 3 de orientación del sujeto en espacios reales

Este tipo de tareas incluyen actividades que requieren que el alumnado entienda el espacio donde se sitúa (o donde se sitúa otra persona u objeto), su ubicación y orientación en el espacio. La acción de *orientarse en el espacio* incluye leer un mapa, un plano, o comprender una maqueta de espacios de diferentes tamaños (ciudad, barrio, escuela, aula), describir verbalmente un itinerario entre dos lugares conocidos, dibujar un plano, un mapa o construir una maqueta de un espacio conocido, orientar un mapa con respecto a puntos de referencia fijos en la realidad o con respecto a los puntos cardinales. También se incluyen las situaciones que requieren que el alumno lea, construya o utilice un sistema de coordenadas para estudiar

las diferentes características de un espacio. Por ejemplo, incluimos tareas donde se requiere que el alumno defina un lugar en un mapa por medio de coordenadas cartesianas o polares o dibujar un itinerario descrito verbalmente a través del uso de coordenadas.

Al abordar tareas del tipo 2 se requiere conectar el esquema corporal al espacio físico circundante. Por ejemplo, al describir un itinerario dibujado en un mapa en el que no haya puntos cardinales es necesario conocer el propio esquema del cuerpo (izquierda-derecha, arriba-abajo, delante-detrás). Luego hay que proyectar ese esquema en un personaje imaginario que recorre el itinerario representado. Finalmente, se tiene que conectar con los puntos de referencia del mapa (edificios, cruces, etc.).

Para este tipo de tareas, Gonzato y cols. (2011) proponen una clasificación en función de los estímulos, acciones y tipo de respuesta.

Distinguen tres estímulos iniciales:

- * **Espacio real:** tareas donde la acción del sujeto transcurre en el presente o ya ha sido realizada en el espacio real sin el apoyo de ningún tipo de representación del espacio.
- * **Representación espacial:** tareas donde el sujeto no realiza físicamente una acción sino que sólo interpreta la información contenida en el mapa sin navegación física del espacio y sin tener una referencia física al espacio representado.
- * **Espacio real y representación del espacio físico:** tareas donde el sujeto realiza o ha realizado la acción en un espacio físico y dispone de una representación de dicho espacio.

En el caso de este tipo de tareas, las acciones iniciales requeridas para resolverlas están asociadas al estímulo inicial. Además, se distinguen cuatro tipos de respuesta, que son independientes del estímulo inicial:

- * **De representación:** el sujeto tiene que representar un espacio y/o un trayecto en dos o tres dimensiones.
- * **De localización de objetos y personas:** el sujeto debe localizar un objeto o una persona en mapas, planos con o sin el uso de un sistema de coordenadas.
- * **De descripción (verbal) de trayectos o posiciones.**
- * **Física:** orientar la representación del espacio (de acuerdo a los puntos cardinales, de acuerdo a objetos fijos en la realidad), ejecutar físicamente trayectos, ubicar físicamente objetos o personas en el espacio.

Se podría considerar también como variables de las tareas el tipo de representación del espacio: 2D (planos, mapas, fotos, etc.), 3D (maqueta) y el tamaño del espacio real. Observamos que en muchos casos la respuesta a la tarea involucra también una acción y que para

resolver una tarea se pueden necesitar varias acciones. En la Tabla 2.3 se muestra la combinación de los estímulos, acciones y tipo de respuesta que permite clasificar las tareas de tipo 2.

Estímulo inicial	Acción inicial	Tipo de respuesta
Espacio real	Explorar el espacio (con movimiento)	· De representación: del espacio: construir maquetas, dibujar mapas/planos o de trayectos
	Observar espacios, trayectos... (sin movimiento)	· De localización de objetos y personas: en un mapa/plano/maquetas o con coordenadas
Representación Espacial	Interpretar información gráfica (localizar elementos, leer trayectos, interpretar sistemas de coordenadas, etc.)	· De descripción (verbalmente): trayectos o posiciones · Física: orientar la representación del espacio (de acuerdo a los puntos cardinales, de acuerdo a objetos fijos en la realidad), ejecutar trayectos o ubicar objetos o personas en el espacio
Espacio real + representación del espacio	Relacionar el espacio con su representación espacial	

Tabla 2.3: Clasificación de las tareas de orientación del sujeto en espacios reales extraído de Gonzato y cols. (2011).

2.2.5. Las fases de aprendizaje de Van Hiele para las transformaciones geométricas en el plano

En este apartado se mostrará como ejemplo una secuencia de actividades basadas en las fases del aprendizaje del modelo del Van Hiele para el caso particular de las simetrías en el plano. En la progresión de la dificultad de estas actividades, se presentarán ejes con variedad de inclinaciones para evitar la posición prototípica vertical que conduzca a los estudiantes a realizar errores, que se explicarán más adelante. Se presentan a continuación actividades para cada fase extraídas de Jaime y Gutiérrez (1996). La tercera fase se trabajará de forma simultánea a las demás, pues siempre que sea posible se pedirá al estudiantado que exprese sus ideas verbalmente o de forma escrita. Se propone realizar las actividades en parejas o pequeños grupos.

Fase 1 de información: El objetivo es identificar los conocimientos previos del estudiantado sobre los conceptos de simetría, mediatriz y perpendicular instruyendo a quien lo necesite en el uso de instrumentos de dibujo y otras herramientas auxiliares.

- * Se mostrarán al alumnado varias figuras para identificar visualmente las simetrías que tienen.
- * Se propondrá al grupo que discuta qué es una simetría, qué son las figuras simétricas, cómo se pueden reconocer o cómo se identifican figuras que parecen simétricas pero no lo son.
- * Se pedirá al alumnado dibujar los ejes de simetría de figuras simétricas.
- * Se presentarán al estudiantado diversas figuras y se le pedirá que dibuje sus simétricas respecto a ejes dados. También se le pedirá que identifique y trace rectas o segmentos perpendiculares y mediatrices de segmentos.

Fase 2 de orientación dirigida: Se puede proponer al alumnado que dibuje los segmentos que unen dos puntos simétricos, por ejemplo en la Figura 2.47, y preguntarles qué relación tienen estos segmentos con el eje. El estudiantado en el nivel 2 de razonamiento podrá descubrir que estos segmentos son paralelos entre sí y perpendiculares al eje de simetría y que, aunque tengan diferentes longitudes, el eje de simetría los divide en dos partes iguales. Se sintetizará esta propiedad diciendo que el eje de simetría es la mediatriz de los segmentos que unen cada punto con su simétrico. Esta actividad es de la fase 2 porque se pretende que el alumnado aprenda, de forma guiada directamente, propiedades básicas para avanzar en el estudio de las simetrías. Además, requiere el nivel de razonamiento que consiste en experimentar con ejemplos para descubrir y generalizar propiedades matemáticas de las simetrías.

Fase 4 de orientación libre: Se puede proponer la siguiente actividad:

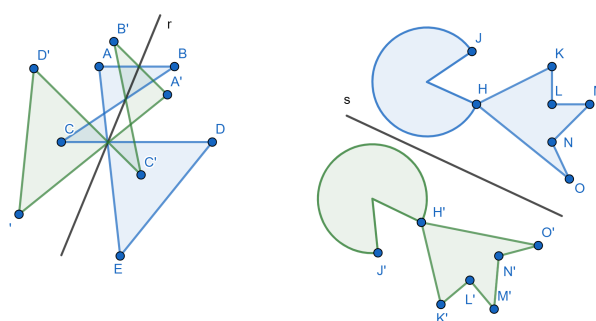


Figura 2.47: Pares de figuras simétricas respecto de los ejes r y s

- (a) En la Figura 2.20 hay un polígono llamado $F1$ y dos segmentos llamados r_1 y r_2 . Dibuja la figura simétrica a $F1$ respecto al eje r_1 y llámala $F2$ y, a continuación, dibuja la figura simétrica a $F2$ respecto al eje r_2 . Llama $F3$ a la figura resultante. ¿Qué relación ves entre las figuras $F1$ y $F3$? Describe el movimiento que permite pasar directamente de $F1$ a $F3$.

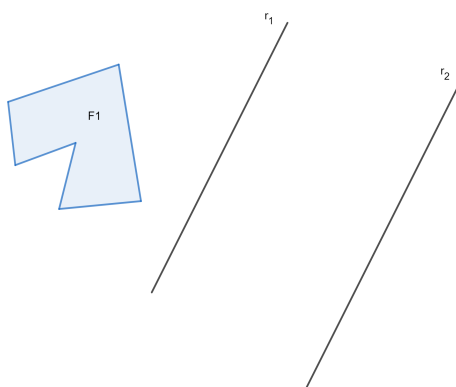


Figura 2.48: Figura $F1$ y ejes r_1 y r_2

- (b) En otra hoja, dibuja la figura simétrica de $F1$ respecto al eje r_2 . Llama $F4$ a la figura resultante y, a continuación dibuja la simétrica de $F4$ respecto al eje r_1 . Llama $F5$ a la figura resultante. ¿Qué relación ves entre las figuras $F1$ y $F5$? Describe el movimiento que permite pasar directamente de $F1$ a $F5$.
- (c) ¿Qué tienen en común y en qué se diferencian los resultados que has obtenido en los apartados (a) y (b)?

Se puede plantear la misma actividad pero con dos ejes que se corten. Estas actividades son de nivel 2 de razonamiento porque se resuelven realizando simetrías con figuras y ejes específicos para descubrir y generalizar un resultado de la composición de simetrías. Además,

son de la fase 4 porque presentan al alumnado un contexto nuevo (la composición de dos simetrías) con el objetivo de que profundice en el conocimiento de las simetrías y las integre con otros movimientos (giros y traslaciones).

Fase 5, de integración: Se pueden proponer, por ejemplo, las siguientes actividades:

- (a) Explica con tus palabras de qué maneras se puede dibujar la imagen que resulta al aplicar una simetría axial a una figura explicando las propiedades matemáticas que aparecen.
- (b) Explica con tus palabras cómo se relacionan los segmentos que unen puntos simétricos.

Esta actividad es una síntesis y corresponde a la fase 5 porque repasa y organiza lo aprendido y no añade nuevos conocimientos. Además, se trata de actividades de nivel 2 porque se usa la experimentación para identificar elementos y propiedades matemáticas. Sería conveniente proponer una secuencia de actividades que implicaran una síntesis de todos los contenidos aprendidos.

Actividad 2.4

En grupos de trabajo repetid la secuencia anterior para el diseño de actividades según las fases del aprendizaje del modelo de Van Hiele para el tema de las traslaciones, los giros o las semejanzas, incluyendo explícitamente el material que utilizareis. Podéis elegir el curso que queráis.

2.2.6. Orientaciones por niveles

1. Orientación espacial estática para la situación del propio cuerpo y de los objetos.

—o **Evolución:** movimientos y escenificaciones del propio niño, verbalización y representación gráfica.

1er ciclo de EP

—o Trabajar posiciones en las que el punto de referencia es el niño y observar la posición de otros niños u objetos, luego en las que el punto de referencia es un elemento ajeno al niño y se observan las posiciones del niño respecto a los objetos. Insistir en la lateralidad.

2. Orientación espacial dinámica. Trayectos y laberintos, croquis, planos, mapas y escalas.

1er ciclo de EP

- o Recorrer y construir caminos y laberintos utilizando el vocabulario geométrico asociado.
- o Interpretar, describir y elaborar croquis combinando con el aspecto lúdico.
- o Recorrer un camino real señalizando con cuerdas o líneas el trayecto por dónde se pasa y verbalizar los diferentes movimientos y cambios de dirección.
- o Trabajar como en el punto anterior pero con la representación gráfica del recorrido en el plano de manera simultánea al desplazamiento.
- o Recorrer un camino a partir de las indicaciones verbales proporcionadas por otras personas o escritas (plano).
- o Recorrer un camino en la realidad y después señalar el trayecto sobre el plano correspondiente y verbalizar los movimientos.
- o Recorrer un camino en la realidad y después representarlo sobre papel en blanco, elaborar el croquis correspondiente y verbalizar los movimientos.
- o Recorrer un laberinto real.
- o Trabajar como en el punto anterior con la representación gráfica del laberinto en el plano de manera simultánea al desplazamiento.
- o Recorrer un laberinto en la realidad y después señalar el recorrido seguido sobre el esquema del laberinto verbalizando los diferentes movimientos realizados.
- o Marcar el camino adecuado para llegar del punto de salida al punto de llegada en un laberinto en representación gráfica, verbalizando los movimientos.
- o Construir laberintos tanto en la realidad como gráficamente.

2º ciclo de EP

- o Trabajar como en el ciclo anterior pero aumentando la dificultad en la interpretación y elaboración de mapas, planos y croquis.

3er ciclo de EP

- o Trabajar escalas en croquis, planos y mapas. Para introducir la escalas comenzar por transformaciones de doble, mitad, triple, y tercio y continuar con 1:100 o 1:50.

3. Orden lineal y orden cíclico.

1er ciclo de EP

- o Reproducir el orden espacial en transformaciones de direcciones perpendiculares, de orden lineal a cíclico y viceversa, de orden inverso tanto lineal como cíclico y de orden de línea cerrada a abierta y viceversa.

4. Líneas y superficies abiertas y cerradas. Dentro, fuera, frontera y región

1er ciclo de EP

- o Reconocer en objetos reales de *líneas y superficies abiertas y cerradas*. Utilizar vocabulario adecuado.
- o Reconocer y construir *fronteras en el espacio* incluyendo situaciones en las que exista más de una frontera, *fronteras en superficies, fronteras en líneas abiertas y cerradas*.
- o Insistir en el dominio de los conceptos de interior y exterior, dentro y fuera, frontera y región.

5. Coordenadas cartesianas y puntos cardinales

2º ciclo de EP

- o Situar un punto dadas la coordenadas en horizontal y en vertical. Esta dos informaciones pueden ser ambas números naturales o número natural y letra.

3er ciclo de EP

- o Introducir las coordenadas cartesianas. Comenzar con el primer cuadrante.
- o Introducir los puntos cardinales y su aplicación para localizar diferentes puntos o lugares en las representaciones de la realidad. Se puede completar con la utilización de la brújula.
- o Representar puntos en el plano de forma que en los ejes cartesianos se incluyan las semirrectas correspondientes a los números negativos.

6. Simetrías, giros, traslaciones y semejanzas.

1er ciclo de EP

- o Identificar simetrías en el propio cuerpo. Descubrir el eje de simetría en el espejo ayudándose de la lateralidad.
- o Descubrir la simetría plana en el entorno en diferentes objetos e imágenes. Detectar la simetría y su eje.
- o Construir figuras simétricas con material didáctico.
- o Dibujar figuras simétricas sencillas utilizando como ayuda una cuadrícula coincidiendo los ejes de simetría con una de las direcciones de las rectas de la cuadrícula.

2º ciclo de EP

- o Trabajar las simetrías como en el ciclo anterior, trabajando a partir de la realidad, luego con material didáctico y finalmente en papel. Se pueden utilizar espejos para el descubrimiento de las simetrías. Para la representación en papel, seguir con cuadrícula mientras sea necesario. Se intentará trabajar con ejes de simetría que no sigan las direcciones de las rectas de la cuadrícula. Posteriormente, dibujar simetrías en papel sin cuadrícula utilizando instrumentos de dibujo.

- Trabajar giros y traslaciones partiendo de la detección en la realidad. A continuación, en el caso de las traslaciones se cuantificará el desplazamiento midiendo la longitud del vector y, en el caso de los giros, la amplitud del giro.
- Relacionar giros y simetrías. Por ejemplo, rotar objetos planos sobre los que se ha marcado su contorno en la posición inicial y observar cuándo el contorno de la figura vuelve a coincidir. Por ejemplo, en el caso de los polígonos regulares esto sucederá tantas veces como lados tienen. En el caso en el que solamente hay coincidencia una vez, la figura no tiene simetría. En el caso del círculo, siempre hay coincidencia porque tienen infinitos ejes de simetría.

3er ciclo de EP

- Ampliar el trabajo con simetrías, giros y traslaciones.
- Trabajar reducciones y ampliaciones proporcionales de figuras. Relacionar la semejanza con el concepto de proporcionalidad.

7. Composición y descomposición de formas planas y cuerpos tridimensionales

1er ciclo de EP

- Realizar recubrimientos de superficies con figuras planas.
- Componer libremente material de figuras geométricas planas y de cuerpos tridimensionales para sacar conclusiones de las propiedades que cumplen las nuevas figuras y cuerpos. Reflexionar sobre las propiedades que deben cumplir las piezas para obtener determinadas figuras o cuerpos.

2º y 3er ciclo de EP

- Ampliar análogamente con las propiedades trabajadas en cada ciclo.
- Crear maquetas tridimensionales.
- Pedir composiciones con figuras planas o cuerpos tridimensionales cumpliendo ciertas regularidades o repitiendo un patrón.
- Componer y descomponer figuras con Tangram. Reflexionar sobre propiedades.
- Descubrir con material de formas geométricas la propiedad de que la superficie únicamente se puede cubrir con ciertas figuras geométricas.
- Componer y descomponer cuerpos tridimensionales y sus desarrollos planos.

2.3. Errores y dificultades en el aprendizaje

2.3.1. Errores y dificultades de orientación y visualización

Errores y dificultades en las tareas de tipo 1 de orientación estática del sujeto y de los objetos

Es conveniente que en la programación de actividades para el desarrollo de las habilidades de orientación y visualización se tengan en cuenta los niveles de construcción de las nociones de situación para la descentralización del *yo* corporal. De lo contrario, se pueden crear dificultades con las nociones de situación. Para ello, se empezará con actividades de situaciones reales en las que el cuerpo del niño sea su punto de referencia y se irá incrementando la dificultad de acuerdo a los anteriores niveles.

Alberti (2004) sostiene que las relaciones que se establecen para organizar el espacio se apoyan en las propiedades del cuerpo u objeto en el momento de dar un significado. Por ejemplo, la distinción entre las nociones de *delante* y *detrás* de una persona se basa en que el cuerpo está orientado, esto es, hay una aparte delantera claramente determinada por su forma y función y otra trasera. Cómo esté orientada una forma es, de esta manera, una condición necesaria para poder usar un objeto como referente para identificar las nociones delante y detrás. Para distinguir las nociones de izquierda y derecha se asume que el objeto tenga un plano de simetría, como es el caso del cuerpo humano. Para distinguir las nociones de cerca y lejos se necesita involucrar a un mínimo de tres objetos, uno de los cuales sirve de referencia para establecer y comparar las distancias de los otros. Por tanto, esta noción es de tipo métrico y requiere poner un orden para evaluar las distancias entre objetos aunque no haya alineación en el plano. Estas nociones requieren que la persona sea capaz de reconocer la conservación de las longitudes al variar la orientación de la referencia o de los objetos. Si nos situamos en el plano, las nociones de arriba y abajo no tienen el mismo significado que en la realidad, ya que se refiere una dirección vertical en el espacio tridimensional. De la misma manera, la distinción de las nociones de delante y detrás sobre el papel puede ser ambigua. Todos estos aspectos deben ser considerados por el docente al plantear tareas de tipo 1.

Cuando se diseñan tareas de tipo 1 hay que tener en cuenta que hay objetos que por su forma no tienen una orientación determinada. Por ejemplo, esto ocurre en el caso del rocódromo de la Figura 2.49 en la que se muestra una actividad de tipo 1 extraída del libro del segundo curso de Educación Primaria *Matemáticas 2: Primaria. Pieza a pieza* (2022). Otro ejemplo para ilustrar esta problemática consistiría en pedir que se sitúe algo a la derecha de una botella de vino.

1 Observa y completa las frases con la palabra adecuada.



delante - detrás

El perro está del niño.

arriba - abajo

La niña está del rocódromo.

izquierda - derecha

Celia tiene un globo en su mano .

Figura 2.49: Actividad extraída del libro del segundo curso *Matemáticas 2: Primaria. Pieza a pieza* (2022)

Errores y dificultades en las tareas de tipo 2 de interpretación de perspectivas de objetos tridimensionales

Convertir representaciones

El manejo de objetos espaciales y su representación plana genera problemas relacionados con la capacidad de visión espacial del estudiantado y con su habilidad para dibujar o interpretar representaciones planas de sólidos Gutiérrez (1998).

Ante la secuencia de etapas de evolución de la representación en perspectiva de cuerpos tridimensionales de Mitchelmore (1980), Gutiérrez (1998) se cuestiona si el alumnado de primaria no «ve» los sólidos de la forma en la que los representa o no puede representar lo que ve a causa de que no tiene la capacidad de coordinar las diferentes direcciones de los segmentos de la representación plana, es decir, le faltan habilidades de dibujo. Sus investigaciones le llevan a concluir que los niños se dan cuenta de que sus dibujos no son correctos, pues no están representando lo que ven en la realidad, pero tienen falta de habilidades para hacerlo de una mejor forma. Por tanto, el problema está en la habilidad de coordinación del alumnado. Las dificultades con las que se encuentra el alumnado en el aprendizaje de las diferentes formas de representación plana de cuerpos tridimensionales o en el proceso inverso de construcción, pueden ser *conceptuales*, cuando se refieren a la comprensión de las características

del tipo de representación, o *técnicas*, cuando se deben a las estrategias de dibujo o construcción. En general, las representaciones por niveles son las más fáciles tanto para dibujar como para construir; construir a partir de representaciones ortogonales es más difícil que a partir de isométricas, y que dibujar representaciones isométricas es más difícil que dibujar ortogonales.

Según Gutiérrez (1998), en el primer ciclo de Educación Primaria el alumnado puede hacer representaciones planas de cuerpos tridimensionales por niveles utilizando la cuadrícula como marco de referencia. En este contexto, una dificultad que surge es entender la necesidad de tener un marco de referencia porque no relacionan unos niveles con otros. En la Figura 2.50 se muestra que, aunque cada nivel está dibujado correctamente, los marcos de referencia no coinciden.



Figura 2.50: Representación plana por niveles de un sólido hecho con Multilink extraído de Gutiérrez (1998)

Esta dificultad podría superarse planteando actividades en las que se proporcione el marco común de referencia de los niveles a través de una plantilla. El alumnado únicamente tiene que poner cruces en los cuadrados adecuados para representar cada nivel tal y como se muestra en la Figura 2.51. Sin embargo, la investigación releva que al volver al papel en blanco sin las plantillas, el alumnado sigue cometiendo el mismo tipo de error.

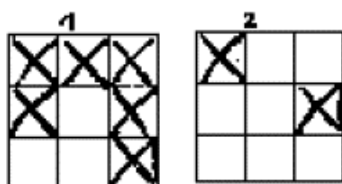


Figura 2.51: Representación plana por niveles de un sólido hecho con Multilink dada la plantilla de los marcos extraído de Gutiérrez (1998)

La falta de coordinación de vistas o planos también ocurre en la representación isométrica y ortogonal en todos los cursos de Educación Primaria. En el caso de la representación isométrica, aparece la dificultad de que hay que diferenciar los tres planos ortogonales en los que se sitúan las caras de los cubos de un módulo y asociar a esos planos las posiciones de los rombos que representan isométricamente las caras de los cubos del módulo. En la Figura 2.52 se muestran las dos posibilidades de representar isométricamente el cubo de la izquierda.

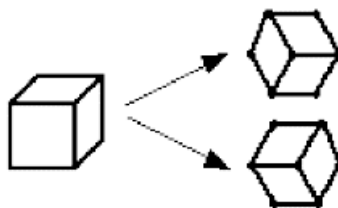


Figura 2.52: Posibles representaciones isométricas del cubo de la izquierda extraído de Gutiérrez (1998)

Además, la representación isométrica es la más difícil y se debe introducir de forma muy pausada y con ejercicios muy simples. Los motivos de la dificultad son la obligación de dibujar los vértices del sólido sobre los puntos de la trama isométrica; la necesidad de situar el sólido que se va a dibujar en una posición muy precisa para poder verlo lo más parecido posible a la representación isométrica; y la imposibilidad de ver el sólido real exactamente igual que su representación isométrica, por la influencia de la perspectiva.

Gutiérrez (1998) describe los errores cometidos por el estudiantado de primaria al intentar coordinar las tres proyecciones ortogonales para construir un módulo con Multilink. Resulta muy complicado resolver esta situación, porque cuando el alumnado añade un cubo para ajustar el módulo a una de las proyecciones, no atiende a las otras dos y se desajustan. La construcción de módulos a partir de proyecciones ortogonales codificadas resulta más fácil porque el alumnado sabe cuántos cubos tiene que utilizar y, por tanto, en los ajustes no se añaden ni se quitan cubos y al construir un módulo de acuerdo a una de las proyecciones, hay que hacer pocos cambios para conseguir el ajuste de todas ellas. La destreza de coordinación de proyecciones mejora en el último ciclo de Educación Primaria. Se recomienda el trabajo con módulos formados por columnas de diferentes alturas todas ellas apoyadas en el suelo como se muestra en la Figura 2.53. En estos casos, es suficiente manejar una única proyección ortogonal y, por tanto, se trata de un buen recurso para comenzar el estudio de las representaciones planas ortogonales sin tener que lidiar con la coordinación de dos o más proyecciones. Solamente en el último ciclo de Educación Primaria el alumnado empieza a poder dibujar representaciones planas de proyecciones ortogonales requiriendo poca ayuda.

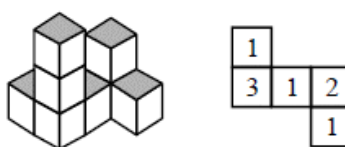


Figura 2.53: Representación plana con una única proyección ortogonal codificada extraída de Gutiérrez (1998)

Es fundamental que el docente sea consciente de las dificultades que tiene el alumnado para dibujar representaciones planas ante las que se pueden plantear actividades de aprendizaje y mejora de la visión espacial. Además, si el alumnado no sabe hacer representaciones gráficas correctas, es importante usar modelos físicos, proporcionarle fotocopias para pegar o trabajar con ordenadores para evitar que tenga que basarse en sus propios dibujos para entender y aprender conceptos y propiedades geométricos.

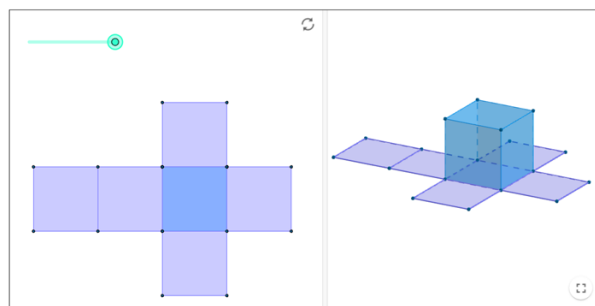
Rotar

Gorgorió (1998) clasifica los errores cometidos por el alumnado al realizar actividades de rotación mental en una incorrecta interpretación de la tarea o en la construcción incorrecta de conceptos geométricos. En el primer caso, el error más frecuente fue la utilización de representaciones planas de objetos tridimensionales. En el segundo caso, el error más repetido es el confundir una rotación de 180° con una simetría. Además, las estrategias utilizadas por el alumnado pueden ser *visuales* o *no-visuales*. En la primera se utilizan imágenes visuales como parte esencial del proceso de resolución. Sin embargo, en las estrategias *no-visuales* el alumnado utiliza la argumentación sin apoyarse en las imágenes visuales para realizar la tarea. A su vez, estas estrategias pueden ser *globales* o *particulares*. La autora define la estrategia *global* si se centran en el objeto considerado como un todo, en el primer caso, o si se centran sólo en una parte del objeto, en el segundo. La habilidad de orientación espacial depende de la capacidad de utilizar correctamente estas estrategias. Por ello, es fundamental enseñarlas con ejemplos.

Plegar y desplegar

En el siguiente applet de GeoGebra se pueden utilizar el deslizador para plegar y desplegar un cubo. ¿Existen puntos del desarrollo plano de forma que al plegar se superponen? ¿Cuáles?

<https://www.geogebra.org/m/NK4w3vqT#material/kN5ErN5M>



Mesquita (1992) observa que una dificultad cuando se resuelven tareas como la anterior la genera la duplicidad de ciertos puntos del sólido respecto al desarrollo plano. Una arista del cubo, por ejemplo, se puede convertir en dos aristas en el desarrollo plano correspondiente.

Contar partes

Ben-Chaim, Lappan, y Houang (1985) observan dificultades del alumnado para detectar las partes ocultas en una representación gráfica. Inicialmente, los ítems de esta investigación se introdujeron en forma de preguntas abiertas con el fin de obtener distractores que utilizar para desarrollar un formato de opción múltiple. Las respuestas de los alumnos se analizaron para producir categorías de errores. Por lo general, como se muestra en la Figura 2.54, ante la pregunta de cuántos cubos hay el alumnado marcaba las caras de los cubos pequeños visibles que aparecían en el dibujo y contaban. De esta forma, las respuestas que daban solían referirse al número de caras o al número de cubos pequeños visibles.

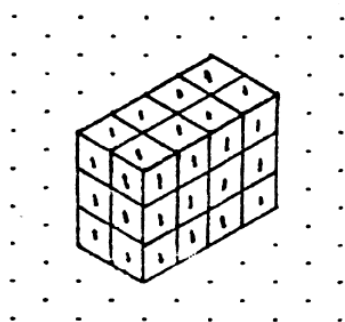


Figura 2.54: Marcas del alumnado al contar los cubos del sólido representado gráficamente extraído de Ben-Chaim y cols. (1985)

Tras la realización del ejercicio se entrevistó al alumnado para comprobar el tipo de error que había cometido. Se descubrió que en la mayoría de los casos en los que se daba una respuesta incorrecta, se utilizaba una de las siguientes cuatro estrategias de recuento:

- * Contar el número real de caras que se muestran.
- * Contar el número real de caras y duplicarlo.
- * Contar el número real de cubos que aparecen.
- * Contar el número real de cubos y duplicarlo.

Los autores sugieren el planteamiento de experiencias concretas con cubos multilink para mejorar las habilidades de visualización.

Battista (2007) también observa que cuando se muestran sólidos hechos con cubos Multilink, el alumnado no es capaz de distinguir los diferentes planos ni de diferenciar los cubos de las aristas, con dos o tres caras que se pueden ver, de los cubos que solo muestran una cara. Entonces, se comete el error de contar la cantidad de cuadrados en vez de la cantidad de cubos unidad que forman el sólido.

Errores y dificultades en las tareas de tipo 3 de orientación del sujeto en espacios reales

Berthelot y Salin (1992) describen que los requerimientos para poder realizar un plano o mapa son la elección de un sistema de referencia, la articulación de los planos que se obtienen al representar los espacios en torno a los puntos de referencia y la coordinación de todo ello. Además, la orientación entre los diferentes elementos que se representan en el plano o mapa es fundamental y los conocimientos que se ponen en juego dependen del contexto del problema. También hay que incluir la información que permita a la persona que lee el mapa o planos orientarse en la realidad.

Cuando se describe un itinerario que se observa en un mapa el individuo tiene que ser capaz de coordinar dos sistemas de referencia (Galvez, 1985):

- * el sistema ligado a su propio esquema corporal y proyectado por traslación sobre el papel y
- * el sistema correspondiente a la proyección del esquema corporal de un móvil que se desplazaría a lo largo del itinerario que se trata de describir

Las actividades en las que se tiene que interpretar una representación gráfica de la realidad (plana o tridimensional) requieren poner en correspondencia el objeto o situación que se representa y su representación. Para ello se necesita una cierta habilidad de interpretación, comprensión y creación de relaciones entre la realidad y su representación.

Clements (2004) y Weill-Fassina y Rachedi (1993) detectan dos dificultades en relación a la interpretación de los planos y de los mapas:

- * Dificultad para orientar un mapa a través de elementos en la realidad (dificultad para considerar y poner en congruencia dos sistemas de referencia diferentes).
- * Dificultad para comprender el lenguaje simbólico (dificultad para entender que un mapa representa sólo algunos aspectos de la realidad y no es la realidad en miniatura).

Este tipo de tareas están inevitablemente relacionadas con situaciones cotidianas. Por tanto, no tendría sentido restringir el trabajo a tareas de interpretación de planos o mapas del libro del texto sin utilizar un referente real.

2.3.2. Errores y dificultades en el aprendizaje de las transformaciones geométricas

Los apuntes de este apartado están basados en Jaime y Gutiérrez (1996).

Errores y dificultades con las simetrías

Los errores que el alumnado de Educación Primaria, y también de etapas posteriores, comete en el trabajo con las simetrías se pueden dividir en dos grupos:

Errores cuyo origen está en el concepto de simetría: consisten en que los estudiantes no aplican correctamente las dos propiedades que relacionan una figura y su imagen. En particular, se cometen uno o los dos siguientes errores:

- * Falta de equidistancia al eje de cada punto y su imagen (Figura 2.55 a) siendo, de ahora en adelante, la imagen correcta la trazada en línea punteada más clara.
- * Falta de perpendicularidad respecto del eje del segmento que une un punto y su imagen (Figura 2.55 b).

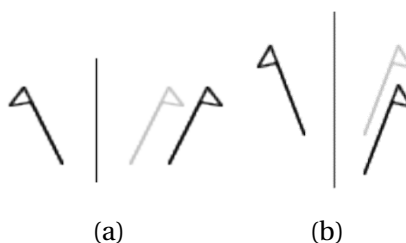


Figura 2.55: Errores de concepto extraídos de Jaime y Gutiérrez (1996)

Errores cuyo origen está en una interpretación reducida o deformada de la simetría: el estudiantado comete errores del tipo visual:

- * Dibujo de la imagen paralela a la figura original aunque ésta no sea paralela al eje (Figura 2.56).



Figura 2.56: Error por falta paralelismo extraído de Jaime y Gutiérrez (1996)

- * Desplazamiento horizontal o vertical de la figura aunque el eje de simetría esté inclinado (Figura 2.57).
- * Dibujo de la imagen sobre la prolongación de la figura dada en alguna dirección específica (Figura 2.58).



Figura 2.57: Error por desplazamiento horizontal o vertical extraído de Jaime y Gutiérrez (1996)



Figura 2.58: Error por dibujo sobre la prolongación extraído de Jaime y Gutiérrez (1996)

Estos errores tienen origen en la falta de enseñanza previa o en una enseñanza pobre basada en ejemplos prototípicos en los que se tiende a dibujar el eje de simetría en la dirección horizontal o vertical. Los errores anteriores también aparecen cuando se plantean actividades en las que se dan dos figuras que no son simétricas y se pregunta al alumnado si lo son o no y, en caso afirmativo, se pide dibujar el eje de simetría. En la Figura 2.59 se muestran ejemplos de ello.

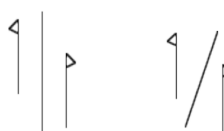


Figura 2.59: Errores cometidos al dibujar el eje dadas dos figuras no simétricas extraídos de Jaime y Gutiérrez (1996)

El análisis de la simetría de una figura tendrá más o menos dificultad según la posición del eje de simetría y la posición relativa del objeto cuando éste no es un punto. Hay casos en los que no hay diferencia de dificultad al dibujar la imagen de un punto o de una figura formada por segmentos. Otros casos con determinadas combinaciones de posiciones del eje y los segmentos inducen más errores, por ejemplo, cuando el eje de simetría corta al objeto. Además, los ejes de simetría inclinados fomentan el error por falta de perpendicularidad al dibujar imágenes de puntos.

No es cierto que cuando un alumno es capaz de dibujar de forma correcta el punto simétrico de otro punto, va a dibujar correctamente la imagen de un segmento. Esto se debe a que el estudiante puede dibujar de forma independiente las imágenes de puntos significativos como vértices o extremos de la figura y unir esas imágenes como obtener la figura simétrica. También puede dibujar únicamente las imágenes de algunos de los puntos significativos (por ejemplo, uno o dos vértices de un triángulo), unir las imágenes y completar el dibujo visualizando mentalmente la posición de la figura simétrica resultante. Cuantos menos puntos imagen se dibujen, más fácil es cometer errores.

Un buen recurso para comenzar el trabajo de las simetrías es la cuadrícula, pues permite al alumnado medir distancias con más facilidad. Sin embargo, Gutiérrez y Jaime (1987) observan que no se reducen los demás tipos de errores pues se cometen aproximadamente los mismos porcentajes de errores por dibujar la figura en paralelo a la original en las tareas de las Figuras 2.60 a) y b). También se cometió aproximadamente el mismo porcentaje de error por perpendicularidad en el caso de la Figura 2.60 c). Además, hay que tener en cuenta que la cuadrícula ayuda en las posiciones horizontal, vertical y diagonal de los ejes de simetría, pero no en el caso de otras inclinaciones diferentes. Esta tendencia se mantiene cuando no hay cuadrícula.

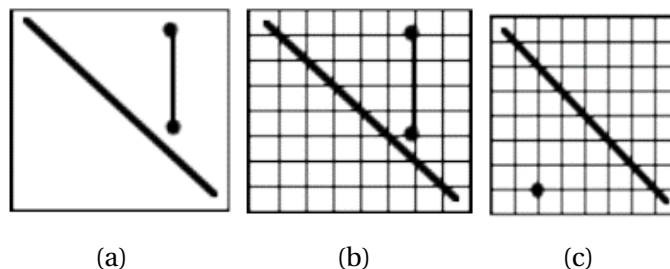


Figura 2.60: Tareas que generan dificultad extraídas de Jaime y Gutiérrez (1996)

Errores y dificultades con los giros

Cuando el alumnado termina la etapa de Educación Primaria sabe distinguir y medir ángulos agudos, rectos y obtusos y también manejar grados cuando son datos de problemas. Sin embargo, no saben estimar la amplitud de un ángulo, identificar el ángulo formado por dos figuras congruentes que no se tocan o comparar ángulos en diferentes posiciones. En Jaime, Gutiérrez, y Cáceres (1989) se analizan todos estos problemas y se observa que estas carencias en el conocimiento de los ángulos le impide al alumnado reconocer y comprender los giros. Por ejemplo, en la Figura 2.61 se muestra un esquema de lo que sucedió en algunos casos cuando se pidió al alumnado que girara manualmente una figura recortada en papel *A* alrededor de un punto *O*.

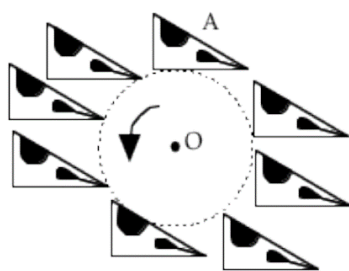


Figura 2.61: Esquema del error cometido en el experimento de Jaime, Muelas, y cols. (1989) y extraído de Jaime y Gutiérrez (1996)

Tal y como se ha explicado anteriormente, los cinco componentes que el alumnado debe comprender y aplicar correctamente en el manejo de los giros son el reconocimiento global, el ángulo de giro, la equidistancia al centro, el ángulo entre un punto y su imagen y la congruencia. Jaime y Gutiérrez (1996) citan el trabajo de Chien (1989) para explicar los errores que suele cometer el alumnado al girar un Figura A 90° en el sentido antihorario.

- * En las Figuras 2.62 a y c se comete un error en el ángulo de giro.
- * En la Figura 2.62 b se comete un error por falta de equidistancia al centro.
- * En la Figura 2.62 d se comete un error por falta de congruencia entre las figuras, es decir, cambia la forma de la figura simétrica con respecto a la original, en particular, se reduce su longitud.

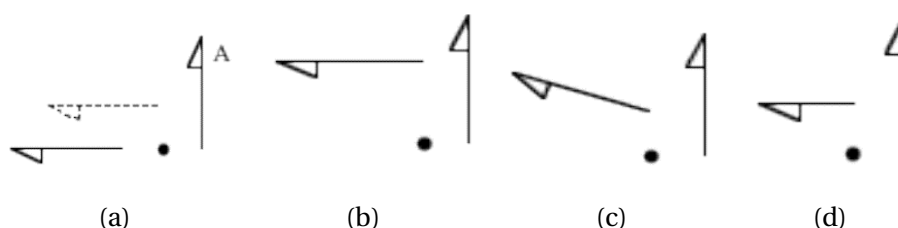


Figura 2.62: Errores cometidos en el experimento de Chien (1989) extraídos de Jaime y Gutiérrez (1996)

En el mismo trabajo de Chein se explica que el estudiantado, para conseguir dibujar la figura girada utiliza diversas estrategias. La más general consiste en unir un punto con el centro de giro para conseguir una figura que unida al centro y, a partir de la línea auxiliar dibujada, se dibuja la figura girada (Figura 2.63 a). Otra estrategia consiste en dibujar un símil de un sistema de coordenadas (Figura 2.63 b) con el centro de giro en el origen y, al girar, un eje pasa sobre el otro.

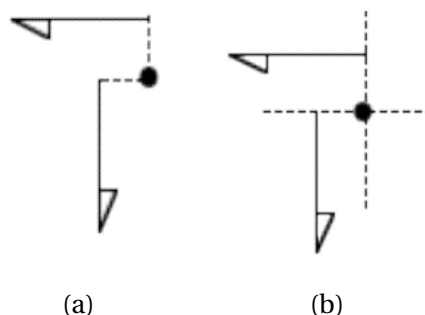


Figura 2.63: Estrategias de estudiantado para dibujar giros en el experimento de Chien (1989) extraídos de Jaime y Gutiérrez (1996)

Errores y dificultades con las traslaciones

La traslación es la isometría que menos dificultades plantea por ser la más simple. El alumnado del último ciclo de Educación Primaria puede aprender las características de este movimiento, reconocerlo y dibujarlo. Las dificultades que suelen surgir son:

- (a) La comprensión del vector asociado a la traslación como vector libre. Hay una tendencia a llevar la figura a trasladar al final del extremo del vector.
- (b) La realización de traslaciones cuando la figura tiene forma poligonal, especialmente rectangular, y el vector de traslación es paralelo a uno de sus lados. Se comete el error de dibujar el vector empezando en el extremo del lado inicial y terminando en el otro extremo de la figura imagen, como se muestra en la Figura 2.64.

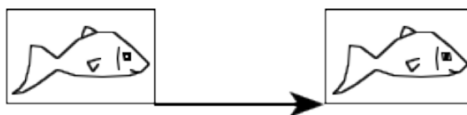


Figura 2.64: Estrategias de estudiantado para dibujar giros en el experimento de Chien (1989) extraídos de Jaime y Gutiérrez (1996)

Errores y dificultades con las semejanzas

Gualdrón y Gutiérrez (2006) estudian las estrategias correctas e incorrectas en el trabajo del alumnado con las semejanzas. Obtienen la siguiente clasificación de estrategias incorrectas o que conducen a error:

- * **Método ingenuo:** cuando se le pide a un estudiante que amplíe una figura según una razón, aún sabiendo lo que ello implica, no utiliza los datos ni la medida de la figura, sino que dibuja otra figura parecida más grande.
- * **Estrategia aditiva o de la diferencia constante:** la utiliza el alumnado en tareas relacionadas con ampliación debido a que se concentra en la diferencia $a - b$ y no en la razón a/b . Por ejemplo, cuando se le pide una ampliación del rectángulo de la Figura 2.65 de tal forma que la nueva base sea 12cm., se responde que la altura es 10 cm. Por un lado, porque $12 - 5 = 7$ y este valor se suma a la altura 3. Por otro lado, porque $5 - 3 = 2$ y este valor se lo restan a 12. Esta estrategia resulta de que el alumnado evita multiplicar por una fracción. Por ejemplo, en la situación anterior, multiplicar el factor de ampliación $12/5$ por la altura a ampliar que es 3cm.



Figura 2.65: Error por estrategia aditiva extraído de Gualdrón y Gutiérrez (2006)

- * **Doble y mitad:** Puede que el alumnado asocie que siempre que se pida ampliar se tiene que duplicar y, de forma similar, cuando se le pida reducir, partir en dos.
- * **Estrategia multiplicativa errónea:** En tareas en las cuales el alumnado tiene que decidir la semejanza de figuras presentes en un problema o en un dibujo, plantea que sí lo son si las medidas de los lados en una ellas son múltiplo en la otra. Por ejemplo, al decidir la semejanza de los triángulos de la Figura 2.66, el alumnado plantea que son semejantes puesto que las medidas de los lados del triángulo grande son el doble de las medidas de los lados del triángulo pequeño. Este método causa confusión, ya que cuando las medidas de los lados en una de las figuras no son múltiplo entero de las medidas de los lados en la otra, se tiende a pensar que las figuras no son semejantes, por lo que se convierte en una estrategia errónea. Por ejemplo, cuando se pide que se estudie la semejanza de la Figura 2.67.
- * **Estrategia multiplicativa con ajuste errónea:** Consiste en multiplicar las medidas de los lados de una figura por un valor entero y sumar o restar otro (incluso el mismo), resultando una estrategia errónea. O multiplicar las medidas de los lados de una figura por un valor entero y sumar o restar una fracción de la medida del lado, resultando una estrategia correcta. Por ejemplo, ante la pregunta de si los rectángulos de la Figura 2.67 son semejantes, se plantea erróneamente que 5 resulta de operar $3 \cdot 2 - 1$ y como $10/3$ no resulta de operar $2 \cdot 2 - 1$, las figuras no son semejantes. También se puede plantear

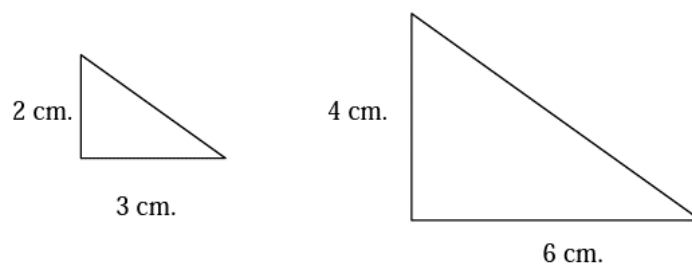


Figura 2.66: Triángulos semejantes extraído de Gualdrón y Gutiérrez (2006)

de manera correcta que 5 resulta de operar $3 \cdot 2 - (1/3) \cdot 3$ y de forma similar que $10/3$ resulta de operar $2 \cdot 2 - (1/3) \cdot 2$, lo que permite decir que los rectángulos son semejantes.

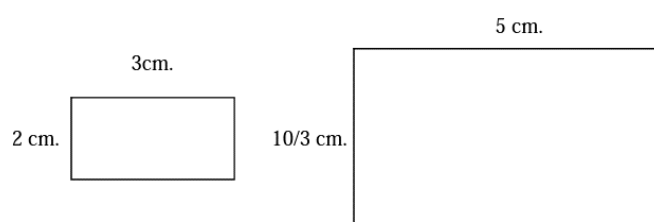


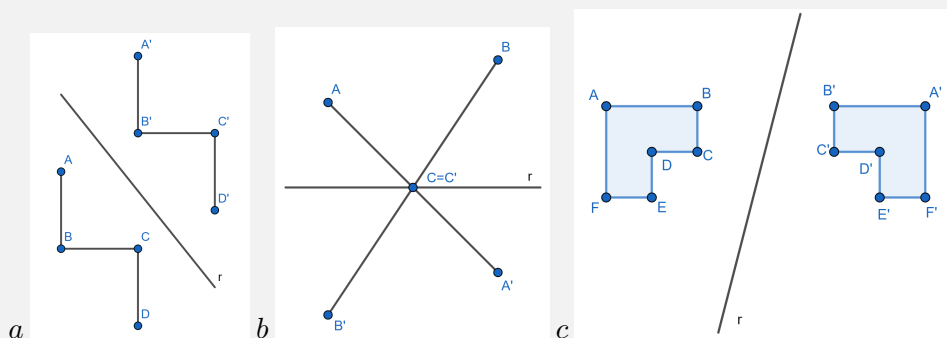
Figura 2.67: Rectángulos semejantes extraídos de Gualdrón y Gutiérrez (2006)

- * **Omisión de parte de los datos del problema:** el alumnado ignora parte de los datos del problema. Por ejemplo, si el problema es de comparación de razones entonces intenta resolverlo comparando únicamente los antecedentes (o los consecuentes) de las dos razones. En la situación en que se pide a los estudiantes que digan en qué terreno juegan más apretados los niños: en uno de 12 metros cuadrados de área con 6 niños jugando o en uno de 16 metros cuadrados y 8 niños jugando, responden que en el segundo, puesto que hay más niños en el terreno.

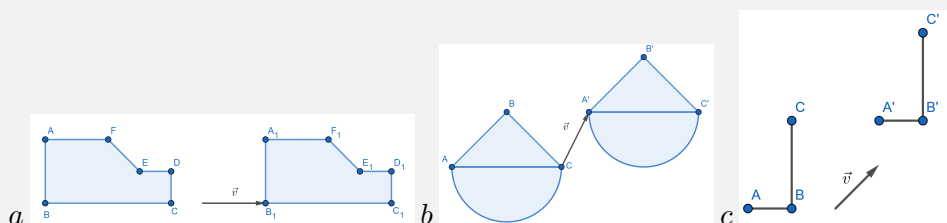
Actividad 2.5

A continuación, se muestran diferentes transformaciones de figuras en el plano y en cada una de ellas se indica que se ha realizado una cierta isometría. Evalúa si se ha realizado el movimiento de forma correcta o no y, en caso negativo, explica por qué y corrige el movimiento.

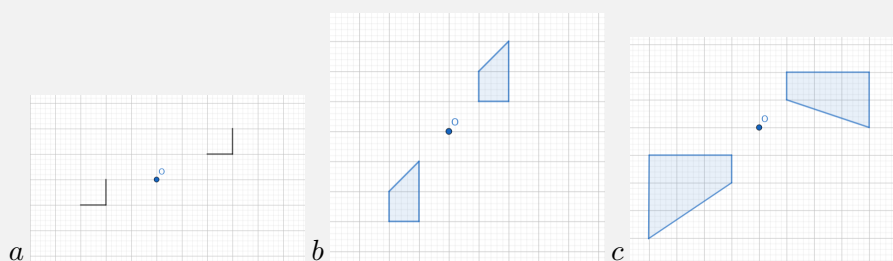
* Simetría respecto al eje r



* Traslación de vector $\vec{v}$



* Giro de centro O y 180° en el sentido antihorario



Actividad 2.6

Analiza tus respuestas a la prueba inicial del tema respondiendo a las siguientes preguntas:

- (a) Corrige tus respuestas a cada una de las actividades de la prueba.
 - (b) Respecto a cada una de las actividades de la 1 a la 7, ¿qué tipo de actividad de la clasificación de Gonzato y cols. (2011) es?, ¿qué dificultades y errores podría tener el alumnado de primaria en cada actividad?
 - (c) Respecto a cada una de las actividades de la 8 a la 13, ¿de qué nivel de razonamiento de Van Hiele es?, ¿qué se pretende en cada una de ellas?, ¿qué dificultades y errores podría tener el alumnado de primaria en cada actividad?
-

2.4. Laboratorio de materiales y recursos

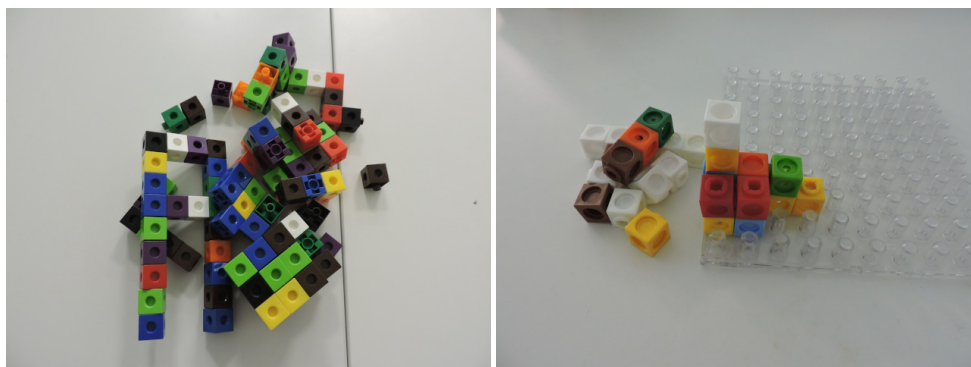
Multilink

El Multilink o también denominado Multicubos o Policubos se trata de un material que consta de cubos de plástico encajables de dos centímetros de arista. Normalmente se venden en paquetes de diez conjuntos de diez cubos del mismo color cada uno y, por tanto, hay cubos de diez colores diferentes.

Este material tiene una enorme versatilidad para trabajar contenidos de todas las áreas de las matemáticas que se trabajan en Educación Infantil y Educación Primaria. En particular, en este tema profundizaremos en su utilización para el desarrollo de habilidades de visualización. Gutiérrez (1998) sostiene que la ventaja de utilizar este tipo de material frente a los poliedros o cuerpos redondos habituales y presentados en el Tema 1 es que le permite al alumnado de Educación Primaria trabajar de forma mucho más fácil una gran variedad de problemas de construcción a partir de representaciones planas.

Además, este material permite trabajar todas las relaciones posibles entre los cuatro contextos de trabajo de las habilidades de visualización mencionados anteriormente (dibujo, software, verbalización y manipulación). Ejemplos de actividades son el dibujo en papel de representaciones de un módulo, tanto en perspectiva como sus proyecciones ortogonales; construcción de un módulo a partir de una representación en papel; conteo de la cantidad

de cubos que forman un módulo; construcción de un módulo con Geogebra. Además, veremos en el Tema 3 que se puede utilizar este material para plantear el descubrimiento de la fórmula de cálculo del volumen de los paralelepípedos.



(a) Cubos Multilink

(b) Multilink y base de pivotes

Figura 2.68: Multilink

Albarracín (2021) propone una secuencia de actividades para el desarrollo de la visualización usando un videojuego y los cubos Multilink en el segundo ciclo de Educación Primaria.

Cubos no encajables con representaciones planas

Este tipo de material se ha diseñado con el objetivo de realizar actividades para la construcción de modelos tridimensionales a partir de sus representaciones planas o de identificación de representaciones a partir del sólido construido. En la Figura 2.69 a) el material consta de piezas de madera que son cubos de color rojo y prismas triangulares amarillos y representaciones gráficas de diferentes proyecciones de construcciones utilizando los dos tipos de piezas anteriores. En la Figura 2.69 b) el material *Organicubes* consta de cubos de tres centímetros de arista y de cuatro colores diferentes. Además, este material incluye representaciones planas de varios sólidos graduadas de menor a mayor dificultad. Finalmente, el material *Structuro*, que se muestra en la Figura 2.69, contiene cubos de 2.5 centímetros de arista cuyas caras combinan los colores azul, rojo y amarillo. Además, el material incluye representaciones planas de varios tipos de proyecciones de sólidos.



(a) Cubos, prismas triangulares y representaciones gráficas

(b) Organicubes

(c) Structuro

Figura 2.69: Cubos no encajables

Modelos para la composición

El material de la Figura 2.70 consta de varios sólidos contruidos a partir de cubos, pero no se pueden desmontar. El objetivo del material es la creación de composiciones tridimensionales. En este caso, no se proporcionan representaciones gráficas. Algunos de los usos que



Figura 2.70: Modelos para la composición

se pueden hacer de este material son:

- * Generación combinatoria de formas hechas con un número fijo de tricubos, tetracubos, pentacubos, ...
- * Estudio de diferentes posibilidades combinatorias de las colecciones.
- * Representaciones isométricas de distintas agrupaciones de cubos.
- * Experimentación de las distintas cenefas espaciales con los módulos L.
- * Descripción de los movimientos generados.
- * Trabajo de las proyecciones ortogonales.

Utopía

Este material (Figura 2.71) es un juego de mesa que consta de 50 desafíos. En cada uno de ellos hay que construir un puzzle colocando 16 rascacielos que cumplan con las condiciones establecidas en las fichas dependiendo de la cantidad de pisos que se puedan ver desde diferentes puntos de vista. Este material se puede utilizar para trabajar habilidades de visualización.



Figura 2.71: Utopía

Espejos y miras

En la Figura 2.72 (a) se muestran dos espejos rectangulares iguales pegados por un borde lateral que se abren como las hojas de un libro. La utilización de estos espejos se puede complementar con la de un semicírculo graduado para medir diferentes ángulos entre los espejos.

Algunos de los usos que se pueden hacer de este material son:

- * Generación de polígonos regulares (por ejemplo, un cuadrado a partir de un triángulo rectángulo como se observa en la Figura 2.72 (a)).
- * Estudio de relaciones entre ángulos y ejes de simetría y número de lados.
- * Generación combinatoria de configuraciones y diseños simétricos, mediante la visualización de imágenes múltiples.
- * Observación de la propia forma de uno mismo al situarse delante de un libro de espejo en ángulo recto. Se pueden lograr observaciones invertidas si se coloca horizontalmente el lomo del libro de espejos.
- * Reproducción de diferentes tipos de simetrías plana. Por ejemplo, ver frisos con los dos espejos paralelos.

En la Figura 2.72 (b) se muestra un *Mira*, que se trata de una pieza rectangular de metacrilato translúcido con dos soportes laterales. La translucidez debe ser la suficiente para reflejar imágenes y a su vez dejar ver objetos situados detrás.

Este material se puede usar, por ejemplo, para lo siguiente:

- * Como instrumento de dibujo geométrico, que puede sustituir en parte a la regla y el compás para realizar diversas construcciones geométricas elementales.
- * Estudio experimental del concepto de mediatriz y de eje y plano de simetría.
- * Comprobación de la simetría.

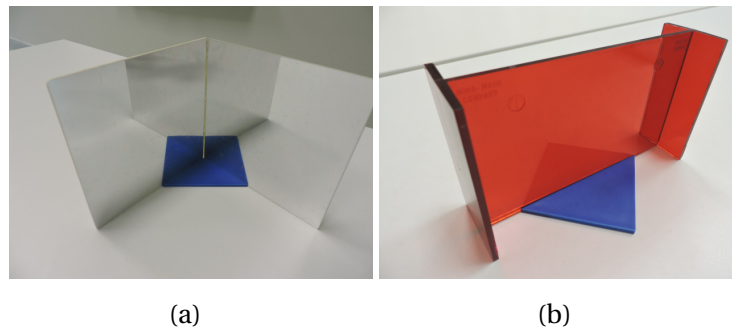


Figura 2.72: Espejos y miras

Materiales de dibujo

En la Figura 2.73 se muestran cartabones, escuadras, reglas y compases. Todos estos materiales son instrumentos de dibujo.

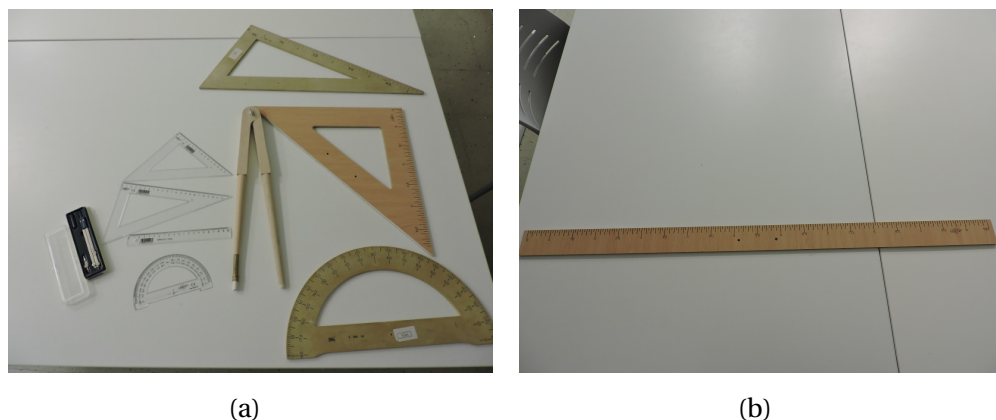


Figura 2.73: Escuadra, cartabón, regla, compás y transportador de ángulos

El *cartabón* se trata de un triángulo rectángulo isósceles de material rígido para poder dibujar con un lápiz su perfil sobre un papel. Sus medidas pueden ser cualesquiera, pero los dos ángulos de 45° y el de 90° han de ser precisos.

Algunos de sus usos son:

- * Emplear un instrumento clásico de dibujo en construcciones geométricas y ver las posibilidades que ofrece tanto solo como complementado por otros instrumentos (escuadra, compás, etc.).
- * Dibujar un cuadrado de lado igual a un cateto del cartabón y dividirlo, empleando solamente este cartabón, en dieciséis cuadrados iguales.
- * Dado un segmento de longitud igual a la hipotenusa del cartabón, trazar con éste la recta mediatriz.
- * Realizar trazados geométricos combinando una escuadra o un compás y un cartabón (mallas ortogonales e inclinadas, polígonos, divisiones de segmentos, etc).

El *compás* consta de dos barras articuladas en un punto, tales que la articulación permita mantener la apertura de las dos barras, cualquiera que sea esta. En el extremo de una barra hay una mina o una tiza y en el otro extremo se encuentra una punta fina para ser mantenida fija sobre un papel o la pizarra mientras el otro brazo gira y traza un círculo.

Este material se puede usar, por ejemplo, para lo siguiente:

- * Emplear uno de los instrumentos más clásicos de la geometría haciendo trazados geométricos que son esenciales en la comprensión de la geometría euclidiana plana.
- * Empleando un compás rígido dividir un ángulo dado en dos y cuatro partes.
- * Trazar un círculo y los vértices de su hexágono regular inscrito; encontrar dos puntos de la mediatriz de un segmento dado; trazar puntos de la bisectriz de un ángulo fijado, etc.
- * Estudiar construcciones con regla y compás, por ejemplo, las construcciones de triángulos dados unos cuantos elementos (3 lados, 2 ángulos, las tres alturas, etc.).
- * Estudiar qué relación ha de haber entre la longitud de un segmento y la abertura del compás rígido para que éste pueda servir para marcar puntos de la mediatriz del segmento.

La *escuadra* se trata de un triángulo rectángulo con dos ángulos de 30° y 60° hecho en material rígido para poder dibujar con un lápiz su perfil sobre un papel. Es opcional la existencia de graduación sobre la hipotenusa. Las medidas de los lados son arbitrarias, pero los ángulos han de ser precisos.

Algunos usos que se pueden hacer de este material son:

- * Emplear un instrumento clásico de dibujo en construcciones geométricas y ver las posibilidades que ofrece tanto solo como complementado por otros instrumentos (cartabón, compás, etc.).
- * Dibujar ángulos de anchura 30° , 60° , 90° , 120° , 150° , 210° , etc.
- * Trazar un hexágono regular y un cuadrado empleando sólo una escuadra.
- * Realizar trazados geométricos combinando una escuadra y un cartabón o un compás: mallas regulares, polígonos, inscripción de polígonos, divisiones de segmentos y de ángulos, etc.

Una *regla geométrica* es cualquier aparato que permita trazar con un lápiz un segmento de línea recta. Si además existen graduaciones se podrán tomar medidas y trazar segmentos de unas medidas determinadas.

Algunos de los usos que se pueden hacer de este material son:

- * Presentar un instrumento básico en geometría y en medida. Las reglas graduadas permiten tomar medidas, estudiar cambios a escala y hacer segmentos de recta de unas medidas dadas. Por extensión, calcular áreas y volúmenes simples. La regla sin graduación permite resolver trazados geométricos donde sólo intervengan rectas.
- * Con una regla graduada verificar experimentalmente el teorema de Thales.
- * Empleando dos reglas graduadas, dibujar dos ejes de coordenadas poniendo a cada uno de ellos una de las graduaciones y estudiar el sistema de coordenadas obtenido.
- * Diseñar una regla que contenga simultáneamente la graduación en centímetros y pulgadas.
- * Resolver problemas geométricos con una regla sin graduar y un compás (paralelas, perpendiculares, alturas, medianas, bisectrices, mediatrices, etc.).

Piezas para hacer frisos y mosaicos

Colección de muchas piezas iguales de diferentes tipos de formas geométricas que pueden ser de cartón, plástico o madera (Figuras 2.74, 2.75, 2.76) y se pueden utilizar para poder generar mosaicos que recubran totalmente al plano.



Figura 2.74: Frisos y mosaicos



Figura 2.75: Frisos y mosaicos

Además, algunos otros usos de este tipo de materiales son:

- * Estudio de los polígonos con capacidad de generar mosaicos, descubriendo el porqué dichas piezas poseen tal propiedad.
- * Estudio de polígonos generados por piezas de mosaico.
- * Estudio de los ángulos presentes en los mosaicos.
- * Generación de nuevos mosaicos.
- * Estudio del hecho que recortando trozos de un mosaico y añadiéndolo en otra parte se conserva la propiedad de enmosaicar.
- * Estudiar por qué muchos polígonos, en especial pentágonos, no pueden generar mosaicos.
- * Describir los mosaicos obtenidos al unir adecuadamente los baricentros de las caras de un mosaico regular.
- * Estudio de los 7 tipos de frisos y los mosaicos que tienen por filas un mismo friso repetido.



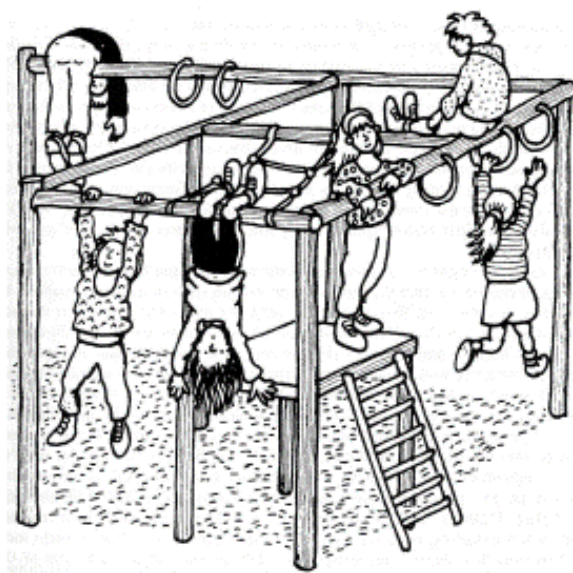
Figura 2.76: Frisos y mosaicos

2.5. Práctica sobre orientación, visualización y transformaciones geométricas

ACTIVIDAD 1: A continuación se presentan una secuencia de tareas de tipo 1 de orientación estática del sujeto y de los objetos de Gonzato y cols. (2011). Para cada tarea, indica el nivel de construcción de las nociones de situación en que se encuentra el alumnado al que se dirigiría la actividad; en qué curso la realizarías; los posibles errores que podría cometer el alumnado de Educación Primaria; y las variaciones que podrías hacer de la tarea para incrementar o disminuir su dificultad.

- (a) El niño tiene que reconocer las diferentes partes de su cuerpo y de otra persona que está frente a él:
- * Con tu mano derecha tócate el ojo izquierdo.
 - * Enseña dos dedos con tu mano derecha y tres con tu mano izquierda.
 - * Con tu mano derecha señala hacia el lado derecho.
 - * Con los ojos cerrados, señala con la mano derecha tu pierna izquierda.
 - * Con los ojos cerrados, enseña dos dedos con tu mano derecha y cuatro con tu mano izquierda.
 - * Con tu mano izquierda, señala mi pierna derecha.
 - * Con tu mano derecha, señala mi ojo izquierdo.
 - * Con tu mano derecha, señala mi oreja izquierda.
 - * Con tu mano izquierda, señala mi ojo izquierdo.
 - * Con tu mano derecha, señala mi oreja izquierda.
- (b) El docente se coloca frente al niño y le explica que debe imitar sus gestos, pero sin realizar ninguna indicación verbal:
- * Con la mano derecha se toca el ojo derecho.
 - * Con la mano izquierda se toca el pie derecho.
 - * Con la mano derecha enseña cuatro dedos y con la izquierda dos.

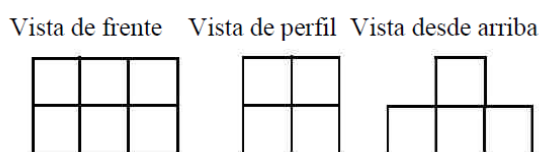
- * Con la mano derecha toca su oreja izquierda.
 - * Con la mano izquierda se toca el puño derecho.
- (c) En una imagen de niños en diferentes posiciones, el niño tiene que colorear los zapatos izquierdos de un color y los derechos de otro:



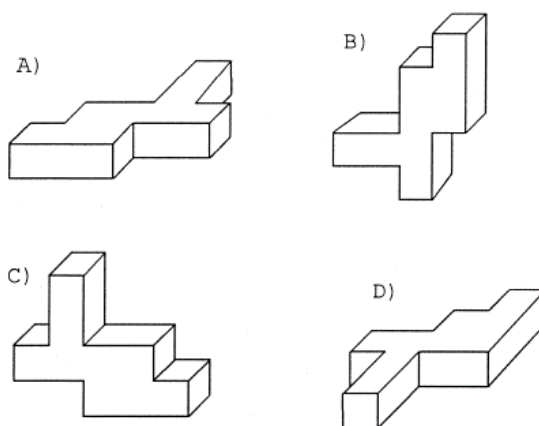
- (d) Se utilizan un coche pequeño y un camión pequeño y se modifican sus posiciones sobre la mesa: (a) ambos en dirección izquierda delante del niño; (b) orientados hacia el niño; (c) el auto dirigido hacia el niño y el camión en dirección opuesta; (d) en dirección oblicua, uno frente al otro. Se invita al niño, en cada situación, a poner: (1) el coche delante del camión; (2) el auto detrás del camión.

ACTIVIDAD 2: A continuación se presentan una secuencia de tareas de tipo 2 de interpretación de perspectivas de objetos tridimensionales de Gonzato y cols. (2011). Para cada tarea, resuélvela e indica el estímulo inicial, la acción a ejecutar o imaginar y la respuesta; en qué curso la realizarías; los posibles errores que podría cometer el alumnado de Educación Primaria; y las variaciones que podrías hacer de la tarea para incrementar o disminuir su dificultad.

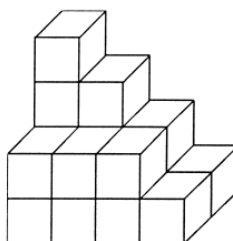
- (a) Construye una composición de cubos que tenga las vistas ilustradas en la siguiente figura (Pittalis, Mousoulides, y Christou, 2009).



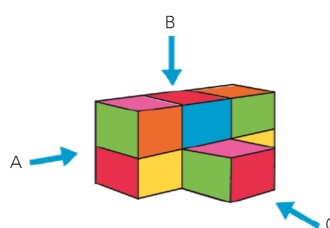
- (b) Entre las siguientes figuras, hay tres que representan el mismo objeto en diferentes posiciones. Hay una figura que representa un objeto que, incluso cambiando su posición, es diferente de los otros tres. ¿Cuál es este objeto? (Gorgorió, 1998).



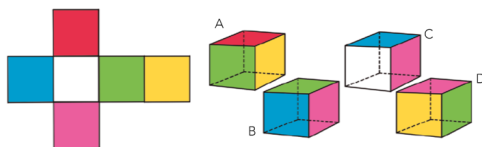
- (c) Construye con los cubos Multilink el objeto presentado en la siguiente figura como resultado de una rotación de 180° (Gorgorió, 1998).



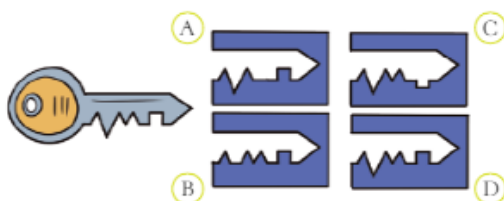
- (d) Dibuja, desde el punto de vista que indican las flechas, la siguiente figura (*Matemáticas 4: Primaria. Pieza a pieza*, 2022)



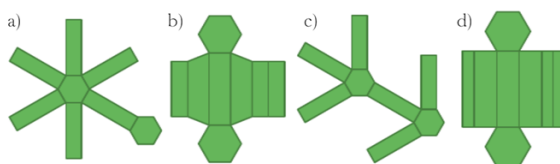
- (e) ¿Qué cubos corresponden a este desarrollo plano? (*Matemáticas 4: Primaria. Pieza a pieza*, 2022)



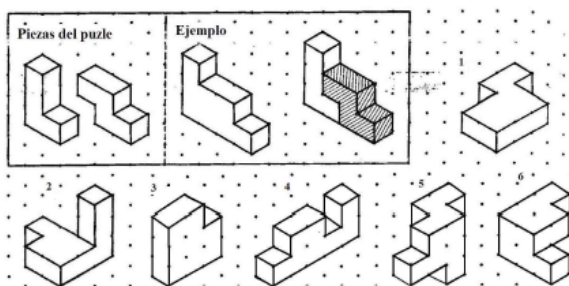
- (f) ¿Cuál de los dibujos coincide con el perfil de la llave? (*Matemáticas 5: Primaria. Pieza a pieza*, 2022)



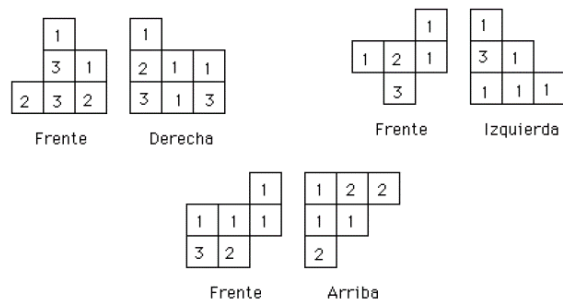
- (g) ¿Cuáles de los siguientes desarrollos no corresponden a un prisma hexagonal? (*Matemáticas 5: Primaria. Pieza a pieza*, 2022)



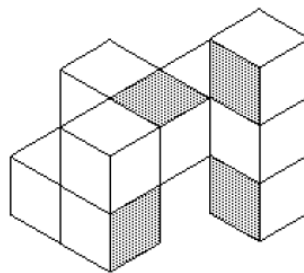
- (h) Juntando dos piezas de puzzle se pueden construir nuevos sólidos, como se muestra en el ejemplo. Para cada uno de los siguientes sólidos formados por las dos piezas pinta una de las dos piezas que los construye para mostrar la composición (Gonzato y cols., 2011).



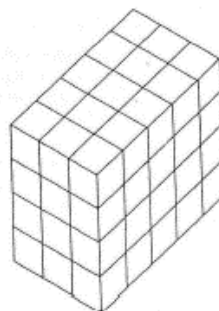
- (i) A continuación se muestran las representaciones ortogonales codificadas de tres módulos de cubos diferentes. Construye cada uno de los módulos con cubos multilink y luego representa en papel de malla isométrica esos mismos módulos por medio de sus perspectivas isométricas (Guillén y cols., 1992).



- (j) A continuación se muestra la vista isométrica de un módulo de cubos multilink; observa que algunas de sus caras están sombreadas. Dibuja las vistas ortogonales codificadas y la isométrica del módulo de cubos que queda al añadir un cubo sobre cada una de las caras sombreadas. (Guillén y cols., 1992).



- (k) El objeto representado en la figura 7 está formado por cubos. Supongamos que pintamos toda su superficie exterior de azul y después lo desmontamos totalmente. ¿Cuántos cubitos tendrían exactamente tres caras azules? ¿Y cuántos tendrían exactamente dos caras azules? ¿Y una cara azul? ¿Y ninguna cara azul? (Bishop, 1983).



ACTIVIDAD 3: A continuación se presentan una secuencia de tareas de tipo 3 de orientación del sujeto en espacios reales de Gonzato y cols. (2011). Para cada tarea indica el estímulo inicial, la acción a ejecutar y la respuesta; en qué curso la realizarías; los conocimientos prin-

cipales puestos en juego; los posibles errores que podría cometer el alumnado de Educación Primaria; y las variaciones que podrías hacer de la tarea para incrementar o disminuir su dificultad.

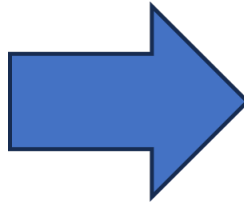
- (a) El maestro lleva a los niños de visita al parque de bomberos. Por el camino hablan acerca de las casas y las tiendas por las que pasan. Al volver a la escuela crean una maqueta de la ciudad utilizando bloques.
- (b) Se presentan 16 cajas de cerillas sobre una mesa grande cuadrada colocada en una habitación totalmente vacía y puesta de manera que sus lados estén inclinados 45° con respecto a las paredes de la sala. Se disponen las cajas, cuatro por cada lado, paralelas a los bordes de la mesa. El profesor pone un bloque lógico diferente (que los alumnos saben representar) en cada caja y las deja abiertas. Los chicos observan el contenido de cada caja y tienen que recoger información (dibujar planos, escribir, ...) para que el día siguiente, una vez que las cajas han sido cerradas, puedan describir el contenido de tres cajas señaladas por el profesor.
- (c) Almudena sale de su casa en la C/ Gato, va hasta el cruce con la C/ Delfín y gira a la derecha en dirección a la plaza. En la plaza coge la C/ Foca hasta el cruce con la C/ Oso, donde está la casa de su amiga Begoña. ¿Qué número corresponde a la casa de Almudena? ¿Y a la casa de Begoña?



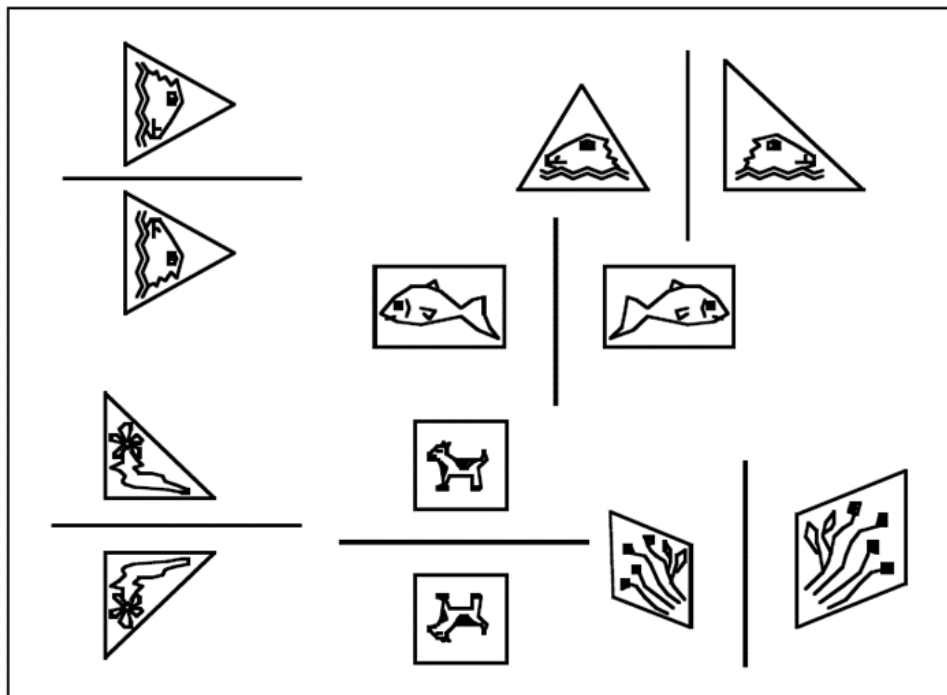
- (d) «Búsqueda de un objeto escondido en una mesa usando un registro hecho en un plano del aula». Mientras un alumno sale del salón otro esconde un objeto en una mesa y marca dicha mesa sobre un plano del aula que el maestro ha reproducido en una hoja de papel (que tiene cada niño). Entra el alumno que estaba fuera e interpretando el plano tiene que encontrar el objeto escondido.

ACTIVIDAD 4: Resuelve los siguientes apartados:

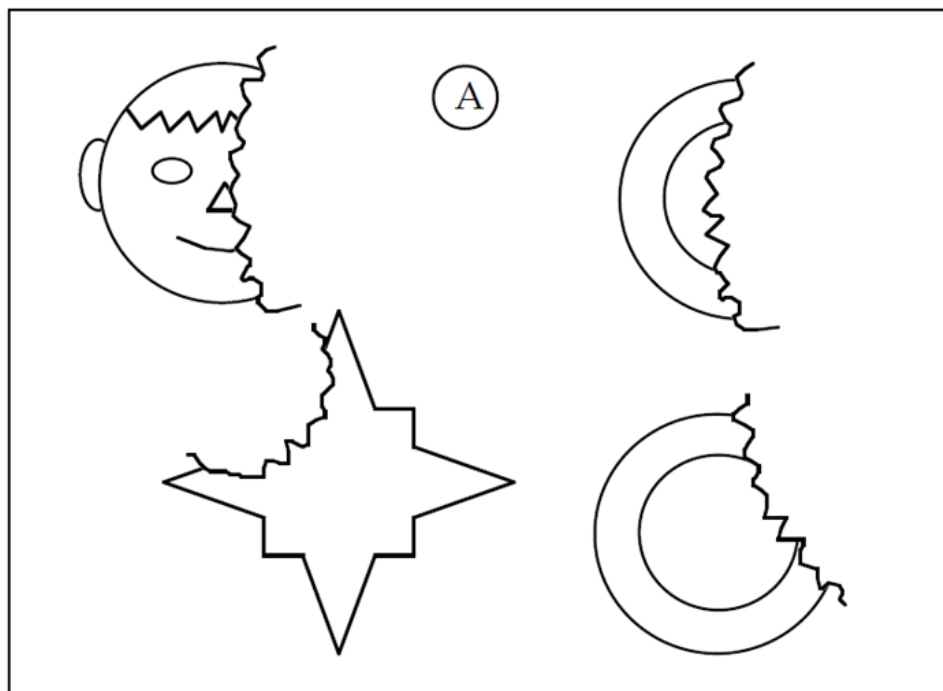
- (a) Coloca el mira al lado de la imagen de la flecha, ¿qué imagen ves reflejada? Decimos que cada figura es simétrica de la otra. Marca con el lápiz la figura que ves reflejada. Ahora coloca el mira en una posición diferentes a la anterior y repite el mismo procedimiento que antes.



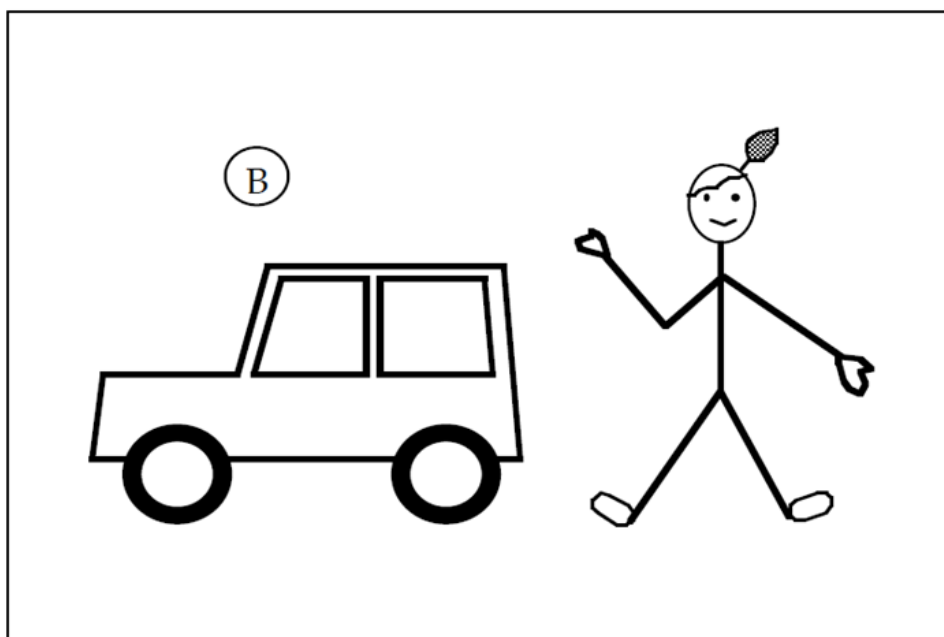
- (b) Utilizando el mira comprueba si las siguientes parejas de figuras son simétricas o no.



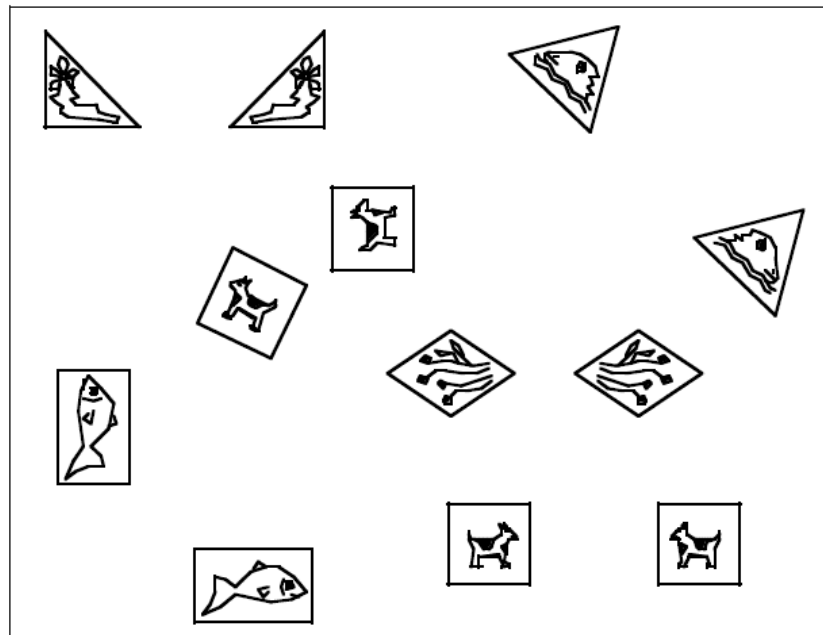
- (c) Utilizando el mira completa la figura.



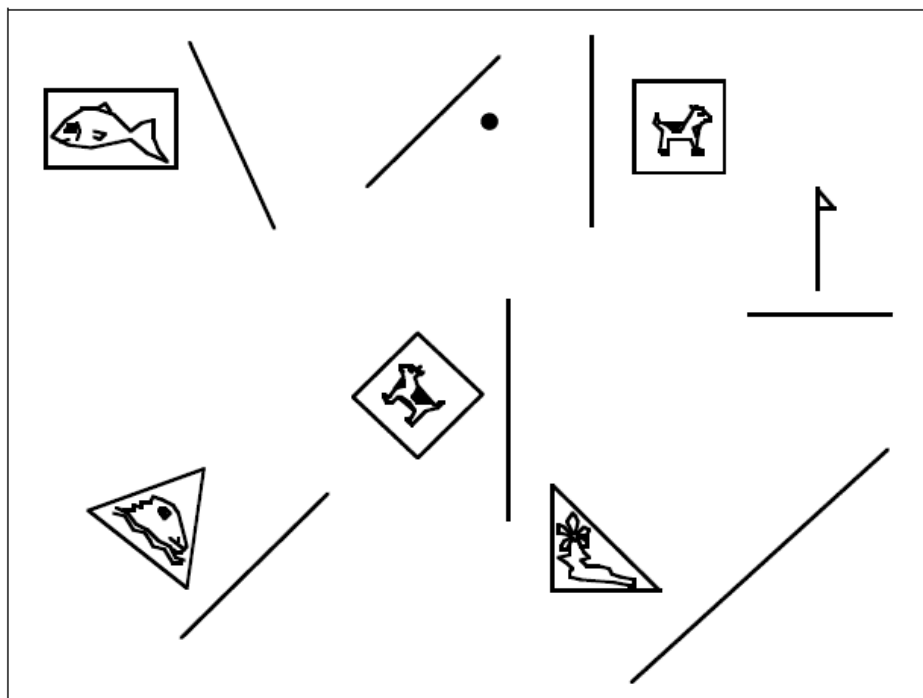
- (d) Utilizando el mira haz que se vean dos coches y desplazándolo haz que se acerquen y se alejen. Repite la actividad con el hombre. Además, consigue que se vea un hombre sin pluma, un hombre con dos plumas, ver dos hombres de forma que uno de ellos esté con los pies hacia arriba, o que se toquen por la cabeza



- (e) Dibuja, con la ayuda del mira o plegando el papel, el eje de simetría de cada par de figuras.

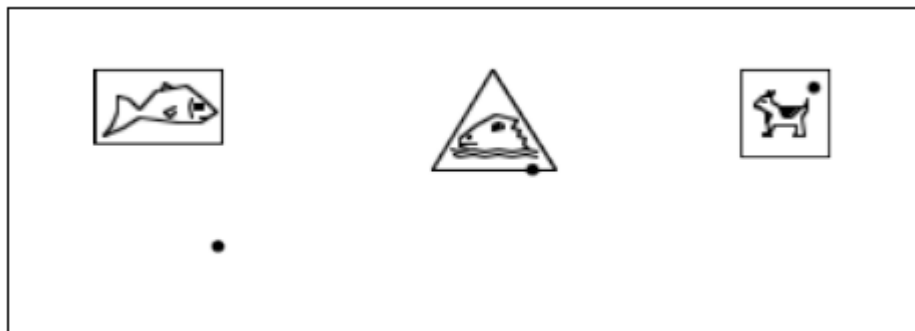


- (f) En cada caso, coloca la pieza simétrica a la de la lámina respecto del eje de simetría dibujado. Utiliza los materiales auxiliares sólo después de dar la solución, para comprobar si es correcta.

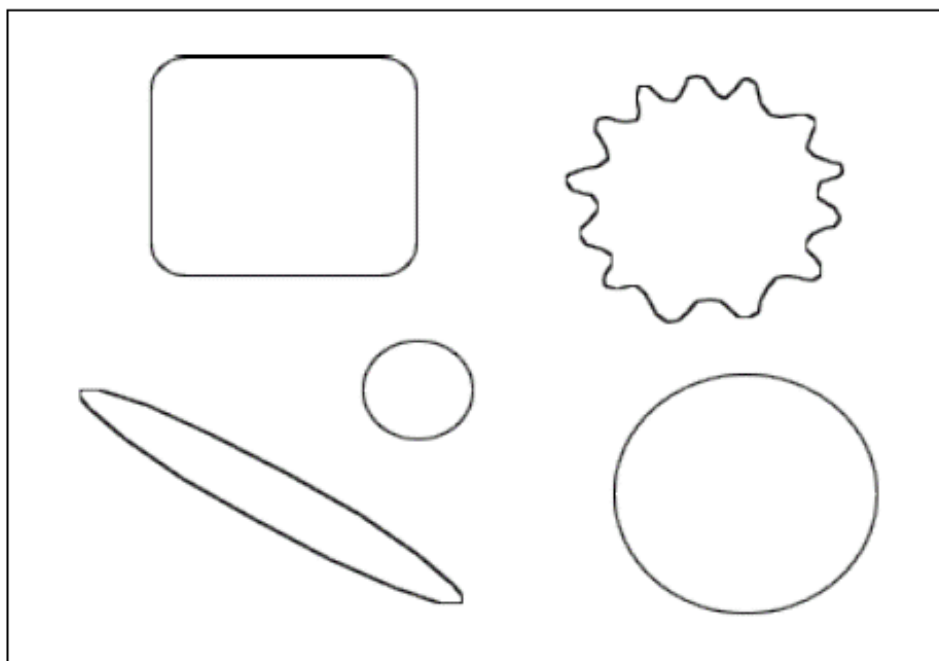


- (g) Las manecillas del reloj giran. En un tiiovivo, los caballitos giran alrededor del centro del tiiovivo. ¿Se te ocurre algún otro ejemplo de algo que gire? ¿Cómo expresarías lo que es girar? ¿Cómo se mueve un objeto cuando gira alrededor de algo?

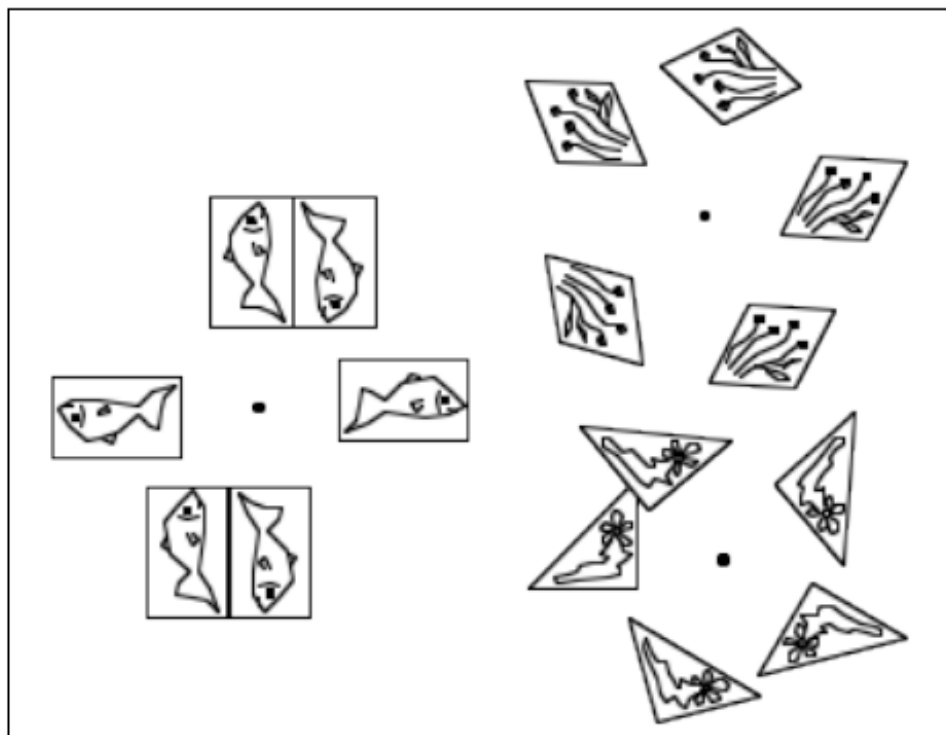
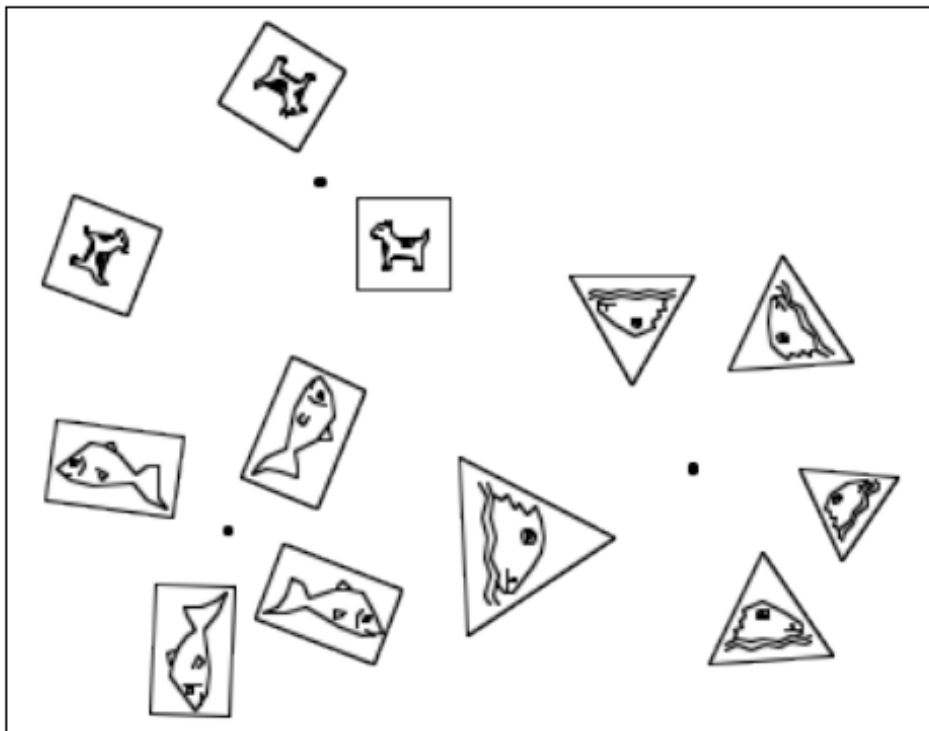
- (h) Gira el pez de la lámina, tomando como centro de giro el punto marcado junto a él. Utiliza para ello algún material auxiliar, dale vueltas, parando en diversas posiciones a lo largo del recorrido y pegando piezas iguales en el lugar y con la inclinación correspondiente. Repite la actividad con las demás figuras de la lámina.



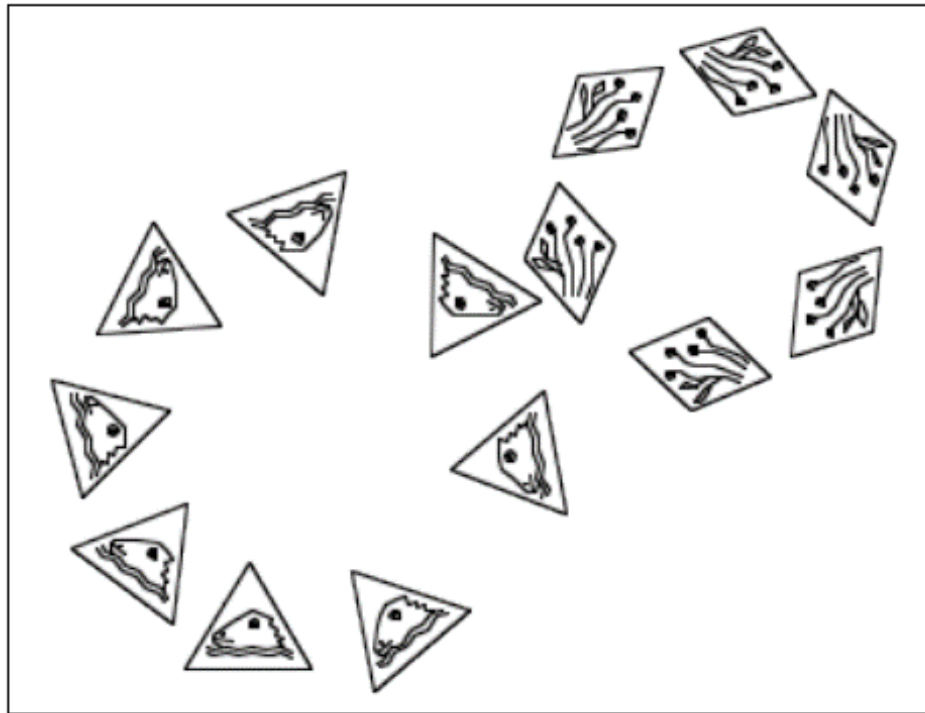
- (i) Dí cuáles de estas líneas corresponden a recorridos de giros y cuáles no.



- (j) En cada lámina, identifica las figuras que se corresponden mediante un giro con centro en el punto marcado.



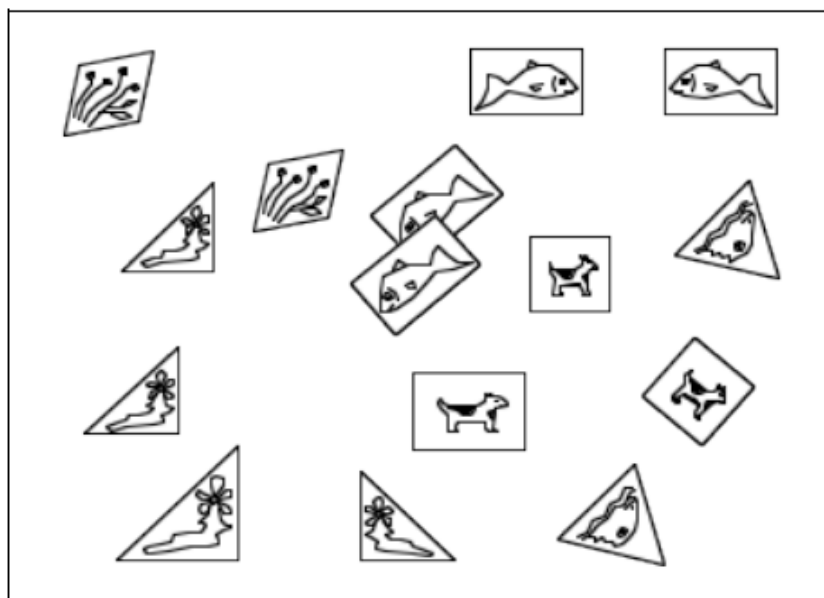
- (k) Señala aproximadamente dónde se encuentra el centro de giro de cada grupo de figuras. Para eso no utilices ningún material auxiliar. Una vez marcada tu solución, comprueba con algún material.



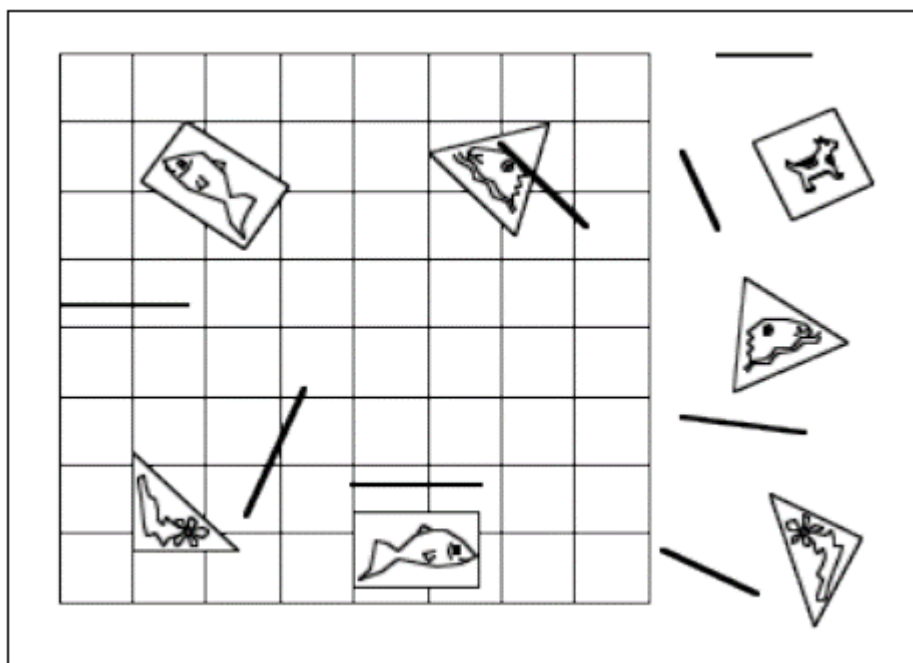
- (l) Observa las dos láminas siguientes. Dí qué te parece que es una traslación y cómo han de estar colocadas las figuras para que unas sean trasladadas de la otras. En la lámina 1, coge una pieza igual a alguna figura de los ejemplos y trasládala hasta colocarla sobre su pareja. Repite la actividad con los ejemplos de la lámina 2, trasladando la pieza de unas figuras a otras del grupo.



- (m) Identifica las figuras de la lámina siguiente que se corresponden mediante una traslación. Explica en los casos negativos por qué no hay traslación. Haz el recorrido de la traslación con una pieza en los casos afirmativos.



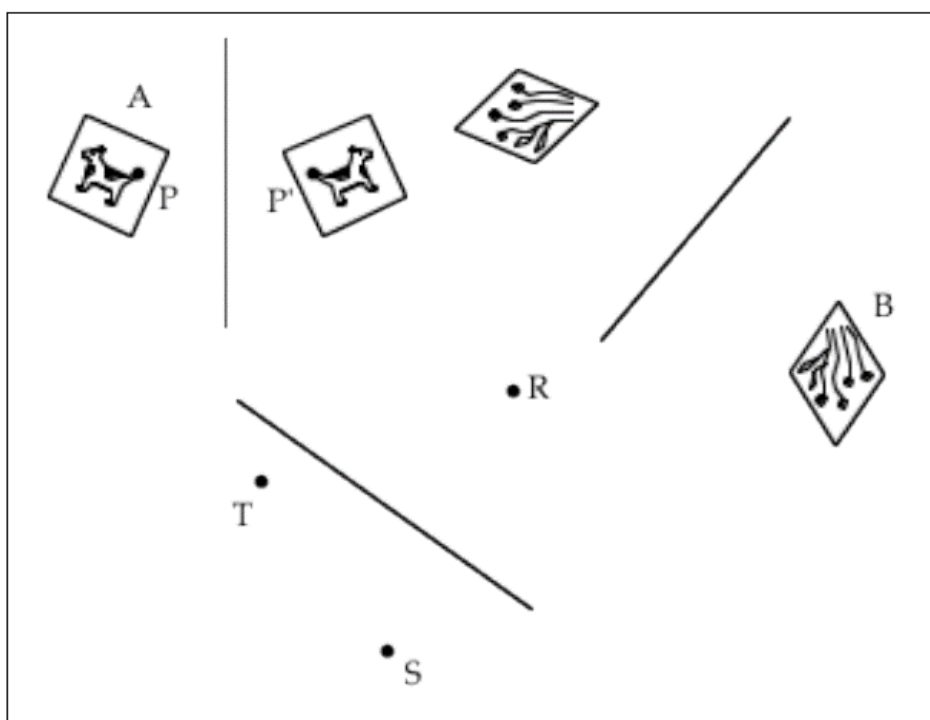
- (n) Cada figura de la lámina se ha trasladado de manera que uno de sus lados se ha desplazado hasta el segmento más próximo a esa figura, pero se han borrado las imágenes. Pega piezas en la lámina para que se vean las imágenes completas (ten en cuenta que no siempre existe solución y que en algún caso hay varias soluciones).



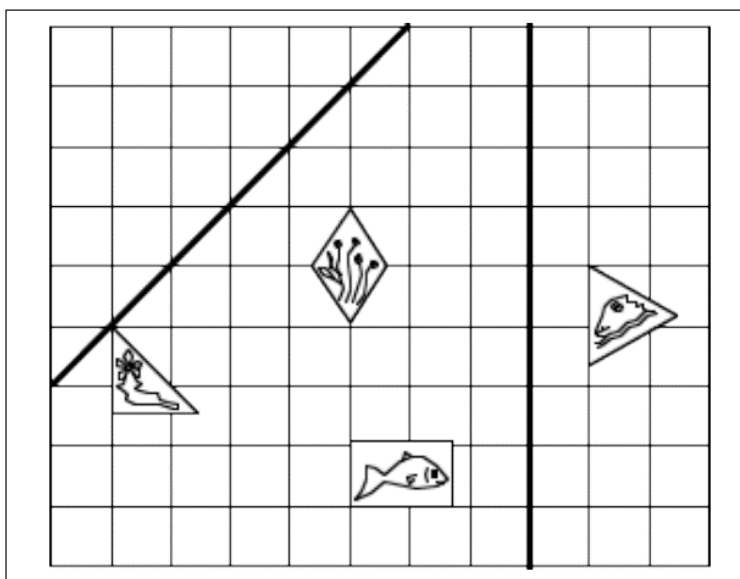
- 1 ¿Qué se pretende con la secuencia anterior de actividades de cada isometría?
- 2 ¿Qué nivel de razonamiento de Van Hiele crees que tiene el alumnado al que dirigirías esta actividad?
- 3 ¿Cómo podrían reflejarse algunas de las dificultades o errores comunes que comete el alumnado?

ACTIVIDAD 5: Resuelve los siguientes apartados:

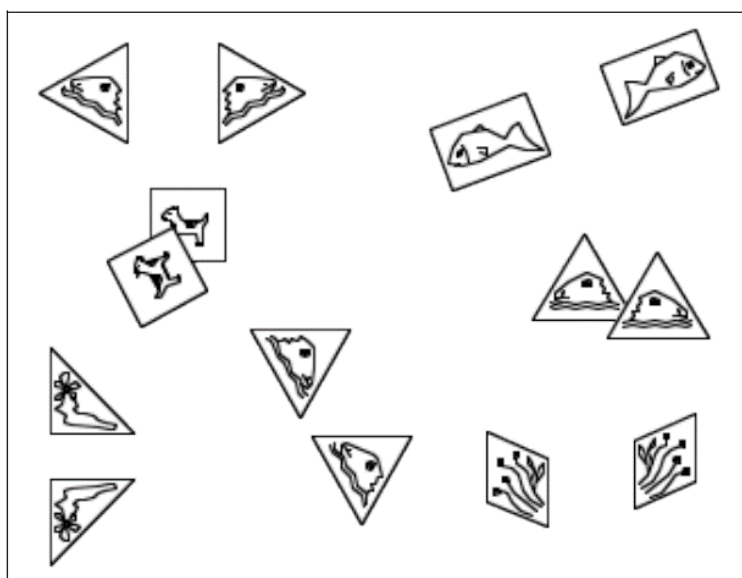
- (a) En la lámina hemos marcado un punto P de la figura A, y su imagen P' mediante la simetría cuyo eje está dibujado. Une los puntos P y P'. Elige otro punto de la figura A y únelo con su imagen. Repite esto con varios puntos de la figura A. Repite la actividad con la figura B y su imagen. Dibuja los puntos simétricos de R, S y T respecto al eje de simetría dado (puedes usar el mira o plegado). Une, mediante un segmento, cada punto con su imagen. Repite la actividad con otros ejes de simetría (trazados por tí) y otros puntos que tú debes marcar. Enuncia la propiedad que hayas observado a partir de los resultados de esta actividad: ¿Qué relación hay entre unos segmentos y otros? ¿Qué relación hay entre los segmentos y el eje de simetría? ¿Qué puedes decir de un punto y de su imagen en relación con el eje de simetría?



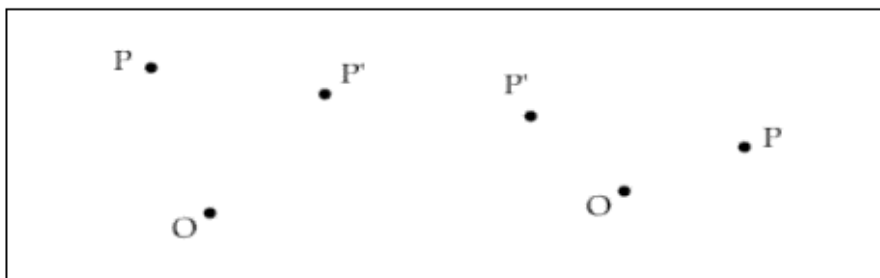
- (b) Obtén las imágenes de las figuras, puntos y segmentos que aparecen en las láminas por la simetría cuyo eje aparece dibujado junto a ellos (Sugerencia: Dibuja las imágenes de algunos puntos especiales de cada figura o segmento usando las propiedades que has descubierto en las actividades anteriores). Una vez resuelta la actividad, emplea unas veces el mira y otras el plegado para comprobar el resultado.



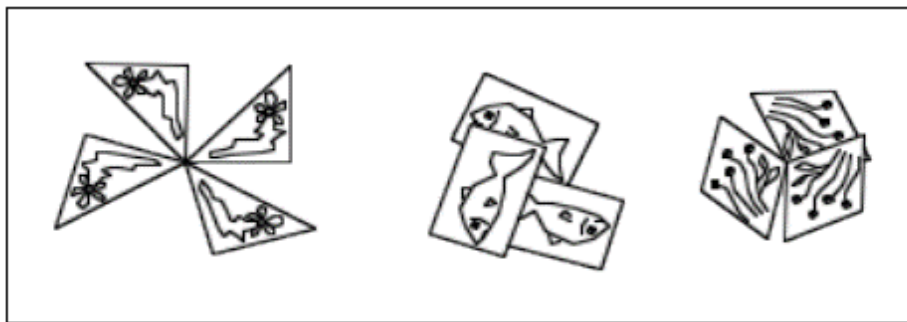
- (c) Traza, cuando sea posible, el eje de simetría de cada par de puntos y figuras de las láminas (Sugerencia: Recuerda que el eje de simetría es la mediatriz de los segmentos que unen puntos simétricos). Explica cómo obtienes el eje de simetría y por qué no hay eje de simetría en algunos casos.



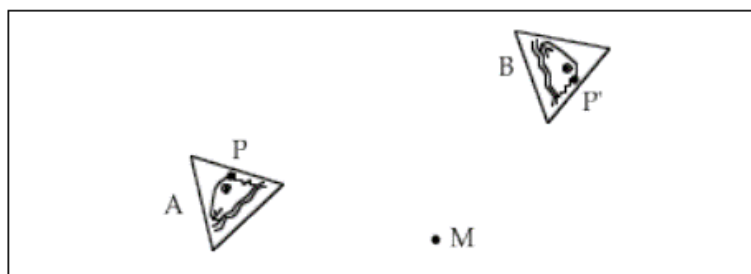
- (d) P' es la imagen de P por un giro con centro en O . Marca el ángulo que se forma y mídelo.



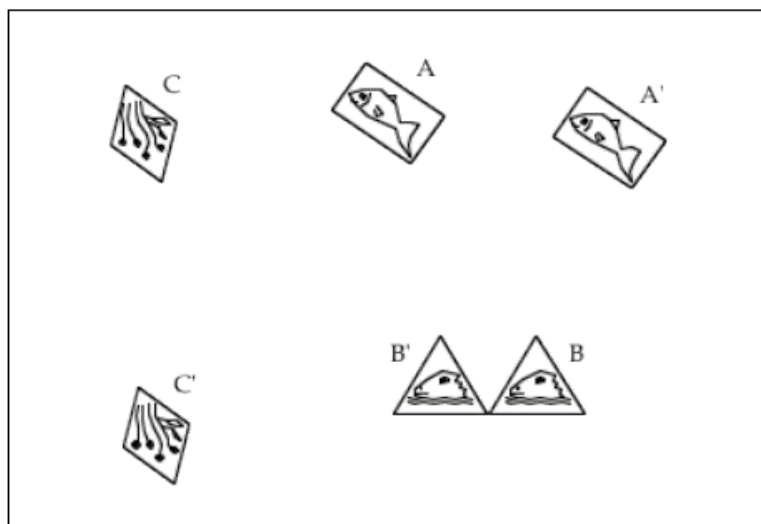
- (e) Determina la posición exacta del centro de giro en cada grupo de figuras iguales. Explica cómo lo has obtenido.



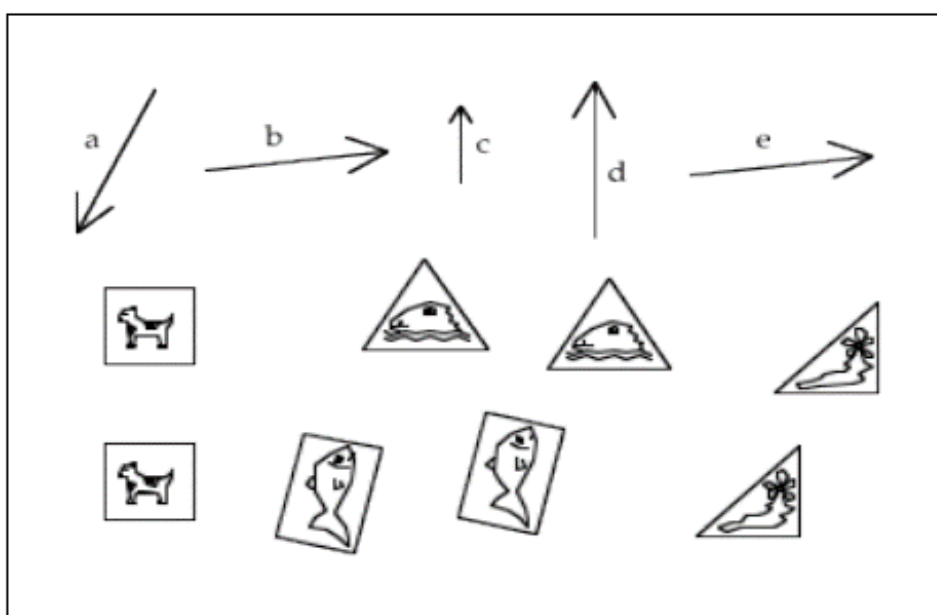
- (f) Al aplicarle a A un giro con centro M , hemos obtenido la figura B . La imagen del punto P es P' . Dibuja el arco de circunferencia recorrido por P y los lados del ángulo PMP' (trazando los respectivos radios). Mide ese ángulo (PMP'). Elige dos puntos más de la figura A y haz lo mismo con ellos. ¿Qué sucede con las medidas de los ángulos? Generaliza lo que acabas de observar: Cuando giramos una figura, el ángulo girado por todos sus puntos, ...



- (g) La figura A se ha trasladado hasta la A'. Une mediante flechas varios puntos de A con sus imágenes en A'. Dí qué observas en esas flechas, indicando lo que tienen igual y en lo que se diferencian. Copia una de las flechas en la parte derecha de la lámina. Repite la actividad con las figuras B y B' y con C y C'.



- (h) Para cada figura de la lámina, dí qué vector o vectores de la parte superior de la lámina definen la traslación que transforma esa figura en otra trasladada. ¿Hay algún par de figuras trasladadas para las que no esté en la lámina su vector de traslación? En caso afirmativo dibújalo. ¿Es posible que dos vectores definan la misma traslación, o sea, sirvan para el mismo par de figuras? ¿Por qué? A los vectores que representan la misma traslación los llamaremos vectores equivalentes.



- 1 ¿Qué se pretende con la secuencia anterior de actividades de cada isometría?
- 2 ¿Qué nivel de razonamiento de Van Hiele crees que tiene el alumnado al que dirigirías esta actividad?
- 3 ¿Cómo podrían reflejarse algunas de las dificultades o errores comunes que comete el alumnado?

Actividad 2.7

Busca tres applets en GeoGebra que sirvan para trabar contenidos de este tema y explica qué actividad plantearías y en qué curso de Educación Primaria con cada una de ellas. ¿Qué objetivo tendrías en cada actividad? Entrega un informe en PDF a través del Aula Virtual.

TEMA 3

MAGNITUDES Y SU MEDIDA

3.1. Aspectos curriculares y focos de contenido

En el currículo de Educación Primaria regulado por la LOMLOE (Ministerio de Educación y Formación Profesional, 2022) se contemplan los saberes básicos del Bloque 2 sobre el sentido de la medida que se muestran en la Tabla 3.1. En este tema se trabajará la didáctica para la enseñanza y el aprendizaje de estos saberes.

Saberes básicos	1er ciclo	2º ciclo	3er ciclo
Unidades no convencionales para medir y estimar las dimensiones de los objetos cercanos y del propio cuerpo.	x		
Estrategias de medida y estimación de tiempo, longitud, capacidad, volumen y masa mediante unidades no convencionales en situaciones reales.	x	x	
Elección y utilización de los instrumentos adecuados para medir con precisión diferentes magnitudes.		x	x

Saberes básicos	1er ciclo	2º ciclo	3er ciclo
Experimentación y conceptualización de magnitudes: tiempo, longitud, ángulos, masa, superficie, capacidad y volumen, temperatura y monedas.	x	x	x
Unidades de magnitud convencionales. Relación, comparación directa, ordenación y conversión entre unidades de la misma magnitud. Valoración de resultados en mediciones y estimaciones realizadas.	x	x	x
Contribución de la humanidad a la unificación de sistemas de medida y magnitudes, y valoración de sus usos sociales y científicos.	x	x	x
Técnicas cooperativas para estimular el trabajo en equipo relacionado con la medida y estimación de magnitudes.	x	x	x

Una *magnitud* es una propiedad física de los objetos susceptible de ser medida. En Educación Primaria se trabajan las magnitudes que definimos a continuación:

- * **Longitud:** extensión lineal que hay entre dos puntos pudiéndose diferenciar entre la extensión ocupada, por ejemplo el largo de una mesa y extensión no ocupada, por ejemplo la distancia entre dos ciudades.
- * **Superficie:** extensión plana de un cuerpo o un objeto, por ejemplo la extensión de una hoja de papel. En el contexto de la medida de magnitudes, los términos superficie y área se utilizan frecuentemente como sinónimos.
- * **Capacidad:** cualidad de un objeto de contener a otros o de servirles como recipiente. Por ejemplo, una botella contiene cierta cantidad de leche.
- * **Volumen:** espacio ocupado por un objeto. Por ejemplo, una caja de zapatos ocupa cierto espacio en el armario.
- * **Masa y peso:** la masa es la cantidad de materia que tiene un cuerpo y el peso es la fuerza que ejerce la gravedad sobre una masa en un lugar determinado. Por ejemplo, un astronauta tiene la misma cantidad de masa en la Tierra y en Marte, sin embargo, pesa menos en Marte. La diferenciación entre masa y peso queda fuera de los contenidos de Educación Primaria, por lo que en estos apuntes se hablará de peso en vez de masa.
- * **Amplitud angular:** extensión plana limitada por dos rectas que se cortan. La amplitud angular puede estar asociada a cambios de dirección en contextos reales. Por ejemplo, girar a la derecha una llave.
- * **Duración de tiempo:** duración o separación de acontecimientos. Por ejemplo, la duración de una película.

- * **Valor monetario:** capacidad que tienen las monedas y billetes de comprar bienes o servicios.

Tipos de magnitudes

Hay diferentes criterios para clasificar magnitudes.

- * **Extensiva e intensiva:** En el caso de que la cantidad de magnitud de la unión de varios objetos pueda obtenerse sumando las cantidades de magnitud de cada uno de los objetos decimos que esta es una *magnitud extensiva*. En caso contrario es una *magnitud intensiva*. Por ejemplo, si juntamos dos líquidos a distinta temperatura obtenemos un líquido cuya temperatura no es la suma de las temperaturas originales. Sin embargo, si eliminamos un tabique que separa dos habitaciones, la superficie de la habitación resultante es la suma de las superficies de las habitaciones originales. Decimos que la superficie es una *magnitud extensiva*, mientras que la temperatura es una *magnitud intensiva*. Todas las magnitudes que se trabajan en Educación Primaria son extensivas.
- * **Continua y discreta:** Por ejemplo, la altura de un edificio puede tomar cualquier valor dentro de unos límites. Si encontramos dos edificios de alturas 14 m y 15 m, no hay impedimento para que haya otro que mida 14,52 m, otro de 14,257 m, etc. Sin embargo, si vamos de compras, no encontraremos ningún precio menor de 1 céntimo. Algunas veces, vemos precios escritos con más de dos decimales, por ejemplo, el precio de la gasolina, pero para abonar el gasto que hayamos realizado hay que hacer un redondeo, ya que no podríamos pagar ni podrían darnos la vuelta de cantidades menores que 1 céntimo. La altura de un edificio (longitud) es una *magnitud continua*, mientras que el valor monetario es una *magnitud discreta*.
- * **Fundamental y derivada:** Por ejemplo, si medimos el largo de una habitación rectangular, utilizando un metro como instrumento de medición superpuesto sobre el largo podemos determinar cuántas veces se repite el centímetro hasta cubrir ese largo. Sin embargo, si queremos saber la superficie del suelo de la misma habitación, no solemos superponer centímetros cuadrados y contar cuántos caben, sino que calculamos su largo y su ancho y hacemos la multiplicación. La longitud es una *magnitud fundamental*, mientras que la superficie es una *magnitud derivada*. En general, el carácter fundamental o derivado de una magnitud no es intrínseco de la propia magnitud, sino que depende del sistema de unidades de medida que se establezca para esa magnitud.
- * **Escalar y vectorial:** Por ejemplo, una bola de billar tiene una masa de 210 g, pero si decimos que hemos golpeado la bola con una fuerza de 5 N, no estaremos dando idea del movimiento que ha producido dicha fuerza; para dar esta información necesitamos decir en qué dirección y sentido hemos ejercido dicha fuerza. La masa es una *magnitud escalar* y la fuerza es una *magnitud vectorial*.

La construcción de los conceptos de *magnitud* y *medida* de esta magnitud de un objeto requiere de una serie de procesos matemáticos (Figura 3.1). En primer lugar, se debe *identificar la magnitud* que se pretende medir y, a continuación, entender la *cantidad de magnitud* como la cualidad compartida por un conjunto de objetos distintos. Es decir, la noción de *cantidad de magnitud* surge al considerar como equivalentes todos los objetos que son iguales respecto a una cierta magnitud. Por ejemplo, un folio es equivalente a una baldosa, a una pantalla de ordenador, a una bandeja, a un pañuelo, etc., siempre que tengan la misma cantidad de superficie. Esa cantidad es la cualidad común compartida por todos los objetos que se pueden clasificar bajo el criterio «tantos . . . como». En particular, es necesario identificar qué acciones conservan una determinada cantidad de magnitud de un objeto. El siguiente proceso consiste en asociar un número a una cantidad de magnitud. Para ello, se compara con una unidad patrón, o *unidad de medida*, que es una cantidad de magnitud fijada como referencia para contar el número de veces que se repite hasta obtener la cantidad de magnitud que queremos medir. La obtención del valor de la medida a través de las repeticiones de la unidad patrón se realiza siguiendo estrategias variadas asociadas a cada tipo de magnitud y diferentes según la unidad de medida utilizada. Las equivalencias entre diferentes unidades de medida y, por consiguiente, la obtención de la medida mediante distintas unidades, completan los procesos propios para construir las ideas de magnitud y medida.

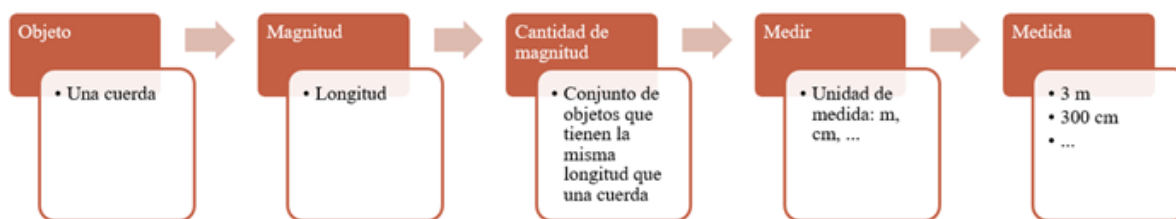


Figura 3.1: Procesos que involucran los conceptos de magnitud y medida

Medir es asignar un número a una cantidad de magnitud. Dicho número es su medida e indica las veces que esa cantidad de magnitud contiene a la unidad de medida, es decir, a la cantidad que se toma como referencia o patrón.

El Sistema Métrico Decimal y el Sistema Internacional de Medidas

Desde la antigüedad el ser humano ha utilizado diferentes estrategias y unidades de medida para poder comparar magnitudes. Por ejemplo, se pueden utilizar las palmas de las manos para comparar longitudes. Sin embargo, el intercambio comercial, cultural y científico requiere que se utilicen nombres y referentes compartidos por todo el mundo. Durante la Revolución Francesa, distintos científicos propusieron un sistema de medidas neutral y compartido por todas las naciones que consistía en que las unidades tenían que estar basadas en la observación científica y debían ser coherentes con el Sistema de Numeración Decimal.

Como consecuencia de ese proceso, en 1889 se celebró en París la *Primera Conferencia General de Pesas y Medidas* en la que se validaron los cálculos realizados para construir el *metro*. Se definió como la diezmillonésima parte de la longitud del meridiano terrestre. A partir del metro se definen las unidades de las demás magnitudes que determinan el Sistema Métrico Decimal:

- * El *metro cuadrado* para la superficie.
- * El *metro cúbico* para el volumen.
- * El *litro*, que es la capacidad de un recipiente de un centímetro cúbico.
- * El *kilo*, que es la masa de un litro de agua.

La Conferencia General de Pesas y Medidas se repite cada cuatros años y tiene como objetivo tomar decisiones sobre metrología y sobre lo que involucra al Sistema Internacional de Unidades. En la Undécima Conferencia Internacional de Pesas y Medidas, en 1960, se estableció el Sistema Internacional de Unidades (SI). Este sistema incluye las siete magnitudes fundamentales que se utilizan en España y que aparecen en la Tabla 3.2.

Magnitud	Unidad básica	Símbolo
Longitud	Metro	m
Masa	Kilogramo	kg
Tiempo	Segundo	s
Intensidad de corriente eléctrica	Amperio	A
Temperatura	Kelvin	K
Cantidad de sustancia	Mol	mol
Intensidad luminosa	Candela	cd

Tabla 3.2: Magnitudes fundamentales en el SI

En la Tabla 3.3 se muestran algunos ejemplos de las magnitudes derivadas que describe el SI.

Los múltiplos y submúltiplos de las unidades de medida anterior se manejan siguiendo los convenios que se indican en la Tabla 3.4.

Las normas de escritura que contempla el SI son las siguientes:

En referencia a los símbolos:

- * Se escriben con caracteres romanos rectos.

Magnitud	Unidad básica	Símbolo
Superficie	Metro cuadrado	m^2
Volumen	Metro cúbico	m^3
Amplitud	Radián	rad
Velocidad lineal	Metro por segundo	m/s
Aceleración lineal	Metro por segundo cuadrado	m/s^2
Densidad	Kilogramo por metro cúbico	kg/m^3

Tabla 3.3: Algunas magnitudes derivadas en el SI

Factor	Prefijo	Símbolo	Factor	Prefijo	Símbolo
10^{24}	yotta	<i>Y</i>	10^{-1}	deci	<i>d</i>
10^{21}	zeta	<i>Z</i>	10^{-2}	centi	<i>c</i>
10^{18}	exa	<i>Z</i>	10^{-3}	mili	<i>m</i>
10^{15}	peta	<i>Z</i>	10^{-6}	micro	μ
10^{12}	tera	<i>T</i>	10^{-9}	nano	<i>n</i>
10^9	giga	<i>G</i>	10^{-12}	pico	<i>p</i>
10^6	mega	<i>M</i>	10^{-15}	femto	<i>f</i>
10^3	kilo	<i>k</i>	10^{-18}	atto	<i>a</i>
10^2	hecto	<i>h</i>	10^{-21}	zepto	<i>z</i>
10	deca	<i>da</i>	10^{-24}	yocto	<i>y</i>

Tabla 3.4: Convenios para múltiplos y submúltiplos de una unidad de medida

- * Se utiliza letra minúscula excepto para los derivados de nombres propios (N, Hz).
- * No van seguidos de punto ni toman s para el plural (17 m).
- * No se debe dejar espacio entre el prefijo y la unidad (nanómetro: nm).
- * El producto de dos símbolos se indica mediante un punto.

En referencia a las unidades:

- * Si el valor se expresa con letras, la unidad también (diecisiete metros).
- * Si el valor se expresa con números, la unidad puede expresarse con nombre o con símbolo (17 metros o 17 m).

- * Las unidades derivadas de nombres propios se escriben igual que el nombre propio pero con minúsculas (dos newtons).
- * Los nombres de las unidades toman una s en el plural, salvo si acaban en s, x, z o ç.

Actividad 3.1

Completa la siguiente tabla con los múltiplos y submúltiplos de las unidades de medida de las magnitudes que se trabajan en Educación Primaria y sus relaciones con la unidad básica en todas sus formas de representación posibles.

Magnitud	Unidades de medida
Longitud	$1\ km = 1000\ m$, $1\ hm = 100\ m$, $1\ dam = 10\ m$ $1\ dm = 0,1\ m = \frac{1}{10}\ m$ $1\ cm = 0,01\ m = \frac{1}{100}\ m$ $1\ mm = 0,001\ m = \frac{1}{1000}\ m$
Capacidad	
Masa	
Tiempo	
Amplitud angular	
Superficie	
Volumen	

Medición directa e indirecta

Una medición es *directa* cuando la medida se obtiene repitiendo sucesivamente la unidad de medida, con sus múltiplos y submúltiplos, hasta completar la cantidad de magnitud que se pretenda medir. Por ejemplo, estamos midiendo de forma directa cuando utilizamos una cinta métrica para medir una cuerda superponiéndola repetidamente hasta completar la cuerda y contando las veces que la hemos repetido; cuando contamos las baldosas utilizadas para recubrir el suelo; cuando contamos el número de pesas que hacen falta para equilibrar una balanza, etc.

Una medición es *indirecta* cuando no se obtiene la medida por comparación directa con la unidad, sino que se aplica una fórmula u operación matemática que posiblemente utiliza magnitudes distintas a la que se desea medir. Por ejemplo, estamos midiendo de forma indirecta cuando para medir la superficie de una habitación multiplicamos el ancho por el largo.

Estimación

Estimar consiste en valorar el resultado de una medición sin ayuda de instrumentos de forma directa o combinando con algún cálculo. Los requisitos previos a la elaboración de estrategias propias de estimación son los siguientes:

- * **Interiorización:** se tiene una referencia perceptiva de las unidades de medida usuales para la magnitud que se quiere medir. Por ejemplo, si queremos medir un apartamento, tenemos una percepción de lo que representa 1 m^2 y lo utilizaremos para expresar la superficie en m^2 .
- * **Conocimiento de referentes:** se tiene una idea de la medida de objetos parecidos al que se quiere medir. Por ejemplo, un apartamento podría medir alrededor de 80 m^2 , pero sería imposible que midiera 1000 m^2 .
- * **Conocimiento de estrategias para calcular la medida de ciertos trozos:** por ejemplo, sabemos que al multiplicar el largo por el ancho de una habitación obtenemos su área y podemos calcular la longitud de la diagonal utilizando el Teorema de Pitágoras, etc.

Las dos grandes estrategias de estimación son aquellas en las que la comparación es el único proceso y aquellas en las que, además, se realizan procesos de descomposición o recomposición. Por ejemplo, para estimar la altura de la puerta del aula podemos colocarnos al lado y comparar con nuestra estatura. En este caso la estimación únicamente se hace por comparación. Si queremos saber la superficie del patio escolar necesitaremos descomponer la superficie en trozos más pequeños, realizar estimaciones y volver a componer.

3.2. Fundamentos didácticos

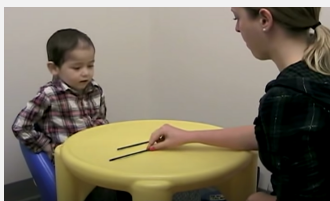
3.2.1. La teoría de Piaget sobre los estadios de comprensión del proceso de medida.

Mucha la investigación sobre el desarrollo de las nociones de medidas espaciales como la longitud se debe a Piaget y cols. (1960). Los estadios que describen la evolución de este desarrollo son los siguientes:

- * **Estadios iniciales:** el niño carece de conservación de la cantidad. Cuando los extremos de dos líneas iguales no están alineados, cree que las líneas tienen diferentes longitudes. Hace razonamientos lineales para comparar áreas o volúmenes. Por ejemplo, «es más grande porque es más largo». El niño se apoya en estimaciones visuales. Por ejemplo, en el caso de que se le pida que construya una torre de cubos multilink de la misma altura que otra dada, solo se fija en las cimas de las torres ignorando el hecho de que las bases se encuentran a distinto nivel. Además, no utiliza correctamente o con significado los instrumentos de medida, pues superpone unidades, deja huecos o solo cubre una parte de la cantidad de magnitud a medir. No comprende las propiedades de iteración, equipartición o transitividad de la medida.
- * **Estadio en el que emerge la conservación y la transitividad:** El niño comienza a entender la idea de utilizar objetos intermediarios para hacer comparaciones entre las magnitudes de diferentes objetos. Todavía no comprende que las unidades de medida tienen que ser todas del mismo tamaño y tiene dificultades para coordinar medidas en todas las direcciones.
- * **Estadio de inicio de la conservación operacional y la transitividad:** El niño es capaz de medir la altura de una torre de cubos multilink con una vara sobre la que hace una marca y la utiliza para construir una segunda torre de la misma altura. Sin embargo, el niño tiene dificultad para utilizar un instrumento intermedio más corto que la torre. Mejora la conservación de la superficie y de la capacidad.
- * **Estadio en que se capta la idea de unidad de medida de cantidad de magnitud más pequeña que el objeto que hay que medir:** El niño es ahora capaz de proceder de modo más calculado utilizando unidades de medida de menos cantidad de magnitud que la que se quiere medir. Piaget afirma que hasta el momento se han podido desarrollar los conceptos de medida de longitud, superficie y capacidad. Sin embargo, la medida del volumen, entendida como cantidad de espacio ocupado por un objeto determinado, va rezagada. Así sucede porque no es posible cubrir o llenar con unidades de medida dicho espacio ocupado, pues el objeto, por ejemplo una patata, es un sólido impenetrable; tan sólo la superficie es visible.

Actividad 3.2

El enlace <https://www.youtube.com/watch?v=gnArvcWaH6I> se corresponde con un vídeo replicando experimentos de Piaget. ¿De qué propiedades de la medida de magnitudes carece?



3.2.2. Las propiedades de la medida

En el desarrollo del aprendizaje de las magnitudes y su medida en Educación Primaria aparecen estructuras complejas que requieren comprender y aprender un conjunto de propiedades de las magnitudes. Stephan y Clements (2003) recogen las siguientes propiedades entre las que se incluyen algunas de las que ya definió Piaget.

- * La **equipartición** es un proceso mental que consiste en dividir un objeto en partes que tengan la misma cantidad de magnitud. Para ello, hay que aceptar que un objeto se puede descomponer, lo cual no es trivial para el alumnado de Educación Primaria. El objetivo es llegar a comprender que al resultado de una partición se le puede volver a aplicar equipartición de forma sucesiva. Esto induce a la idea de continuidad de la medida. Por ejemplo, el metro se puede subdividir en diez partes iguales cada una de las cuales tiene una cantidad de magnitud de 10 decímetros. A su vez, el decímetro se puede subdividir en diez partes iguales cada una de las cuales tiene una cantidad de magnitud de 10 centímetros, etc.
- * La **iteración de la unidad** es la habilidad de repetir la unidad de medida sucesivamente para recubrir la cantidad de magnitud que se quiera medir. Este recubrimiento no puede dejar huecos y se debe realizar con una unidad de medida fijada y única. Por ejemplo, para medir la anchura de una mesa utilizando la palma de la mano, siempre será la misma persona la que coloque la mano sin dejar espacio entre una posición y la siguiente hasta recubrir toda la longitud.

- * La **transitividad** de la medida significa que si un objeto A tiene la misma cantidad de magnitud que un objeto B y este a su vez tiene la misma cantidad de magnitud que un objeto C , entonces A y C tienen la misma cantidad de magnitud. Por ejemplo, si mis pies son igual de largos que los tuyos, que son igual de largos que los de tu hermana, me podrás dejar los zapatos de tu hermana.
- * La **conservación** afirma que la medida de una cantidad de magnitud no cambia aunque el objeto sufra determinadas transformaciones o se realicen cambios en el proceso de medición. La cantidad de magnitud no variará mientras no se añada o se quite. Por ejemplo, una cuerda tendrá la misma longitud estirada que enrollada. Únicamente habrá menos longitud si cortamos un trozo.
- * La **acumulación de distancia y aditividad** consiste en que según se va iterando la unidad de medida, se va realizando un conteo de dicha iteración. El resultado del conteo indicará la medida de la cantidad de magnitud. En el ejemplo anterior de medir la anchura de una mesa utilizando la palma de la mano, cuando decimos que mide 5 palmos significa que hemos contado 5 iteraciones.
- * La **relación entre el número y la medida** implica entender que si medimos una cantidad de magnitud con dos unidades distintas, obtenemos números diferentes (la medida de la cantidad de magnitud asociada a cada unidad) aunque dicha cantidad de magnitud no varía. Por ejemplo, la medida de la anchura de una mesa utilizando la palma de la mano del docente será diferente a la realizada con la palma de la mano de un alumno.

Actividad 3.3

El enlace  <https://www.youtube.com/watch?v=0Xh6mBnT5Vk> se corresponde con un vídeo del episodio «El problema del tesoro enterrado» de la serie «Pet+Gato». Anota en qué momento del vídeo y de qué forma aparece cada una de las propiedades de la medida.



Actividad 3.4

Diseña una actividad para segundo ciclo de Educación Primaria en la que el alumnado tenga que medir objetos de la clase con unidades que también sean objetos de la clase o partes de su cuerpo. Explica las propiedades de la medida que se trabajan en la actividad.

3.2.3. La enseñanza de las magnitudes y su medida

Carrillo y cols. (2016) proponen una secuencia de enseñanza en la cual se pretende que el alumnado de Educación Primaria adquiera los conceptos de magnitud, medida, unidad de medida de una cantidad de magnitud y estimación y los aplique en diferentes situaciones cotidianas. Además, otro objetivo es que conozca las relaciones entre las diferentes magnitudes y sus elementos. Se sintetiza la secuencia de enseñanza en las siguientes fases:

Fase 1 de percepción de la magnitud a medir: Inicialmente se puede pedir al alumnado que identifique qué propiedades de los objetos del aula pueden ser medidos. Hay que observar que no todos los objetos tienen las mismas magnitudes. La *percepción de la magnitud* que se pretende medir es una fase fundamental para la comprensión de la medida. Por ejemplo, hay que saber identificar que para saber si hay suficiente zumo para una merienda, lo que hay que medir es la capacidad.

Fase 2 de identificación de objetos con la misma cantidad de magnitud: Una vez se percibe la magnitud, hay que crear situaciones en las que se comparen objetos para introducir la idea de cantidad de magnitud. Se compararán objetos que compartan una misma propiedad, se ordenarán según la magnitud y se agruparán aquellos que tengan la misma cantidad de magnitud. Por ejemplo, en una balanza de platillos podemos ver cuándo el peso de los objetos se equilibra. En el caso de la capacidad de recipientes, se pueden hacer trasvases para identificar los que tienen la misma. En el caso del tiempo, dos situaciones duran lo mismo si giramos el reloj de arena de inicio y fin a la vez.

Fase 3 de comprensión de la necesidad de medir: El proceso de comparación de cantidad de magnitud (por ejemplo, es más ancho o más corto) resulta poco efectivo en situaciones en las que los objetos son difíciles de comparar por su tamaño e inaccesibilidad. Hay que crear situaciones de este tipo, en las que sea necesario medir con interacción con el entorno para introducir la idea de referente o intermediario, de manera que el alumno elija un objeto que actuará como unidad de medida. Por ejemplo, para el caso de la superficie se puede plantear al alumnado si un cartel que hay en otra aula cabrá en un mural de la recepción añadiendo la condición de que no se puede trasladar sin saber si cabe o no. Inicialmente el referente

no tiene que ser estándar. En el caso del mural, por ejemplo, se podrían utilizar folios para hacer la medición y comparar. Para la longitud, se suelen utilizar como unidades no estándar iniciales, partes o relaciones del cuerpo como por ejemplo pie, palmo o paso. La elección de una unidad de medida no estándar es arbitraria, aunque conviene que se ajuste al objeto que se quiere medir. Si la unidad elegida es muy pequeña, ha de reiterarse muchas veces sobre el objeto que hay que medir, lo que puede resultar preciso pero poco práctico. No es práctico, por ejemplo, medir el largo de una habitación usando clips. Cuando la medida de un objeto no se corresponde con un número entero, se puede recurrir a un *refinamiento* o *encuadramiento* de esa medida. Por ejemplo, si la altura de una botella es algo menos de dos bolígrafos, podemos decir que su altura está entre uno y dos bolígrafos. La altura de la botella puede medirse con un bolígrafo y tres clips.

La utilización de los referentes no estándar es fundamental para la comprensión del concepto de unidad de medida, pero no es práctica, ya que a veces no permite hacer comparaciones con precisión y dificulta la comunicación. La medida es relativa, pues el resultado de la medición cambia en función de la unidad que se utilice. Por ejemplo, si dos niños miden el largo de sus camas con las palmas de sus manos, las mediciones no serán comparables y habrá un problema de comunicación. Además, puede que no se pueda recubrir el total del largo con las manos. Por tanto, será necesario que el alumno sea consciente de la necesidad de la utilización de unidades estándar o convencionales del SI para poder hacer una comparación precisa con múltiplos y submúltiplos y que facilite la comunicación.

Existe una tendencia a proponer actividades en las que no interviene la acción física de medir y se plantean contextos puramente numéricos, por ejemplo, con un tratamiento casi exclusivo de las unidades principales de cada magnitud, sus múltiplos y submúltiplos, la conversión de medidas expresadas en distintas unidades y las operaciones con medidas. Esta *arritmetización de la medida* dificulta la comprensión de los conceptos de magnitud y unidad de medida. Por tanto, hay que intercalar actividades de conversión de unidades de medida con actividades de comparación, de estimación, de medición física y de elección de la unidad de medida. Las actividades de medición física permitirán detectar dificultades y errores en el proceso debidas al redondeo, las aproximación o la falta de precisión del instrumento, por ejemplo.

Por tanto, los diferentes aspectos sobre las magnitudes y su medida que se deben trabajar para su aprendizaje son: percepción de la magnitud, comparación, necesidad de la medición, medición y estimación.

González (2022) clasifica los procedimientos para medir que se trabajan en Educación Primaria en los siguientes tipos:

- * **Procedimientos de medición directa:** el alumnado reitera sucesivamente la unidad de medida, con sus múltiplos y submúltiplos, hasta que completa la cantidad de magnitud que se quiere medir. Por ejemplo, se superponen los centímetros de la cinta métrica sobre una cuerda que se quiere medir.
- * **Procedimientos de medición indirecta:** el alumnado mide cantidades de otra magnitud y con ellas aplica fórmulas para obtener la cantidad de magnitud que se desea medir. Por ejemplo, para medir el área de un triángulo se miden las longitudes de su base y de su altura, se multiplican y se dividen entre dos.
- * **Procedimientos de estimación:** el alumnado obtiene la medida de la cantidad de magnitud de forma aproximada a partir de juicios subjetivos sobre el tamaño de la cantidad. Los procedimientos de estimación se pueden apoyar en procedimientos de medición directa y/o indirecta. Por ejemplo, para calcular la superficie de un bosque quemado a partir de una fotografía aérea, delimitan la zona mediante una cuadrícula y cuentan los cuadrados afectados.

Lott y Harrell (2003) proponen seis principios básicos para el diseño de actividades para desarrollar las habilidades de estimación en el alumnado de Educación Primaria:

- 1 **Desarrollar la habilidad:** El alumnado tiene que enfrentarse a situaciones en las que se requiera estimar para poder desarrollar la habilidad a través de la práctica repetida.
- 2 **Uso de múltiples sentidos:** Hay que proponer actividades en las que el alumnado tenga que utilizar diferentes sentidos para realizar estimaciones. Por ejemplo, se puede estimar el volumen de un objeto utilizando el tacto o la longitud a través del tiempo que se tarda en recorrer la pista de deportes. Además, este tipo de actividades desarrollará la habilidad de generar referentes, visuales o no, con los que desarrollar la estimación.
- 3 **Uso de fuentes externas y conocimientos previos:** Hay que diseñar actividades con situaciones contextualizadas, en las que el alumnado pueda tanto realizar estimaciones en la que usen referentes con sentido en ese contexto como evaluarlas en función de las características propias de la situación. Por ejemplo, si se pide a un alumno que estime el valor de un saco de patatas de 10kg, una estimación muy por debajo del peso real del saco podrá evaluarse por comparación con un objeto de peso cercano a esa estimación. Por ejemplo, si el alumno dice que el saco pesa 500 gr, podrá evaluarse comparando con una paquete de arroz de 1 kg. Una estimación muy por encima del peso real del caso, podrá evaluarse con el peso del propio niño.
- 4 **La estimación como proceso:** Hay que proponer actividades en las que el alumnado tenga que aplicar habilidades de forma gradual, usando diferentes características del objeto cuya magnitud se estima. Por ejemplo, se plantea al alumnado que debe esti-

mar el peso de un perro; se tendría que considerar su tamaño, si está en forma o no, buscar información sobre el peso medio de la raza, etc. Si se realiza este proceso con varios perros se puede hacer una comparación entre las estimaciones para evaluar el resultado.

5 Adecuación de la estimación: Es importante hacer que el alumnado reconozca si tiene sentido estimar o no. Por ejemplo, tendrá sentido estimar la cantidad de algún ingrediente al cocinar, pero no el número de baldosas para alicatar el suelo.

6 Uso de la estimación en contextos profesionales: Hay que proponer juegos de roles en los que se simulen profesiones que requieren el uso de la estimación.

Bright (1976) presenta una clasificación de ocho tipos de actividades (Figura 3.2) para el trabajo de la estimación de la medida. Por ejemplo, para estimar la superficie de una mesa se puede tener la unidad, por ejemplo el decímetro cuadrado, presente. Otro ejemplo consistiría en dar como medida de superficie de 2 metros cuadrados y tener que buscar objetos que tengan esa medida aproximada.

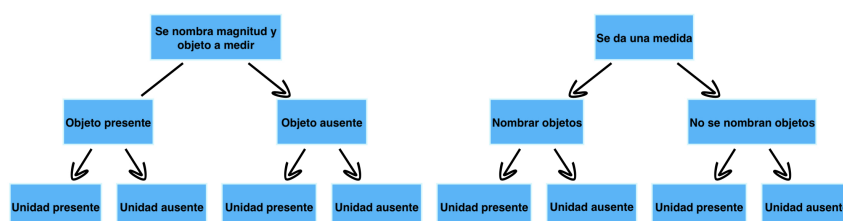


Figura 3.2: Tipos de actividades según Bright (1976) extraído de Segovia y Rico (1996).

Actividad 3.5

Por grupos, acceded al libro de texto digital del curso que se os ha asignado y analizad el tema de magnitudes y su medida. Responded a las siguientes preguntas:

- ¿Qué aspectos de la comprensión de la medida se trabajan (percepción de la magnitud, comparación, necesidad de la medición, medición, estimación)?
- ¿Hay diferencias de tratamiento entre las distintas magnitudes?
- ¿Se observa un tratamiento fundamentalmente aritmético de la medida?

Actividad 3.6

Elegid un curso del segundo ciclo de Educación Primaria y, atendiendo a las indicaciones del esquema de Bright (1976), diseñad una actividad sobre estimación para ese curso de forma justificada. Después, también de forma razonada, plantead una adaptación a un curso superior y a uno inferior.

Las magnitudes de Educación Primaria y los objetivos de enseñanza

Como se ha comentado anteriormente, las magnitudes que se trabajan en Educación Primaria son el tiempo, la longitud, la superficie, la capacidad y el peso y la masa, el valor monetario y la amplitud angular. Sin embargo, no todas ellas se abordan con la misma profundidad. González (2022) sintetiza algunas de las características de la forma de trabajar cada magnitud:

Tiempo: se trabaja al principio de la Educación Primaria con medidas inferiores al día vinculadas al reloj y la utilización del lenguaje básico de fracciones: medios, cuartos, tres cuartos, etc. Más tarde se trabaja el sistema sexagesimal y las operaciones con horas, minutos y segundos. Más adelante se estudian unidades de medida mayores que el día: semana, mes, estación y año.

Valor monetario: no tiene un valor objetivo y se aprende por asignación. Su estudio se centra en manejar monedas y sus equivalencias. El sistema monetario es un buen recurso para dar sentido al sistema de numeración decimal y a las operaciones aritméticas.

Amplitud angular: el estudio se reduce al empleo de instrumentos convencionales de medida de ángulos en grados y aparece la necesidad de establecer un convenio de orientación para asignar una medida a un ángulo.

Longitud, superficie, volumen, capacidad, masa: se trabajan en toda la etapa de Educación Primaria y se le da un tratamiento preferente debido a que sus cantidades se ejemplifican y materializan fácilmente de forma que se pueden manipular. Además, se relacionan con una variedad de propiedades geométricas y permiten hacer justificaciones típicas de razonamiento geométrico. Estas magnitudes están asociadas a otros ámbitos de las matemáticas como comprar, ordenar, clasificar, descomponer o completar.

González (2022) lista los siguientes objetivos específicos de aprendizaje para cada magnitud en Educación Primaria:

- (a) Percibir la magnitud y sus propiedades. Aprender a comparar y ordenar objetos según la magnitud.

- (b) Conocer, utilizar, transformar y hacer operaciones con unidades de medida.
- (c) Conocer y utilizar procedimientos de medida.
- (d) Resolver problemas sobre medida de cantidades en contexto.

La evolución del aprendizaje de la longitud

- * A partir de situaciones en las que se tengan que utilizar los sentidos y con atributos como la altura, la anchura o la profundidad de distintos objetos el alumnado desarrolla la idea de longitud.
- * La idea de cantidad de longitud se desarrolla comparando, clasificando y ordenando distintos objetos atendiendo a esta magnitud. Las primeras comparaciones se hacen a partir de superposición directa de objetos.
- * Se desarrolla la idea de que un objeto intermediario ayudará a hacer comparaciones en situaciones en las que no se puedan hacer directamente. El objeto intermediario puede ser más o menos largo que el objeto a medir. Se desarrolla entonces la idea de transitividad.
- * Se centran las comparaciones utilizando un objeto intermediario más pequeño que los objetos a medir y se hacen recubrimientos por reiteración. Así, se aprende la idea de unidad de medida con unidades no convencionales y se aplican estrategias de medición directa.
- * Al utilizar diferentes unidades no estándar de longitud se obtendrán distintos valores numéricos. Es así como se percibe la necesidad de que todos usemos el mismo convenio para comunicarnos con unidades estándar. El alumnado aprende las unidades estándar (el metro, sus múltiplos y submúltiplos) y establece relaciones entre las distintas unidades empleadas. Se comprende que el tamaño de la unidad elegida está en relación inversa al número de unidades necesario para expresar la medida (cuanto más grande es la unidad de medida, menos unidades se necesitan).
- * Se desarrolla la conservación de la longitud cuando se asimila, por ejemplo, que una cuerda no cambia su longitud aunque la enrollemos o la coloquemos en forma poligonal.
- * Se desarrolla la idea de composición aditiva de la longitud cuando, por ejemplo, se entiende que medirá lo mismo la suma de las longitudes de los diferentes segmentos de una poligonal abierta que la medida de los segmentos de esa poligonal alineados (Figura 3.3).

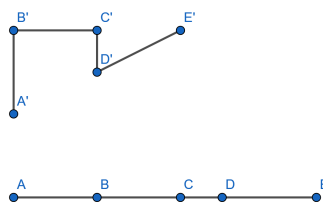


Figura 3.3: Línea poligonal y alineación de segmentos con la misma longitud total

La evolución del aprendizaje de la superficie

- * El alumnado percibe la idea de superficie manipulando objetos y comparándolos según su superficie. Primero se hacen comparaciones directas; por ejemplo, superponen dos cartulinas para determinar cuál es mayor.
- * Se desarrolla la idea de cantidad de superficie al tratar como equivalentes todos los objetos con igual superficie y al ordenarlos respecto de esta cualidad; por ejemplo, un folio es equivalente a una baldosa; ambos son más grandes que la pantalla del teléfono, etc.
- * El estudiantado tendrá desarrollada la idea de conservación de la superficie si asimila, por ejemplo, que la superficie de una mesa no cambia si contiene muchos o pocos objetos (Figura 3.4 a), o que objetos de muy distinto aspecto tienen la misma cantidad de superficie (3.4 b).

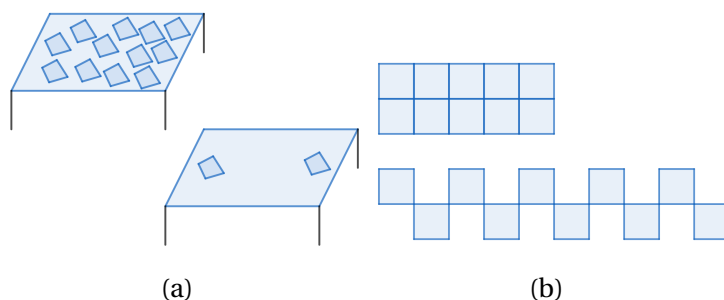


Figura 3.4: Conservación de superficie

- * Se ha desarrollado la idea de composición aditiva si se entienden las situaciones en las que al sumar las superficies de las partes en las que se ha descompuesto un objeto se obtiene la superficie total del objeto. Por ejemplo, se entiende la igualdad de las superficies de las dos imágenes de la Figura 3.4 b.
- * Trabajando con figuras cada vez más complejas, el alumnado aprende a descomponer y recomponer una figura en otra más sencilla con la misma cantidad de superficie (Figura 3.5). Estas acciones contribuyen al desarrollo de las propiedades de conservación y de composición aditiva de la superficie.

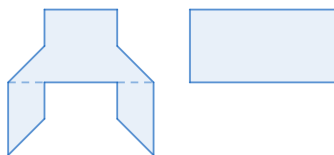


Figura 3.5: Descomposición y recomposición de una superficie

- * Habiendo comprendido y aprendido lo explicado en los dos puntos anteriores, el alumnado también comprenderá y aprenderá a emplear la unidad cuadrada, con sus múltiplos y submúltiplos, reiterándola sobre distintos objetos con recubrimientos sin dejar trozos para medir la superficie.
- * El alumnado aprende las fórmulas de cálculo del área de las figuras elementales de forma razonada, es decir, que haya memorizado una fórmula no significa que la comprenda. Además, puede argumentar la validez de dichas fórmulas en situaciones sencillas y aprende a realizar estimaciones controlando la precisión del resultado.

La evolución del aprendizaje de la capacidad y del volumen

- * El alumnado aprende la noción de volumen después de haber aprendido la de capacidad. En el primer caso los objetos que maneja son cuerpos sólidos (cajas, bloques de madera), mientras que en el segundo lo hace con recipientes (botellas, vasos).
- * Se aprende a hacer comparaciones y saber si hay más o menos líquido o si falta o sobra entre recipientes mediante el llenado y vaciado y haciendo trasvases.
- * El estudiantado aprende a usar vasos de líquido como unidad de medida para hacer mediciones directas de la capacidad por reiteración de la unidad. En el caso del cálculo del volumen de un cuerpo sólido con procedimientos de medida directa, el alumnado comienza reconociendo el cubo unidad como patrón de medida y lo reitera hasta formar el cuerpo considerado.
- * El manejo de figuras compuestas por cubos unidad como las de la Figura 3.6 permite descomponer y recomponer un espacio. Estos modelos permiten identificar las partes que componen un objeto tridimensional y ayudan a descomponerlo y recomponerlo. Es importante que el alumnado desarrolle esta habilidad para realizar un llenado adecuado del espacio ocupado por un objeto, sin dejar huecos ni repetir partes.
- * El alumnado habrá desarrollado la propiedad de conservación del volumen si, por ejemplo, entiende que si se consideran dos bloques como los de la Figura 3.6 a y b, ambos formados por 27 cubos unidad, tienen el mismo volumen. Si el alumnado no considera que ambos bloques ocupan el mismo espacio, entonces no tiene desarrollada la conservación del volumen.

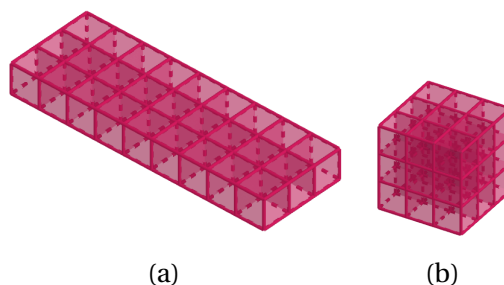


Figura 3.6: Conservación de volumen

- * Se aprende el volumen del prisma por descubrimiento y forma razonada.

Los problemas de Fermi para trabajar la estimación de la medida de magnitudes

El término problema de Fermi se debe al Premio Nobel de Física italiano de 1938 Enrico Fermi (1901-1954). Fue el creador del primer reactor nuclear de fisión y participó en el Proyecto Manhattan que desarrolló la bomba atómica para EEUU. Fermi tenía predilección por plantear, además de resolver, problemas de estimaciones de forma espontánea, aunque dispusiera de poca información. Uno de sus problemas más conocidos consistió en responder a la pregunta de ¿Cuántos afinadores de pianos hay en Chicago? que surgió en una conversación con su mujer (Efthimiou y Llewellyn, 2007). Utilizando unas pocas suposiciones y estimaciones razonables, daba respuestas muy bien aproximadas y afirmaba que cualquier persona con capacidad para pensar, podía estimar cualquier cantidad con precisión cuantitativa simplemente «usando la cabeza»; es decir, simplemente razonando, haciendo algunas estimaciones de orden de magnitud realistas e inteligentes y realizando algunos cálculos sencillos. Para responder a la pregunta de los afinadores de piano y sin más información que el número de habitantes de Chicago, hizo el siguiente razonamiento de hipótesis y estimaciones:

- * Chicago tiene 5 millones de habitantes. Si estimamos que de media hay dos personas por hogar habrá, aproximadamente, 2'5 millones de hogares.
- * Supongamos que hay un piano por cada 20 hogares. Esto nos da un total de 2 500 000 hogares entre 20 pianos, es decir 125 000 pianos.
- * Suponiendo que, de media, el piano se afina una vez al año, habrá 125 000 afinaciones por año en toda la ciudad.

- * Incluyendo el viaje entre casa y casa, afinar un piano puede requerir unas 2 horas. Con una jornada laboral de 8 horas al día cada afinador afinará 4 pianos diarios. Si trabaja 5 días en la semana y 50 semanas al año, trabajará 250 días. Se puede calcular así que afinará unos 1 000 pianos por año.

A partir del número total de afinaciones por año (unas 125000) y del número estimado de afinaciones por cada afinador y año (alrededor de 1000) se puede deducir que el número de afinadores debe ser del orden de 125. Obviamente, es poco probable que el número exacto de afinadores en Chicago en ese momento fuera exactamente de 125, pero el orden de magnitud de la estimación seguramente será acertado.

Un problema de Fermi se define como una tarea abierta y no estándar que requiere hacer suposiciones sobre la información del problema y estimar cantidades antes de abordarlo (Ärlebäck, 2009). Para resolver este tipo de problemas no hay datos para hacer un cálculo inmediato. Partiendo de hipótesis y estimaciones razonables, lo que se pretende es obtener el orden de magnitud de la solución del problema sin ser una respuesta exacta. Además, la información que aporta el problema es limitada, lo que obliga al alumnado a tener que hacer estimaciones para poder resolverlo. Por tanto, el alumnado debe plantearse preguntas durante el proceso de resolución del problema inicial. En consecuencia, este tipo de tarea ayuda a trabajar la estimación en Educación Primaria (Borromeo-Ferri, 2018).

Es conveniente la discusión y comunicación del alumnado sobre las hipótesis que se van asumiendo. Por tanto, la organización en grupos facilitará el trabajo de resolución de los problemas de Fermi. Además, hay que insistir en la importancia del proceso de resolución y no tanto en la respuesta en sí.

Actividad 3.7

Por grupos, pensad cómo se podría resolver el siguiente problema de Fermi. ¿Qué conceptos, procedimientos y estrategias crees que pueden aparecer en la resolución?

Si le pedimos a todos los habitantes de Sueca que rodeen el pueblo poniéndose unos junto a otros, ¿podrían o tendrían que pedir refuerzos a la gente del pueblo de al lado?

El problema de esta actividad fue planteado a alumnado del segundo curso de Educación Primaria y se analizaron las respuestas en Pla-Castells, Ferrando, y Francisco (2019). Lee el artículo y observa las estrategias que se utilizaron.

Actividad 3.8

Por grupos, pensad cómo se podrían resolver los siguientes problemas de Fermi. ¿Qué conceptos, procedimientos y estrategias creéis que pueden aparecer en la resolución?

1. Ha habido un problema en Howarts y los mortífagos de Voldemort han decidido atacar nuestro colegio. Harry Potter ha hechizado el nuevo campo de baloncesto y nos salvaremos si nos refugiamos todos debajo del porche porque se producirá un efecto de invisibilidad. ¿Crees que cabremos toda la escuela si nos juntamos mucho?



2. Ya sabemos que durante los exámenes en la Facultat de Magisteri se gasta mucho papel. Pero ¿cuánto es mucho? Tenemos el calendario de exámenes en el cual encontramos las fechas, asignaturas y grupos. Vamos a intentar hacernos una idea de cuántos folios se usan en la Facultat durante un día de examen de enero. Y, además, vamos a calcular lo que ocuparían estos folios si los arrugamos y hacemos bolas de papel. ¿Cuántos folios gastamos durante el periodo de exámenes de la primera convocatoria? ¿Dónde guardamos todas estas bolas de papel?

3. El ayuntamiento de Consuegra ha tenido un problema con la piscina municipal y se les ha quedado vacía para la próxima competición internacional de natación. El ayuntamiento se ha quedado sin cubos, mangueras, baldes, botellas, garrafas, vasos, etc. y, por tanto, no encuentran la forma de utilizar ningún recipiente que puedan usar para llenar la piscina. El grifo más cercano está tan lejos que tampoco lo pueden usar. Carmen y Marta están discutiendo cómo podrían echar una mano al alcalde para resolver el problema y a Marta se le ha ocurrido que pueden usar un cuentagotas para hacerlo. ¿Pero tú sabes cuántas gotas hacen falta para llenar una piscina olímpica? - pregunta Carmen. ¿Podrías ayudar a Carmen a responder a esta pregunta y así convencer a Marta de que no es una solución eficiente la que ha encontrado?

3.2.4. Orientaciones por niveles

1. Medición de longitud, capacidad y masa, con unidades no estándar. Relatividad de la medida. Necesidad de unidad patrón. Introducción del metro, decímetro, centímetro, litro y kilogramo. Conservación de la cantidad de longitud, capacidad y masa.

1er ciclo de EP

- o Comparación de magnitudes, medida con unidades no estándar y hacer que surja la necesidad de utilizar la misma unidad para cada magnitud.
- o Detección de los conocimientos previos sobre el metro (litro o kilogramo). Insistir en la idea de unidad patrón. Presentar el metro (litro o kilogramo) con soportes físicamente diferentes. Luego introducir el símbolo m (l/L o kg). Hacer mediciones enteras utilizando la unidad fundamental, verbalizar y escribir en papel los resultados obtenidos con el número y la unidad correspondiente.
- o Crear la necesidad de medir longitudes de menos de un metro y mayores de un decímetro. Poner al alcance material de barras de 1 dm, por ejemplo, las barras de los bloques multibase. Poner el nombre a la nueva unidad. Con ayuda del material, descubrir la relación de que 10 decímetros equivalen a un metro e introducir el símbolo de la nueva unidad, dm .
- o Trabajo análogo al que se ha hecho con el decímetro con el objetivo de introducir el centímetro.
- o Medir objetos reales con reglas graduadas eligiendo la unidad más adecuada de las ya aprendidas. Expresar verbalmente y por escrito los resultados obtenidos.
- o Introducir el medio metro (medio litro o medio kilogramo) y el cuarto de litro (o de kilogramo). Disponer objetos, recipientes o paquetes de la vida real que midan las unidades mencionadas y comparar con unidades fundamentales para comprobar la equivalencia. Presentar material que representen estas nuevas unidades, comprobar equivalencias, introducir el nombre y el símbolo ($1/2 m$, $1/2 l$, $1/2 kg$, $1/4 l$, $1/2 kg$). Relacionar el medio metro con el decímetro y con el centímetro.
- o Trabajar conservación de las tres magnitudes trabajadas.

2. Múltiplos y submúltiplos del metro, el litro y el kilogramo. Conservación de la cantidad. Expresiones complejas e incomplejas.

2º ciclo de EP

- o Actividades análogas a las de introducción del decímetro y del centímetro con el objetivo de introducir el milímetro.

- o Cuando se conozcan las fracciones y los números decimales, relacionar el metro con sus submúltiplos utilizando fracciones y decimales. Se introducirán los múltiplos del metro siguiendo el mismo esquema que en el caso de los submúltiplos, a excepción de las mediciones reales que, como no son viables, se relacionarán las nuevas unidades con situaciones reales en las que aparezcan.
- o Trabajar los submúltiplos y los múltiplos del litro y los submúltiplos del kilogramo siguiendo exactamente la misma estructura que en los puntos anteriores.
- o Trabajar la conservación de las tres magnitudes trabajadas que involucren las nuevas unidades de medida.
- o Introducir unidades de medida autóctonas como la hanegada o la arroba y su relación con las unidades del SI.
- o Trabajar medidas expresadas de forma compleja, por ejemplo $3\ m\ 8\ dm\ 1\ cm$ y de manera incompleja, es decir, $3,81\ m = 38,1\ dm = 381\ cm = 3810\ mm = 0,381\ hm = 0,00381\ km$. Se insistirá en que todas las expresiones representan la misma cantidad.

3. Valor monetario.

1er ciclo de EP

- o Introducir progresivamente todas las monedas y billetes del sistema monetario de la eurozona. Asociar cantidades numéricas de dinero utilizando monedas y billetes con la representación del mismo.
- o Actividades de simulación de compraventa para trabajar las relaciones entre monedas y billetes y sus representaciones numéricas. Acompañar de verbalización y representación en papel de las cantidades y operaciones implicadas. Adaptar al conocimiento aritmético que tenga el alumnado en ese momento.
- o Resolver problemas de situaciones cotidianas que involucren el sistema monetario.

2º ciclo y 3er ciclo de EP

- o Resolver problemas en los que se utilice el dinero de acuerdo al avance en el aprendizaje del Sistema de Numeración Decimal. Plantear cambio a otra moneda, por ejemplo, a dólar.

4. Tiempo.

1er ciclo de EP

- o Ordenar secuencias temporales de forma oral o representadas gráficamente.

-
- o Comparar la duración del tiempo de forma objetiva con relojes de arena o de velas, por ejemplo. Insistir en la relatividad de la percepción del paso del tiempo para justificar la necesidad de introducir una unidad patrón. Esta unidad será la hora y se utilizarán relojes analógicos para explicar físicamente cómo se mueven las varillas al pasar una hora. Se introducirá el símbolo *h*.
 - o Trabajar la lectura, la representación gráfica y la escritura literal de la hora en punto con apoyo de relojes analógicos a partir de situaciones cotidianas. Diferenciar entre las 12 primeras horas del día y las 12 siguientes para entender la estructuración del día en 24 horas.
 - o Identificar el *día* con un periodo de 24 h y poner el punto de partida del nuevo día a las 0 h en colaboración con las familias. Relacionar el día con el tiempo que tarda la aguja horaria del reloj analógico en dar dos vueltas completas. Utilizar calendarios para referenciar los días.
 - o Introducir la *semana* como periodo de siete días y los nombres de los días de la semana insistiendo en los días en los que no hay escuela.
 - o Introducir el *mes* matizando la diferencia de días entre unos meses y otros. Reconocer el mes también como el periodo comprendido entre dos fechas iguales de dos meses consecutivos.
 - o Introducir el *año* como periodo de 12 meses y 365 días. Reforzar estos conceptos con rutinas del aula.
 - o Completar con la introducción de las estaciones del año indicando su duración y situación en el año.
 - o Trabajar la duración del tiempo de determinadas situaciones reales de menos de 1h para introducir la media hora y el cuarto de hora y relacionar con la hora. Trabajar la lectura, la representación y la escritura de estas dos nuevas unidades. Trabajar todo tipo de expresiones con estas unidades (falta media hora, hora y cuarto, menos cuarto, ...).
 - o Introducir el minuto a partir de situaciones del aula. Utilizar el reloj analógico para ver el movimiento de las varillas de minutos y segundos al transcurrir un minuto. Introducir el símbolo *min*. Trabajar la lectura, la representación gráfica y la escritura de minutos. Relacionar esta unidad con la hora, la media hora y el cuarto de hora.
-

2º ciclo de EP

-
- o Introducir los relojes digitales para la lectura de horas y minutos y relacionar con los analógicos.
-

—o Introducir el segundo a partir de situaciones del aula. Utilizar los relojes analógico y digital para ver el movimiento de la varilla del segundero y el cambio de dígito. Introducir el símbolo *s*. Trabajar la lectura, la representación gráfica y la escritura de segundos. Relacionar esta unidad con la hora y el minuto. Medir en minutos y segundos intervalos de tiempo y expresar los resultados de forma verbal y escrita.

3er ciclo de EP

—o Introducir la décima, la centésima y la milésima de segundo en el contexto, por ejemplo, del deporte. Seguir el mismo esquema que para la introducción de las anteriores unidades (necesidad, reloj, lectura, ...).

—o Insistir en que el cambio entre hora, minuto y segundo es en base sexagesimal y, sin embargo, en estas tres nuevas unidades lo es en decimal.

—o Actividades en las que, a partir de la medición de intervalos de tiempo y expresión de la duración total, se exprese el resultado utilizando una sola unidad ($3,5832\text{ h}$) y más de una ($3\text{ h }34\text{ min }59,52\text{ s}$).

5. Amplitud angular.

3er ciclo de EP

—o Medir ángulos con transportador de ángulos a partir de situaciones en las que sea necesario medir. Introducir el grado, el minuto y el segundo y sus símbolos.

6. Perímetro, área y volumen. Medición directa.

1er ciclo de EP

—o Plantear situaciones en las que se necesite conocer la medida de la longitud de los lados de una figura poligonal para introducir el concepto de perímetro.

2º ciclo de EP

—o Generar la necesidad de medir superficies partiendo de situaciones problemáticas que impliquen comparaciones. Habrá tres formas de solucionar estas situaciones: comparando visualmente o por superposición, por descomposición fraccionando las superficies y comparándolas o midiendo. Concluir que es necesario considerar dos dimensiones a la vez.

—o Utilizar unidades diferentes para hacer recubrimientos y concluir que el cuadrado es la unidad que mejor recubre. Comprobar que si cambiamos el tamaño del cuadrado, entonces cambia el resultado y remarcamos que se necesita una unidad patrón.

—o Trabajar análogamente al punto anterior para comparar el volumen de dos objetos. Llegar a las unidades de forma cúbica como las adecuadas para medir volúmenes y generar la necesidad de introducir una unidad patrón.

—o Introducir las unidades de superficie del SI como cuadrados cuyos lados tienen la misma longitud que las diferentes unidades de medida de esta longitud. Introducir el metro cuadrado, el decímetro cuadrado y el centímetro cuadrado a partir de las situaciones reales que generen la necesidad de medir. Cuando se introduce una unidad que sea submúltiplo de otra hay que intentar crear la necesidad de medir una superficie mayor al submúltiplo y menor que la unidad siguiente (análogamente con los múltiplos). Se construirán las unidades en papel o cartulina o se utilizará material específico para hacer recubrimientos y medir. Se introducirá la unidad, nombre, y símbolo. Comparar las unidades entre sí para comprobar relaciones y equivalencias. Se utilizarán fracciones y números decimales.

—o Seguir el mismo patrón de trabajo para introducir las unidades múltiplo del metro cuadrado a diferencia de que no será posible hacer mediciones reales, pero se verbalizarán situaciones reales.

3er ciclo de EP

—o Medir la longitud del contorno de una figura circular, por ejemplo de un bidón que se pretende rodear con una cinta. Usar cuerda o cinta métrica para encontrar la medida. Buscar información, por ejemplo de internet, sobre la forma de obtener la medición cuando la figura circular está representada en papel para introducir la fórmula $2 \cdot \pi \cdot r$. Comprobar que la fórmula funciona comparando el resultado de la medición de la situación anterior con el resultado obtenido al aplicarla.

—o Comprobar que π es una constante aplicando la fórmula del perímetro de la circunferencia a varias situaciones con objetos reales.

—o Introducir las unidades de medida de volumen del SI de forma análoga al caso de las unidades de superficie. —o Obtener por descubrimiento mediante material las relaciones entre las unidades de capacidad y volumen.

7.Fórmulas de áreas.

3er ciclo de EP

—o Plantear el descubrimiento de fórmulas que permitan calcular el área de un cuadrado, de un rectángulo, de un triángulo o de un paralelogramo. Hacer tablas para anotar dimensiones y áreas totales de diferentes ejemplos que permitan obtener la relación.

—o Medir la superficie de una figura poligonal irregular a partir de situaciones reales (inicialmente, que se pueda descomponer en triángulos rectángulos, cuadrados y/o rectángulos). Se tienen que ir encontrando descomposiciones en figuras de áreas conocidas. Reflexionar sobre las diferentes descomposiciones que aparecen y que conducen al mismo resultado. Incrementar el nivel de dificultad con figuras que no se descompongan directamente en triángulos rectángulos y que se tengan que utilizar otras estrategias de composición y descomposición o de encontrar la altura.

—o Plantear el descubrimiento de una fórmula para calcular el área de los polígonos regulares.

8. Resolución de problemas. Estimación. Problemas de Fermi. Planteamiento de problemas.

Todos los ciclos de EP

—o Resolver problemas que se irán introduciendo a medida que se trabajen todas las magnitudes. Todos los problemas, incluyendo las situaciones iniciales para introducir nuevos contenidos, partirán de una situación cotidiana. La resolución de problemas también será un complemento de las actividades experimentales de introducción de contenidos.

—o Plantear problemas que requieran hacer estimaciones.

—o Plantear actividades de invención de problemas con y sin ayudas.

3.2.5. Resolución y planteamiento de problemas matemáticos

Actividad 3.9

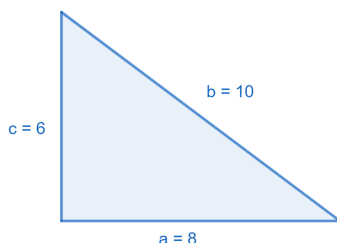
Por parejas deberéis plantear y resolver (en dos hojas diferentes) un problema matemático para alumnado de sexto curso de Educación Primaria y que incluya contenidos de geometría, medida y/o probabilidad y estadística.

Las *tareas* son todas aquellas propuestas de acción que un docente formula a sus estudiantes, con una determinada intencionalidad, en su proceso de aprendizaje de las matemáticas. Las tareas son un componente clave en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, al determinar el tipo de actividad matemática (contenidos, proceso, etc.) que invita al estudiante, a priori, a poner en juego en su resolución.

Demanda cognitiva de las tareas matemáticas

Se presentan a continuación una serie de tareas matemáticas:

- * Tarea 1: Genera un conjunto de tres datos numéricos, tal que su media sea 0 y su varianza sea 2.
- * Tarea 2: ¿Cuál es la fórmula del Teorema de Pitágoras?
- * Tarea 3: Diseña un método para calcular la altura de un árbol alto (que no pueda medirse directamente). Acude a un parque cercano y lleva a cabo el método con un árbol que escojas para ello.
- * Tarea 4: Juan se compró una finca en el año 2022, que tiene un jardín con forma de triángulo rectángulo, con las medidas en metros que se muestran en la siguiente figura ¿Cuál es el área del jardín?



- * Tarea 5: Calcula: $\frac{3}{4} + \frac{2(1+7)}{2} + \frac{1}{3}$
- * Tarea 6: ¿Cuántas diagonales tiene un polígono convexo de n lados? Demuestra tu respuesta.
- * Tarea 7: La siguiente tabla recoge datos sobre la población de una ciudad española en 2020, 2021 y 2022. Realiza una estimación de la población que podría tener esta ciudad en 2023, basándote en los datos de la tabla, y explica esta.

Año	2020	2021	2022
Número de habitantes	55.700	54.300	52.200

Actividad 3.10

- (a) Trata de resolver cada una de las tareas.
- (b) ¿Qué tareas catalogarías como fáciles? ¿Cuáles como difíciles? ¿Cuáles consideras que tienen una dificultad intermedia? Justifica tus respuestas.
- (c) Analiza de nuevo las tareas propuestas. ¿Qué aspectos consideras que diferencian unas tareas de otras?

Las tareas propuestas por un docente se convierten en generadores de oportunidades de aprendizaje en el alumnado. Un aspecto principal que considerar según el aprendizaje que se pretenda conseguir es el nivel y el tipo de pensamiento que la tarea tiene el potencial de provocar en el estudiantado, lo que (Smith y Stein, 1998) denominan la demanda cognitiva de la tarea. Estos niveles tienen las siguientes características:

- * **Nivel 1: tareas de memorización:** Reproducción de definiciones, hechos, fórmulas o reglas previamente trabajadas o aprendidas. Propósito claramente establecido, sin ambigüedades, y en las que no existe conexión con los conceptos o con el significado subyacente a los hechos, fórmulas o reglas reproducidas.
- * **Nivel 2: tareas de procedimientos sin conexiones:** Algorítmicas, donde se reclama la utilización de un procedimiento de forma muy evidente (por la instrucción o por las actividades previas). El propósito principal es la producción de respuestas correctas más que el desarrollo de comprensión matemática (sin conexiones con los conceptos o significados subyacentes a los procedimientos). No solicitan explicaciones, como mucho la descripción del procedimiento usado.
- * **Nivel 3: tareas de procedimientos con conexiones:** Centradas en el significado de un concepto o procedimiento, buscando desarrollar la comprensión de conceptos e ideas matemáticas. Sugieren pautas que seguir explícita o implícitamente, aunque son procedimientos más generales que tienen conexión con el significado o con diferentes representaciones de un concepto. Se necesita establecer una relación con las ideas conceptuales subyacentes para poder completar la tarea con éxito.
- * **Nivel 4: tareas que requieren «hacer matemáticas»:** Requieren de un pensamiento complejo y no algorítmico, sin sugerir un camino para seguir o responder a un camino anteriormente definido o ensayado. Demandan la comprensión y exploración de la naturaleza de conceptos, procesos y relaciones matemáticas; y la autorregulación del propio proceso cognitivo: acceso y selección de conocimientos y experiencias relevantes, aná-

lisis de las posibles estrategias de resolución diseñadas para la tarea y sus condiciones. Pueden provocar una ansiedad inicial dada la naturaleza impredecible del proceso de resolución requerido.

La demanda cognitiva no es algo inherente únicamente a la tarea. Por una parte, al hacer referencia al nivel y al tipo de pensamiento necesario para resolverla, estos dependen también de la estrategia de resolución elegida. Por ejemplo, ante la pregunta: ¿cuánto vale la suma de los ángulos interiores de un pentágono convexo? un estudiante podría decir que aplica la fórmula general de la suma de los ángulos interiores de un polígono de N lados, $Suma = 180^\circ \cdot (N - 2)$, con $N = 5$ y, por tanto, la suma es $180^\circ \cdot (5 - 2) = 180^\circ \cdot 3 = 540^\circ$. Otro estudiante podría argumentar que, dibujando un pentágono convexo y trazando las dos diagonales desde un mismo vértice, el pentágono queda dividido en tres triángulos. La suma de los ángulos interiores de estos tres triángulos coincide con la del pentágono. Como los ángulos interiores de un triángulo siempre suman 180° , la suma de los ángulos interiores del pentágono convexo es $180^\circ \cdot 3 = 540^\circ$. Hay diversos factores que pueden influir en la demanda cognitiva de la resolución dada por un alumno.

Tipos de tareas matemáticas

Las tareas matemáticas se pueden clasificar según los siguientes criterios:

Según el *contexto* en el que se ubican existen cuatro grandes tipos de tareas:

- * Real: la tarea hace referencia a la realidad en la que se sitúa la persona que la resuelve, y que puede exigir la búsqueda de información o la toma de decisiones.
- * Realista: la tarea está ubicada en una situación simulada o susceptible de ser real, pero que no se corresponde con el espacio en el que se sitúa la persona que la resuelve en ese momento.
- * Fantasista: En el caso de que exista una situación simulada pero que esta situación sea inverosímil.
- * Matemático: únicamente contiene referencias a objetos y conceptos matemáticos.

El *formato* en que se presentan las tareas puede ser del tipo *verbal o textual* (utilizando palabras), *simbólico* (utilizando símbolos matemáticos), *tabular* (a través de una tabla) o *visual* (utilizando gráficos o imágenes). Pueden combinarse varios modos de presentación en una tarea.

Según los *datos contenidos en el enunciado* (en tareas en un contexto realista, fantasista o matemático) las tareas se caracterizan por alguno de los siguientes puntos:

- * presentar los datos estrictamente necesarios si contienen la información precisa y suficiente para ser resuelta;
- * contener datos superfluos si tiene más información de la necesaria;
- * tener datos insuficientes si falta algún dato o información necesaria para resolver la tarea

Según el *número de soluciones* las tareas pueden ser de final cerrado si existe una única solución final, aunque puedan existir diferentes maneras de alcanzarla o diferentes resoluciones posibles o de *final abierto* si admite más de una solución válida.

¿Qué es un problema de matemáticas?

Actividad 3.11

De las ocho tareas anteriores ¿cuáles consideras que son un problema de matemáticas y cuáles no? Explica las razones que sustentan tu respuesta.

Un *problema de matemáticas* es una tarea en la que se desconoce o no se vislumbra un procedimiento inmediato de resolución. Si un estudiante, tras leer la tarea, vislumbra o conoce directamente un modo exitoso de resolverla, la tarea no puede considerarse como un problema para él. La experiencia y el bagaje del estudiante resolviendo problemas y los conocimientos previos que tenga sobre los contenidos involucrados pueden hacer variar la condición de la tarea como problema.

Los dos primeros niveles de demanda cognitiva (memorización y procedimientos sin conexiones) llevan aparejada la reproducción de un contenido o la utilización de un procedimiento conocido, por lo que nunca pueden considerarse como un problema. Este tipo de tareas encajarían en lo que se denomina ejercicios, dado que su función principal es ejercitar o aplicar directamente un determinado hecho, fórmula o procedimiento.

En los libros de texto se suele hacer una distinción entre las tareas que se pueden considerar o no problemas. Es más, al final de cada sección de la unidad didáctica, o únicamente al final de la unidad, se presenta habitualmente una selección de lo que se consideran problemas matemáticos.

Actividad 3.12

A cada grupo se os asignará un apartado de las unidades *Sistema Métrico Decimal* y *Perímetro y área de figuras planas* del sexto curso del libro *Matemáticas 6: Primaria. Pieza a pieza* (2022). ¿Qué criterios creéis que se han seguido para determinar que un enunciado sea o no sea problema?

Las fases de Polya de resolución de problemas

No existen algoritmos o recetas cerradas que nos permitan resolver todos los problemas del mundo, sino que cada problema tiene unas características que hacen de ellos una actividad particular de pensamiento. Podemos pensar que la resolución de problemas es una destreza restringida a ciertos individuos privilegiados. Sin embargo, la realidad es que a resolver problemas puede aprenderse. Polya (1945) en su obra *How to solve it* describe las fases del proceso de resolución de un problema de matemáticas y son las siguientes:

- * **Primera fase (comprender el problema):** comienza con la primera lectura del enunciado y finaliza cuando estamos en disposición de intentar resolverlo. El aprendiz tiene que asegurarse de lograr una buena comprensión del problema e identificar los elementos claves de este. Se plantean una serie de preguntas que el alumno debería responder si quiere llegar a tal comprensión, como cuál es la incógnita, cuáles son los datos, cuál es la condición, o cuáles son las hipótesis y la tesis.
- * **Segunda fase (trazar un plan):** hace referencia a la búsqueda de una estrategia para resolver el problema, es decir, a trazar el plan que vamos a seguir para llegar a una solución. El alumno debe explorar diferentes estrategias para abordar el problema, aunque no las llegue a realizar todavía. En la búsqueda de estas estrategias es útil el conocimiento de diferentes heurísticas. Existen preguntas que facilitan el proceso de trazar un plan, como si es posible buscar un problema relacionado con el mío ya resuelto, si se puede enunciar el problema de forma diferente, si se han empleado todos los datos o si ha hecho uso de todas las condiciones.
- * **Tercera fase (ejecutar un plan):** consiste en llevar a cabo la estrategia planteada anteriormente. No siempre podemos estar seguros de que la primera estrategia que intentemos nos lleve a la solución del problema, pero es necesario ser paciente y tenaz, y no desistir al primer intento. Si una estrategia nos lleva hacia una situación cada vez más complicada y que parece conducir a un callejón sin salida, conviene replantearse la estrategia elegida y empezar con otra.

- * **Cuarta fase (volver atrás):** se denomina como vuelta atrás, visión retrospectiva o revisión del proceso. Consiste en revisar los pasos que se han seguido para resolver el problema, revisar que no se han cometido errores, e incluso plantearse si lo obtenido en el problema puede usarse en otras situaciones y establecer relaciones con otros problemas, así como entre los elementos de aquel.

Las heurísticas para la resolución de problemas

Las *heurísticas* son diferentes técnicas cuyas pautas nos pueden ayudar a trazar un plan para resolver un problema matemático. Si bien no es posible saber de antemano cuál es la estrategia heurística que resulta adecuada para cada problema, conocer cómo funcionan estas estrategias heurísticas nos provee de herramientas útiles para trazar un plan inicial que ayude a abordar el problema. Las heurísticas que se utilizan en Educación Primaria son:

- * **Ensayo y error:** consiste en probar posibles soluciones, y del posible fracaso de dicha solución obtener información para realizar el siguiente ensayo. Los ensayos pueden ser fortuitos, sistemáticos o dirigidos.
- * **Dibuja un esquema, haz un dibujo:** en muchos problemas, el enunciado por sí mismo no nos permite visualizar la situación planteada de forma completa, y para ello se recomienda realizar un dibujo o un esquema que represente las condiciones y datos del problema.
- * **Organización y codificación:** esta estrategia consiste en adoptar un enfoque sistemático del problema y elegir una notación adecuada, que dependerá del problema concreto: en algunos es más adecuado utilizar el lenguaje geométrico, en otros, el lenguaje algebraico o el analítico, etc., o bien elegir unos símbolos que representen los datos y condiciones del enunciado.
- * **Semejanza, analogía:** a medida que uno va resolviendo problemas, se va familiarizando con diferentes situaciones y estrategias, que, en ocasiones, pueden parecerse a un nuevo problema que resolver y, por tanto, podemos utilizar para ello.
- * **Suponer el problema resuelto:** consiste en visualizar el problema resuelto junto con las condiciones dadas en el problema. De esta forma se simplifica el buscar un camino para resolver el problema y se identifican los datos que relacionan la situación inicial con la final.
- * **Razonar desde atrás hacia delante:** ligada a la estrategia anterior, podemos considerar la marcha atrás, que consiste en empezar desde el final y hacer un razonamiento regresivo hasta llegar a la solución ideal.

- * **Resolver un problema más sencillo:** consiste en plantear un problema similar al propuesto pero más sencillo: con menos condiciones, con un caso particular en lugar de uno general, con números más sencillos, etc. Además, si se consigue resolver un problema más sencillo, esto nos motiva para resolver el problema más complejo, y, además, puede permitirnos visualizar posibles formas de abordar el problema original.
- * **Descomponer el problema en partes:** consiste en descomponer el problema en subproblemas cuyas resoluciones permiten obtener la solución del problema original.

Actividad 3.13

Por parejas, resolved los problemas que se os han asignado de la unidad *Sistema Métrico Decimal* del sexto curso de Educación Primaria del libro *Matemáticas 6: Primaria. Pieza a pieza* (2022). ¿Qué heurísticas habéis utilizado en cada problema?

El planteamiento de problemas

El planteamiento de problemas en el aula de Educación Primaria se puede realizar desde dos perspectivas diferentes:

- * Desde la perspectiva del docente, como encargado de buscar problemas que sea interesante plantear a los alumnos. Las clasificaciones anteriores de los problemas pueden ser utilizadas por el docente para enunciar o plantear nuevos problemas en el aula. Se pueden analizar problemas ya creados y el docente puede crear nuevos enunciados o reformular algunos de ellos. Esto le permitirá cubrir posibles ausencias en cuanto a la tipología de problemas. El docente debe tener en cuenta la finalidad que persigue al plantear tareas de resolución de problemas en el aula.
- * Desde la perspectiva del alumno, es importante no limitar a que conteste preguntas que otros plantean, sino que hay que conseguir que sea capaz de plantearse sus propias preguntas.

Cuando se pide al alumnado que plantee enunciados de problemas es conveniente ir aumentando la dificultad según el siguiente esquema:

- * Le daremos los números, las magnitudes, el contexto y/o las operaciones que intervienen en la situación.
- * Le daremos los números, las magnitudes, y/o las operaciones, pero no el contexto.

- * Le daremos solo el tipo de números, las magnitudes y/o las operaciones que han de aparecer en la situación problemática.

Instrumento para valorar un problema matemático

Un instrumento de evaluación de la calidad de problemas matemáticos puede ser el F-PosE (The Framework for Posing Elementary Mathematics Problems), diseñado por Leavy y Hourigan (2020) y partir del cual se crea una rúbrica de evaluación. Se procede a asignar valores numéricos a cada categoría de la rúbrica de la siguiente manera:

- * Ausente (0) - Débil (0,25) - Adecuado (0,5) - Bien (0,75) - Excelente (1)
- * Bajo (0) - Medio (0,5) - Alto (1)
- * No (0) - Sí (1)

La rúbrica F-Pose es la siguiente:

* **Contexto interesante y motivador**

- o **Ausente:** El problema presenta un contexto matemático, muy alejado de la realidad del alumnado, por lo tanto, no requiere aplicar conocimientos previos. El objetivo y el contexto no son significativos para el alumnado, el cual no se involucra de manera personal en la resolución.
- o **Débil:** El problema presenta un contexto fantasista alejado de la realidad del alumnado, por lo que no tiene que aplicar sus conocimientos o experiencias previas. El objetivo y el contexto no son significativos para el alumnado, el cual no se involucra de manera personal en la resolución.
- o **Adecuado:** El contexto del problema es realista, ya que es susceptible de ser real, pero el alumnado no se ubica en la situación descrita. El alumnado puede aplicar sus conocimientos previos, aunque no necesariamente, pero no se involucra en la resolución del problema.
- o **Bien:** El contexto del problema es realista o real. No requiere que el alumnado aplique sus conocimientos previos para comprenderlo, pero sí para resolverlo. El objetivo y el contexto son significativos para el alumnado, pero no es necesario que se impliquen de manera activa en su resolución.
- o **Excelente:** El problema presenta un contexto real en el que el alumnado debe aplicar sus conocimientos y experiencias previas para poder comprender e interpretar el enunciado. El objetivo y el contexto son significativos para el alumnado, que tiene que involucrarse en su resolución.

* **Claridad en el lenguaje y en el contexto cultural**

- **Ausente:** El lenguaje es demasiado complejo y técnico para ser comprensible para el alumnado, la terminología no es accesible. El contexto cultural no se corresponde con el de los estudiantes y dificulta la interpretación del problema.
- **Débil:** El lenguaje y la terminología son complejos y poco accesibles. El contexto cultural es accesible pero no es un elemento relevante para su interpretación y resolución.
- **Adecuado:** El lenguaje y la terminología es comprensible para el alumnado, pero requiere cierto esfuerzo. El contexto cultural del problema es accesible pero no es un elemento relevante para su interpretación y resolución.
- **Bien:** El lenguaje y la terminología es comprensible y accesible para el alumnado. El contexto cultural del problema es acorde a la realidad cultural de algunos estudiantes y adaptable a la del resto.
- **Excelente:** El lenguaje y la terminología del enunciado son accesibles para el nivel del alumnado. Además, presenta un contexto cultural y matemático acorde a la realidad cultural de cada estudiante.

* **Coherencia con el currículum**

- **Ausente:** Los contenidos implícitos en el problema no son apropiados al nivel educativo según el currículum estatal (R.D, 157/2022) y autonómico (DOGV, 106/2022), son demasiado complicados. El problema requiere aplicar procesos matemáticos para los que el alumnado no está preparado cognitivamente.
- **Débil:** Los contenidos implícitos en el problema no son apropiados al nivel educativo según el currículum estatal (R.D, 157/2022) y autonómico (DOGV, 106/2022), ya que son demasiado sencillos. El problema no requiere aplicar los conceptos y procedimientos propios de este nivel, sino previos, por lo que no supone el desarrollo de la competencia matemática.
- **Adecuado:** Los contenidos implícitos en el problema son apropiados al nivel educativo según el currículum estatal (R.D, 157/2022) y autonómico (DOGV, 106/2022). Pero el problema no requiere comprender los contenidos y los procesos matemáticos que son rutinarios y memorísticos por lo que no supone el desarrollo de la competencia matemática.
- **Bien:** Los contenidos implícitos en el problema son apropiados al nivel educativo según el currículum estatal (R.D, 157/2022) y autonómico (DOGV, 106/2022). El problema está relacionado con los conceptos y procedimientos matemáticos del nivel pero su comprensión no es un requisito necesario para su resolución.

- **Excelente:** Los contenidos implícitos en el problema son apropiados al nivel educativo según el currículum estatal (R.D, 157/2022) y autonómico (DOGV, 106/2022). El problema requiere la comprensión de los contenidos y la aplicación de procedimientos matemáticos para el desarrollo de la competencia matemática.

* **Oportunidad de éxito**

- **Ausente:** Los contenidos que se abordan en el problema no están al alcance del alumnado según su nivel educativo. Además, el problema no proporciona una versión más simple ni apoyos para adaptarse a las necesidades y dificultades del alumnado.
- **Débil:** Los contenidos que se abordan en el problema no están al alcance del alumnado según su nivel educativo ya que exigen un nivel superior, pero se puede resolver siguiendo las instrucciones explícitas que se aportan. El problema no proporciona una versión más simple ni apoyos para adaptarse a las necesidades y dificultades del alumnado.
- **Adecuado:** Los contenidos que se abordan en el problema no están al alcance del alumnado según su nivel educativo ya que exigen un nivel superior, pero se puede resolver siguiendo las instrucciones explícitas que se aportan. El problema no proporciona una versión más simple, pero sí incluye apoyos para adaptarse a las necesidades y dificultades del alumnado.
- **Bien:** Los contenidos que se abordan en el problema están al alcance del alumnado según su nivel educativo y ofrece instrucciones sobre el proceso de resolución. Además, proporciona apoyos en el caso de que el estudiante los solicite o muestre dificultades, por lo que se adapta a sus necesidades.
- **Excelente:** Los contenidos que se abordan en el problema están al alcance del alumnado según su nivel educativo e incluye referencias implícitas al proceso de resolución. Se trata de un problema con varios apartados que permiten escalar el proceso de resolución con una complejidad ascendente. Además, incluye una versión más simple del problema y proporciona apoyos en el caso de que el estudiante los solicite o muestre dificultades, por lo que se adapta a sus necesidades.

* **Atención a la Demanda Cognitiva**

- **Bajo:**
 - El problema presenta una situación en la que la solución y la estrategia de resolución son aparentes inmediatamente, aparecen de manera explícita en el enunciado, no es ambiguo.
 - Para alcanzar la solución, el problema solamente requiere recordar, memorizar o reproducir una definición o un procedimiento rutinario.

- El problema no requiere que el alumnado haga conexiones con conceptos subyacentes y significados matemáticos.
- El problema exige un razonamiento de bajo nivel cognitivo en el que el alumnado solo debe recordar, memorizar y reproducir lo aprendido previamente.

○ **Medio:**

- El problema presenta una situación en la que la solución y la estrategia de resolución no son aparentes inmediatamente, aunque sí aparecen de manera implícita en el enunciado y no requieren mucho esfuerzo para descubrirla.
- Para alcanzar la solución, el problema requiere aplicar procedimientos generales que conecten de manera consciente con conceptos matemáticos.
- El problema requiere que el alumnado relacione conscientemente los conceptos matemáticos con los procedimientos para poder resolverlo.
- El problema exige cierto esfuerzo cognitivo ya que exige que el alumnado razone sobre los procedimientos generales que se aplican y resuelva problemas.

○ **Alto:**

- El problema presenta una situación en la que la solución y la estrategia de resolución no son aparentes inmediatamente y requiere que el alumnado analice el enunciado para encontrar posibles estrategias de resolución.
- Para alcanzar la solución, el problema no requiere la aplicación de procedimientos algorítmicos, sino que debe explorar diferentes estrategias de resolución, y aprovechar sus experiencias previas.
- El problema requiere que el alumnado explore y entienda la naturaleza de los conceptos, procedimientos y relaciones matemáticas, así como ser capaz de regular sus propios procesos cognitivos.
- El problema involucra al alumnado en estrategias de razonamiento y pensamiento complejo como metaanálisis, justificar, hacer conjeturas, razonar y resolver problemas.

* **Número apropiado de pasos en la resolución para promover el razonamiento**

- **No:** El problema presenta una situación en la que la solución es aparente y se llega a ella en un solo paso. La solución se consigue mediante un procedimiento rutinario que no implica razonamiento matemático.
- **Sí:** El problema presenta una situación en la que la solución no es aparente y requiere de 2 pasos mínimos para alcanzarla. Además, requiere aplicar procedimientos no rutinarios que involucren al estudiante en razonar sobre matemáticas.

* **Variedad de estrategias de resolución**

- **No:** La estrategia de resolución del problema es evidente al leer el enunciado, por lo que el alumnado no tiene que descubrirla ya que aparece de forma explícita. El problema no da lugar a, ni requiere, abordarlo de diferentes maneras.
- **Sí:** El problema requiere que el alumnado descubra la estrategia de resolución ya que no resulta evidente al leer el enunciado, por lo que no aparece de manera explícita. El problema puede, o requiere, ser abordado de diferentes maneras.

*** Facilitar múltiples soluciones**

- **No:** El problema solamente tiene una solución correcta y válida. El problema no incita a buscar soluciones alternativas.
- **Sí:** El problema tiene más de una solución correcta. Además, el problema incita a buscar soluciones alternativas.

3.3. Errores y dificultades en el aprendizaje

González (2022) hace una clasificación de las dificultades y errores más habituales que presenta el alumnado de Educación Primaria y que se muestra a continuación.

Dificultades y errores asociados a la conservación de la cantidad

El estudiantado puede asociar la longitud, la superficie o el volumen de un objeto a la posición en la que está dispuesto, lo que indica que no tiene asumida la conservación de cantidad de magnitud. Por ejemplo, en el caso de la longitud, Dickson y cols. (1991) citan el trabajo de Hart (1981) en el que se muestran ejemplos (Figura 3.7) que reflejan esta falta de comprensión en el caso del alumnado que piensa que los pares de líneas de a) y de b) tienen la misma longitud porque sus extremos están situados sobre las mismas verticales.

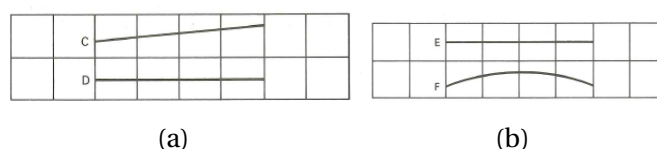


Figura 3.7: Dificultades conservación de la longitud extraídas de Dickson y cols. (1991)

Además, el experimento clásico de conservación de la longitud de Piaget manifiesta la dificultad que puede tener el alumnado para reconocer que la longitud de las líneas de la Figura 3.8 es la misma. El hecho de que un extremo está más adelantado, puede hacer pensar que una varilla es más larga que la otra.



Figura 3.8: Experimento de conservación de la longitud de Piaget

Como se ha comentado anteriormente, el alumnado también puede presentar errores de conservación de la superficie y pensar, por ejemplo, que porque un objeto ocupe más espacio debe tener más área. En la Figura 3.9 se muestra un ejemplo de figuras con la misma área que pueden generar este conflicto.



Figura 3.9: Experimento de conservación de la superficie

Además, el alumnado también puede cometer errores por falta de conservación del volumen. Por ejemplo, en la Figura 3.10 se muestra una esfera más grande y dos esferas iguales cuyo volumen de cada una es la mitad del de la grande. En este caso, el alumnado podría pensar que las dos esferas pequeñas juntas no ocupan el mismo espacio que la esfera grande.

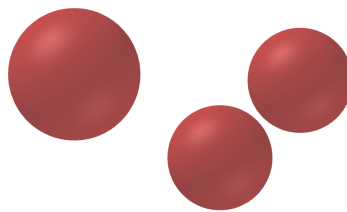


Figura 3.10: Experimento de conservación del volumen

Dificultades y errores asociadas a la percepción de la magnitud

Puede ocurrir que el alumnado establezca relaciones erróneas entre magnitudes. En particular, entre el perímetro y la superficie. Puede pensar que figuras con igual superficie tienen igual perímetro o que a mayor superficie, mayor perímetro. Por ejemplo, se puede pensar de forma errónea que los cuadriláteros de la Figura 3.11, que tienen el mismo perímetro, tienen la misma superficie. O, por ejemplo, en la Figura 3.12 el alumnado puede pensar que el triángulo con mayor perímetro tiene mayor área y, sin embargo, ambos tienen la misma superficie.



Figura 3.11: Cuadriláteros con igual perímetro y distinta superficie

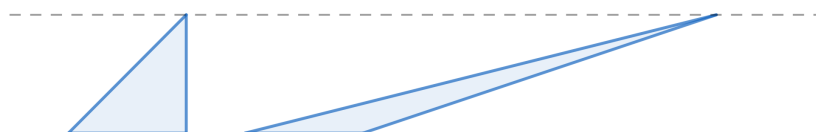


Figura 3.12: Triángulos con igual área y diferente perímetro

En el caso de la relación entre la superficie y el volumen, por ejemplo en la Figura 3.13, el alumnado puede pensar que el sólido tiene un volumen de 52 unidades, cantidad que se corresponde a la superficie. No se percibe que se están contando algunos cubos más de una vez y se ignora que hay cubos interiores, lo cual también está relacionado con las dificultades de visualización.

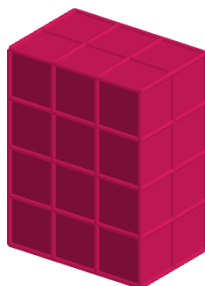


Figura 3.13: Percepción superficie-volumen

Que el alumnado pensara que un globo pesa más que una hoja de papel porque ocupa más espacio es otro ejemplo de error cometido a causa de la dificultad asociada a la percepción de la magnitud.

Dificultades y errores asociados a la unidad de medida

Hay numerosas dificultades asociadas al concepto de unidad de medida. Pueden haber dificultades a causa de la reiteración de la unidad. Por ejemplo, al medir la longitud, el alumnado no reutiliza la unidad y responde que no se puede medir un objeto que mida 4 clips

cuando únicamente dispone de 3 clips. Al recubrir un objeto para medirlo se superponen trozos de unidad o se dejan huecos. Por ejemplo, se amontonan 3 clips sobre un objeto que mide 2,5, se coloca un clip girado cuando queda un trozo pequeño por medir o se espacian 3 clips sobre un objeto que mide 3,5. Al utilizar una cinta métrica, se coloca sobre el objeto a medir, empezando en el 1 y no en el 0. No se consigue calcular la longitud si la cinta métrica está rota y empieza, por ejemplo, en 3.

También pueden ocurrir dificultades asociadas a la igualdad de tamaño en las unidades. Se pueden usar unidades de distinto tamaño para medir. Al medir la longitud, se combinan indistintamente clips y lapiceros para cubrir el objeto a medir. Al medir la superficie, se cuentan el número de trozos en que está dividida la superficie, aunque esos trozos sean desiguales.

Las dificultades asociadas a la relación inversa entre tamaño de la unidad y número de unidades se deben a que el alumnado piensa que un número más grande corresponde a una mayor longitud, ignorando el tamaño de la unidad de medida. Por ejemplo, en la Figura 3.14 el alumnado puede pensar que la longitud de arriba es mayor que la de abajo porque ha contado más unidades en un caso que en el otro. Análogamente, en el caso de la superficie, en la Figura 3.15 el alumnado puede pensar que la superficie de la derecha es mayor que la de la izquierda.

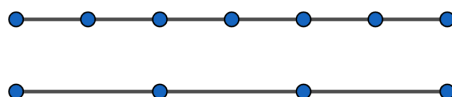


Figura 3.14: Misma longitud medida con unidades de distinto tamaño



Figura 3.15: Misma superficie medida con unidades de distinto tamaño

Dificultades y errores asociados a la introducción temprana de fórmulas

Puede ocurrir que surjan dificultades asociadas a la introducción temprana o no razonada de fórmulas para obtener el área o el volumen. Por ejemplo, se suma en vez de multiplicar para calcular la superficie del rectángulo. Además, se sustituyen erróneamente los valores de los parámetros en las fórmulas. Por ejemplo, al emplear la fórmula del área del triángulo, se sustituye el valor numérico de un lado del triángulo en lugar de la altura.

Si se introducen demasiado pronto las fórmulas, se puede anular el desarrollo de otras habilidades. Por ejemplo, el alumnado puede tener dificultad para calcular el área de la Figura 3.16 de color blanco al no disponer de una fórmula inmediata y desconocer las estrategias de descomposición y recomposición. Estas estrategias son importantes no sólo como método de cálculo de superficie, sino también para desarrollar las propiedades de conservación y composición aditiva.

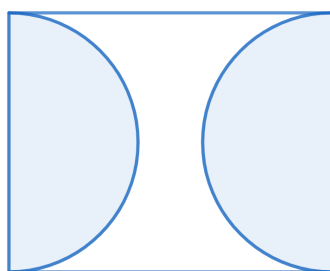


Figura 3.16: Descomposición para el cálculo del área

Dificultades y errores asociados a la visualización

Las dificultades de visualización están asociadas fundamentalmente al cálculo del volumen. Por ejemplo, si se usan sólidos compuestos por cubos unidad construidas con algún tipo de material manipulativo como el Multilink, el alumnado puede cometer el error de no considerar los cubos interiores. Si se usan dibujos de figuras tridimensionales en papel, la dificultad de visualización aumenta pues el alumnado no puede imaginar las caras que no se ven.

Dificultades y errores asociados a la linealidad

Las dificultades asociadas a la linealidad consisten en aplicarla en situaciones que no admiten el tratamiento lineal. En el caso de la superficie o el volumen, el alumnado puede olvidar que las unidades de superficie del Sistema Métrico Decimal van de 100 en 100 y las del volumen de 1.000 en 1.000. Además, el alumnado puede pensar que al duplicar la longitud de los lados de un rectángulo se duplica su área, o que al duplicar los lados de un cubo se duplica su volumen. Este es un caso, además, de error en el manejo de concepto de proporcionalidad. Además, en situaciones de utilización de escalas si, por ejemplo, la superficie que ocupa una habitación en un plano es 6 cm^2 y la escala del plano es 1 : 300, el alumnado puede pensar que la superficie de la habitación real es $1,800\text{ cm}^2$.

Actividad 3.14

Para cada uno de los tipos de dificultades que se han enumerado, inventad una situación en la el alumnado de Educación Primaria estaría cometiendo un error y explica cómo le ayudarías a corregirlo, especificando el material que utilizarías.

Actividad 3.15

Analiza las respuestas que diste en la prueba inicial. ¿Detectas errores? En caso caso afirmativo, explica por qué lo son y corrígelos.

3.4. Laboratorio de materiales y recursos

Bloques de base 10

En la Figura 3.17 se muestran los bloques multibase cuya invención se atribuye a Dienes. Son un recurso diseñado para que el alumnado pueda comprender los sistemas de numeración en base diez, a partir de unas piezas de un tamaño determinado que nos informa del valor numérico. En particular, consta de cubos de 1 cm de arista, que representan las unidades. Además, el material contiene barras de prismas cuadrangulares de 1 cm^2 de sección y 10 cm de largo. La barra representa la decena y consta de diez cubos unidos y cada unidad está señalada por una ranura. Las placas son prismas cuadrangulares de 100 cm^2 de base. Cada placa está compuesta de 10 barras unidas y representa la centena. Finalmente, los cubos de 1000 cm^3 están compuestos por 10 placas y representan las unidades de millar.

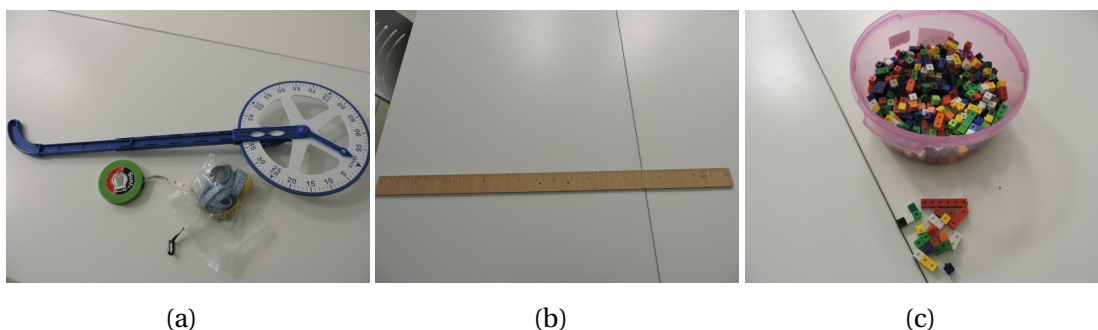
El interés didáctico de los bloques de base 10 en este tema se debe a que las dimensiones de las piezas permiten que se puedan utilizar como unidades de longitud, superficie y volumen.



Figura 3.17: Bloques de base diez

Longitud

En la Figura 3.18 se muestran diferentes materiales que sirven para medir la longitud. En la Figura 3.18 (a) se muestra una rueda metro de plástico, que tiene un metro de circunferencia, graduada en centímetros en la periferia. Tiene una señal marcando el origen y un brazo que permite andar e ir contando las vueltas dadas y el espacio recorrido. Sirve para medir recorridos en metros y centímetros (paseos, calles, fachadas, etc.) y permite medir áreas y volúmenes a partir de las medidas longitudinales. En la Figura 3.18 (b) se muestra una regla geométrica de madera de 1 *m* de longitud y en la 3.18 (c) se presentan cubos de 1 *cm* de arista cuya utilidad en este tema es la misma que la de los cubos de los bloques de base 10.



(a)

(b)

(c)

Figura 3.18: Materiales para trabajar la medida de longitud

Capacidad

En la Figura 3.19 se muestra una colección de recipientes para trabajar el volumen y la capacidad. Pueden ser recipientes de un contenido fijo (Figuras 3.19 (a) y (b)), probetas graduadas (Figura 3.19 (c)) o embudos (Figura 3.19 (d)). Estos materiales pueden usarse para hacer trasvases de líquidos o áridos y permiten hacer comparaciones, medir o trabajar la conservación de la cantidad. En la Figura 3.20 se muestra cómo se puede relacionar la equivalencia

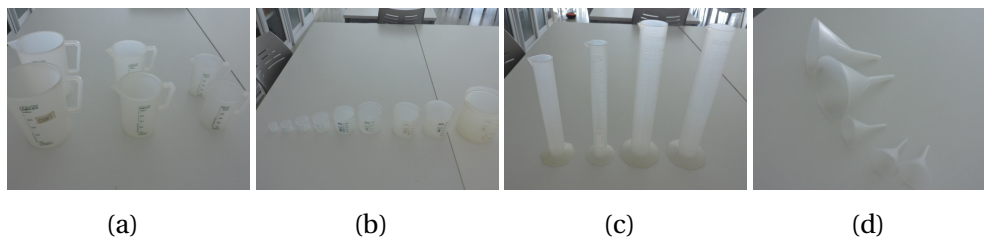


Figura 3.19: Recipientes para el trabajo de la medida de la capacidad

de 1 dm^3 , representando con el cubo de base 10, y 1 l , que es la capacidad del recipiente con forma de cubo.



Figura 3.20: Materiales para trabajar equivalencia de unidad de capacidad y de volumen

Masa

En la Figura 3.21 (a) se muestran pesas escolares que sirven para que el alumnado las pueda sostener y hacer comparaciones. También se pueden utilizar como unidad de medida para trabajar con balanzas. En las Figuras 3.21 (b) y (c) se presenta una balanza escolar y números de plástico que tienen diferentes pesos de forma creciente según su ordenación en la recta numérica. Además, en la Figura 3.22 se muestra un material que consta de una balanza y diferentes pesas numeradas con los primeros números naturales que también tienen diferentes pesos de forma creciente de acuerdo a la ordenación de los números. Se pueden hacer comparaciones de las pesas sosteniéndolas y, a continuación, se puede hacer la comprobación con la balanza. También se puede utilizar el material para hacer descomposiciones de los números naturales buscando el equilibrio de la balanza. En la Figura 3.22 (b) se muestran canicas como ejemplo de objetos cotidianos que sirven como unidad de medida no convencional para trabajar con balanzas.

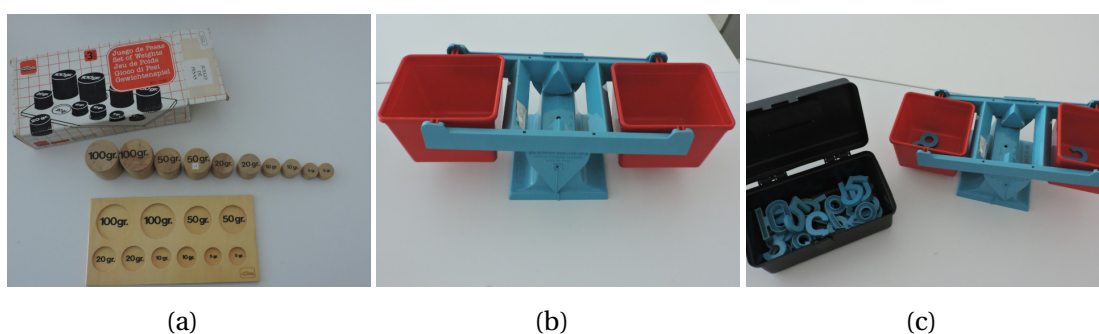


Figura 3.21: Materiales para trabajar la medida de masa

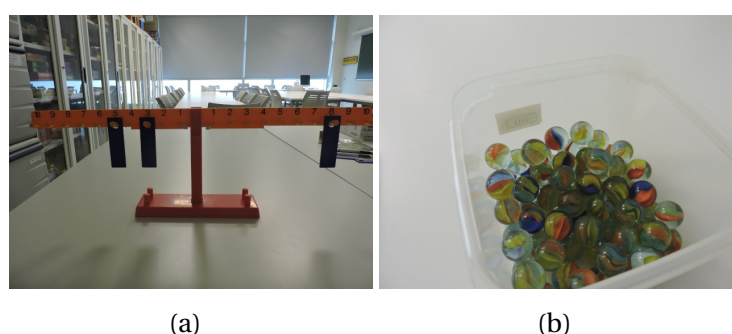
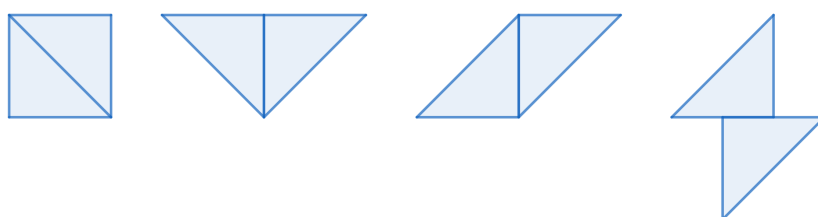


Figura 3.22: Materiales para trabajar la medida de masa

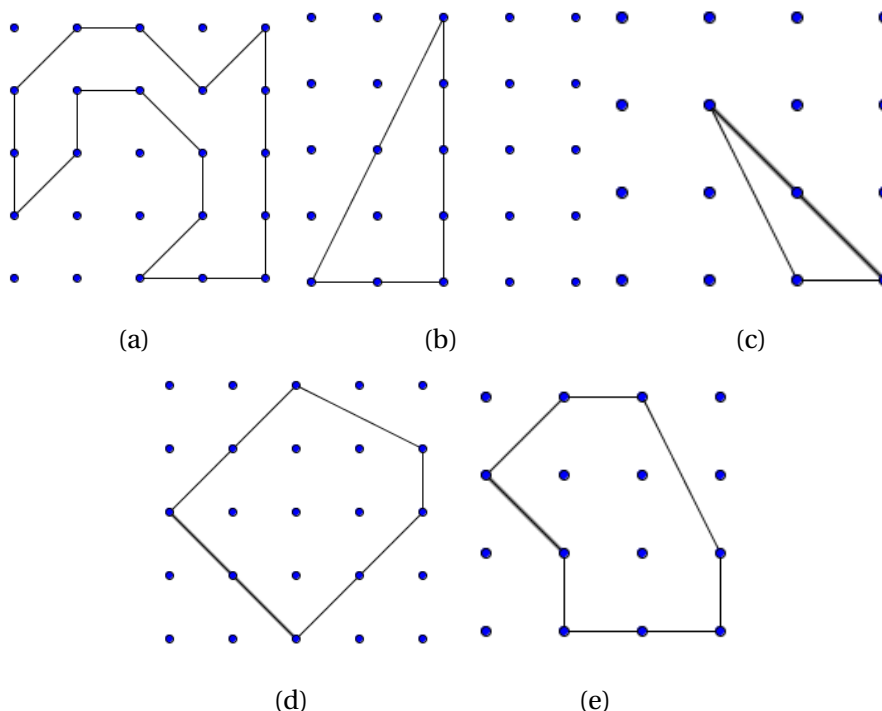
3.5. Práctica de Medida

Realizad las actividades de esta práctica por grupos.

ACTIVIDAD 1: Con las piezas de Tangram que se muestran en la siguiente figura explicad cómo plantearíais una actividad al alumnado de Educación Primaria para reflexionar sobre el perímetro que tienen figuras con la misma área. Haced varias adaptaciones de la actividad según el nivel de conocimiento sobre medida que pueda tener el alumnado. ¿Qué dificultades creéis que podría generar la actividad?



ACTIVIDAD 2: Calculad el área de las siguientes figuras representadas en geoplano:



¿Qué estrategias habéis utilizado? ¿En qué curso de Educación Primaria plantearíais esta actividad? ¿Qué dificultades podría tener el alumnado? ¿Podéis encontrar una relación entre los puntos del borde de la figura y los puntos interiores que os proporcione el valor del área?

ACTIVIDAD 3: A cada grupo se os asignará una magnitud sobre la cual deberéis responder a las siguientes preguntas:

- (a) ¿Qué objetos del aula tienen la magnitud?
- (b) ¿Qué propuestas de comparación y ordenación de objetos según esa magnitud se podrían hacer al alumnado?
- (c) ¿Cómo se generaría la necesidad de medir?
- (d) ¿Qué unidades no estándar y estándar se utilizarían para medir la magnitud? ¿Con qué materiales?
- (e) ¿Cómo se particularizan los tres procedimientos de medición de González (2022) de la magnitud?
- (f) ¿Cómo se trabajarían las propiedades de la medida de magnitud?
- (g) Plantead un problema sobre medida de esta magnitud.

TEMA 4

ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD

4.1. Aspectos curriculares y focos de contenido

En el currículo de Educación Primaria regulado por la LOMLOE (Ministerio de Educación y Formación Profesional, 2022) se contemplan los saberes básicos del Bloque 5, sobre el sentido de análisis de datos y estadística, y que se muestran en la Tabla 4.1.

Saberes básicos	1er ciclo	2º ciclo	3er ciclo
Elaboración de preguntas y encuestas sencillas para obtener datos.	x	x	x
Variables cualitativas y cuantitativas discretas: recuento de casos y construcción de tablas de frecuencia.	x	x	x
Elaboración de diagramas de barras.	x	x	
Representaciones (pictogramas, diagramas de sectores, polígonos de frecuencias...). Uso de herramientas tecnológicas para generar diferentes tipos de representaciones	x	x	x
Interpretación de datos a partir de diferentes representaciones (tablas, gráficas), y análisis en casos sencillos.	x	x	x

Saberes básicos	1er ciclo	2º ciclo	3er ciclo
Significado e interpretación de las principales medidas centrales (moda, mediana y media aritmética).		x	x
Significado e interpretación de la idea de dispersión a partir de representaciones gráficas. Rango.		x	x
Diferenciación entre población y muestra. Comparación entre muestras de la misma población.			x
Introducción a las variables cuantitativas continuas. Histogramas.			x
Contribución de la humanidad al desarrollo y evolución de la estadística y tratamiento de datos, incorporando la perspectiva de género.	x	x	x
Respeto, sensibilidad y tolerancia ante diferentes interpretaciones sobre resultados estadísticos, mostrando rechazo ante actitudes discriminatorias.	x	x	x

Tabla 4.1: Saberes básicos del sentido de análisis de datos y estadística

Además, en el Bloque 4 del currículo LOMLOE se presentan los saberes básicos del sentido de incertidumbre y probabilidad que se muestran en la Tabla 4.2.

Saberes básicos	1er ciclo	2º ciclo	3er ciclo
Concepto de situación aleatoria y situación determinista. Incertidumbre. Contribución de la humanidad al conocimiento de las leyes del azar y la incertidumbre.	x	x	x
Idea intuitiva de probabilidad: ocurre siempre, muchas veces, algunas veces, pocas veces, nunca.		x	x
Concepto de suceso y de suceso elemental.		x	x
Espacio muestral en experimentos aleatorios simples sencillos: concepto y determinación.		x	x
Uso de tablas de contingencia y diagramas de árbol para obtener el espacio muestral en experimentos compuestos sencillos.			x
Concepto de probabilidad como medida de la posibilidad de que ocurra un determinado suceso en un experimento aleatorio sencillo.			x

Saberes básicos	1er ciclo	2º ciclo	3er ciclo
Estimación de probabilidades a partir de la experimentación y simulación.		x	x
Regla de Laplace en sucesos equiprobables.			x
Introducción a las variables cuantitativas continuas. Histogramas.			x
Relación entre la Regla de Laplace y la estimación de probabilidades en experimentos sencillos.			x
Gestión de las emociones y utilización de estrategias que permiten afrontar la incertidumbre.	x	x	x

Tabla 4.2: Saberes básicos del sentido de incertidumbre y probabilidad

Estadística

La *población* es un conjunto de individuos o elementos sobre los que se considera una característica que varía de un individuo a otro. A esa característica, cuya presencia en la población tratamos de cuantificar, la llamaremos *variable estadística*, y esa cuantificación la ordenaremos en tablas expresando su *frecuencia* o veces que se produce esa variable en la población. La población generalmente es demasiado grande para poder examinar esa variable en todos sus elementos o miembros, por lo que elegimos un subconjunto de la población al que llamaremos *muestra*. Esta muestra debe ser *representativa* de la población, es decir, que cualquier elemento o individuo de la población debe tener la misma probabilidad de ser elegido para pertenecer a la muestra.

Tipos de variables y construcción de la tabla de frecuencias

Los valores de una variable estadística pueden medirse y expresarse mediante una cantidad numérica. En ese caso decimos que la variable es *cuantitativa* (peso, altura, edad o número de hermanos, por ejemplo). En caso contrario la variable es *cualitativa o categórica* (sexo o color del pelo, por ejemplo). Una variable cualitativa que se pueda ordenar se llama variable *cualitativa ordinal* (por ejemplo, los niveles de satisfacción de una encuesta). En caso contrario, la variable es *cualitativa nominal*.

Si la diferencia entre dos valores de una variable cuantitativa se puede hacer tan pequeña como queramos, se dice que esa variable es una *cuantitativa continua* (el peso, por ejemplo, pues la diferencia de peso entre dos personas puede medirse en unidades suficientemente pequeñas). En caso contrario, la variable es una *cuantitativa discreta* (por ejemplo, el número de hermanos, ya que la diferencia entre dos valores de número de hermanos no puede ser un número decimal). Las variables cuantitativas continuas se cuantifican con números decimales y las discretas con enteros y naturales.

Para analizar estadísticamente una variable cualitativa utilizamos categorías para poder realizar recuentos y representaciones. En la Tabla 4.3 se muestran datos sobre los caramelos que comercializa mensualmente una empresa de dulces. Cada columna corresponde a una variable: nombre, precio, cantidad, azúcar y código, siendo cualitativas o categóricas las variables nombre, azúcar y código y cuantitativas o numéricas precio y cantidad; de estas, la variable precio es continua, mientras que la variable cantidad es discreta. Además, las tres variables cualitativas son nominales.

Para el estudio e interpretación de los datos de una determinada variable se considera el conjunto de datos de la muestra y se utiliza el resultado de procedimientos numéricos y representaciones gráficas de forma que al visualizarlo se hace más fácil la interpretación de los datos.

Nombre	Precio	Cantidad	Azúcan	Código
Gomis	12,5	1.342	Sí	GS
Classic	22,75	1412	Sí	CLS
Choco	15,25	776	Sí	CS
Color	21,30	943	No	CN

Tabla 4.3: Tipos de caramelos de una empresa de dulces

Para analizar estadísticamente cualquiera de los dos tipos de variables, se toman los datos de la muestra, que se pueden haber obtenido, por ejemplo, en una encuesta. A partir de ello se crea una *tabla estadística de frecuencias* en la que se incluyen en columna los datos, es decir, los valores de la variable a estudiar, ordenados de forma creciente. En la columna contigua las *frecuencias absolutas* de estos valores, es decir, el número de veces que esos valores aparecen en el recuento, dejando una última celda para incluir la suma total de las frecuencias absolutas, que será el número total de observaciones de datos, es decir, el tamaño de la muestra. En la siguiente columna se representan los valores de las *frecuencias relativas* de cada uno de los datos, siendo la frecuencia relativa de cada valor de la variable el cociente entre la frecuencia absoluta y el tamaño de la muestra. En la última celda se incluirá la suma de todas las frecuencias relativas, que deberá ser uno. Con todo esto, tendremos una *distribución estadística de la variable*, representada con una tabla estadística de frecuencias.

En el caso de las variables cualitativas, deben estar categorizadas, es decir, que a cada cualidad se le asigne un número natural. También se pueden incluir las *frecuencias absolutas y relativas acumuladas*, siendo estas los valores que se obtienen al sumar a cada valor de la frecuencia todos los valores de las frecuencias anteriores. La tabla de frecuencias se puede extender añadiendo el *porcentaje* de cada uno de los valores de la variable, que es igual al producto de la frecuencia relativa por 100. Además, en la última columna se pueden incluir los porcentajes acumulados. Estas tablas de frecuencias se utilizan tanto para variables cuantitativas como cualitativas.

Supongamos que se ha preguntado a 30 estudiantes el número de libros que han leído durante el verano. Los datos obtenidos han sido: 3, 4, 5, 6, 7, 2, 1, 3, 4, 6, 8, 7, 3, 6, 9, 7, 1, 2, 1, 3, 6, 7, 3, 5, 8, 7, 1, 6, 3 y 5. En la Tabla 4.4 se muestra la tabla de frecuencias para la variable cuantitativa discreta *número de libros*.

Datos	f_a frec. absoluta	F_a frec. absoluta acumulada	f_r frec. relativa	f_r frec. relativa acumulada	Porcentaje	Porcentaje acumulado
1	4	4	$\frac{4}{30} = 0,13$	$\frac{4}{30} = 0,13$	13 %	13 %
2	2	6	$\frac{2}{30} = 0,07$	$\frac{6}{30} = 0,2$	7 %	20 %
3	6	12	$\frac{6}{30} = 0,2$	$\frac{12}{30} = 0,4$	20 %	40 %
4	2	14	$\frac{2}{30} = 0,07$	$\frac{14}{30} = 0,47$	7 %	47 %
5	3	17	$\frac{3}{30} = 0,1$	$\frac{17}{30} = 0,57$	10 %	57 %
6	5	22	$\frac{5}{30} = 0,17$	$\frac{22}{30} = 0,74$	17 %	74 %
7	5	27	$\frac{5}{30} = 0,17$	$\frac{27}{30} = 0,91$	17 %	91 %
8	2	29	$\frac{2}{30} = 0,07$	$\frac{29}{30} = 0,98$	7 %	98 %
9	1	30	$\frac{1}{30} = 0,02$	$\frac{30}{30} = 1$	2 %	100 %

Tabla 4.4: Tabla de frecuencias de una variable discreta

Si se tienen muchos datos, es conveniente agruparlos en *intervalos* para poder trabajar más fácilmente con la tabla de frecuencias. Al valor medio del intervalo lo llamaremos *marca de clase*. Para obtener la frecuencia absoluta de cada marca de clase se cuentan todos los datos incluidos en el intervalo. Una vez obtenidas estas frecuencias, se procede a la construcción de la tabla de frecuencias de forma análoga al caso de la variable discreta.

Supongamos que tenemos recogidos los valores de las alturas de 81 personas que son: 175, 175, 190, 171, 189, 158, 176, 183, 190, 174, 159, 178, 167, 191, 183, 168, 185, 178, 188, 168, 165, 165, 188, 167, 188, 188, 190, 176, 166, 167, 169, 183, 172, 179, 190, 191, 179, 190, 159, 170, 180, 179, 169, 191, 195, 190, 199, 172, 175, 178, 165, 159, 175, 179, 182, 170, 168, 180, 179, 170, 169, 169, 183, 180, 171, 169, 185, 183, 190, 179, 189, 188, 179, 167, 171, 188, 160, 195, 180, 188, 185. Para obtener intervalos que agrupen estos datos, debemos ordenarlos de forma creciente y decidir la cantidad de intervalos. Si, por ejemplo, queremos seis intervalos desde el valor mínimo $x_1 = 158$, entonces restamos el valor máximo y el mínimo del total de datos y los dividimos entre seis. Por tanto, obtenemos que la amplitud del intervalo será de un valor aproximado de 7 unidades. Las marcas de clase se obtienen sumando los extremos del intervalos correspondiente y dividiendo entre dos. En la Tabla 4.5 se muestran la organización de los datos de la variable cuantitativa continua en intervalos, sus marcas de clase y frecuencias absolutas.

Intervalos	Marca	Frecuencia absoluta f_a
[158, 165]	161,5	8
(165, 172]	168,5	21
(172, 179]	175,5	17
(179, 186]	182,5	14
(186, 193]	189,5	18
(193, 200]	196,5	3
Total		81

Tabla 4.5: Tabla de intervalos, marcas de clase y frecuencias absolutas de una variable cuantitativa continua

Medidas estadísticas

Una vez se han organizado los datos en una tabla de frecuencias, pasamos a analizarlos obteniendo tres tipos de medidas descriptivas obtenidas a través de diversos cálculos: *medidas de centralización*, *medidas de dispersión* y *medidas de posición*. En el caso de las variables cualitativas no podemos realizar operaciones aritméticas para calcular la media o la desviación típica. Podríamos calcular la mediana en el caso de una variable cualitativa ordinal.

Las medidas de centralización son *la media aritmética*, *la mediana* y *la moda* y describen la tendencia de los datos a agruparse en torno a las posiciones centrales de la distribución de la muestra. Las medidas de posición dividen la muestra en partes con igual cantidad de datos. A cada una de estas partes se le llama *percentil*, *cuartil* o *decil* en función del porcentaje de la muestra que incluye. Las medidas de dispersión describen cuánto se separan o dispersan los datos respecto a los valores centrales y se llaman *rango*, *desviación media*, *varianza* y *desviación típica*. Las medidas descriptivas que se trabajan en Educación Primaria son: media, mediana, moda y rango. Por ello, serán las únicas medidas que se describirán a continuación.

La *media aritmética* se obtiene dividiendo la suma de todos los valores de la muestra entre el número total de datos, es decir, se aplica la siguiente fórmula, donde $\bar{x}$ es la media aritmética, N es el tamaño de la muestra, x_i es el valor del dato i de la muestra y f_i su frecuencia absoluta.

$$\bar{x} = \frac{x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + \dots + x_N \cdot f_N}{N}$$

Si calculamos la media aritmética de los datos de la Tabla 4.4, obtenemos $\bar{x} = 4,6\hat{3}$. Este valor, aunque no coincide con ninguno de los valores de los libros leídos por el alumnado, informa de un valor que representa a todos. La media aritmética tiene las siguientes propiedades:

- * Es una medida única para una serie de datos, y para conocer cómo de dispersos están estos datos respecto a ella, hay que usarla acompañada de una medida de dispersión.
- * Puede estar condicionada por valores atípicos. Por ejemplo, si en una empresa el salario de 20 empleados es de 1.500 euros cada uno y el de un directivo es de 30.000 euros, éste tiene tanto peso como los veinte empleados, pero el cálculo de la media saldrá de 2.857,15 euros por persona.
- * El valor obtenido al calcularla puede no coincidir con uno de los datos. Puede ocurrir que para una variable cuantitativa discreta se obtenga una media decimal, por lo que se tiene que interpretar según el tipo de variable.
- * El valor obtenido al calcular la media de una variable cuantitativa continua con los datos agrupados puede oscilar según la cantidad y tipo de intervalos.

La *moda* es el dato de la muestra con mayor frecuencia y suele representarse como *Mo*. Las propiedades de la moda son:

- * Es la medida representativa en variables cualitativas nominales.
- * Se usa con variables cualitativas al no necesitar cálculos aritméticos.
- * Puede no tener un valor único.
- * Es un valor muy sensible a variaciones en la muestra al ser independiente de la mayor parte de los datos.
- * No siempre se sitúa en el centro de la distribución.

La *mediana* es el valor que ocupa el lugar central en la muestra ordenada y suele representarse por *Med*. Si el número de datos es impar, entonces el valor de la mediana es el central. En caso contrario, la mediana será la media aritmética de los dos valores centrales. En el caso de la variable de la Tabla 4.4, $Med = 5$. Las propiedades de la mediana son:

- * No le afecta la dispersión de la muestra.
- * Su valor varía si los datos están agrupados en intervalos según su amplitud.

Un *cuartil* es cada uno de los tres valores que dividen el conjunto ordenado de datos en cuatro partes iguales. El segundo cuartil es la mediana. Un *percentil* es cada uno de los 99 valores que dividen los datos ordenados en cien partes iguales. Un *decil* es cada uno de los 9 valores que dividen los datos ordenados en diez partes iguales. Por lo tanto el percentil 50 y el decil 5 con la mediana.

El *rango* indica la diferencia entre los valores máximo y mínimo de todos los datos. Este valor da una primera aproximación sobre la dispersión de los datos. Si el rango es grande, puede que los datos estén muy alejados unos de otros, lo que indicaría poca representatividad de los valores centrales.

Tipos de gráficos

Se presentan a continuación los diferentes gráficos que se trabajan en Educación Primaria. En primer lugar, se describen los gráficos para representar variables cualitativas.

El *diagrama de barras* se construye a partir de los ejes de coordenadas cartesianas, eligiendo en el eje de abscisas tantos lugares equidistantes como valores queremos representar de la variable, y el eje de ordenadas se divide en partes directamente proporcionales a las frecuencias relativas o absolutas de los valores de la variables. Los valores de la variable se representan en el eje de abscisas y la longitud de su barra será proporcional a su frecuencia. En la Figura 4.1 se muestra un ejemplo de este tipo de gráfico.

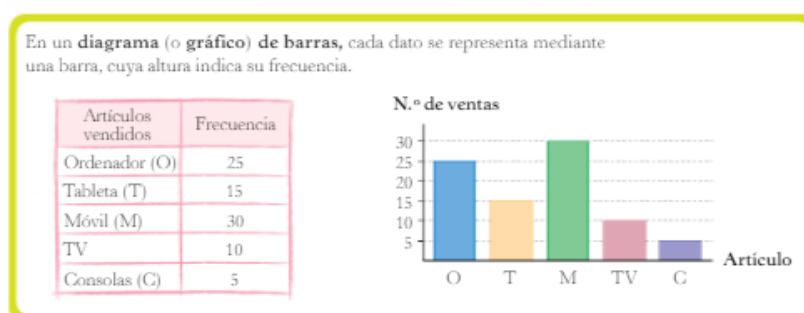


Figura 4.1: Diagrama de barras extraído del libro del quinto curso de Educación Primaria (*Matemáticas 5: Primaria. Pieza a pieza*, 2022)

El *diagrama de sectores* se obtiene al partir el círculo en tantas partes como valores tenemos de la variable, proporcionalmente a la frecuencia absoluta o relativa de cada valor. También se puede utilizar para representar variables cuantitativas. En la Figura 4.2 se muestra un procedimiento de construcción de este tipo de gráfico.

El *pictograma* consiste en representar la variable a estudiar mediante un icono que simboliza la variable en estudio y, o bien se dibuja de tamaño proporcional a la frecuencia absoluta o relativa de cada valor de la variable, o se repite el dibujo tantas veces como frecuencia absoluta tiene cada valor de la variable. En la Figura 4.3 se muestra un ejemplo de este tipo de diagrama. ¿Cuál es la variable de este ejemplo y de qué tipo es? ¿Cómo construirías la tabla de frecuencias en este caso?

Se describen ahora los gráficos utilizados en Educación Primaria para el análisis de variables cuantitativas.

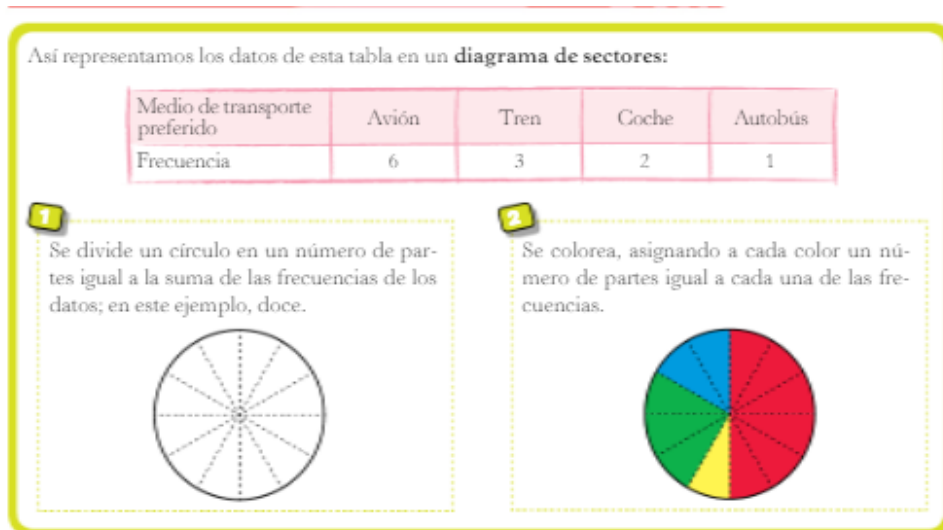


Figura 4.2: Diagrama de sectores extraído del libro del quinto curso de Educación Primaria (*Matemáticas 5: Primaria. Pieza a pieza*, 2022)

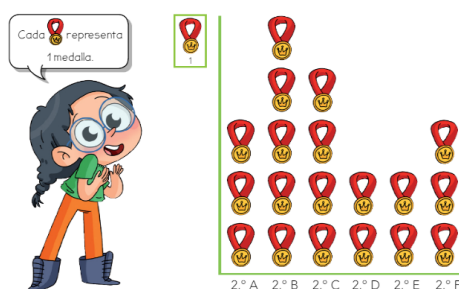


Figura 4.3: Pictograma extraído del libro del segundo curso de Educación Primaria (*Matemáticas 2: Primaria. Pieza a pieza*, 2022)

El *histograma* es un gráfico utilizado principalmente para variables continuas con gran cantidad de datos, que para su estudio se suelen agrupar en intervalos. Para ello, se debe determinar al amplitud de cada intervalo que se representará en la base de cada rectángulo del gráfico. Habrá tantos rectángulos como intervalos y su altura será proporcional a la frecuencia absoluta o relativa del intervalo al que representan. Además, si unimos los extremos de las barras de un diagrama de barras o de un histograma, obtenemos el *polígono de frecuencias* que es un línea poligonal que indica la evolución de las frecuencias en el recorrido de todos los valores de la variable. En la Figura 4.4 se ilustran estos dos conceptos.

El polígono de frecuencias también sirve para representar gráficamente la evolución de una variable temporal.

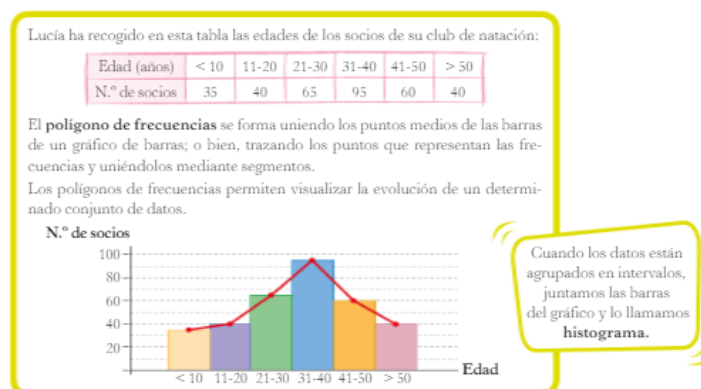


Figura 4.4: Pictograma extraído del libro del sexto curso de Educación Primaria (*Matemáticas 6: Primaria. Pieza a pieza*, 2022)

Probabilidad

Un *experimento determinista* consiste en un conjunto de acciones tales que si se repiten en las mismas condiciones iniciales se garantiza que se obtendrá el mismo resultado. Por ejemplo, al calentar el agua más de 100°C esta se evapora.

Un *experimento aleatorio* es un conjunto de acciones que dan lugar a un fenómeno aleatorio determinado. La observación del fenómeno forma parte del propio experimento aleatorio. Por ejemplo, lanzar una moneda o extraer una bola de una urna son experimentos aleatorios. Las características de este tipo de experimentos son:

- * El resultado del experimento no puede saberse de antemano.
- * Los resultados posibles deben estar bien determinados.
- * El experimento debe poder repetirse en condiciones idénticas.

Un experimento aleatorio con una sola prueba se denomina *experimento simple*. Un experimento aleatorio que consiste en dos o más experimentos simples, que se realizan sucesivamente, se denomina *experimento compuesto*. Por ejemplo, lanzar una moneda o lanzar simultáneamente dos monedas son experimentos simples. Lanzar una moneda y, a continuación, lanzarla de nuevo o lanzar una moneda y, a continuación, extraer una bola de una urna, son experimentos compuestos.

Todos los resultados posibles que se pueden obtener al hacer un experimento aleatorio forman el conjunto denominado *espacio muestral*. Se suele utilizar la letra Ω para representarlo. Por ejemplo, cuando lanzamos un dado cúbico el espacio muestral es $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Un *suceso* es cualquier conjunto de resultados posibles y se suele utilizar una letra mayúscula para denotarlo. Por ejemplo, cuando lanzamos un dado podemos considerar los sucesos $A = \{1\}$ o $B = \{2, 4, 6\}$ que significan *obtener un 1* u *obtener un número par*, respectivamente. El suceso ocurrirá si al realizar el experimento aleatorio está en el resultado obtenido. Por ejemplo, si al lanzar un dado sale un 5, el suceso $C = \{5\}$ ha ocurrido.

- * Un *suceso seguro* es el que ocurre siempre. Por ejemplo, *obtener un número del 1 al 6* al lanzar un dado es un suceso seguro.
- * Un *suceso imposible* es aquel que no ocurre nunca. Por ejemplo, *obtener un 7* al lanzar un dado es un suceso imposible.
- * Un *suceso simple o elemental* es aquel que no se puede descomponer en otros sucesos. Cada uno de los resultados posibles constituye un suceso simple. En el ejemplo de lanzar un dado, *obtener un 1* es un suceso simple
- * Un *suceso compuesto* es aquel que está formado por más de un resultado posible. En el ejemplo de lanzar un dado, *obtener un número par* es un suceso compuesto.
- * Un *suceso complementario* del suceso A es el suceso *no ocurre A* y se suele representar por $\bar{A}$. En el ejemplo de lanzar un dado, si $A = \{2, 4, 6\}$, entonces $\bar{A} = \{1, 3, 5\}$.
- * Un *suceso unión* de los sucesos A y B es el definido por *al menos uno de los dos sucesos A o B ocurre*. Se suele representar por $A \cup B$. En el ejemplo de lanzar un dado, si $A = \{2, 4, 6\}$ y $B = \{3, 4, 5, 6\}$, entonces $A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$.
- * Un *suceso intersección* de los sucesos A y B es el definido por *A y B ocurre a la vez*. Se suele representar por $A \cap B$. En el ejemplo de lanzar un dado, si $A = \{2, 4, 6\}$ y $B = \{3, 4, 5, 6\}$, entonces $A \cap B = \{4, 6\}$.
- * Dos *sucesos A y B son excluyentes* si no pueden ocurrir a la vez, es decir, A y B no tienen ningún elemento en común. En el ejemplo de lanzar un dado, $A = \{1, 3, 5\}$ y $B = \{2, 4, 6\}$ son excluyentes.

La noción de *probabilidad* surge en el intento de medir cuánto puede ocurrir un suceso. Hay diferentes puntos de vista sobre la manera de realizar esta medición. Asignamos una probabilidad a un suceso para poder expresar:

- (a) La frecuencia con la que ocurrirá un suceso al repetir el experimento ilimitadamente en idénticas condiciones. Esta interpretación se llama *frecuentista* y se basa en una ley empírica que asegura la estabilidad a largo plazo. Es decir, a medida que el experimento se va repitiendo en idénticas condiciones un número infinito de veces, la frecuencia relati-

va del suceso se aproximará más a su probabilidad. Para obtenerla en la práctica, como no se puede repetir un experimento un número infinito de veces, lo que obtendremos será una aproximación a la probabilidad.

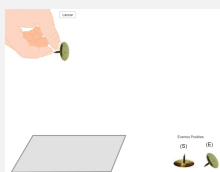
- (b) El cociente entre el número de resultados del suceso y el número de sucesos posibles. Esta es la interpretación *clásica* de la probabilidad y se aplica la fórmula, que se debe a *Laplace*, siempre que haya equiprobabilidad de todos los resultados posibles y este número de resultados sea finito.
- (c) El grado de creencia personal en la posibilidad de que un suceso ocurra. Esta es la interpretación *subjetiva* de la probabilidad y se basa en la experiencia, el conocimiento o la información que la persona tenga del suceso cuya probabilidad se quiere medir.

La probabilidad interpretada como frecuencia o proporción será un número entre 0 y 1. La probabilidad de un suceso A se representa como $P(A)$. Para el caso de la interpretación clásica de la probabilidad, el diagrama de árbol proporciona una representación gráfica del experimento aleatorio que facilita la comprensión de su desarrollo.

Actividad 4.1

¿Cómo podrías calcular la probabilidad de que al lanzar una chincheta esta quede apoyada sobre su punta? Puede ayudarte del siguiente simulador:

 <https://www.geogebra.org/m/zzCjgAxy>.

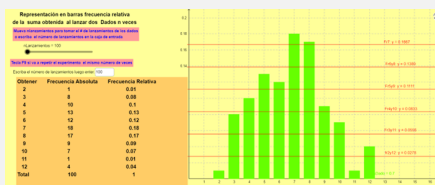


Actividad 4.2

Supongamos que hacemos el experimento de lanzar dos dados cúbicos y sumar los dos números obtenidos.

- ¿De qué formas diferentes se puede definir el espacio muestral de este experimento?
- De acuerdo a cada una de las formas que has obtenido en el apartado (a), ¿cómo podrías calcular la probabilidad de que el resultado de la suma sea 6?
- Para el caso de la interpretación frecuentista, se os va a repartir a cada grupo un par de dados. Lanzadlo 50 veces y anotad el resultado obtenido en cada caso.
- Completamos la reflexión del apartado anterior con el siguiente simulador:

<https://www.geogebra.org/m/byV5AfzR>



- Ayudándote de un diagrama de árbol, calcula la probabilidad de que la suma de los dos dados sea 6 de forma clásica, es decir, aplicando al teorema de Laplace.
- Analiza la siguiente actividad de GeoGebra:

<https://www.geogebra.org/m/X3EEpavD> ¿Qué se pretende con ella?

En el caso de que un diagrama de árbol represente un experimento compuesto, la *probabilidad de un camino*, o lo que es lo mismo, del suceso asociado a ese camino, es igual al producto de las probabilidades de todas las ramas que forman ese camino. Además, la probabilidad de un suceso A correspondiente al último experimento de un experimento compuesto se obtiene sumando las probabilidades de todos los caminos que conducen a los nodos finales que son favorables al suceso.

Actividad 4.3

Se tienen dos urnas. La urna 1 tiene dos bolas blancas y una negra y la urna 2 tiene dos bolas blancas y cuatro negras. Se lanza una moneda equilibrada. Si sale cara, se extrae una bola de la urna 1, y si sale cruz, se extrae una bola de la urna 2. ¿Cuál es la probabilidad de obtener una bola blanca? Define el espacio muestral del experimento compuesto y utiliza un diagrama de árbol para responder a la pregunta.

4.2. Fundamentos didácticos

Progresión en el aprendizaje de la estadística

No hay muchas investigaciones sobre cómo el alumnado desarrolla de forma cognitiva el aprendizaje de la estadística. Esto se debe a que la estadística no fue legislada como contenido de la Educación Primaria hasta la Ley Orgánica de Educación y Ciencia (1990) en la que se contempló específicamente la organización de la información.

Watson y Moritz (2000) analizan la forma en que los niños progresan en la comprensión de los conceptos de media, mediana y moda. Se establecen tres etapas por las que va progresando el alumnado si se acompaña de enseñanza:

- * **Nivel 1:** Se usan de forma coloquial los términos media, mediana y moda sin asignación de un significado concreto. Se puede asociar la media con algo normal o que suele pasar.
- * **Nivel 2:** Se comienzan a estructurar los conceptos. Por ejemplo, se manejan las ideas de *centro* o de *suma y división* en relación al concepto de media, pero únicamente para resolver problemas muy sencillos.
- * **Nivel 3:** Se conocen los algoritmos y se asocian con los conceptos correspondientes de media, mediana y moda. Se reconoce que estas tres medidas representan los datos, pero no se tiene la capacidad de comparar dos muestras en base a estas medidas o de estimar estas medidas en base a una representación gráfica, pues se centra la atención en los datos aislados y no en las tendencias.
- * **Nivel 4:** Se aplican progresivamente los conceptos de media, mediana y moda a la resolución de problemas entre los que se incluye la comparación de grupos. Se identifican estas medidas a partir de representaciones gráficas de las muestras.

Progresión en el aprendizaje de la probabilidad

Batanero (2013) sintetiza los estudios sobre la evolución del razonamiento probabilístico de Piaget e Inhelder y Fischbein.

La teoría desarrollada por Piaget (1975) sostiene que el individuo utiliza esquemas conceptuales que tiene adquiridos cuando tiene que resolver un problema de matemáticas. Cuando se van asimilando conceptos se reconstruye el esquema cognitivo del niño para acomodarse a la nueva situación. Así, el niño desarrollará la comprensión del entorno e irá realizando operaciones mentales que le permitirán adquirir nociones nuevas.

Según Piaget, la propia experiencia, la actividad de interacción y los conocimientos previos son la base que determina el aprendizaje. El sujeto construye el conocimiento de forma activa y no lo recibe pasivamente. Cuando el niño se va desarrollando, intenta adaptarse al mundo que le rodea. Cuando se le presenta una idea nueva, aparece un desequilibrio en su situación mental o un conflicto cognitivo si esta idea contradice las ideas que ya existen. Por ejemplo, en el caso del estudio del número decimal, el niño pueden pensar que, del mismo modo que un número natural tenía un siguiente, un número decimal también lo tiene. Entonces, en el momento en el que se le enseña a un niño que entre dos números decimales hay infinitos números surge una contradicción que lo desequilibra a nivel cognitivo. Ante esta situación, se requiere de un proceso de asimilación y acomodación. La asimilación es la aceptación por parte del niño de la nueva información (en el caso de los números decimales, aceptar que un número decimal no tiene un siguiente). La acomodación es la reestructuración de las ideas ya existentes (en el caso de los números decimales, consistiría en comprender la estructura global del Sistema de Numeración Decimal). Este proceso de lento progreso en el que aparecen punto conflictivo que el estudiante va superando es lo que Piaget entiende por aprendizaje.

El aprendizaje depende de los conocimiento previos adquiridos y del desarrollo cognitivo del estudiante, que se estructura en etapas. Estas son fases de manera que los niños que están en una misma etapa razonan de forma similar y aparece un cierto patrón de razonamiento entre una fase y otra (Piaget, 1975). En el caso del desarrollo cognitivo en el aprendizaje de probabilidad estas fases, determinadas por edades aproximadas, se describen en Piaget y Inhelder (1951) y son las siguientes:

- * **Período sensorio motor (0-2 años):** Se caracteriza por el movimiento y las sensaciones y describe el razonamiento de los bebés. El bebé comienza a manipular objetos; percibe y experimenta propiedades (color, tamaño, forma, textura, sabor, olor,...). Hacia los 5 meses discrimina conjuntos de 2-3 ítems; a los 10 meses discrimina conjuntos de 3-4 ítems.

- * **Período pre operacional (2-7 años):** Caracterizado por la necesidad de manipular objetos reales para el aprendizaje de un cierto concepto, pues el niño se apoya en sus experiencias empíricas para comprender los conceptos. El niño de preescolar y comienzo de la primaria llega a comprender la organización del espacio, situando y desplazando los objetos (comprendiendo conceptos como dentro/fuera, encima/debajo, delante/detrás, arriba/abajo). También descubre y compara propiedades físicas de los objetos que manipula: longitud, distancia y cantidad. Utiliza diferentes formas de etiquetado para diferenciar colecciones numéricas de pocos elementos, es decir, comienza a contar cantidades pequeñas de objetos y a comprender el concepto de cardinal; contrasta magnitudes por comparación y estima, a partir de una cantidad, la longitud, el volumen y el peso. Es capaz de ordenar sucesos en el tiempo (saber lo que ocurrió antes y lo que vendrá después). Trabaja con una sola cantidad y resuelve problemas de cambio sencillo (operaciones aditivas).
- * **Período de las operaciones concretas (7-11):** Se comienza a comprender la conservación de la masa, peso, número y volumen. Aparecen conceptos secundarios, que no necesitan ser abstraídos de la experiencia concreta. Este es el periodo en que el niño va progresando a lo largo de la Educación Primaria. Aparece la comprensión de operaciones reversibles (aritméticas) con la adquisición de principios de conservación de cantidad, peso y volumen. Compara y cuantifica magnitudes y formas en geometría; llega a comprender el sistema métrico decimal y representa datos gráficamente. Agrupa los objetos en función de propiedades aditivas o multiplicativas; ordena elementos en función de una cualidad que varía (por peso, por color). Adquiere la comprensión del sistema de numeración y de las operaciones con números. Comprende conceptos espaciales: espacio que ocupan los objetos y su desplazamiento (topológicas, proyectivas, euclidianas, métricas,...); y, operaciones temporales y cinéticas: orden de sucesión de los objetos en el espacio. Los objetos materiales son un referente importante y todavía tiene dificultad para concebir una operación en forma abstracta.
- * **Período de operaciones formales (11-15):** El período de las operaciones formales constituye el último paso del desarrollo intelectual, y de adquisición de las habilidades cognitivas y sociales (Inhelder y Piaget, 1955; Piaget, 1975). Se pueden manipular relaciones entre representaciones simbólicas, se formulan hipótesis y se establecen conclusiones. Se comprende el significado de abstracciones verbalmente, sin referirse a objetos particulares. Características del pensamiento formal son:
 - (a) se contempla lo real como parte de lo posible;
 - (b) se acentúa lo hipotético-deductivo frente a lo empírico-inductivo;
 - (c) se depura el pensamiento proposicional;
 - (d) se acentúa la diferencia entre inteligencia práctica y especulativa;

- (e) se incrementa la cantidad y calidad de las estrategias de procesamiento de la información;
- (f) se potencia y acentúa el análisis crítico frente a las percepciones globales;
- (g) se depura y da carácter sistemático al método de análisis;
- (h) se desarrollan y amplía el razonamiento combinatorio.

Inhelder y Piaget (1955) sostienen que cuando se adquieren las operaciones formales se desarrolla el razonamiento combinatorio, la lógica de proposiciones, la proporcionalidad, la comprensión de la relatividad de dos movimientos o velocidades, la comprensión del equilibrio mecánico (toda acción le corresponde una reacción de la misma intensidad pero en sentido contrario), la probabilidad y la correlación, constituyendo esta, según Piaget, el último paso en la comprensión de la probabilidad.

Fischbein (1975) sostenía que los niños construyen de forma correcta y parcial ciertos conceptos probabilísticos y quiso analizar qué efecto tenía la enseñanza para la mejora de estas intuiciones, que las consideraba fundamentales como componentes de la inteligencia. Fischbein definió estas intuiciones como procesos cognitivos que tienen una intervención con la práctica real o mental de forma directa. Estas intuiciones se caracterizan por:

- * **Inmediatez:** las intuiciones surgen de manera espontánea, no de forma reflexiva
- * **Globalidad:** las intuiciones no se analizan ni se descomponen en partes
- * **Capacidad extrapolatoria:** las intuiciones van más allá de los casos particulares, tienen carácter teórico y pueden servir para hacer predicciones
- * **Estructurabilidad:** las intuiciones se relacionan entre sí, creando estructuras de razonamiento
- * **Auto-evidencia:** las propias intuiciones del individuo le parecen ser evidentes sin necesidad de demostración

Fischbein distingue entre las intuiciones primarias y las secundarias:

- * **Intuiciones primarias:** no precisan de instrucción sistemática para ser adquiridas. Por ejemplo, la localización de objetos o el hecho de razonar que cuando se lanza un dado todas las caras tienen la misma probabilidad de salir.
- * **Intuiciones secundarias:** se establecen como consecuencia de la formación escolar. No son simplemente fórmulas utilizadas de forma automática, sino que se tratan de convicciones o creencias formadas a partir de las propias acciones a lo largo del desarrollo intelectual.

Actividad 4.4

La falacia del jugador consiste en pensar que los sucesos pasados afectan a los futuros. Por ejemplo, después de haber lanzado una moneda varias veces y haber obtenido siempre cara la persona cree que la próxima vez obtendrá cruz. ¿Qué tipo de intuición se tienen en este ejemplo?

Teniendo en cuenta todos los anteriores aspectos cognitivos, Batanero (2013) describe las aportaciones de estos autores sobre cómo comprenden los niños conceptos de probabilidad en diferentes etapas de su desarrollo:

Fase 1 de aceptación del azar: Para comenzar a enseñar probabilidad a un niño hay que asegurarse de que es capaz de distinguir entre situaciones aleatorias y situaciones deterministas. El azar está en el entorno próximo del niño desde el momento que nace (juegos de echar a suertes, cartas, meteorologías, deportes, ...). Piaget y Inhelder (1951) sostenían que el alumnado en el periodo *pre operacional* no tiene una intuición innata del azar y tampoco llega a entenderlo bien, ya que necesitaría comprender la relación de causa y efecto, es decir, afirman que el azar aparece como combinación de diversas causas que, de forma independiente, da lugar un resultado no predecible. Además, el azar es el complementario de las operaciones reversibles y precisa de argumentos de combinatoria para contemplar todas las posibilidades que pueden suceder en el experimento aleatorio en un marco de referencia. Estas características cognitivas no las tiene desarrolladas el niño en las primeras edades.

Fischbein rechaza esta idea de Piaget afirmando que la intuición primaria del azar, es decir, la distinción entre fenómeno aleatorio y determinista se establece hasta los 7 años. Esta idea se basa en que los niños son capaces de elegir la opción de mayor probabilidad cuando practican juegos sencillos de azar. Por ejemplo, en el experimento de tener dos cajas de bolas rojas y blancas, el niño es capaz de saber en cuál de los dos casos es más fácil sacar bola roja si el número de bolas blancas es igual y hay pocas bolas.

En el periodo de las *operaciones concretas*, el niño es capaz de diferenciar las situaciones aleatorias y las deterministas, comprendiendo la interacción de cadenas de causas que provocan situaciones impredecibles, y la no reversibilidad de los experimentos aleatorios. Por ejemplo el niño puede comprender que el hecho de que haya más o menos nubes y viento puede producir o no lluvia. Sin embargo, esta comprensión no se desarrolla de forma completa, dado que el razonamiento todavía está muy ligado al nivel concreto. Es decir, si el niño no entiende completamente la interacción e independencia de las causas, no llega a construir la idea de aleatoriedad.

En las situaciones aleatorias, los resultados de forma aislada son imprevisibles, pero el conjunto de todas las posibilidades puede determinarse razonando con combinatoria y se tiene una previsión. Por tanto, no se puede saber el sexo de un bebé en particular, pero se puede predecir que en una ciudad más o menos la mitad de los bebés será niños y la otra mitad niñas. Cuando el niño entiende esto, está comprendiendo la regularidad global de las situaciones aleatorias y comienza a asignar probabilidades a los sucesos, como razón entre las posibilidades del caso particular y del conjunto de posibilidades. Con esto, según Piaget, el niño no puede adquirir totalmente las ideas de azar y de probabilidad hasta que no desarrolle el razonamiento combinatorio característico de las operaciones formales.

Por su parte, Fischbein afirma que el niño tiene una intuición parcial de la aleatoriedad que se desarrollará de forma progresiva con la ayuda de la enseñanza para que no llegue al estadio de las operaciones formales con una percepción muy pobre del azar. Además, Fischbein afirma que el niño recibirá la influencia de la sociedad que le rodea, que orientará su forma de razonar hacia explicaciones deterministas.

Fase 2 de estimación de frecuencia relativa: Cuando el niño ya sabe distinguir entre situaciones aleatorias y deterministas, se pretende conseguir que estime en una serie de sucesos de un experimento aleatorio cuáles son los que ocurren con mayor o menor frecuencia. Por ejemplo, en un experimento en el que se le presentan al niño dos luces de color diferente que se encienden de forma aleatoria e intermitente de acuerdo a una determinada frecuencia, por ejemplo, el 70 % y el 30 %, debe predecir cuál de las dos luces se encenderá. Se pretende conseguir que el niño adapte sus predicciones a las probabilidades de los sucesos que se le presentan. En el periodo *pre operacional* el niño es capaz de apreciar las diferentes frecuencias relativas con que aparecen los resultados de los experimentos aleatorios. A consecuencia de experiencias de la vida cotidiana acumuladas, por ejemplo al hacer una previsión sobre si va a llover o no según cómo se presente el día, esta intuición sobre la frecuencia relativa se desarrollará con la edad de forma natural, que mejora en el periodo de las *operaciones concretas*.

Fase 3 de noción de probabilidad: Como se ha comentado, Piaget e Inhelder afirmaban que el niño en el periodo pre operacional no era capaz de estimar bien la probabilidad de un suceso por no tener la habilidad de distinguir entre sucesos deterministas y aleatorios, conocer el concepto de proporción y conocer los procedimientos combinatorios. Sin embargo, Fischbein sostiene que el niño es capaz de realizar juicios probabilísticos en experimentos aleatorios sencillos. Los niños comienzan resolviendo problemas que impliquen comparación de probabilidades de un mismo suceso, por ejemplo sacar bola blanca, en dos experimentos diferentes en situaciones en las que, o bien el número de casos favorables o el número de casos no favorables son iguales en ambos experimentos. Por ejemplo, en una urna hay 3 bolas blancas y 7 negras y en otra hay 5 bolas blancas y 7 negras. Posteriormente pasan a

resolver problemas en que los casos se pueden poner en correspondencia mediante una proporción. A continuación, y con ayuda de la instrucción, el niño podrá comprar fracciones con diferentes denominadores.

Batanero (2013) recoge las estrategias que utiliza el alumnado al comparar probabilidades en el experimentos de bolas de dos colores en dos urnas según diferentes investigaciones y se presentan en la Tabla 4.6:

Estrategia	Edad	Descripción
Comparación del número de casos posibles	2-3 años	Elegir la caja que contenga mayor número de bolas
Comparación del número de casos favorables	4 años	Elegir la caja que contenga más bolas del color favorable. Resuelve el problema correctamente cuando el número de casos desfavorables es igual en las dos cajas.
Comparación del número de casos desfavorables	7 años	Elegir la caja con menor número de bolas del color desfavorables cuando el número de casos favorables es igual. Resuelve el problema correctamente cuando el número de casos favorables es igual en las dos cajas.
Estrategias aditivas	8-11 años	Elegir la caja donde la diferencia entre casos favorables y desfavorables sea mayor. Se tienen en cuenta todos los datos pero no se usan proporciones.
Estrategia de correspondencia	12-13 años	Establecer la proporción entre el número de casos favorables y desfavorables en una de las cajas y comparar con la composición de la otra, eligiendo la caja que de mayor proporción. Resuelve el problema correctamente cuando el número hay una proporción sencilla (por ejemplo 2 a 1) de casos favorables y desfavorables en una de las cajas, pero no en la otra.
Estrategias multiplicativas	12-14 años	Aplicar la regla de Laplace. Es la más elaborada y requiere del dominio del cálculo con fracciones. Es necesario establecer las fracciones formadas por los números de casos favorables y desfavorables para después comparar las fracciones así obtenidas.

Tabla 4.6: Estrategias del alumnado para comparar probabilidades extraído de Batanero (2013)

Enseñanza de las estadística

En muchos casos la enseñanza de la estadística se basa en la instrucción en la resolución sistemática de ejercicios en los cuales se proporcionan los datos para obtener medidas para las cuáles el alumnado no encuentra sentido. Ante esta situación, *Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education (GAISE) Reports* (2012) recoge la recomendaciones didácticas para la enseñanza de la estadística:

- * Incidir en la alfabetización y desarrollar el pensamiento estadístico.
- * Usar datos reales.
- * Enfatizar la comprensión de conceptos por encima del conocimiento de procedimientos.
- * Incentivar al aprendizaje activo.
- * Utilizar tecnología para el desarrollo de la comprensión de conceptos y el análisis de datos.
- * Utilizar la evaluación para mejorar y valorar el aprendizaje del alumnado.

Los datos reales que se utilicen deben tener significado para el alumnado y que sea él mismo quien tenga la posibilidad de recogerlos y analizarlos relacionándose con el contexto. Así pues, la enseñanza de la estadística requiere que se generen estudios estadísticos organizados en torno a un problema significativo para el alumnado que impliquen recoger información sobre el problema que será transformada en datos que se organizarán y manejarán mediante medidas estadísticas. Con ellas se podrá hacer una interpretación que permitirá tener una idea global del significado de los datos. De esta manera, el ciclo de trabajo estadístico en Educación Primaria se estructura de la siguiente manera:

- 1 Formulación del problema.
- 2 Recogida y organización de los datos.
- 3 Uso de métodos estadísticos apropiadas para el análisis de los datos.
- 4 Interpretación de los datos.

Por su parte, Batanero y Godino (2002) proporcionan las siguientes orientaciones sobre cómo ayudar a los niños en el desarrollo del razonamiento estadístico.

- 1 Involucrar al alumnado en el desarrollo de proyectos sencillos en los que deban recoger sus propios datos a partir de la observación (¿de qué color son los ojos de los niños de la clase?), encuesta (¿qué tipos de trabajo hacen las madres y los padres de los niños?) y medida (¿tienen los pies, manos, hombros más grandes los niños que las niñas?).

- 2 Concienciar al alumnado de que cada dato aislado forma parte de un todo (distribución de los datos) y que hay preguntas que no pueden contestarse con un sólo dato, sino con una distribución de datos.
- 3 Concienciar al alumnado de las tendencias y variabilidad en los datos y cómo estas pueden usarse para responder preguntas sobre los datos o comparar varios conjuntos de datos.
- 4 Visualizar progresivamente que los datos recogidos son una muestra de una población más amplia y sobre cuáles son las condiciones para que los datos de la muestra puedan representar los datos de toda la población.
- 5 Animar al alumnado a representar sus datos en tablas y gráficos, cuidando las cualidades estéticas y matemáticas de los gráficos de modo que los datos queden correctamente representados en ellos. Advertir de la facilidad con que un gráfico puede ser engañoso.

Actividad 4.5

Representad con barras construidas con cubos multilink el número de letras que tiene vuestro apellido. Configurad las barras de forma que construyáis un rectángulo colocando una barra encima de otras, quitando los cubos sobrantes y situándolos en filas superiores. El número de cubos de la base del rectángulo es la media aritmética y representa la longitud de todos los apellidos.

- (a) ¿Qué se pretende con esta actividad?
- (b) ¿Cómo se particularizan los cuatro puntos de trabajo estadístico que se han enumerado anteriormente?

Enseñanza de la probabilidad

Batanero y Godino (2002) proponen la siguiente progresión de orientaciones para enseñanza de la probabilidad:

- * Proporcionar una amplia variedad de experiencias que permitan observar los fenómenos aleatorios y diferenciarlos de los deterministas.
- * Estimular la expresión de predicciones sobre el comportamiento de estos fenómenos y los resultados, así como su probabilidad.

- * Organizar la recogida de datos de experimentación de modo que el alumnado tengan posibilidad de contrastar sus predicciones con los resultados producidos y revisar sus creencias en función de los resultados.
- * Resaltar el carácter imprevisible de cada resultado aislado, así como la variabilidad de las pequeñas muestras, mediante la comparación de resultados de cada estudiante o por parejas.
- * Ayudar a apreciar el fenómeno de la convergencia mediante la acumulación de resultados de toda la clase y comparar la fiabilidad de pequeñas y grandes muestras.

Actividad 4.6

Lee la siguiente situación, extraída de Batanero y Godino (2002), que se presenta al alumnado de Educación Primaria:

«Pito pito» es una canción que usan los niños para echar a suertes. Dice así: “Pito pito gorgorito, donde vas tu tan bonito, a la vera de mi abuela, pim, pam, fuera! (El que le toque se queda).

- (a) *¿Conoces otras canciones para echar a suertes? ¿Cuándo las usais?*
- (b) *Vamos a colocarnos en un corro y echar a suertes con «pito pito» ¿Sería justo comenzar siempre por el mismo niño? ¿Por qué?*
- (c) *¿Conoces otras formas de echar a suertes?*
- (d) *¿Podríamos poner los nombres de cada niño en un papel y elegir uno al azar? ¿Qué significa elegir al azar? ¿Cómo lo harías? ¿Es más fácil que salga el nombre de un niño o de una niña?*

¿Qué se pretende con esta situación? Propón otra situación para conseguir el mismo objetivo.

A continuación se presenta una secuencia de tareas extraídas de Batanero y Godino (2002):

- (a) Imagina que estás jugando al parchís con un amigo. Para poder comenzar a mover la ficha es preciso obtener un cinco, pero tu amigo prefiere que se le exija obtener un 3, porque piensa que de este modo tiene ventaja. ¿Tú que opinas? ¿Puedes dejarle que comience a mover la ficha cuando le salga el 3, o es preciso que los dos juguéis a obtener el mismo número? Otro compañero sugiere que hagáis un experimento para resolver la discusión. Piensa que de este modo se puede saber quién tiene ventaja. Fíjate en la tabla

que te presentamos a continuación. Trata de adivinar cuántas veces, aproximadamente, saldrá el 3 y cuántas el 5 si lanzas un dado 24 veces. Escribe este número en la columna «número esperado de veces».

Resultado	Recuento	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	Nº esperado de veces
1				
2				
3				
4				
5				
6				
Total		24	1	24

- (b) Lanza el dado 24 veces y anota los resultados en la tabla anterior. El número de veces que sale cada cara del dado es su frecuencia absoluta. Si dividimos dicho número por el número total de lanzamientos (en este caso 24), obtenemos la frecuencia relativa de ese suceso. Calcula la frecuencia relativa de obtener 5 y la de obtener 3. ¿Cuál es mayor?.
- (c) El profesor mostrará en la pizarra los resultados de toda la clase. Preparará con ellos una tabla y un gráfico de barras. Compara estos resultados con los vuestros y con la estimación que habéis hecho.
- (d) Con el fin de apreciar la ley de estabilidad de las frecuencias relativas y comparar los valores de la probabilidad asignados según la regla de Laplace con el correspondiente concepto frecuencial, se recogerán todos los resultados de los distintos grupos en una hoja de registro como la siguiente para el suceso de obtener un 3 y para el de obtener un 5:

Nº pareja	Nº experi- mentos	Frecuencia absoluta	Nº expe- rimentos acumula- dos (N)	Frecuencia acumulada (A)	Frecuencia relativa (A/N)
1					
2					
⋮					
Total		24	1	24	

- (e) En un diagrama cartesiano se representarán los puntos $(N, A/N)$, número de experimentos acumulados, frecuencia relativa. A pesar de que la ley de estabilidad de las frecuencias relativas es válida sólo cuando n crece indefinidamente, los alumnos podrán apreciar una cierta regularidad o tendencia hacia el valor asignado «a priori», aunque el número de experiencias de clase sea limitado.

Actividad 4.7

¿Qué orientaciones de las propuestas por Batanero y Godino (2002) para la enseñanza de la probabilidad se trabajan en la anterior secuencia de actividades?

4.2.1. Orientaciones por niveles

1. Estadística

Evolución: Elaborar cuestionarios con diferentes tipos de variables en contextos cercanos al alumnado, organizar los datos en tablas de frecuencias, representar gráficamente los datos, interpretar las tablas y los gráficos y calcular e interpretar media aritmética, mediana, moda y rango.

1er ciclo de EP

—o Recoger datos con cuestionarios muy elementales con variables cualitativas y cuantitativas. Dar batería de posibles respuestas.

- Organizar datos en tablas con frecuencias absolutas. Tener en cuenta que el número de total de datos no requiera agruparlos.
- Dibujar o construir diagramas de barras sencillos o pictogramas. Para la construcción se pueden usar, por ejemplo, gomets o cubos Multilink.

2º ciclo de EP

- Introducir el nombre de los tipos de variables (cuantitativa o cualitativa) en la elaboración de cuestionarios.
- Seguir con el trabajo de organizar datos en tablas con frecuencias absolutas sin agrupar datos.
- Continuar con el dibujo o construcción de diagramas de barras profundizando en el vocabulario.

3 er ciclo de EP

- Añadir la variable cuantitativa continua en la elaboración de cuestionarios y generar la necesidad de agrupar datos en intervalos. Atender al hecho de que un número no puede estar en dos intervalos. Introducir la marca de clase para trabajar con la tabla de frecuencias de este tipo de variable.
- Añadir la frecuencia relativa y la frecuencia relativa acumulada a la tabla de frecuencias. Cuando se conozca el concepto de porcentaje, relacionarlo con la frecuencias relativa.
- Organizar datos en tablas de frecuencias absolutas de doble entrada.
- Perfeccionar el dibujo de diagramas de barras estableciendo una escala ajustada. Introducir el histograma, el diagrama de sectores, el polígono de frecuencias y la nube de puntos para el caso de tablas de frecuencias bidimensionales.
- Introducir la media aritmética, la moda, la mediana y el rango en un contexto próximo al alumnado en el que se tengan que comparar dos muestras y mediante preguntas que permitan descubrir los conceptos.

2. Probabilidad

1er ciclo de EP

- Descubrir situaciones sencillas de azar (tiempo atmosférico o asistencia de compañeros, por ejemplo) como ejemplos de fenómenos aleatorios. El alumnado debe entender que en estas situaciones no se puede predecir con seguridad el resultado.
- Provocar situaciones de azar recreadas (con dados o ruletas, por ejemplo) y cuantificar la posibilidad con los términos *posible*, *imposible* o *seguro*.

2º ciclo de EP

-
- o Continuar con situaciones de azar intensificando dificultad e introducir las ideas de suceso simple y suceso compuesto.
 - o Introducir tablas para anotar todos los resultados posibles de un experimento aleatorio, la frecuencia de cada uno de estos y el total de repeticiones. Continuar cuantificando la posibilidad de que ocurra cada suceso con términos como *poco probable, probable, muy probable, posible o imposible*.
 - o Continuar con juegos de azar más complicados (por ejemplo, lanzar dos dados y sumar el resultado). Introducir el concepto de espacio muestral.
 - o Introducir los diagramas de árbol como ayuda para ver todos los resultados posibles de un experimento. Reflexionar sobre si todas las ramas del árbol son igual de posibles (el requisito de equiprobabilidad para luego introducir la regla de Laplace).
 - o Comparar la fracción obtenida con la regla de Laplace con el resultado obtenido al repetir muchas veces el experimento por la Ley de los grandes números. Comprobar que todos los valores obtenidos siempre entre 0 y 1.
 - o Relacionar los conceptos de probabilidad y porcentaje.
-

3er ciclo de EP

- o Continuar profundizado en todo lo introducido en el ciclo anterior.
-

Actividad 4.8

Piensa y luego explica mediante la técnica de *role-playing* haciendo el papel del docente cómo introducirías la media aritmética, la mediana, la moda y el rango utilizando el siguiente contexto: «*Ante una acogida de niños y niñas saharauis, por algunas familias de alumnado del colegio, queremos saber si en general tienen más hermanos ellos que nosotros*» (Lorenzo-Valentín, Alcalde-Esteban, y Pérez-Serrano, 2015).

Actividad 4.9

Diseña una secuencia de tareas como la de Batanero y Godino (2002) para el cuarto curso de Educación Primaria en para el experimento de lanzar dos dados. Debes tener en cuenta las orientaciones por niveles (Lorenzo-Valentín y cols., 2015). Luego presentarás estas tareas mediante la técnica de *role-playing* haciendo el papel del docente.

4.3. Errores y dificultades en el aprendizaje

Brancho, Torralbo, Ademuz, y Jiménez (2022) presentan una clasificación de las dificultades y los errores más comunes en el alumnado de Educación Primaria en el aprendizaje de la estadística y la probabilidad.

Errores en la recogida y organización de datos y en su representación gráfica

El alumnado entiende mejor los gráficos cuando representan situaciones de temas que le son más familiares, pero este entendimiento también depende del manejo que tenga de las herramientas matemáticas necesarias para interpretarlos, como las medidas que se representan (frecuencias, medias, etc.) y el tipo de gráfico. Se pueden establecer tres niveles diferentes de comprensión de los gráficos en orden creciente de dificultad:

- 1 Nivel 1: «Leer los datos»: lectura literal del gráfico sin ninguna interpretación de la información. Por ejemplo, en la actividad de la Figura 4.5 se requiere este nivel de lectura de gráficos.

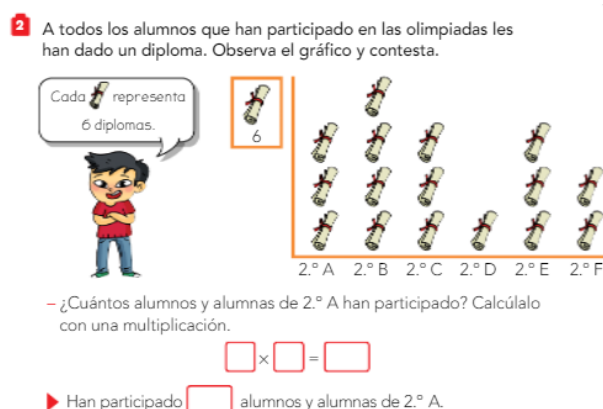
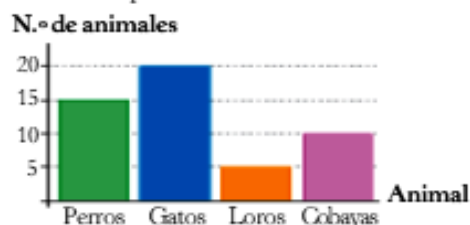


Figura 4.5: Nivel 1 de lectura de gráficos

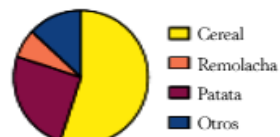
- 2 Nivel 2: «Leer dentro de los datos»: interpretación e integración de los datos representados en el gráfico requiriendo ciertas habilidades matemáticas. Por ejemplo, en las actividades de la Figura 4.6 se requiere este nivel de lectura de gráficos.
- 3 «Leer más allá de los datos»: predicción o inferencia a partir de la información aportada por los datos representados en el gráfico. Por ejemplo, si respecto a la gráfica de Figura 4.7 se pregunta si será rentable ofrecer cursos para jubilados, se requiere un Nivel 3 de lectura de gráficos.

3 Con los datos de esta gráfica, construye en tu cuaderno las tablas de frecuencias absolutas y relativas correspondientes:



- a) ¿Qué animal tiene mayor frecuencia absoluta?
¿Y relativa?
- b) Copia la gráfica y traza sobre ella el polígono de frecuencias.

2 Observa en este diagrama de sectores la extensión que ocupan los distintos cultivos en una cierta zona y responde:



- a) ¿Qué cultivo ocupa mayor superficie? ¿Supone más de la mitad del total?
- b) ¿Qué cultivo ocupa aproximadamente una cuarta parte de extensión de los cultivos de la zona?
- c) Ordena de mayor a menor extensión las tierras de cultivo que representa el gráfico.

Figura 4.6: Nivel 2 de lectura de gráficos

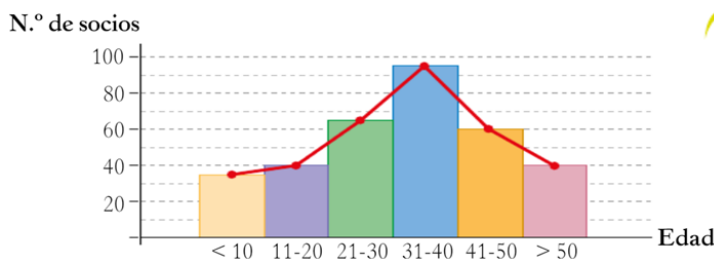


Figura 4.7: Nivel 3 de lectura de gráficos

Actividad 4.10

Para cada una de las cuatro Figuras 4.1, 4.2, 4.3 y 4.4 piensa preguntas que hacer al alumnado en cada uno de los tres niveles de comprensión de gráficos. ¿Qué errores crees que el alumnado podría cometer en cada caso?

Errores en el manejo e interpretación de la media, mediana y moda

Actividad 4.11

Hay 24 estudiantes en una clase, 14 niñas y 10 niños. El peso medio de las niñas es de 35 kg y el de los niños de 42 kg. ¿Cuál es el peso medio de la clase.

Resuelve el problema e identifica los errores que crees que se pueden producir en las diferentes formas de resolverlo.

Uno de los errores habituales cometido por el alumnado es confundir la media general con la media de medias.

Actividad 4.12

La medida de número de hermanos del alumnado de una clase es de 1 hermano. Luis es un niño de esta clase, ¿cuál es el número de hermanos que puede tener Luis?

Resuelve el problema e identifica los errores que crees que se pueden producir en las diferentes formas de resolverlo.

Un error posible en la resolución de la actividad anterior es afirmar que sí que se puede saber de forma exacta el número de hermanos que tiene Luis sin tener en cuenta la variabilidad de los datos del grupo. Otro error consistiría en pensar que no se puede saber el número de hermanos de Luis. En este caso, no estaría considerando que la media es una medida representativa del grupo que permite hacer predicciones sobre el grupo. La respuesta correcta sería que sí se puede saber de forma aproximada el número de hermanos de Luis y que este número estaría alrededor de uno. Este razonamiento mostraría que el alumnado comprende el concepto de media y su utilidad para predecir.

Actividad 4.13

La notas de matemáticas de un grupo de once estudiantes son: 2.3, 2.4, 2.5, 2.5, 2.7, 3, 3, 3.5, 4, 4.5, 9.3, 9.5, 10. Calcula la media, la moda y la mediana. ¿Qué medida es más representativa? ¿Qué errores crees que puede cometer el alumnado al resolver esta actividad?

Dado que la media es una medida representativa de los datos, si se pide al alumnado que dado un conjunto de datos estime el valor de la media, se puede tender a pensar que se ubica en el centro del conjunto de valores de la variable, lo cual es correcto en una distribución simétrica. En caso contrario, la moda o la mediana pueden ser valores más representativos de la muestra.

Conocer las operaciones para calcular la media, la moda y la mediana y obtenerlas correctamente no implica que se entiendan estos conceptos. Hay que evitar que el conocimiento de estas medidas de centralización se reduzca a un manejo sistemático y, para ello, hay que proponer actividades en las que se trabaje la interpretación de los resultados.

Actividad 4.14

En la tabla siguiente se muestran las edades de un grupo de estudiantes:

Edad en años	Frecuencia absoluta
11	8
12	12
13	10
14	6
15	3
Total	39

¿Cuál es la edad media del alumnado? ¿Cuál es la mediana y la moda? ¿Qué errores crees que podría cometer el alumnado de primaria?

En algunas ocasiones el alumnado se confunde calculando las medias de las frecuencias en lugar de los valores de las variables o no tiene en cuenta las frecuencias absolutas de cada valor en su cálculo. Del mismo modo, se puede tomar como moda o mediana un valor de la frecuencia en lugar del de la variable.

Errores en el análisis de la dispersión de los datos

Actividad 4.15

Carmen y Alejandro miden 1,69 m y 1,71 m, respectivamente. Marta e Ignacio miden 1,45 m y 1,95 m, respectivamente. ¿Cómo de desiguales son estas parejas? ¿Qué medidas te permiten responder a la anterior pregunta?

Resuelve el problema e identifica los errores que crees que se pueden producir en las diferentes formas de resolverlo.

Puede ocurrir que el alumnado ignore la dispersión de los datos cuando se comparan muestras o poblaciones. En Educación Primaria únicamente se introduce el rango como medida de dispersión, por lo que se incidirá en su comprensión para la comparación de muestras o poblaciones con actividades como las que siguen. Por ejemplo, tenemos los siguiente conjuntos de datos todos con la misma media aritmética:

$$A = \{2, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 8, 8, 9\}$$

$$B = \{4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6\}$$

$$C = \{2, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 8\}$$

$$D = \{2, 2, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 8, 8\}$$

El alumnado podría pensar que las cuatro muestras anteriores son similares, sin embargo, en la Figura 4.8 se muestran las correspondientes gráficas de barras que ilustran las diferentes dispersiones de los conjuntos de datos.

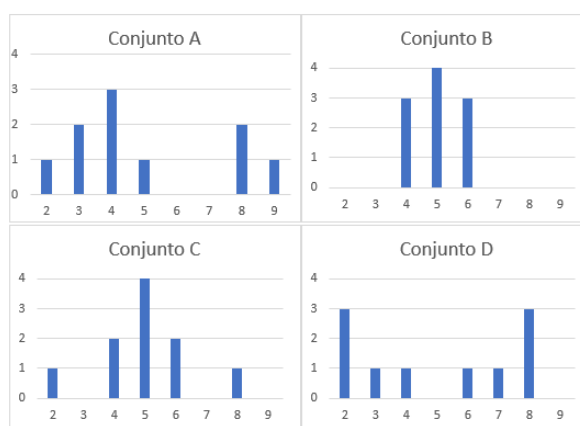


Figura 4.8: Gráficos de barras de los conjuntos A , B , C y D

Errores en los conceptos relacionados con el azar

Green (1983) realiza un estudio para evaluar la comprensión de la idea de probabilidad y contempla tres aspectos que la determinan:

- * El lenguaje que incluye términos que se refieren al azar y la probabilidad.
- * El razonamiento combinatorio como la capacidad para enumerar todos los casos posibles en un experimento aleatorio.
- * El razonamiento probabilístico con sus particularidades.

Batanero y Godino (2002) sintetizan los siguientes resultados de algunos de los ítems incluidos por Green (1983) en sus investigaciones:

Ítem 1: Escribe una palabra o frase que signifique lo mismo que:

- (a) Imposible
- (b) Posible

- (c) Igual posibilidad
- (d) Poca posibilidad
- (e) Muy probable

Este ítem evalúa el lenguaje sobre azar y, para niños de 11 y 12 años, el orden de dificultad de los diferentes términos es a), b), d), e), c).

Ítem 2: En una clase de matemáticas hay 13 niños y 16 niñas. Cada nombre de los alumnos se escribe en un trozo de papel. Todos los trozos se ponen en un sombrero y el profesor saca uno sin mirar. Señala la frase correcta:

- (a) Es más probable que el nombre sea de un niño.
- (b) Es más probable que el nombre sea de una niña.
- (c) Es igual de probable que el nombre sea de un niño o de una niña.
- (d) No lo se.

Este ítem evalúa la comprensión de la regla de Laplace como parte del razonamiento probabilístico. En este caso, no se tiene que aplicar la regla debido a que los sucesos no son equiprobables. El índice de aciertos en los niños de 11 y 12 años es el 63 %.

Ítem 3: Cuando se lanza un dado, ¿qué número o números son más difíciles de obtener? ¿o son todos iguales?

Este ítem evalúa las creencias subjetivas de que algunos números son más difíciles de obtener que otros como parte del razonamiento probabilístico. Aproximadamente el 20 % de los niños de 11 y 12 años piensan que al lanzar un dado el cinco es el número más difícil de obtener.

Ítem 4: María y Esteban juegan a los dados. María gana un euro si el dado sale 2, 3, 4, 5 o 6. ¿Cuánto debe ganar Esteban para que el juego sea equitativo?.

Este ítem evalúa la comprensión de la idea de juego equitativo como parte del razonamiento combinatorio. Sólo el 45 % del alumnado de 11 y 12 años sabe resolver el problema.

Ítem 5: Se pidió a algunos niños lanzar una moneda 150 veces. Algunos lo hicieron correctamente. Otros hicieron trampas. Anotaron con la letra C la aparición de una cara y con + una cruz. Estos son los resultados de Daniel y Diana:

Daniel: c+c++cc++cc+c+c++c++c+ccc+++ccc++c++c+c+c++cc+ccc+
 c+c+cc+++cc++c+c++cc+c++cc+c++cc+cc+c+++c++cc++c++
 c+c+cc+c++cc+c+c++ccc+cc++c+c++cc+++c+++c+c++ccc++

Diana: +cc+++c++++c+cc+++cc+cc+++cc+ccc+++c++++++c+c+c+c+
 +++cccccc+ccc+c+cc+cccc+ccc++ccc+c+cccccccc++c+
 ccccc++c++++cccc+c+c+cc+cc+cc++++++c+cc++ccc+ccc

¿Hicieron trampas Daniel o Diana? ¿Por qué?

Este ítem de razonamiento probabilístico y solo el 30 % de los niños da la solución correcta (Daniel). Se puede pensar que Diana hace trampas porque aparecen tramos largos del mismo resultado, sin embargo, esto es lo que suele suceder en los experimentos aleatorios.

Ítem 6: La probabilidad de que nazca un varón es $1/2$. A lo largo de un año completo, habrá más días en los cuales al menos el 60 % de los nacimientos corresponden a varones:

- (a) en un hospital grande (100 nacimientos al día)
- (b) en un hospital pequeño (10 nacimientos al día)
- (c) no hay ninguna diferencia.

Este ítem evalúa la comprensión del efecto que el tamaño de la muestra tiene sobre un experimento aleatorio como razonamiento probabilístico. La probabilidad de nacer varón es $\frac{1}{2}$ y esto es más probable que varíe en una muestra pequeña, porque es menos fiable. Por tanto, la respuesta correcta es la b). El índice de aciertos en este caso es del 20 %.

Actividad 4.16

Analiza las respuestas que diste en la prueba inicial. ¿Detectas errores? En caso afirmativo, corrígelos de manera razonada.

4.4. Laboratorio de materiales y recursos

Juegos de azar

En la Figura 4.9 se muestran algunos materiales que se pueden utilizar para trabajar conceptos de probabilidad. Además de las bolas, los dados y las cartas que se muestran, también se podrían utilizar ruletas o bingos, por ejemplo.



Figura 4.9: Juegos de azar

4.5. Práctica de Estadística y Probabilidad

A cada grupo se os asignará un artículo de los de la siguiente lista:

- * Alsina, Á. (2021). Estadística en contexto: desarrollando un enfoque escolar común para promover la alfabetización. TANGRAM-Revista de Educação Matemática, 4(1), 71-98.
- * Alsina, Á., Vásquez Ortiz, C. A., Muñiz-Rodríguez, L. y Rodríguez Muñiz, L. J. (2020). ¿Cómo promover la alfabetización estadística y probabilística en contexto? Estrategias y recursos a partir de la COVID-19 para Educación Primaria. Epsilon Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática, 104, 99-128.
- * Herreros, D., y Sanz, M. T. (2020). Estadística en educación primaria a través del aprendizaje basado en juegos. Matemáticas, educación y sociedad, 3 (1), 33-47.
- * Alsina, Á. (2016). La estadística y la probabilidad en educación primaria.¿ Dónde estamos y hacia dónde debemos ir. Aula de innovación educativa, 251, 12-17.
- * Alsina, Á. (2016). La probabilidad en educación primaria: de lo que debería enseñarse a lo que se enseña. Uno: revista de didáctica de las matemáticas, 71, 46-52.
- * Gil, A. (2010). Proyectos de estadística en primaria. Material editado por el Instituto Canario de Estadística (ISTAC). Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 75, 121-129.
- * Flores, Abraham; Pinto, Jesús (2017). Características de la enseñanza de la estadística por proyectos. En Serna, Luis Arturo (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 263-271.

Actividad 4.17

Preparad una exposición de las ideas fundamentales del artículo que se os asignado. A continuación, la presentaréis en clase.

REFERENCIAS

- Albarracín, L. (2021). Una secuencia de actividades para desarrollar la visualización usando un videojuego. *Enseñanza de las Ciencias*, 39(2), 0181–199.
- Alberti, C. (2004). L'organizzazione dello spazio fisico rispetto al soggetto. En *Nel mondo della geometria, vol. 1. L'orientamento spaziale*. C. C. Bozzolo y A. Costa (Eds.).
- Alsina, Á. (2016a). La estadística y la probabilidad en educación primaria.¿ Dónde estamos y hacia dónde debemos ir. *Aula de innovación educativa*, 251, 12–17.
- Alsina, Á. (2016b). La probabilidad en educación primaria: de lo que debería enseñarse a lo que se enseña. © *Uno: revista de didáctica de las matemáticas*, 2016, núm. 71, p. 46-52.
- Alsina, Á. (2021). Estadística en contexto: desarrollando un enfoque escolar común para promover la alfabetización. *TANGRAM-Revista de Educação Matemática*, 4(1), 71–98.
- Alsina, Á., Vásquez Ortiz, C. A., Muñoz-Rodríguez, L., y Rodríguez Muñoz, L. J. (2020). ¿ cómo promover la alfabetización estadística y probabilística en contexto? estrategias y recursos a partir de la covid-19 para educación primaria. © *Epsilon Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática*, 2020, vol. 104, p. 99-128.
- Alsina, C., Burgués, C., y Fortuny, J. (1988). *Materiales para construir la geometría*. Madrid: Síntesis.
- Arce-Sánchez, M., Conejo-Garrote, L., y Muñoz-Escolano, J. M. (2019). *Aprendizaje y enseñanza de las matemáticas*. Madrid: Síntesis.
- Ärlebäck, J. B. (2009). On the use of realistic Fermi problems for introducing mathematical modelling in school. *The Mathematics Enthusiast*, 6(3), 331–364.

- Arteaga, P., Batanero, C., Cañadas, G., y Contreras, M. (2011). Las tablas y gráficos estadísticos como objetos culturales. *Números. Revista de didáctica de las matemáticas*, 76, 55–67.
- Arteaga, P., Batanero, C., y Contreras, J. M. (2011). Gráficos estadísticos en la educación primaria y la formación de profesores. *Indivisa. Boletín de Estudios e Investigación*(12), 123–135.
- Arteaga, P., Batanero, C., Contreras, J. M., y Cañadas, G. (2016). Evaluación de errores en la construcción de gráficos estadísticos elementales por futuros profesores. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 19(1), 15–40.
- Barrantes-López, M., y Zapata-Esteves, M. A. (2008). Obstáculos y errores en la enseñanza-aprendizaje de las figuras geométricas. *Campo Abierto. Revista de Educación*, 27(1), 55–71.
- Batanero, C. (2001). *Didáctica de la Estadística*. Granada: Universidad de Granada.
- Batanero, C. (2013). La comprensión de la probabilidad en los niños: qué podemos aprender de la investigación. *Atas do III Encontro de probabilidades e estatística na escola*, 9–21.
- Batanero, C., y Godino, J. D. (2002). *Estocástica y su didáctica para maestros*. Universidad de Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática.
- Batanero, C., Godino, J. D., Green, D. R., Holmes, P., y Vallecillos, A. (1994). Errores y dificultades en la comprensión de los conceptos estadísticos elementales. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, 25(4), 527–547.
- Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, 2, 843–908.
- Ben-Chaim, D., Lappan, G., y Houang, R. T. (1985). Visualizing rectangular solids made of small cubes: Analyzing and effecting students' performance. *Educational studies in Mathematics*, 16(4), 389–409.
- Ben-Zvi, D., y Friedlander, A. (1997). Statistical thinking in a technological environment. *Research on the role of technology in teaching and learning statistics*, 45–55.
- Berthelot, R., y Salin, M. H. (1992). *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire* (Tesis Doctoral, Université de Bordeaux I). Université de Bordeaux I.
- Bishop, A. J. (1980). Spatial abilities and mathematics education— A review. *Educational studies in mathematics*, 11(3), 257–269.
- Bishop, A. J. (1983). *Space and geometry*. Academic Press.
- Bishop, A. J. (1989). Review of research on visualization in mathematics education. *Focus on learning problems in mathematics*, 11(1), 7–16.
- Borromeo-Ferri, R. (2018). *Learning how to teach mathematical modeling in school and teacher education*. Springer.

- Brancho, R., Torralbo, M., Ademuz, N., y Jiménez, N. (2022). Enseñanza y aprendizaje de la estadística y la probabilidad. En P. Flores y L. Rico (Eds.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación primaria* (pp. 323–243). Ediciones Pirámide.
- Bright, G. W. (1976). Estimation as part of learning to measure. *National Council of Teachers of Mathematics Yearbook*.
- Cañizares, M. J. (2001). Elementos geométricos y formas espaciales. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la educación primaria* (pp. 401–426). Madrid: Síntesis.
- Carpenter, T., y Osborne, A. (1976). Needed research on teaching and learning measure. *Number and measurement, Columbus, Ohio: ERIC*.
- Carrillo, J., y Contreras, L. (2001). Transformaciones geométricas. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la educación erimaria* (pp. 427–448). Madrid: Síntesis.
- Carrillo, J., Contreras, L., Climent, N., Montes, M. A., Escudero, D. I., y Flores, E. (Eds.). (2016). *Didáctica de las Matemáticas para maestros de Educación Primaria*. Ediciones Paraninfo, SA.
- Carvalho, C. (1998). Tarefas estatísticas e estratégias de resposta. *Comunicação apresentada en el VI Encontro en Educação Matemática de la Sociedad Portuguesa de Ciencias de la Educación. Castelo de Vide, Portugal*.
- Castro, E. (2001). *Didáctica de la matemática en la Educación Primaria*. Madrid: Síntesis.
- Chamorro, M. C., y Belmonte, J. M. (1988). *El problema de la medida*. Madrid: Síntesis.
- Charles, R. I. (1980). Some guidelines for teaching geometry concepts. *The Arithmetic Teacher*, 27(8), 18–20.
- Chien, C. (1989). Strategies and error patterns in solving rotation transformations. *Proceedings of the 13th PME conference*, 1, 172–179.
- Clements, D. H. (2004). Geometric and spatial thinking in early childhood education. *Engaging young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education*, 267–297.
- Clements, D. H., y Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, 420, 464.
- Curcio, F. R. (1989). *Developing graph comprehension. Elementary and Middle school activities*. ERIC.
- D'Amore, B., y Fandiño Pinilla, M. I. (2007). Relaciones entre área y perímetro: convicciones de maestros y de estudiantes. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 10(1), 39–68.
- de la Torre Fernández, E. (1998). Estrategia de enseñanza de la geometría en Primaria y Secundaria. En *La geometría y la formación del profesorado en primaria y secundaria* (pp. 23–38).
- Del Grande, J. (1990). Spatial sense. *The Arithmetic Teacher*, 37(6), 14–20.

- Dickson, L., Brown, M., y Gibson, O. (1991). *El aprendizaje de las matemáticas*. Labor Madrid, MEC.
- Dietz, C., y Barnett, J. (1978). Understanding of frames of reference by preservice teacher education students. En R. Lesh (Ed.), *Recent research concerning the development of spatial and geometric concepts*. The Ohio State University: ERIC Clearinghouse for Science Mathematics and Environmental Education.
- Efthimiou, C. J., y Llewellyn, R. A. (2007). Cinema, Fermi problems and general education. *Physics education*, 42(3), 253–261.
- Fielker, D. S. (1973). A structural approach to primary school geometry. *Mathematics teaching*, 63, 12–16.
- Fischbein, E. (1975). The intuitive sources of probabilistic reasoning in children. *Dordrech: Reidel*.
- Flores, A., y Pinto, J. (2017). *Características de la enseñanza de la estadística por proyectos*. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Flores, P., Ramírez, R., y del Río, A. (2022). Sentido espacial. En P. Flores y L. Rico (Eds.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria* (pp. 127–146). Ediciones Pirámide.
- Flores, P., y Rico, L. (2022). Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria. *Madrid, España: Pirámide*.
- Fogelman, K. (1970). *Piagetian tests for the primary school*. Windsor.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Galvez, G. (1985). *El aprendizaje de la orientación en el espacio urbano: una proposición para la enseñanza de la geometría en la escuela primaria* (Tesis Doctoral, Centro de Investigación del IPN, México). Centro de Investigación del IPN, México.
- Gil, A. (2010). Proyectos de estadística en primaria. material editado por el instituto canario de estadística (istac). *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 75, 121–129.
- Gonzato, M., Fernández, M., y Díaz, J. J. (2011). Tareas para el desarrollo de habilidades de visualización y orientación espacial. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 77, 99–117.
- González, M. (2022). Enseñanza y aprendizaje de las magnitudes y su medida. En P. Flores y L. Rico (Eds.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación primaria* (pp. 281–306). Ediciones Pirámide.
- González, M., y Gómez, P. (2015). Magnitudes y medida. medidas directas. En I. Segovia y L. Rico (Eds.), *Matemáticas para maestros de educación primaria* (pp. 351–374). Ediciones Pirámide.
- Gorgorió, N. (1998). Exploring the functionality of visual and non-visual strategies in solving rotation problems. *Educational Studies in Mathematics*, 35(3), 207–231.

- Green, D. R. (1983). A survey of probabilistic concepts in 3000 pupils aged 11-16. *Proceedings of the ICOTS I. University of Sheffield*.
- Greenes, C. E. (1979). The learning disabled child in mathematics. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 1, 5–11.
- Gualdrón, E., y Gutiérrez, A. (2006). Estrategias correctas y erróneas en tareas relacionadas con la semejanza. En *Memoria del X simposio de la sociedad española de investigación en educación matemática* (pp. 63–82).
- Gualdrón, E., y Gutiérrez, A. (2007). *Una aproximación a los descriptores de los niveles de razonamiento de van Hiele para la semejanza*. Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.
- Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education (GAISE) Reports*. (2012). Descargado de <http://www.amstat.org/education/gaise/GAISECollege.htm>
- Guillén, G., Gutiérrez, A., Jaime, A., y Cáceres, M. (Eds.). (1992). *La enseñanza de la geometría de sólidos en la EGB*. Memoria de proyecto de investigación no publicada. Institución Valenciana de Estudios e Investigación “Alfonso el Magnánimo”, Valencia, España.
- Guillén-Soler, G. (2000). Sobre el aprendizaje de conceptos geométricos relativos a los sólidos: ideas erróneas. *Enseñanza de las Ciencias*, 18(1), 035–53.
- Gutiérrez, A. (1991). La investigación en Didáctica de las Matemáticas. En A. Gutiérrez (Ed.), *Área de conocimiento de didáctica de la matemática* (pp. 149–194). Madrid: Síntesis.
- Gutiérrez, A. (1992). Procesos y habilidades en visualización espacial. En *Memorias del 3er congreso internacional sobre investigación matemática: Geometría*. México: Cinvestav (pp. 44–59).
- Gutiérrez, A. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry: in search of a framework. En *Proceedings of the 20th conference of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 1, pp. 3–19).
- Gutiérrez, A. (1998). Las representaciones planas de cuerpos 3-dimensionales en la enseñanza de la geometría espacial. *Revista Ema*, 3(3), 193–220.
- Gutiérrez, A., y Jaime, A. (1987). Estudio sobre la adquisición del concepto de simetría. En *Actas del II congreso internacional sobre investigación en la didáctica de las ciencias y de las matemáticas* (pp. 365–366).
- Gutiérrez, A., y Jaime, A. (1996). Uso de definiciones e imágenes de conceptos geométricos por los estudiantes de Magisterio. *El proceso de llegar a ser un profesor de primaria. Cuestiones desde la educación matemática*, 143–170.
- Gutiérrez, A., y Jaime, A. (1998). On the assessment of the Van Hiele levels of reasoning. *Focus on learning problems in mathematics*, 20, 27–46.
- Gutiérrez, A., Jaime, A., Guillén, G., y García, S. (1994). Estudio de algunas variables que influyen en la comprensión y aprendizaje de la geometría espacial. *Aplicación al diseño curricular de la enseñanza secundaria obligatoria*.

- Gutiérrez, A. (2006). La investigación sobre enseñanza y aprendizaje de la geometría. En P. Flores, F. Ruiz, y M. De la Fuente (Eds.), *Geometría para el siglo XXI* (pp. 13–58). Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas y Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.
- Hart, K. M. (1981). Measurement. En K. M. Hart (Ed.), *Children's understanding of mathematics* (pp. 11–16). John Murray.
- Herreros, D., y Sanz, M. (2020). *Estadística en educación primaria a través del aprendizaje basado en juegos. matemáticas, educación y sociedad*, 3 (1), 33-47.
- Hershkowitz, R. (1990). Psychological aspects of learning geometry. *Mathematics and cognition: A research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 70–95.
- Hershkowitz, R., Parzysz, B., y Van Dormolen, J. (1996). Space and shape. *International handbook of mathematics education: Part 1*, 161–204.
- Inhelder, B., y Piaget, J. (1955). *De la logique de l'enfant à la logique de l'adolescent*. Presses universitaires de France.
- Jaime, A., Chapa, F., y Gutiérrez, A. (1992). Definiciones de triángulos y cuadriláteros: errores e inconsistencias en libros de texto de EGB. *Revista Epsilon*, 23, 49–61.
- Jaime, A., y Gutiérrez, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de Van Hiele. En *Teoría y práctica en educación matemática* (pp. 295–384).
- Jaime, A., y Gutiérrez, A. (1996). *El grupo de las isometrías del plano*. Madrid: Síntesis.
- Jaime, A., y Gutiérrez, A. (2016). El razonamiento geométrico según el modelo de Van Hiele. En J. Carrillo, L. C. Contreras, N. Climent, M. A. Montes, D. I. Escudero, y E. Flores (Eds.), *Didáctica de las matemáticas para maestros de educación primaria* (pp. 173–195). Paraninfo.
- Jaime, A., Gutiérrez, A., y Cáceres, M. (1989). Un programa para la enseñanza progresiva de las isometrías del plano en EGB. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 377–380.
- Jaime, A., y Gutiérrez, A. (2016). La visualización en la geometría de Educación Primaria. En J. Carrillo, L. C. Contreras, N. Climent, M. A. Montes, D. I. Escudero, y E. Flores (Eds.), *Didáctica de las matemáticas para maestros de educación primaria* (pp. 217–236). Paraninfo.
- Jaime, A., Muelas, R., Gutiérrez, A., Sánchez, M., y Alcocer, J. M. (1989). Introduciendo los giros del plano en EGB. *Suma*, 2, 55–59.
- Kerslake, D. (1979). Visual mathematics. *Mathematics in school*, 8(2), 34–35.
- Konold, C. (1989). Informal conceptions of probability. *Cognition and instruction*, 6(1), 59–98.

- Leavy, A., y Hourigan, M. (2020). Posing mathematically worthwhile problems: developing the problem-posing skills of prospective teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 23(4), 341–361.
- Li, K.-Y., y Shen, S.-M. (1992). Students' weaknesses in statistical projects. *Teaching Statistics*, 14(1), 2–8.
- López Nievas, T. (2014). *Puesta en práctica y análisis de la unidad didáctica: proyecto de estadística para 2º ciclo de primaria*.
- Lorenzo-Valentín, G., Alcalde-Esteban, M., y Pérez-Serrano, I. (2015). *La geometría y la estadística en el aula de primaria*. Universitat Jaume I.
- Lott, T., y Harrell, G. (2003). Estimation at work. En D. H. Clements y G. Bright (Eds.), *Learning and teaching measurement*. NCTM.
- Lupiañez, J. L., y Flores, P. (2015). Sentido espacial. En I. Segovia y L. Rico (Eds.), *Matemáticas para maestros de educación primaria* (pp. 329–350). Ediciones Pirámide.
- Matemáticas 1: Primaria. Pieza a pieza*. (2022). Madrid. Anaya.
- Matemáticas 2: Primaria. Pieza a pieza*. (2022). Madrid. Anaya.
- Matemáticas 3: Primaria. Pieza a pieza*. (2022). Madrid. Anaya.
- Matemáticas 4: Primaria. Pieza a pieza*. (2022). Madrid. Anaya.
- Matemáticas 5: Primaria. Pieza a pieza*. (2022). Madrid. Anaya.
- Matemáticas 6: Primaria. Pieza a pieza*. (2022). Madrid. Anaya.
- Mesquita, A. L. (1992). The types of apprehension in spatial geometry: sketch of a research. *Structural topology*, 18(19-30).
- Miller, T. K. (1998). The random variable concept in introductory statistics. En *Proceedings of the fifth international conference on teaching statistics* (pp. 1221–1222).
- Ministerio de Educación y Ciencia. (1990, octubre). *Ley Orgánica 1/1990, del 3 de octubre de 1990, de Ordenación General del Sistema Educativo*. BOE núm. 238, 4 de octubre de 1990.
- Ministerio de Educación y Formación Profesional. (2022). *Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la educación primaria*. BOE núm. 52, de 2 de marzo de 2022.
- Mitchelmore, M. C. (1980). Prediction of developmental stages in the representation of regular space figures. *Journal for Research in Mathematics Education*, 11(2), 83–93.
- Monteiro, C., y Ainley, J. (2006). Student teachers interpreting media graphs. En *Proceedings of the seventh international conference on teaching statistics* (pp. 1–6).
- Mora-Sánchez, J. A. (1995). Los recursos didácticos en el aprendizaje de la Geometría. *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas*, (3), 101–115.
- Pareja, J. (2011). Probabilidad. En I. Segovia y L. Rico (Eds.), *Matemáticas para maestros de educación primaria* (pp. 427–450). Ediciones Pirámide.

- Pérez-Serrano, I., Alcalde-Esteban, M., y Lorenzo-Valentín, G. (2014). *Los números enteros y racionales, las magnitudes y la medida en el aula de primaria*. Universitat Jaume I.
- Piaget, J. (1947). *Psicología de la inteligencia*. Psique, Buenos Aires.
- Piaget, J. (1975). *Psicología de la inteligencia [psychology of intelligence]*. *Psique, Buenos Aires, Argentina*.
- Piaget, J., y Inhelder, B. (1951). *La génesis de la idea del azar en el niño*. Press. Univ. de France. París.
- Piaget, J., y Inhelder, B. (1956). *La représentation de l'espace chez l'enfant*. Press. Univ. de France. París.
- Piaget, J., Inhelder, B., y Szeminska, A. (1960). *The child's conception of geometry* (K. Paul, Ed.). Londres, Routledge.
- Pittalis, M., Mousoulides, N., y Christou, C. (2009). Level of sophistication in representing 3d shapes. En *Proceedings of the 33rd conference of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 4, pp. 385–392).
- Pla-Castells, M., Ferrando, I., y Francisco, M. (2019). A grandes problemas, grandes soluciones. *Aula de innovación educativa*(282), 44–48.
- Polya, G. (1945). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton university press.
- Presmeg, N. C. (1986). Visualisation in high school mathematics. *For the learning of mathematics*, 6(3), 42–46.
- Recio, A. M., y Rivaya, F. J. (1991). *Una metodología activa y ludica para la enseñanza de la geometría*. Madrid: Síntesis.
- Ricco, G., Vergnaud, G., y Rouchier, A. (1983). Représentation du volume et arithmétisation, entretiens individuels avec des élèves de 11 à 15 ans. *Recherches en didactique des mathématiques*, 4(1), 27–69.
- Romero-Albaladejo, I., y Cañadas, M. C. (2022). Enseñanza y aprendizaje de la geometría. En P. Flores y L. Rico (Eds.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación primaria* (pp. 253–280). Ediciones Pirámide.
- Rothwell-Hughes, E. (1979). *Conceptual powers of children: an approach through mathematics and science: a report from the schools council project on the development of scientific and mathematical concepts*. Macmillan.
- Ruiz, L., y Ruiz, J. (2011). Movimientos geométricos en el plano. En I. Segovia y L. Rico (Eds.), *Matemáticas para maestros de educación primaria* (pp. 301–327). Ediciones Pirámide.
- Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. New York, NY: Academic Press.
- Segovia, I., y Rico, L. (1996). La estimación en medida. *Uno Revista de didáctica de las matemáticas, Barcelona*(10), 29–42.
- Segovia, I., y Rico, L. (2015). *Matemáticas para maestros de educación primaria*. Ediciones Pirámide.

- Serrano, L. (2011). Estadística. En I. Segovia y L. Rico (Eds.), *Matemáticas para maestros de educación primaria* (pp. 401–425). Ediciones Pirámide.
- Shayer, M., Küchemann, D. E., y Wylam, H. (1976). The distribution of Piagetian stages of thinking in British middle and secondary school children. *British Journal of Educational Psychology*, 46(2), 164–173.
- Smith, M. S., y Stein, M. K. (1998). Selecting and creating mathematical tasks: From research to practice. *Mathematics teaching in the middle school*, 3(5), 344–50.
- Stephan, M., y Clements, D. H. (2003). Linear, area and time measurement in Prekindergarten to Grade 2. En G. Bright y D. H. Clements (Eds.), *Learning and teaching measurement*. NCTM.
- Thomas, D. (1978). Students' understanding of selected transformation geometry concepts. *Recent research concerning the development of spatial and geometric concepts*, 177–184.
- Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 65–81). Springer, Dordrecht.
- Vinner, S., y Hershkowitz, R. (1983). On concept formation in geometry. *Zentralblatt für Didaktik der mathematik*, 83(1), 20–25.
- Wainer, H. (1992). Understanding graphs and tables. *Educational researcher*, 21(1), 14–23.
- Watson, J. M., y Moritz, J. B. (2000). The longitudinal development of understanding of average. *Mathematical Thinking and Learning*, 2(1-2), 11–50.
- Weill-Fassina, A., y Rachedi, Y. (1993). Mise en relation d'un espace réel et de sa figuration sur un plan par des adultes de bas niveau de formation. *Espaces graphiques et graphismes d'espaces*. Editions La Pensée Sauvage, Grenoble, 57–86.
- Wu, Y. (2004). Singapore secondary school students' understanding of statistical graphs. En *10th international congress on mathematics education (icme 10)*.